ПОСТОЯННЫЙ ТОК

1. Расчет электрических цепей с применением законов Ома и Джоуля-Ленца.

1. Сила тока в проводнике сопротивлением $R = 20$ Ом нарастает в течение времени $\Delta t = 2$ с по линейному закону от $I_0 = 0$ до $I_{max} = 6$ А. Определить количество теплоты Q_1, выделившееся в этом проводнике за первую секунду, и Q_2 – за вторую, а также найти отношение этих количеств теплоты Q_2/Q_1.

Дано: $R = 20$ Ом; $\Delta t = 2$ с; $I_0 = 0$; $I_{max} = 6$ А.

Найти: Q_1; Q_2; Q_2/Q_1.

Решение. Закон Джоуля – Ленца $Q = I^2Rt$ применим в случае постоянного тока $(I = \text{const})$. Если же сила тока в проводнике изменяется, то указанный закон справедлив для бесконечно малого промежутка времени и записывается в виде

$$dQ = I^2Rdt. \tag{1}$$

Здесь сила тока I является некоторой функцией времени. В нашем случае

$$I = Kt, \tag{2}$$

где K – коэффициент пропорциональности, равный отношению приращения силы тока к интервалу времени, за который произошло это приращение:

$$K = \frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

С учетом равенства (2) формула (1) имеет вид

$$dQ = K^2Rt^2dt. \tag{3}$$

Для определения количества теплоты, выделившейся за конечный промежуток времени Δt, выражение (3) следует проинтегрировать в пределах от t_1 до t_2: $Q = K^2R\int\limits_{t_1}^{t_2} t^2dt = \frac{1}{3}K^2R\left(t_2^3 - t_1^3\right)$.

При определении количества теплоты, выделившегося за первую секунду, пределы интегрирования $t_1 = 0$ с, $t_2 = 1$ с и, следовательно, $Q_1 = 60$ Дж, а за вторую секунду пределы интегрирования – $t_1 = 1$ с, $t_2 = 2$ с и тогда $Q_2 = 420$ Дж. Следовательно, $\frac{Q_2}{Q_1} = 7$

Ответ: за вторую секунду выделится теплоты в 7 раз больше, чем за первую.

2. Определить заряд Q, прошедший по проводу с сопротивлением $R = 3$ Ом при равномерном нарастании напряжения на концах провода от $U_0 = 2$ В до $U = 4$ В в течение $t = 20$ с.

Дано: $R = 3$ Ом; $U_0 = 2$ В; $U = 4$ В; $t = 20$ с.

Найти: Q.

Решение. Так как сила тока в проводе изменяется, то воспользоваться для подсчета заряда формулой $Q = It$ нельзя. Поэтому возьмем дифференциал заряда $dQ = Idt$ и проинтегрируем:

$$Q = \int_0^t Idt. \quad (1)$$

Выразив силу тока по закону Ома, получим

$$Q = \int_0^t \frac{U}{R} dt. \quad (2)$$

Напряжение U в данном случае переменное. В силу равномерности нарастания оно может быть выражено формулой

$$U = U_0 + KT, \quad (3)$$

где K – коэффициент пропорциональности.

Подставив это выражение U в формулу (2), найдем

$$Q = \int_0^t \left(\frac{U_0}{R} + \frac{Kt}{R} \right) dt = \frac{U_0}{R} \int_0^t dt + \frac{K}{R} \int_0^t tdt.$$

Проинтегрировав, получим

$$Q = \frac{U_0 t}{R} + \frac{Kt^2}{2R} = \frac{t}{2R} \left(2U_0 + Kt \right). \quad (4)$$

Значение коэффициента пропорциональности K найдем из формулы (3), если заметим, что при $t = 20$ с $U = 4$ В.

$$K = \frac{U - U_0}{t} = \frac{4 - 2}{20} = 0{,}1 \ ^{В}/_{с}.$$

Подставив значения величин в формулу (4), найдем

$$Q = 20 \text{ Кл}.$$

Ответ: $Q = 20$ Кл

3. В цепь источника постоянного тока с ЭДС $E = 6$ В включен резистор сопротивлением $R = 80$ Ом. Определить: 1) плотность тока в соединительных проводах площадью поперечного сечения $S = 2$ мм^2; 2) число N электронов, проходящих через сечение проводов за время $t = 1$ с. Сопротивлением источника тока и соединительных проводов пренебречь.

Дано: $E = 6$ В; $R = 80$ Ом; $S = 2$ мм^2; $t = 1$ с.

Найти: j; N.

Решение. 1. Плотность тока по определению есть отношение силы тока I к площади поперечного сечения провода:

$$j = \frac{I}{S}. \qquad (1)$$

Силу тока в этой формуле выразим по закону Ома:

$$I = \frac{E}{R + R_1 + r_i}, \qquad (2)$$

где R – сопротивление резистора; R_1 – сопротивление соединительных проводов; r_i – внутреннее сопротивление источника тока.

Пренебрегая сопротивлениями R_1 и r_i из (2), получим

$$I = \frac{E}{R}.$$

Подставив это выражение силы тока в (1), найдем

$$j = \frac{E}{RS}.$$

Вычисляя, получим

$$j = \frac{6}{80 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} \ \frac{\text{В}}{\text{Ом} \cdot \text{м}^2} = 3{,}75 \cdot 10^4 \ \text{А}/\text{м}^2.$$

2. Число электронов, проходящих за время t через поперечное сечение, найдем, разделив заряд Q, протекающий за это время через сечение, на элементарный заряд:

$$N = \frac{Q}{e}$$

или с учетом того, что $Q = It$ и $I = E/R$,

$$N = \frac{Et}{eR}.$$

Вычисляя, получим

$$N = \frac{6 \cdot 1}{80 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} \ \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{Кл} \cdot \text{Ом}} = 4{,}69 \cdot 10^{17} \ \text{электронов}.$$

Ответ: $j = 3{,}75 \cdot 10^4 \ \text{А}/\text{м}^2$; $N = 4{,}69 \cdot 10^{17}$ электронов

4. Потенциометр с сопротивлением $R = 100$ Ом подключен к источнику тока, ЭДС E которого равна 150 В и внутреннее сопротивление $r = 50$ Ом (рис.).

Определить показание вольтметра с сопротивлением $R_В = 500$ Ом, соединенного проводником с одной из клемм потенциометра и подвижным контактом с серединой обмотки потенциометра. Какова разность потенциалов между теми же точками потенциометра при отключенном вольтметре?

Дано: $R = 100$ Ом; $E = 150$ В; $r = 50$ Ом; $R_В = 500$ Ом.

Найти: U; U_2.

Решение. Показания U_1 вольтметра, подключенного к точкам A и B (см. рис.), определяются по формуле

$$U_1 = I_1 R_1, \qquad (1)$$

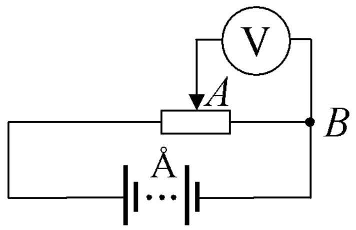


Рис.

где I_1 – сила тока в неразветвленной части цепи, R_1 – сопротивление параллельно соединенных вольтметра и половины потенциометра.

Силу тока I_1 найдем по закону Ома для всей цепи:

$$I_1 = \frac{E}{R_{ВН} + r}, \qquad (2)$$

где $R_{ВН}$ – сопротивление внешней цепи.

Внешнее сопротивление $R_{ВН}$ есть сумма двух сопротивлений

$$R_{ВН} = \frac{R}{2} + R_1. \qquad (3)$$

Сопротивление R_1 параллельного соединения может быть найдено по формуле $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_{ВН}} + \frac{2}{R}$, откуда

$$R_1 = \frac{R \cdot R_{ВН}}{R + 2R_{ВН}} = 45{,}5 \text{ Ом}.$$

Поставив в выражение (2) правую часть равенства (3), определим силу тока:

$$I_1 = \frac{E}{R/2 + R_1 + r} = 1{,}03 \text{ А}.$$

Если подставить значения I_1 и R_1 в формулу (1), то найдем показания вольтметра:

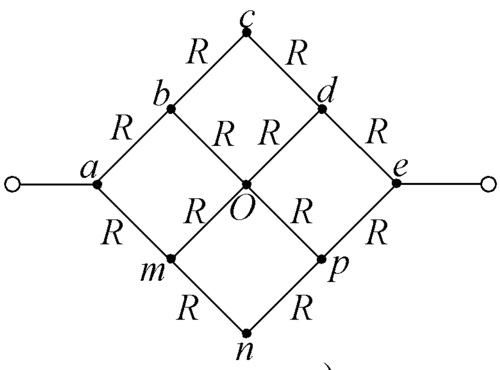
$$U = 46{,}9 \text{ В}.$$

Разность потенциалов между точками A и B при отключенном вольтметре равна произведению тока I_2 на половину сопротивления потенциометра, т.е.

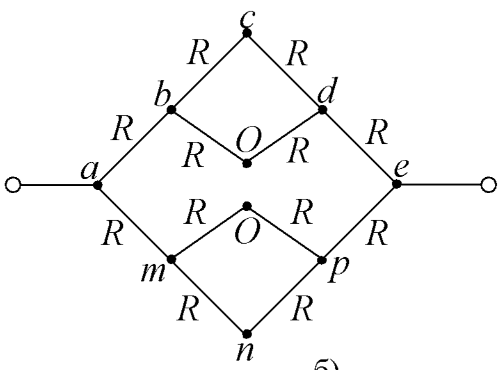
$$U_2 = I_2\frac{R}{2} \quad \text{или} \quad U_2 = \frac{E}{R+r}\frac{R}{2} = 50\ \text{В}.$$

Ответ: $U_2 = 50$ В

5. На рис. *а* приводится схема, общее сопротивление которой надо определить.



а)



б)

Рис.

Решение. Для решения данной задачи проводники, соединенные в узле O, удобно развести так, как показано на рис. *б*. Тогда сразу становится ясно, что здесь мы имеем две параллельные ветви $abcde$ и $amnpe$. Ветвь $abcde$ состоит из трех последовательно соединенных участков ab, bcd и de. Общее сопротивление участка $bcdob$, состоящего из двух параллельных сопротивлений по $2R$ каждое, равно $2R/2 = R$. Тогда общее сопротивление ветви $abcde$ будет равно $R + R + R = 3R$. Ветвь $amnpe$ совершенно такая же, как и $abcde$, поэтому ее общее сопротивление, очевидно, тоже равно $3R$. Поскольку эти ветви параллельны и имеют одинаковые сопротивления $3R$, то общее сопротивление всей этой цепи

$$R_{общ} = \frac{3R}{2} = 1,5R.$$

Ответ: $R_{общ} = 1,5R$

6. Определите общее сопротивление между точками A и B цепи проводников в виде шестиугольника (рис.). Сопротивление каждой проволоки $r = 1$ Ом.

Дано: $r = 1$ Ом.

Найти: R.

Решение. В силу симметрии токи, текущие по сопротивлениям 8, 9, 11 и 12 одинаковы. Поэтому ток через узел O равен нулю. Тогда схема, представленная на рис., является эквивалентной той, которая задана в виде шестиугольника (см. рис.).

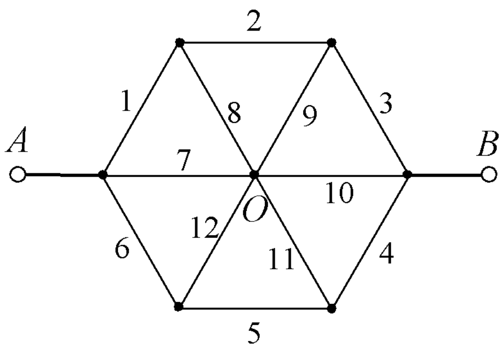


Рис.

Сопротивления 8 и 9 соединены между собой последовательно и параллельно с сопротивлением 2. Тогда

$$R_{8,9,2} = \frac{2}{3} r.$$

Эквивалентное сопротивление $R_{8,9,2}$ соединено последовательно с сопротивлениями 1 и 3, поэтому

$$R_{1\to 3} = \frac{2}{3} r + r + r = \frac{8}{3} r.$$

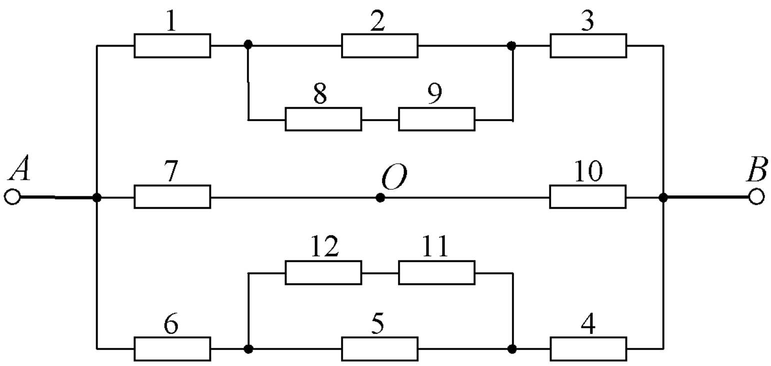


Рис.

Из схемы следует, что эквивалентное сопротивление $R_{4\to 6}$ равно $R_{1\to 3}$, т.е. $R_{4\to 6} = \frac{8}{3} r$. Сопротивления $R_{1\to 3}$, $R_{4\to 6}$, 7 и 10 соединены параллельно, поэтому $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{1\to 3}} + \frac{1}{R_{4\to 6}} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r}$

или, подставив значения $R_{1\to 3}$ и $R_{4\to 6}$, получим $\frac{1}{R} = \frac{3}{8r} + \frac{3}{8r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{5}{4r}$,

откуда общее сопротивление

$$R = \frac{4}{5} r = 0{,}8 \text{ Ом}.$$

Ответ: $R = 0{,}8$ Ом

7. Два одинаковых источника с ЭДС $E_1 = E_2 = 1{,}2$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}4$ Ом соединены как показано на рис.

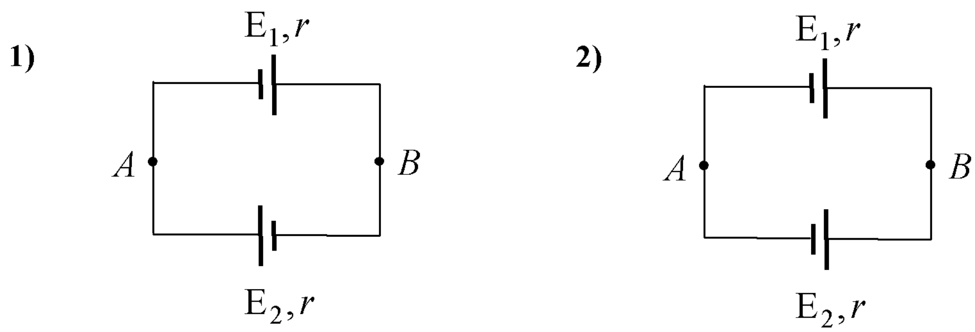


Рис.

Какова сила тока I и разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ между точками A и B в первом и во втором случаях?

Дано: $E_1 = E_2 = 1{,}2$ В; $r = 0{,}4$ Ом.

Найти: I; $\varphi_A - \varphi_B$.

Решение. 1. Запишем закон Ома $\left(I = E/(R + r)\right)$ для нашей замкнутой цепи

$$I = \frac{E_1 + E_2}{2r} = 3 \text{ A}.$$

Закон Ома $(\pm IR = \varphi_1 - \varphi_2 \pm E)$ для участка цепи AE_1B $Ir = \varphi_A - \varphi_B + E_1$, Откуда $\varphi_A - \varphi_B = Ir - E_1$, $\varphi_A - \varphi_B = 0$ В.

2. В этом случае закон $\left(I = E/(R + r)\right)$ запишется как

$$I = \frac{E_1 - E_2}{2r} = 0 \text{ A},$$

а для участка цепи AE_1B выражение $(\pm IR = \varphi_1 - \varphi_2 \pm E)$ будет иметь вид

$$Ir = \varphi_A - \varphi_B + E_1,$$

откуда $\varphi_A - \varphi_B = Ir - E_1$; $\varphi_A - \varphi_B = -1{,}2$ В.

Следовательно, $\varphi_B > \varphi_A$.

Ответ: 1) $\varphi_A - \varphi_B = 0$ В; $\varphi_A - \varphi_B = -1{,}2$ В

8. Определить внутреннее сопротивление и ЭДС батареи, образованной тремя источниками ЭДС (рис.) $E_1 = 2$ В; $E_2 = 4$ В и $E_3 = 6$ В, если их внутренние сопротивления одинаковы и равны $0{,}2$ Ом.

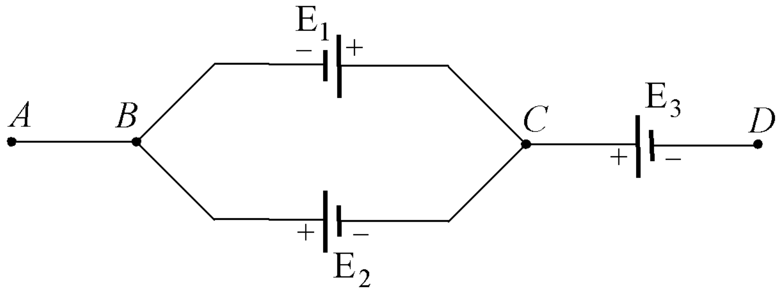


Рис.

Дано: $E_1 = 2$ В; $E_2 = 4$ В; $E_3 = 6$ В; $r_1 = r_2 = r_3 = r = 0{,}2$ Ом.

Найти: $r_б$; $E_б$.

Решение. Общее внутреннее сопротивление на участке BC (источники E_1 и E_2 соединены параллельно)

$$\frac{1}{r_{BC}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2}{r}, \quad \text{откуда} \quad r_{BC} = \frac{r}{2}. \tag{1}$$

Внутреннее сопротивление батареи (она подключена между точками A и D)

$$r_б = r_{BC} + r_3 = \frac{r}{2} + r = \frac{3}{2} r \quad \text{[с учетом (1)].}$$

Для участка BC можем записать

$$\frac{E_{BC}}{r_{BC}} = \frac{E_1}{r_1} + \frac{E_2}{r_2} = \frac{E_1 + E_2}{r},$$

откуда

$$E_{BC} = \frac{r_{BC}(E_1 + E_2)}{r} = \frac{E_1 + E_2}{2} \quad \text{[с учетом (1)].}$$

Искомая ЭДС батареи

$$E_б = E_{BC} + E_3 = \frac{E_1 + E_2}{2} + E_3.$$

Из рис. следует, что если считать ЭДС E_2 и E_3 положительными, то ЭДС E_1 отрицательна.

Ответ: $r_б = 0{,}3$ Ом; $E_б = 7$ В.

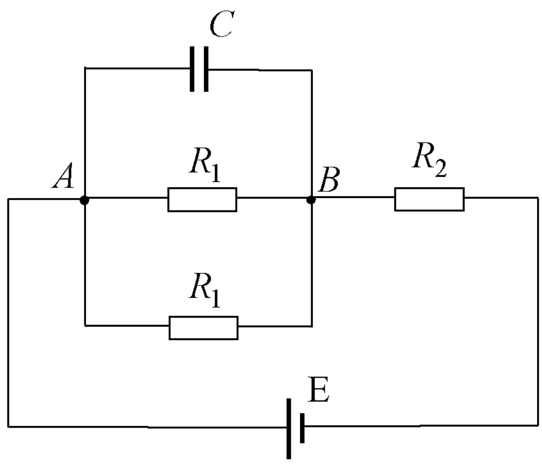
9. Два одинаковых резистора сопротивлением $R_1 = 10$ Ом и резистор сопротивлением $R_2 = 20$ Ом подключены к источнику ЭДС (рис.).

К участку AB подключен плоский конденсатор емкостью $C = 0{,}1$ мкФ. Заряд Q на обкладках конденсатора равен 2 мкКл. Определите ЭДС источника, пренебрегая его внутренним сопротивлением.

Дано: $R_1 = 10$ Ом; $R_2 = 20$ Ом; $C = 0{,}1$ мкФ; $Q = 2$ мкКл.

Найти: E.

Решение



ЭДС источника

$$E = U_1 + U_2, \qquad (1)$$

где U_1 – напряжение между обкладками конденсатора (равно напряжению на параллельно включенных резисторах сопротивлением R_1); U_2 – падение напряжения на резисторе сопротивлением R_2. Учитывая, что резисторы сопротивлением R_1 включены параллельно и их сопротивления равны

$$U_1 = I\frac{R_1}{2} = \frac{Q}{C}, \qquad (2)$$

где I – сила тока в общей цепи, имеем

$$I = \frac{2Q}{CR_1}. \qquad (3)$$

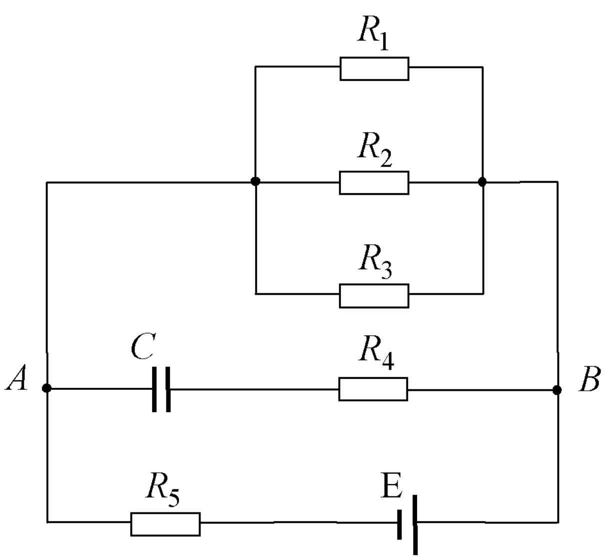
Падение напряжения

$$U_2 = IR_2 = \frac{2QR_2}{CR_1}. \qquad (4)$$

Здесь учли формулу (3). Подставив выражения (2) и (4) в формулу (1), найдем искомую ЭДС источника

$$E = \frac{Q}{C} + \frac{2QR_2}{CR_1} = \frac{Q}{C}\left(1 + \frac{2R_2}{R_1}\right) = 100 \text{ В}.$$

Ответ: $E = 100$ В



10. Определите разность потенциалов на обкладках конденсатора в схеме, приведенной на рис.

Сопротивления всех резисторов равны, ЭДС источника $E = 20$ В. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

Дано:
$E = 20$ В; $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5$.

Найти: U.

Решение. Сопротивление конденсатора постоянному току бесконечно велико, поэтому через резистор сопротивлением R_4 ток протекать не будет. Следовательно, разность потенциалов между обкладками конденсатора определяется падением напряжения на участке AB, состоящем из трех параллельно включенных резисторов сопротивлением R_1, R_2 и R_3:

$$U = IR, \tag{1}$$

где R – результирующее сопротивление трех сопротивлений R_1, R_2 и R_3.

Ток в общей цепи, согласно закону Ома для замкнутой цепи,

$$I = \frac{E}{R_5 + R}, \tag{2}$$

где

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{3}{R_1},$$

откуда

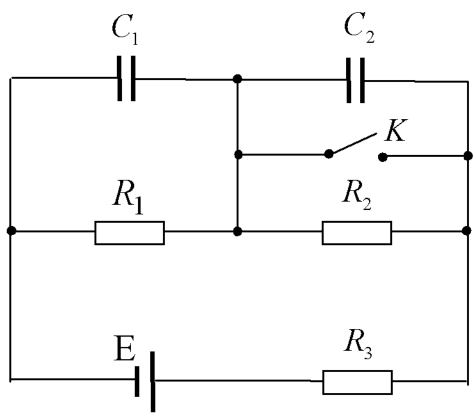
$$R = \frac{R_1}{3}. \tag{3}$$

Подставив выражение (2) в формулу (1) и учитывая (3), найдем искомую разность потенциалов на обкладках конденсатора

$$U = \frac{E}{R_5 + R} R = \frac{E}{R_1 + \frac{R_1}{3}} \cdot \frac{R_1}{3} = \frac{E}{4} = 5 \text{ В}.$$

Ответ: $U = 5$ В.

11. Два конденсатора емкостью $C_1 = 1$ мкФ и $C_2 = 2$ мкФ подключены к источнику постоянного напряжения, как показано на рис.



Сопротивления резисторов $R_1 = 300$ Ом, $R_2 = 100$ Ом и $R_3 = 100$ Ом. При разомкнутом ключе конденсатор C_2 имеет заряд $Q_2 = 4 \cdot 10^{-6}$ Кл. Какой заряд Q_1 установится на конденсаторе C_1, если ключ замкнуть? Внутренним сопротивлением источников пренебречь.

Дано: $C_1 = 1$ мкФ; $C_2 = 2$ мкФ; $R_1 = 300$ Ом; $R_2 = 100$ Ом; $R_3 = 100$ Ом; $Q_2 = 4 \cdot 10^{-6}$ Кл.

Найти: Q_1.

Решение. При разомкнутом ключе K ток от источника течет по цепи, состоящей из последовательно соединенных резисторов R_1, R_2 и R_3.

Используя соотношения $I = \dfrac{E}{(R + r)}$ и $R = R_1 + R_2 + R_3$, запишем

$$I_2 = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3}. \qquad (1)$$

Тогда падение напряжения на резисторе R_2 будет

$$U_2 = I_2 R_2, \qquad (2)$$

а на конденсаторе C_2 установится заряд

$$Q_2 = C_2 U_2. \qquad (3)$$

Используя (1), (2) и (3), можно записать

$$Q_2 = \frac{C_2 E R_2}{R_1 + R_2 + R_3},$$

откуда можно найти ЭДС источника E:

$$E = \frac{Q_2 (R_1 + R_2 + R_3)}{R_2 C_2}. \qquad (4)$$

Если ключ замкнуть, то практически весь ток потечет через ключ K ($R_2 = 100$ Ом) и ток I_1 определяем из закона Ома

$$I_1 = \frac{E}{(R_1 + R_3)}.$$

В этом случае падение напряжения на конденсаторе C_1 равно $U_1 = I_1 R_1$, а искомый заряд Q_1 найдем по формуле

$$Q_1 = C_1 U_1 = \frac{C_1 E R_1}{R_1 + R_3}.$$

Окончательно, используя (4), получим

$$Q_1 = \frac{Q_2 C_1 R_1 (R_1 + R_2 + R_3)}{R_2 C_2 (R_1 + R_3)} = 7{,}5 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}.$$

Ответ: $Q_1 = 7{,}5 \cdot 10^{-6}$ Кл

2. Расчет электрических цепей с применением правил Кирхгофа.

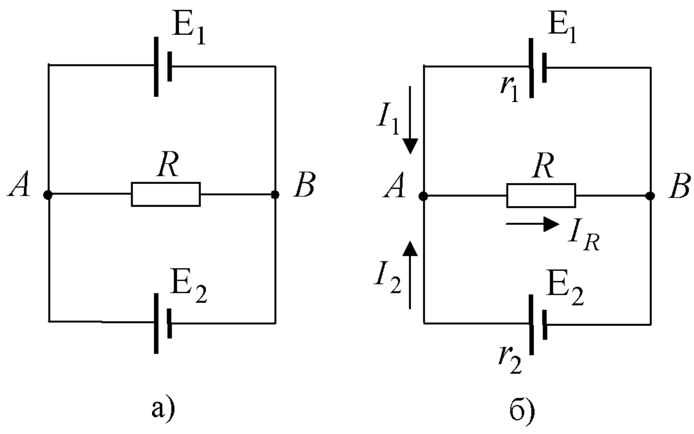


Рис.

1. Два источника, ЭДС которых $E_1 = 2$ В и $E_2 = 4$ В, соединены, как показано на рис. *а*.

Внешнее сопротивление $R = 1$ Ом, а внутренние сопротивления источников $r_1 = r_2 = 0{,}5$ Ом. Определите силы токов, протекающих через источники и внешнее сопротивление.

Дано: $E_1 = 2$ В; $E_2 = 4$ В; $R = 1$ Ом; $r_1 = r_2 = 0{,}5$ Ом.

Найти: I_1; I_2; I_R.

Решение. Выбираем направление токов, как указано на рис.*б*. Согласно первому правилу Кирхгофа для узла A

$$I_R = I_1 + I_2. \qquad (1)$$

Второе правило Кирхгофа для замкнутых контуров ε_1,R и ε_2,R

$$I_1 r_1 + I_R R = E_1; \qquad (2)$$

$$I_2 r_2 + I_R R = E_2. \qquad (3)$$

Решая уравнения (1) – (3), получим (с учетом того, что $r_1 = r_2 = r$)

$$I_1 = \frac{E_1 - I_R R}{r}; \quad I_2 = \frac{E_2 - I_R R}{r}; \quad I_3 = \frac{E_1 + E_2}{r + 2R}.$$

Вычисляя, получаем $I_R = 2{,}4$ А; $I_1 = -0{,}8$ А; $I_2 = 3{,}2$ А.

Ответ: $I_R = 2{,}4$ А; $I_1 = -0{,}8$ А; $I_2 = 3{,}2$ А.

МАГНИТОСТАТИКА

1. Определение индукции и напряженности магнитного поля, создаваемого проводником с током произвольной формы, в любой точке пространства.

1. Длинный провод с током $I = 50$ А изогнут в точке *O* под углом 120° (рис.). Определить магнитную индукцию в точке *A*, расположенной на биссектрисе этого угла на расстоянии $d = 5$ см от точки *O*.

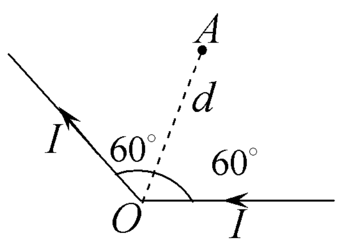


Рис.

Дано: $I = 50\text{А}$; $\alpha = 120^\circ$; $d = 5$ см.

Найти: B.

Решение. В соответствии с принципом суперпозиции магнитных полей магнитная индукция в точке *A* будет равна векторной сумме магнитных индукций $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ полей, создаваемых прямыми участками провода, т.е.

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2. \tag{1}$$

Учтем, что для всех участков провода векторное произведение $\left[d\vec{l}, \vec{e}_r\right]$ имеет направление, перпендикулярное к плоскости рисунка. Поэтому выражение (1) можно записать в скалярной форме: $B = B_1 + B_2$.

Магнитную индукцию поля каждого из прямых участков находим с помощью соответствующей формулы (магнитного поля прямого тока $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)$), приняв для правого участка $\varphi_1 = 0$ (считаем, что правый конец провода находится в бесконечности), $\varphi_2 = 120^\circ$. Тогда

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}\left(\cos 0 - \cos\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\mu_0 I}{8\pi r_0}, \text{ где } r_0 = d\sin\frac{\pi}{3}.$$

Для левого участка $\varphi_1 = 60^\circ$, $\varphi_2 = 180^\circ$. Соответственно запишем

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\pi\right) = \frac{3\mu_0 I}{8\pi r_0}.$$

Суммируем индукции полей

$$B = B_1 + B_2 = \frac{6\mu_0 I}{8\pi d \sin\frac{\pi}{3}}. \qquad B = \frac{6\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}}{8\pi\cdot 5\cdot 10^{-2}\frac{\sqrt{3}}{2}} = 3{,}46\cdot 10^{-4} \text{ Тл}$$

Ответ: $B = 3{,}46\cdot 10^{-4}$ Тл.

2. Два бесконечно длинных прямых проводника скрещены под прямым углом (рис.). По проводникам текут токи $I_1 = 80$ А и $I_2 = 60$ А. Расстояние между проводниками $d = 10$ см. Чему равна магнитная индукция в точке A, одинаково удаленной от обоих проводников?

Дано: $I_1 = 80$ А; $I_2 = 60$ А; $d = 10$ см.

Найти: B.

Решение. Прямолинейный бесконечно длинный проводник с током I создает на расстоянии r от своей оси магнитное поле индукций

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

направление которого можно определить по правилу буравчика (правого винта).

Проводники, рассматриваемые в задаче, находятся на равных расстояниях от точки A, поэтому индукции, создаваемые токами I_1 и I_2, будут равны

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \frac{d}{2}} = \frac{\mu_0 I_1}{\pi d}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{\pi d}$$

соответственно.

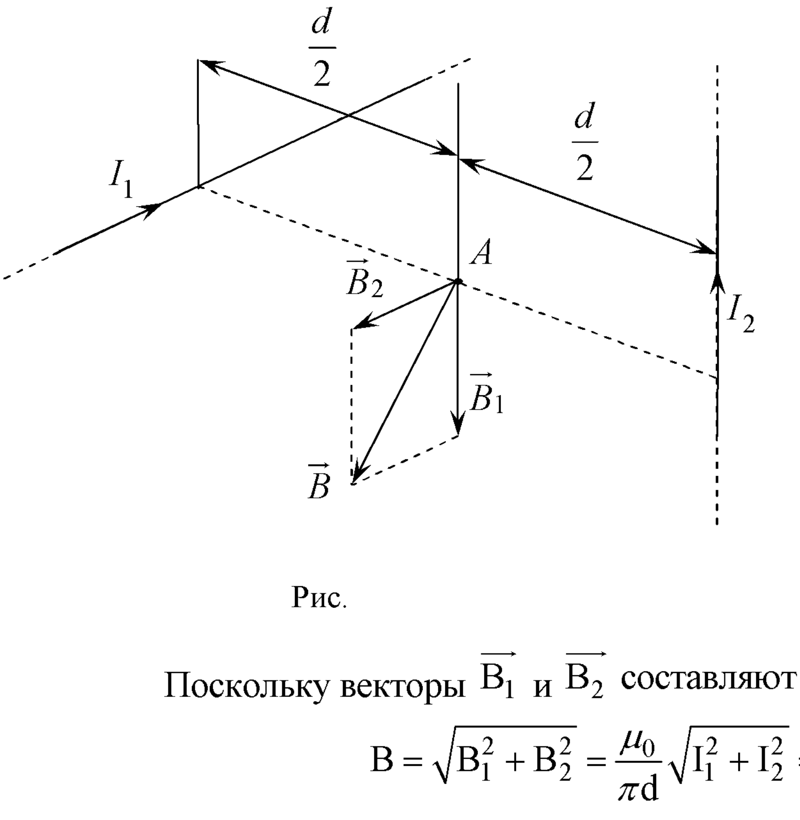


Рис.

Вектор индукции $\vec{B_1}$ тока I_1 в точке A будет направлен параллельно проводнику с током I_2 вертикально вниз, а вектор индукции $\vec{B_2}$ тока I_2 – параллельно проводнику с током I_1 на нас. Индукция магнитного поля в точке A будет равна их векторной сумме:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

Поскольку векторы $\vec{B_1}$ и $\vec{B_2}$ составляют между собой прямой угол, то

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \frac{\mu_0}{\pi d}\sqrt{I_1^2 + I_2^2} = 4 \cdot 10^4 \text{ Тл}.$$

Ответ: $B = 4 \cdot 10^4$ Тл

3. Найти величину индукции магнитного поля в центре петли радиусом $R = 10$ см, образованной бесконечно длинным тонким проводником с током $I = 50$ А (рис.).

Дано: $R = 10$ см; $I = 50$ А.

Найти: B.

Решение. Вектор индукции магнитного поля бесконечно длинного прямолинейного проводника с током на расстоянии R от него по величине равен $B_1 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}$ и направлен в центре (в точке O) петли перпендикулярно ее плоскости на нас.

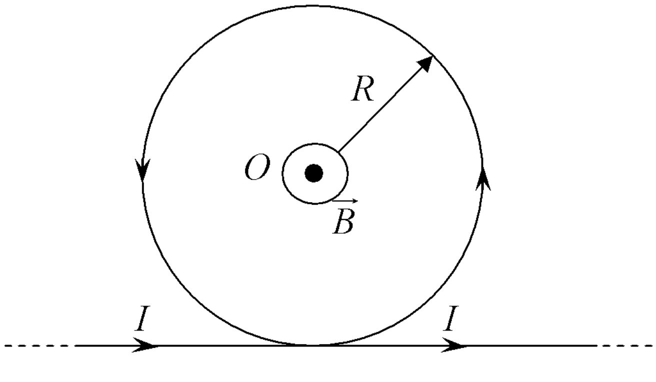


Рис.

Вектор индукции $\overrightarrow{B_2}$ магнитного поля кругового тока в центре петли по направлению совпадает с $\overrightarrow{B_1}$ и по величине равен

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Следовательно, индукция поля, создаваемого проводником и круговым витком в рассматриваемой точке, $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$.

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} + \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 I(1+\pi)}{2\pi R} \approx 414 \text{ мкТл}.$$

Ответ: $B \approx 414$ мкТл

2. **Расчет магнитного момента контуров с током в магнитном поле. Расчет механического момента, действующего на контур с током в однородном магнитном поле.**

1. Подвижный элемент гальванометра представляет собой квадратную рамку, содержащую $N = 100$ витков тонкой проволоки, помещенную в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл. Плоскость рамки параллельна линиям индукции. Сторона рамки $a = 4$ см.

Необходимо:

1. Определить механический момент сил, действующих на рамку со стороны магнитного поля, при пропускании по ней тока $I = 1$ мА.

2. Найти работу, совершаемую этими силами при повороте рамки в положение, при котором вектор магнитной индукции противоположен вектору дипольного магнитного момента.

Дано: $N = 100$; $B = 0{,}1$ Тл; $a = 4$ см; $I = 1$ мА.

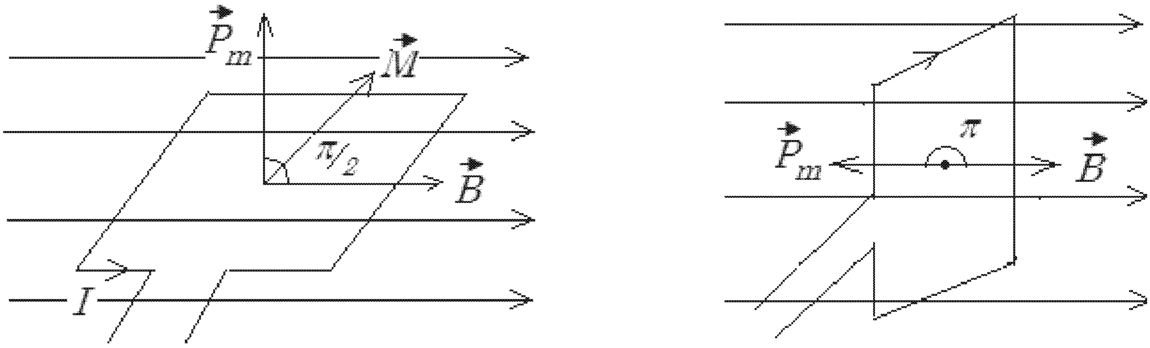
Найти: 1) M; 2) A.

Решение. 1. Дипольный магнитный момент рамки равен сумме дипольных магнитных моментов всех витков

$$P_m = ISN = Ia^2N$$

и направлен перпендикулярно к плоскости рамки и вектору $\vec{B}$ (рис. *а*), тогда механический момент сил $\vec{M}$ (см. (12.14) направлен так, что стремится повернуть вектора $\vec{P_m}$ до совпадения с вектором $\vec{B}$ (рис. 12.11, *б*), и определяется по формуле

$$M = P_m B \sin\frac{\pi}{2} = Ia^2NB.$$



а) б)

Рис.

2. Работа сил Ампера при повороте рамки из исходного положения ($\alpha_1 = \dfrac{\pi}{2}$) в конечное ($\alpha_2 = \pi$) равна разности значений потенциальной энергии в начальном и конечном положениях рамки:

$$A = W_{П1} - W_{П2} = (-P_m B\cos(\frac{\pi}{2})) - (-P_m B\cos\pi) = -P_m B = -Ia^2 NB.$$

Произведя вычисления, получим

$$M = 16\ мкН \cdot м;\quad A = -16\ мкДж.$$

Отрицательное значение работы объясняется тем, что действующий со стороны магнитного поля момент сил стремится повернуть рамку в противоположном направлении.

Ответ: $M = 16\ мкН \cdot м$; $A = -16\ мкДж$.

2. Проволочный виток радиусом $R = 5$ см находится в однородном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл. Плоскость витка составляет угол $\beta = 60^\circ$ с направлением поля. Определить магнитный момент витка и механический момент, действующий на виток, если по нему течет ток силой $I = 5$ А.

Дано: $R = 5$ см; $B = 0{,}1$ Тл; $\beta = 60^\circ$; $I = 5$ А.

Найти: P_m; M_Z.

Решение. На виток с током, расположенный в магнитном поле так, что его плоскость не перпендикулярна к направлению силовых линий поля, относительно произвольной неподвижной оси OZ будет действовать механический момент M_Z, который стремится повернуть виток так, чтобы магнитный момент $\overrightarrow{P_m}$ витка был направлен по полю. Величина магнитного момента произвольного плоского контура с током зависит лишь от силы тока и площади, ограниченной контуром. Следовательно, для витка радиусом R, по которому течет ток I,

$$P_m = IS = I\pi R^2 \approx 0{,}04\ А \cdot м^2$$

Величина механического момента, действующего на виток в магнитном поле относительно произвольной оси, зависит от магнитного момента, величины индукции магнитного поля и ориентации контура в магнитном поле

$$M_Z = P_m B\sin\alpha,$$

где α – угол, который составляет нормаль к плоскости контура с направлением поля. В нашем случае $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$. Следовательно,

$$M_Z = I\pi R^2 B\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = I\pi R^2 B\cos\beta \approx 2 \cdot 10^{-3}\ Н \cdot м.$$

Ответ: $P_m \approx 0{,}04\ А \cdot м^2$; $M_Z \approx 2 \cdot 10^{-3}\ Н \cdot м$

3. Применение закона Био-Савара-Лапласа для расчета магнитных полей

1. Электрон e и протон p зарегистрированы в некоторый момент движущимися навстречу друг другу с одинаковыми скоростями $\upsilon = 10^6\ \frac{м}{с}$. Расстояние между ними $b = 10^{-9}$ м. Определить индукцию магнитного поля в точке, находящейся на одинаковом расстоянии $L = 7{,}05 \cdot 10^{-10}$ м от обеих частиц.

Дано: $\upsilon = 10^6\ \frac{м}{с}$; $b = 10^{-9}$ м; $L = 7{,}05 \cdot 10^{-10}$ м.

Найти: B.

Решение. Для определения магнитного поля частиц в нерелятивистском случае воспользуемся формулой для индукции магнитного поля протона в точке A

$$B_P = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_p\left[\overrightarrow{\upsilon_p}, \overrightarrow{e_{pr}}\right]}{L^2}, \tag{1}$$

где $\overrightarrow{e_{pr}}$ – единичный вектор, направленный от протона p к точке A.

Направление вектора магнитной индукции $\overrightarrow{B_p}$ определено по векторному произведению (1), показано на рис. (касательно к пунктирной окружности).

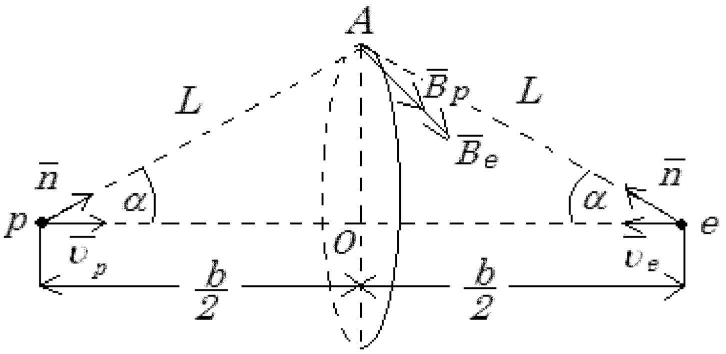


Рис.

Аналогично находим модуль и направление вектора магнитной индукции поля электрона

$$\overrightarrow{B_e} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_e\left[\overrightarrow{\upsilon_e}, \overrightarrow{e_{er}}\right]}{L^2}.$$

С учетом отрицательного знака электрона направление его магнитного поля совпадает с направлением магнитного поля протона.

Заряд протона равен по модулю заряду электрона ($q_p = -q_e = e$). Поэтому по модулю оба вектора тоже равны:

$$B_p = B_e = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e\upsilon}{L^2} \sin\alpha .$$

Используя заданные в условии значения b и L, находим $\sin\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{b/2}{L} = \frac{b}{2L}; \quad \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{b^2}{4L^2}} .$$

Тогда результирующее поле можно рассчитать по формуле

$$B = B_p + B_e = 2\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e\upsilon}{L^2} \sqrt{1-\frac{b^2}{4L^2}} .$$

После вычислений получим $B = 45{,}4$ Тл.

Ответ: $B = 45{,}4$ Тл

4. Магнитное взаимодействие проводников с током. Закон Ампера.

1. Тонкое резиновое кольцо с электропроводным покрытием поместили в однородное магнитное поле, перпендикулярное к плоскости кольца. Индукция магнитного поля $B = 0,3$ Тл. На сколько (в процентах) увеличится радиус кольца, если по нему пропустить ток $I = 10$ А? Коэффициент упругости резины $k = 10\ \frac{Н}{м}$.

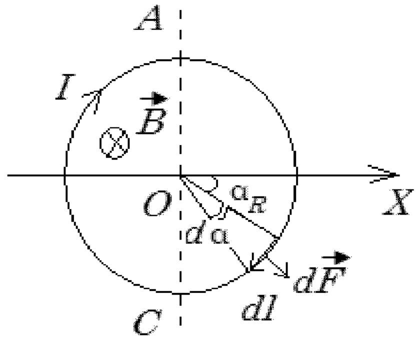


Рис.

Дано: $B = 0,3$ Тл; $I = 10$ А; $k = 10\ \frac{Н}{м}$.

Найти: $\frac{R}{R_0}$.

Решение. Разобьем кольцо сечением AC на две половины и определим результирующую силу Ампера, действующую на правую половину кольца (рис.). Для этого выделим на нем малый элемент длины $d\vec{l}$. По закону Ампера на него действует сила $d\vec{F} = I\left[d\vec{l}, \vec{B}\right]$. Ее направление определим по правилу векторного произведения. В данном случае сила $d\vec{F}$ направлена радиально от центра кольца.

Учитывая, что $d\vec{l} \perp \vec{B}$, запишем закон Ампера в виде $dF = IBdl$. Результирующую силу, действующую на правую сторону кольца, определим интегрированием $d\vec{F}$ по длине правой части L. Из соображений симметрии учитываем только проекцию этой силы dF_X. Тогда

$$F_X = \int_L dF_X = \int_L IBdl\cos\alpha .$$

Элемент дуги dl и угол $d\alpha$ связаны геометрическим соотношением $dl = Rd\alpha$. С учетом этого выражение для F_X перепишем в виде

$$F_X = IBR\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha d\alpha = IBR\sin\alpha\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2IBR .$$

На левую половину кольца действует такая же сила в противоположном направлении. Следовательно, в сечениях кольца A и C (и в любом другом) действует сила натяжения

$$F_н = \frac{F_x}{2} = IBR .$$

Эта сила равна силе упругости $F_{óï\ ð} = k\Delta L$, где изменение длины кольца равно $\Delta L = L_2 - L_1 = 2\pi(R - R_0)$.

Тогда

$$IBR = 2\pi k(R - R_0) \quad \text{или} \quad \frac{IB}{2\pi k} = 1 - \frac{R_0}{R}.$$

После преобразования получим

$$\frac{R}{R_0} = \frac{1}{1 - \dfrac{IB}{2\pi k}}.$$

Выполним вычисления: $\dfrac{R}{R_0} = 1{,}05$. Таким образом, радиус кольца увеличится на 5 %.

Ответ: $\dfrac{R}{R_0} = 1{,}05$

2. Металлический стержень массой $m = 0{,}5$ кг и длиной $l = 1$ м соскальзывает с наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом. В пространстве создано однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл, силовые линии которого направлены вертикально вниз. Определить ускорение этого стержня, если по нему пропустить ток силой $I = 5$ A в направлении, показанном на рис. *а*. Коэффициент трения между стержнем и поверхностью наклонной плоскости $\mu = 0{,}2$.

Дано: $m = 0{,}5$ кг; $l = 1$ м; $\alpha = 30^\circ$; $B = 0{,}1$ Тл; $I = 5$ A; $\mu = 0{,}2$.

Найти: a.

Решение. При движении стержня с током в магнитном поле на него будут действовать: сила тяжести $m\vec{g}$, силы реакции $\vec{N}$ и трения $\vec{F}_{тр}$ между стержнем и поверхностью наклонной плоскости и сила Ампера $\vec{F}_A$. Направление силы Ампера определяется правилом левой руки (рис. *б*).

Из уравнения движения стержня, записанного в проекциях на оси системы координат

$$OX: \quad ma = mg\sin\alpha - F_{тр} - F_A\cos\alpha,$$

$$OY: \quad 0 = N - mg\cos\alpha - F_A\sin\alpha,$$

с учетом, что $F_{тр} = \mu N$, получим

$$N = mg\cos\alpha + F_A\sin\alpha, \quad F_{тр} = \mu\left(mg\cos\alpha + F_A\sin\alpha\right);$$

$$ma = mg\sin\alpha - \mu\left(mg\cos\alpha + F_A\sin\alpha\right) - F_A\cos\alpha.$$

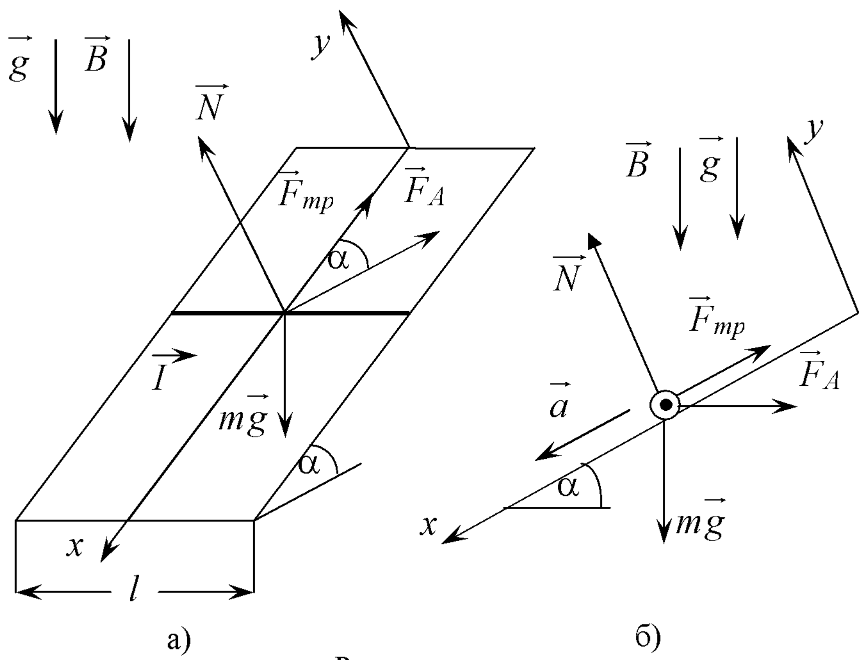


Рис.

Поскольку сила Ампера в нашем случае равна

$$F_A = IBl, \quad \text{то}$$

$$ma = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - \mu IBl\sin\alpha - IBl\cos\alpha;$$

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - \frac{IBl}{m}(\mu\sin\alpha + \cos\alpha) \approx 2{,}2\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Ответ: $a \approx 2{,}2\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$

5. Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца. Определение удельного заряда частицы

1. Протон p, ускоренный разностью потенциалов $U = 500$ кВ, влетает в область однородного магнитного поля перпендикулярно к вектору $\vec{B}$ (рис.*а*). Ширина области $d = 10$ см, индукция магнитного поля $B = 0{,}51$ Тл. Под каким углом к первоначальному направлению движения протон вылетит из области поля? Масса протона $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг (точка *O* – центр окружности).

Дано: $U = 500$ кВ; $d = 10$ см; $B = 0{,}51$ Тл; $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг.

Найти: α.

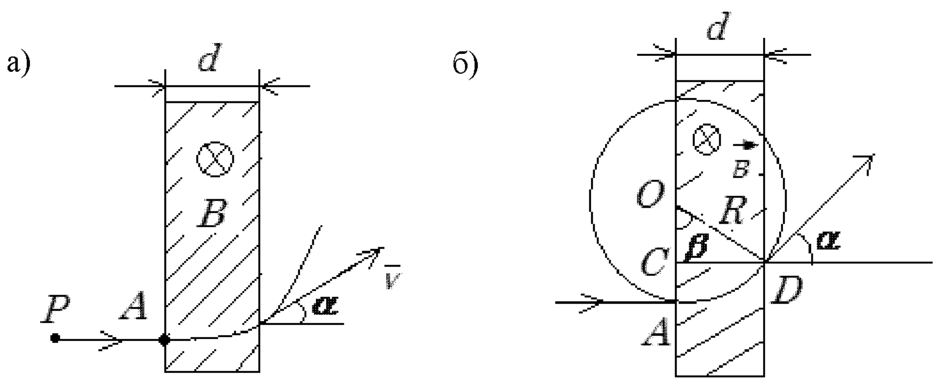


Рис.

Решение. Влетев в точке A в область однородного магнитного поля, протон под действием силы Лоренца начинает двигаться с центростремительным ускорением по дуге окружности (см. рис. *а*). Запишем второй закон Ньютона для рассматриваемого случая, учитывая, что заряд протона равен элементарному заряду e:

$$\vec{F}_М = ma_Ц \quad \text{или} \quad evB\sin\frac{\pi}{2} = \frac{mv^2}{R}.$$

Необходимое для вычислений значение скорости протона находим, применив закон сохранение энергии в облости ускоряющего напряжения:

$$eU = \frac{mv^2}{2}. \quad \text{Тогда} \quad v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

Подставив это выражение в формулу второго закона Ньютона, получим уравнение для расчета радиуса окружности:

$$R = \frac{mv}{eB} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}}.$$

После вычислений имеем $R = 0{,}2$ м. Это значение больше ширины области магнитного поля $d = 0{,}1$ м, и протон вылетит из нее, описав только часть окружности – дугу AD (рис. *б*). Вылетев из области действия магнитного поля в точке D, протон будет двигаться прямолинейно по касательной к окружности. Угол отклонения протона α равен углу β, стягивающему дугу окружности между точками A и D (по двум взаимно перпендикулярным сторонам). Из треугольника ODC следует, что $\sin\alpha = \frac{d}{R} = \frac{1}{2}$. Тогда $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Ответ: $\alpha = \frac{\pi}{6}$

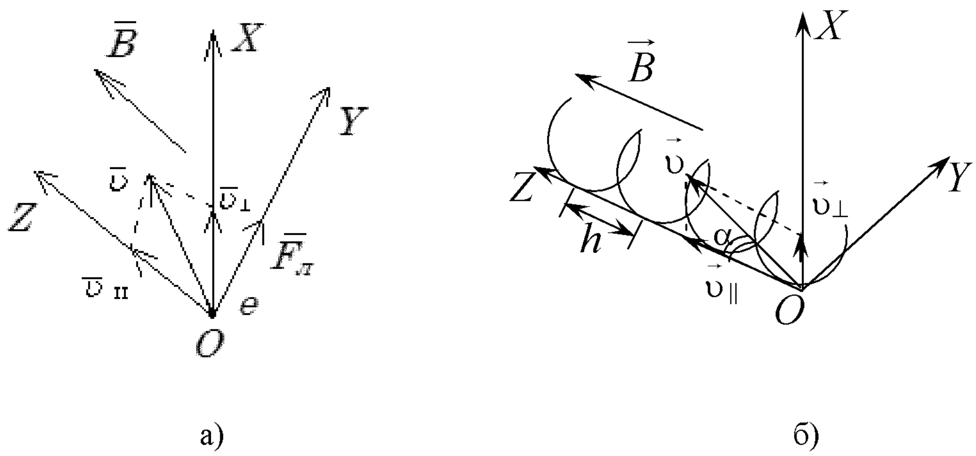
2. Электрон движется в однородном магнитном поле так, что вектор его скорости, равной $2 \cdot 10^6\ \frac{м}{с}$, составляет с направлением вектора индукции магнитного поля угол $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Определить шаг винтовой линии, по которой движется электрон, если $B = 0{,}01$ Тл.

Дано: $\upsilon = 2 \cdot 10^6\ \frac{м}{с}$; $\alpha = \frac{\pi}{3}$; $B = 0{,}01$ Тл.

Найти: h.

Решение. Сложное движение электрона в данных условиях представили как сумму двух независимых движений: вдоль направления поля $\vec{B}$ и в плоскости, перпендикулярной к направлению поля $\vec{B}$.

Для этого разложим вектор скорости на две составляющие: $\vec{\upsilon} = \overrightarrow{\upsilon_\perp} + \overrightarrow{\upsilon_{||}}$, где $\overrightarrow{\upsilon_\perp} \perp \vec{B}$ и $\overrightarrow{\upsilon_{||}} \parallel \vec{B}$ (на рис. вектор $\vec{B}$ направлен параллельно оси OZ). Действующая на электрон сила Лоренца зависит только от $\overrightarrow{\upsilon_\perp}$, и ее направление перпендикулярно к полю $\vec{B}$. Поэтому в направлении вдоль поля $\vec{B}$ ускорение электрона равно нулю и он движется с постоянной скоростью $\overrightarrow{\upsilon_{||}}$.



а) б)

Рис.

Одновременно под действием силы Лоренца электрон движется по окружности в плоскости, перпендикулярной к вектору $\vec{B}$ (на рис. *а* в плоскости

OXY). Результирующим является движение по винтовой линии h – расстояние между соседними витками (рис. *б*), которое равно перемещению электрона вдоль оси OZ за один период T вращательного движения со скоростью $\overrightarrow{\upsilon_{\parallel}}$, т.е. $h = \upsilon_{\parallel} \cdot T$. Для определения периода запишем второй закон Ньютона:

$$\overrightarrow{F_M} = m\overrightarrow{a_ц} \quad \text{или} \quad e\upsilon_{\perp}B = \frac{m\upsilon_{\perp}^2}{2}.$$

Тогда $R = \dfrac{m\upsilon_{\perp}}{eB}$, а период

$$T = \frac{2\pi R}{V_{\perp}} = \frac{2\pi m\upsilon_{\perp}}{eB\upsilon_{\perp}} = \frac{2\pi m}{eB}.$$

Подставим полученное выражение для периода в формулу $h = \upsilon_{\parallel} \cdot T$

$$h = \frac{2\pi m\upsilon_{\parallel}}{eB} = \frac{2\pi m\upsilon\cos\alpha}{eB}.$$

После вычислений находим

$$h = 3{,}57 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 3{,}57 \text{ мм}.$$

Ответ: $h = 3{,}57 \cdot 10^{-3}$ м.

3. Небольшой шарик массой $m = 10$ г и зарядом $q = 10^{-6}$ Кл вращается в горизонтальной плоскости на невесомой диэлектрической нити длиной $l = 50$ см. В пространстве создано однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл, силовые линии которого направлены вдоль силы тяжести вниз (рис.). При движении нить образует с вертикалью угол $\alpha = 30^{\circ}$. Найти период обращения шарика.

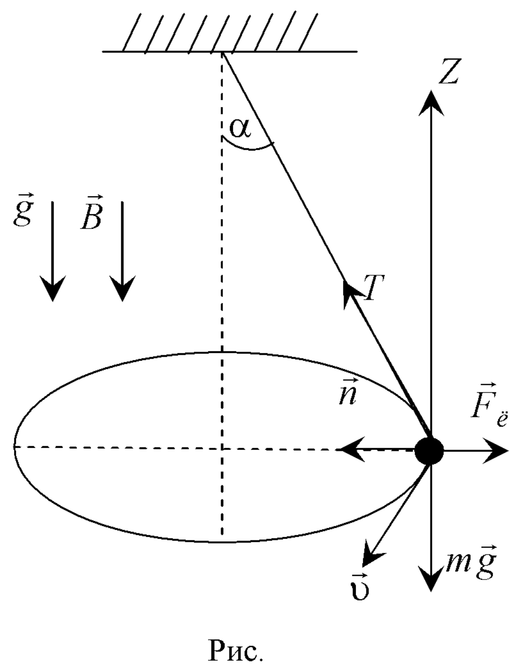


Рис.

Дано: $m = 10$ г; $q = 10^{-6}$ Кл; $l = 50$ см; $B = 0{,}1$ Тл; $\alpha = 30^{\circ}$.

Найти: T.

Решение. При движении заряженного тела в магнитном поле на него будет действовать сила Лоренца. В зависимости от того, в какую сторону вращается шарик, сила Лоренца будет направлена или к центру окружности, описываемой шариком, или в противоположную сторону. Пусть в положении, показанном на рисунке, скорость шарика направлена на нас; тогда сила Лоренца будет направлена по радиусу окружности от ее центра.

Запишем уравнения движения шарика в проекции на нормаль $\vec{n}$ к траектории и ось OZ, перпендикулярную к плоскости движения:

$$\frac{m\upsilon^2}{R} = N\sin\alpha - q\upsilon B; \quad 0 = N\cos\alpha - mg,$$

где учтено, что $F_л = q\upsilon B$.

Отсюда находим $\quad N = \dfrac{mg}{\cos\alpha}; \quad \dfrac{m\upsilon^2}{R} + q\upsilon B - mgtg\alpha = 0$

или $\quad \upsilon = \dfrac{-qB + \sqrt{q^2B^2 + 4m^2gtg\dfrac{\alpha}{R}}}{\dfrac{2m}{R}}$.

Следовательно, период обращения шарика по окружности радиусом $R = l\sin\alpha$

$$T = \frac{2\pi R}{\upsilon} = \frac{4\pi m}{\sqrt{q^2B^2 + 4m^2gtg\dfrac{\alpha}{R}} - qB} = \frac{4\pi m}{\sqrt{q^2B^2 + \dfrac{4m^2g}{l\cos\alpha}} - qB} \approx 1{,}31 \text{ c}.$$

Ответ: 1,31 с

4. Электрон движется в магнитном поле, индукция которого $\vec{B}$, по винтовой линии с радиусом r и шагом «винта» h. Определить энергию W электрона и направление вектора скорости $\vec{\upsilon}$ в начальный момент.

Дано: $\vec{e}$; $\vec{B}$; r; h.

Найти: W; α.

Решение. Сила Лоренца, действующая на электрон, движущийся в магнитном поле, $F_л = e\left[\vec{\upsilon},\vec{B}\right]$. Скорость $\vec{\upsilon}$ можно разложить на две составляющие:

$$\vec{\upsilon}_{\parallel} \parallel \vec{B} \quad \text{и} \quad \vec{\upsilon}_{\perp} \perp \vec{B} \text{ (рис. 12.16).}$$

Тогда

$$F_{л\parallel} = e\upsilon_{\parallel}B\sin\left(\widehat{\vec{\upsilon}_{\parallel}, \vec{B}}\right) = 0;$$

$$F_{л\perp} = e\upsilon_{\perp}B\sin\left(\widehat{\vec{\upsilon}_{\perp}, \vec{B}}\right) = e\upsilon_{\parallel}B.$$

Следовательно, под действием силы Лоренца движущийся заряд может приобретать нормальное ускорение a_n. При этом следует отметить, что при движении по винтовой линии вектор результирующей скорости электрона $\vec{\upsilon} = \overrightarrow{\upsilon_{||}} + \overrightarrow{\upsilon_{\perp}}$ изменяет свое направление, но не меняется по величине, следовательно, и кинетическая энергия остается постоянной.

Это значит, что сила Лоренца не совершает работы.

Величину соответствующей скорости $\upsilon_{\perp}$ можно определить из второго закона Ньютона, которому подчиняется движение электрона:

$$ma_n = F_{л\perp},$$

где $a_n = \dfrac{\upsilon_{\perp}^2}{r}$; m – масса электрона.

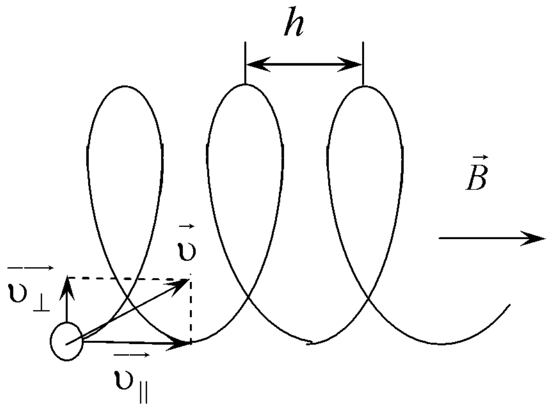


Рис.

Отсюда

$$\frac{m\upsilon_{\perp}^2}{r} = e\upsilon_{\perp}B \quad \text{или} \quad \upsilon_{\perp} = \frac{rBe}{m}. \qquad (1)$$

Шаг винта определяется соотношением $h = \upsilon_{||}T$, где T – период обращения электрона, равный

$$T = \frac{2\pi r}{\upsilon_{\perp}} = \frac{2\pi m}{Be}.$$

Следовательно,

$$\upsilon_{||} = \frac{h}{T} = \frac{hBe}{2\pi m}. \qquad (2)$$

Кинетическая энергия электрона с учетом (1) и (2) равна

$$W = \frac{m\upsilon^2}{2} = e^2B^2\frac{\left(r^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}\right)}{2m}.$$

Угол α может быть определен из отношения скоростей

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\upsilon_{\perp}}{\upsilon_{||}} = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\pi r}{h}\right).$$

Ответ: $W = e^2B^2\dfrac{\left(r^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}\right)}{2m}$; $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{2\pi r}{h}\right)$

6. Расчет индукции и напряженности магнитного поля с использованием теоремы о циркуляции.

1. Магнитная индукция B на оси тороида без сердечника (внешний диаметр тороида $d_1 = 60$ см, внутренний $d_2 = 40$ см), содержащего $N = 200$ витков, составляет $0{,}16$ мТл. Пользуясь теоремой о циркуляции вектора $\vec{B}$, определите силу тока в обмотке тороида.

Дано: $d_1 = 60$ см; $d_2 = 40$ см; $B = 0{,}16$ мТл; $N = 200$.

Найти: I.

Решение. Циркуляция вектора $\vec{B}$

$$\oint\limits_L \vec{B}d\vec{l} = \oint\limits_L B_l dl = \mu_0 \sum_{k=1}^{n} I_k \,, \qquad (1)$$

т.е. равна алгебраической сумме токов, охватываемых контуром, вдоль которого вычисляется циркуляция, умноженной на магнитную постоянную. В качестве контура выберем окружность, расположенную так же, как и линия магнитной индукции, т.е. окружность некоторым радиусом r, центр который лежит на оси тороида. Из условия симметрии следует, что модуль вектора $\vec{B}$ во всех точках линии магнитной индукции одинаков, а поэтому выражение (1) можно записать в виде

$$\oint\limits_L \vec{B}d\vec{l} = B\oint\limits_L dl = 2\pi r B = \mu_0 N I \qquad (2)$$

(учли, что сила тока во всех витках одинакова, а контур охватывает число токов, равное числу витков тороида). Для средней линии тороида $r = \dfrac{d_1 + d_2}{4}$. Подставив r в (2), получим искомую силу тока

$$I = \frac{\pi(d_1 + d_2)B}{2\mu_0 N} = 1\text{A}$$

Ответ: 1 А

7. Магнитный поток. Энергия контура с током в магнитном поле

1. В однородной плоскости с бесконечно длинным прямым проводом, по которому течет ток $I = 50$ А, расположена прямоугольная рамка так, что две ее стороны длиной $b = 65$ см параллельны проводу, а расстояние от провода до ближайшей из сторон рамки равно ее ширине a (рис.). Чему равен поток вектора магнитной индукции через рамку?

Дано: $I = 50$ А; $b = 65$ см; a.

Найти: Φ.

Решение. Находим поток вектора магнитной индукции через поверхность площадью S

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B_n dS,$$

где B_n – компонента вектора $\vec{B}$, перпендикулярная к элементу площади dS. Для определения магнитной индукции, создаваемой прямым бесконечным проводом с током, используем теорему о циркуляции

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i .$$

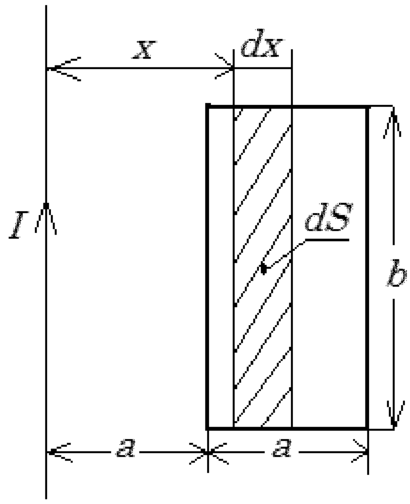


Рис.

Допустим, что точка A, в которой необходимо определить магнитную индукцию, находится на расстоянии x от провода (рис.). Проведем через нее окружность с центром на оси провода. Линии магнитной индукции поля касательны к этой окружности. Поэтому $\vec{B} d\vec{l} = B dl$. В силу симметрии магнитного поля на всем выбранном контуре модуль вектора магнитной индукции B постоянен. Тогда левую часть формулы запишем в виде

$$B \oint_L dl = B 2\pi x,$$

а правую – в виде

$$\mu_0 \sum_i I_i = \mu_0 I .$$

Приравнивая эти выражения, получим

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}.$$

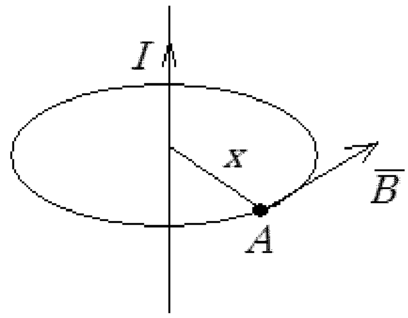


Рис.

В нашем случае вектор магнитной индукции $\vec{B}$ во всех точках плоскости рамки перпендикулярен к ней. Для вычисления потока вектора магнитной индукции через рамку разобьем ее площадь на узкие полоски длиной b, шириной dx и площадью $dS = b dx$ (см. рис.). В пределах одной полоски магнитную индукцию считаем постоянной, так как все части площади полоски равноудалены от провода (на расстояние x). С учетом сделанных замечаний элементарный поток магнитной индукции через площадь dS запишем в виде

$$d\Phi = BdS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} bdx .$$

Проинтегрировав полученное выражение в пределах от $x_1 = a$ до $x_2 = 2a$, находим поток

$$\Phi = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi} \int_a^{2a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi} \ln \frac{2a}{a} = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi} \ln 2 .$$

Производя вычисления, получим $\Phi = 4{,}5 \cdot 10^{-6}$ Вб.

Ответ: $\Phi = 4{,}5 \cdot 10^{-6}$ Вб

2. Круговой проводящий контур радиусом $r = 6$ см и током $I = 2$ А установился в магнитном поле так, что плоскость контура перпендикулярна к направлению однородного магнитного поля с индукции $B = 10$ мТл. Определите работу, которую следует совершить, чтобы медленно повернуть контур на угол $\alpha = \frac{\pi}{2}$ относительно оси, совпадающей с диаметром контура.

Дано: $r = 6$ см; $I = 2$ А; $B = 10$ мТл; $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Найти: $A_{вн}$.

Решение. Работа сил поля по перемещению замкнутого проводника с током I равна

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1), \qquad (1)$$

где Φ_1 и Φ_2 – потоки магнитной индукции, пронизывающие контуры в начальном и конечном положениях. Ток в контуре считаем постоянным, так как при медленном повороте контура в магнитном поле индукционными токами можно пренебречь.

Поток магнитной индукции сквозь плоский контур площадью S в однородном магнитном поле с индукцией B

$$\Phi = BS\cos\alpha ,$$

где α – угол между вектором нормали $\vec{n}$ к плоскости контура и вектором магнитной индукции $\vec{B}$.

В начальном положении (рис. *а*) контура (контур установился свободно) поток магнитной индукции максимален ($\alpha = 0$; $\cos\alpha = 1$) и $\Phi_1 = BS$ (S – площадь контура), а в конечном положении (рис. *б*) ($\alpha = \dfrac{\pi}{2}$; $\cos\alpha = 0$) $\Phi_2 = 0$.

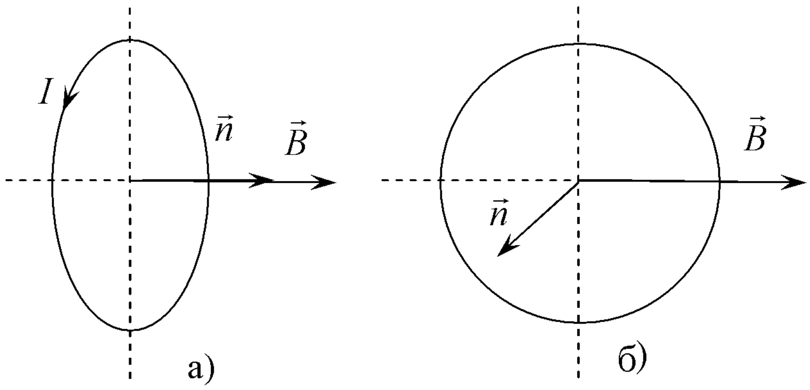


Рис.

Тогда, подставив эти выражения в формулу (1), с учетом того, что площадь кругового контура $S = \pi r^2$, получим, что

$$A = -IBS = -\pi IBr^2$$

Работа внешних сил направлена против сил поля (равна ей по модулю, но противоположна по знаку), поэтому искомая работа

$$A_{вн} = \pi IBr^2 = 226 \text{ мкДж}.$$

Ответ: $A_{вн} = 226$ мкДж

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

1. Определение ЭДС индукции, самоиндукции, индуктивности соленоида и параметров магнитного поля в соленоиде, объемной плотности энергии магнитного поля

1. Имеется круговой проводящий контур радиусом a с сопротивлением R. Первоначально ток в нем отсутствует. Затем включается перпендикулярное к плоскости контура однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, направленное за плоскость чертежа. Определить: 1) в каком направлении будет течь возникший при этом ток; 2) какой заряд q протечет по контуру.

Дано: a; R; $\vec{B}$.

Найти: q.

Решение. 1. Выберем направление положительной нормали к контуру «на нас», т.е. $\vec{n} \uparrow\downarrow \vec{B}$ (рис.). Тогда в начальный момент времени поток Φ_0, пронизывающий контур, будет равен $\Phi_0 = B_0 S\cos\alpha = 0$, так как $B_0 = 0$.

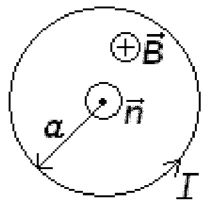


Рис.

После включения магнитного поля, когда магнитная индукция достигнет своего максимального значения B, конечное значение магнитного потока будет $\Phi = BS\cos\alpha < 0$, так как угол α между направлением нормали к контуру и вектором $\vec{B}$ равен $180°$.

Затем по формуле $\Delta\Phi = \Delta BS\cos\alpha$ определяем знак изменения магнитного потока

$$\Delta\Phi = \Phi - \Phi_0 = (B - B_0)S\cos\alpha = BS\cos\alpha < 0.$$

Из закона Фарадея $E_{инд} = -\dfrac{d\Phi}{dt}$ ЭДС индукции $E_{инд}$, возникающая в контуре за время Δt,

$$E_{инд} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -BS\cos\frac{\alpha}{\Delta t} = -B\pi a^2\left(\frac{-1}{\Delta t}\right) = \frac{\pi a^2 B}{\Delta t} > 0.$$

Так как $E_{инд} > 0$, то, следовательно, направление положительной нормали $\vec{n}$ выбрано верно и ток I в соответствии с данной $\vec{n}$ потечет против часовой стрелки.

В случае если бы $E_{инд}$ оказалась отрицательной, это бы означало, что мы неправильно выбрали направление нормали к контуру, т.е. положительная нормаль должна бы быть $\vec{n} \uparrow\uparrow \vec{B}$, и ток тек бы в противоположную сторону.

2. Для определения заряда q найдем, прежде всего, силу тока I, который потечет по контуру.

По закону Ома $I = \dfrac{E}{R + r}$ запишем

$$I = \frac{E_{инд}}{R} = \frac{\pi a^2 B}{R\,\Delta t}.$$

Тогда заряд q будет равен

$$q = I\Delta t = \frac{\pi a^2 B}{R}.$$

Ответ: $q = \dfrac{\pi a^2 B}{R}$

2. Длинный провод, расположенный в горизонтальной плоскости, согнут под углом $\alpha = 30°$. В вершине угла расположен металлический стержень, перпендикулярный к биссектрисе угла. Стержень может без трения скользить по проводу. Система помещена в вертикальное однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}05$ Тл. К стержню прикладывают горизонтальную силу $F = kx$ (направленную вдоль биссектрисы угла), которая растет линейно с расстоянием x, отсчитываемым от вершины угла (рис., вид сверху).

Определить максимальную скорость стержня, если сопротивление единицы его длины равно $\rho = 0{,}2$ Ом/м, а коэффициент пропорциональности $k = 0{,}1$ Н/м. Сопротивлением провода пренебречь.

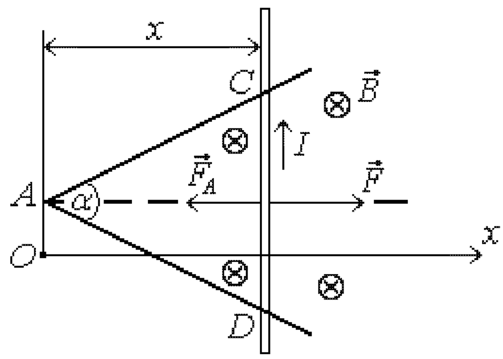


Рис.

Дано: $\alpha = 30°$; $B = 0{,}05$ Тл; $F = kx$; $\rho = 0{,}2$ Ом/м; $k = 0{,}1$ Н/м.

Найти: υ_{max}.

Решение. Если к стержню приложить силу $\vec{F}$, то при его перемещении будет меняться площадь треугольника *ACD*, ограниченного проводом и стержнем, и, следовательно, возникнет изменяющийся со временем поток индукции магнитного поля

$$\Phi = BS,$$

где $S = x^2 \sin\dfrac{\alpha}{2}$ – площадь контура (расстояние x отсчитывается от вершины угла CAD).

Наличие нестационарного магнитного потока приведет к возникновению в контуре ЭДС электромагнитной индукции

$$\left|E_i\right| = \frac{d\Phi}{dt} = B\frac{dS}{dt} = 2Bx\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)\frac{dx}{dt} = 2Bx\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)\upsilon,$$

что, в свою очередь, вызовет появление индукционного тока I и силы Ампера $\vec{F}_A$.

Поскольку при движении стержня магнитный поток, пронизывающий контур, увеличивается, то по правилу Ленца в контуре возникнет индукционный ток такого направления, чтобы его собственный магнитный поток ослаблял внешний (в нашем случае магнитное поле тока I, пронизывающее площадь ΔACD, будет направлено на нас, а ток в стержне – от точки D к точке C).

Направление силы Ампера, действующей на стержень с током I в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, можно определить по правилу левой руки (см. рис.)

$$F_A = IB2x\sin\frac{\alpha}{2}. \qquad (1)$$

По закону Ома сила тока в стержне

$$I = \frac{\left|E_i\right|}{R},$$

где $R = 2\rho x\sin\frac{\alpha}{2}$ – сопротивление части стержня между точками C и D контакта с проводом. Следовательно,

$$I = \frac{\left|E_i\right|}{2\rho x\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{2Bx\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)\upsilon}{2\rho x\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{B\upsilon}{\rho}. \qquad (2)$$

С учетом выражения (2) силу Ампера (1) можно представить в виде

$$F_A = \frac{2B^2x\upsilon}{\rho}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Запишем уравнение движения стержня на ось *OX* системы координат

$$ma = F - F_A \quad \text{или} \quad ma = kx - \frac{2B^2x\upsilon}{\rho}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Скорость стержня будет максимальна в момент времени, когда его ускорение станет равным нулю. Следовательно,

$$0 = k - \frac{2B^2\upsilon_{max}}{\rho}\sin\frac{\alpha}{2}; \qquad \upsilon_{max} = \frac{\rho k}{2B^2\sin\frac{\alpha}{2}} \approx 15{,}45 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\upsilon_{max} = 15{,}45$ м/с

3. По двум параллельным проводящим стержням, образующим угол α с горизонтом, соскальзывает горизонтальная проводящая перемычка массой m и длиной l (рис. *а*). В верхней части стержни замкнуты сопротивлением R. Вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{\mathrm{B}}$, силовые линии которого направлены вертикально вниз. Определить максимальную скорость движения перемычки, если коэффициент трения между поверхностями стержней и перемычкой равен μ. Сопротивлением стержней и перемычки пренебречь.

Дано: α; m; l; R; $\vec{\mathrm{B}}$; μ.

Найти: $\upsilon_{\max}$.

Решение. При соскальзывании перемычки возникнет переменный магнитный поток $\Phi = \mathrm{BS}\cos\alpha$, обусловленный тем, что меняется площадь $\mathrm{S} = \mathrm{lx}$, ограниченная контуром, где x – координата перемычки, отсчитываемая от верхнего края контура.

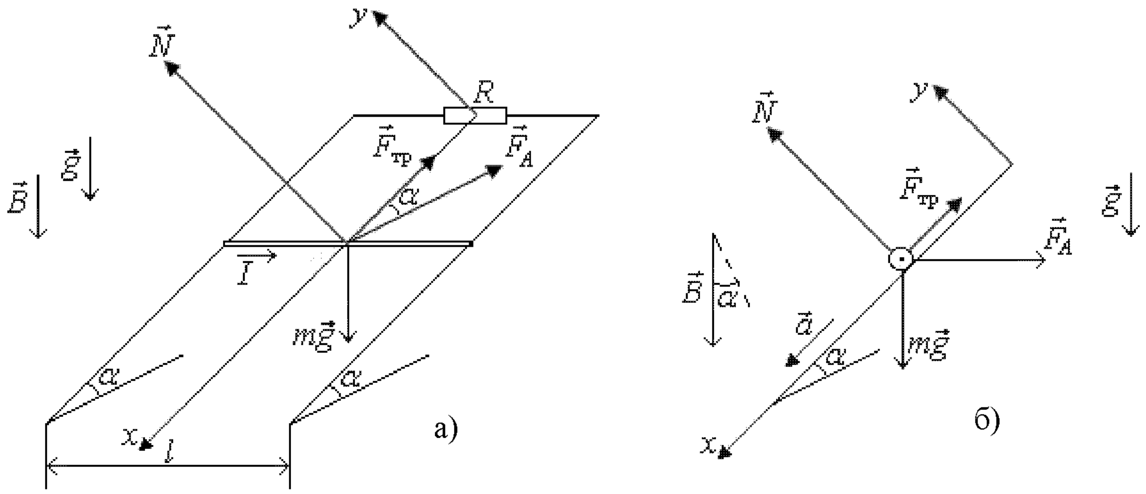


Рис.

Это приведет к возникновению в контуре ЭДС электромагнитной индукции

$$\left|\mathrm{E_i}\right| = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{dt}} = \mathrm{B}\cos\alpha\frac{\mathrm{dS}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{Bl}\cos\alpha\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{Bl}\upsilon\cos\alpha$$

и вызовет появление тока в контуре и силы Ампера, направленных так, как показано на рис. (направления тока в контуре и силы Ампера определяются правилами Ленца и левой руки соответственно).

По закону Ома ток в контуре будет равен

$$\mathrm{I} = \frac{\left|\mathrm{E_i}\right|}{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{Bl}\upsilon\cos\alpha}{\mathrm{R}},$$

а сила, действующая на перемычку,

$$F_A = IBl = \frac{B^2 l^2 \upsilon \cos\alpha}{R}. \quad (1)$$

Запишем уравнения движения перемычки в проекции на оси *OX* и *OУ* системы координат

$$OX: \quad ma = mg\sin\alpha - F_A\cos\alpha - F_{тр}; \quad (2)$$

$$OУ: \quad 0 = N - mg\cos\alpha - F_A\sin\alpha, \quad (3)$$

где $F_{тр} = \mu N$.

Решив уравнения движения (2), (3) относительно ускорения перемычки, получим

$$N = mg\cos\alpha + F_A\sin\alpha; \quad F_{тр} = \mu\left(mg\cos\alpha + F_A\sin\alpha\right);$$

$$ma = mg\sin\alpha - \mu\left(mg\cos\alpha + F_A\sin\alpha\right) - F_A\cos\alpha$$

или с учетом выражения (1)

$$ma = mg\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right) - \frac{B^2 l^2 \upsilon\cos\alpha}{R}\left(\mu\sin\alpha + \cos\alpha\right).$$

Скорость перемычки будет максимальной в момент времени, когда ее ускорение станет равным нулю.

Следовательно,

$$0 = mg\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right) - \frac{B^2 l^2 \upsilon_{max}\cos\alpha}{R}\left(\mu\sin\alpha + \cos\alpha\right).$$

Отсюда находим

$$\upsilon_{max} = \frac{mgR\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)}{B^2 l^2 \cos\alpha\left(\mu\sin\alpha + \cos\alpha\right)}.$$

Такая максимальная скорость будет у перемычки при $\mu \le tg\alpha$. В противном случае перемычка останется в покое.

Ответ: $\upsilon_{max} = \dfrac{mgR\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)}{B^2 l^2 \cos\alpha\left(\mu\sin\alpha + \cos\alpha\right)}$

4. Определить индуктивность длинного соленоида, в котором при увеличении тока от $I_1 = 4$ А до $I_2 = 6$ А энергия магнитного поля увеличивается на $\Delta W = 10$ мДж.

Дано: $I_1 = 4$ А; $I_2 = 6$ А; $\Delta W = 10$ мДж.

Найти: L.

Решение. Энергия магнитного поля внутри соленоида с индуктивностью L при увеличении тока в нем от I_1 до I_2 увеличивается от $W_1 = \frac{1}{2}LI_1^2$ до $W_2 = \frac{1}{2}LI_2^2$.

По условию задачи $\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{1}{2}LI_2^2 - \frac{1}{2}LI_1^2$,

отсюда находим

$$L = \frac{2\Delta W}{I_2^2 - I_1^2} \approx 10^{-3}\,\text{Гц}.$$

Ответ: $L = 10^{-3}$ Гц

5. Найти индуктивность единицы длины кабеля, представляющего собой два тонкостенных коаксиальных цилиндра, если радиус внешнего цилиндра в n раз больше, чем радиус внутреннего. Магнитную проницаемость среды между цилиндрами считать равной единице.

Решение. Пусть ток в кабеле I. Тогда напряженность магнитного поля между цилиндрами кабеля определяется с помощью теоремы о циркуляции для вектора H: $H = \frac{I}{2\pi r}$, где r – расстояние от оси кабеля до точки наблюдения.

При этом плотность энергии магнитного поля равна $\omega = \frac{\mu_0 H^2}{2}$. Интегрируя это соотношение по объему, заключенному между обкладками кабеля единичной длины, получим заключенную там магнитную энергию

$$W = \int_r^R 2\pi r_1 \omega\, dr_1 = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\int_r^R \frac{dr_1}{r_1} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\frac{R}{r}.$$

Отсюда, воспользовавшись формулой $W = \frac{1}{2}LI^2$ и тем, что $n = \frac{R}{r}$, найдем индуктивность единицы длины кабеля:

$$L = \frac{\mu_0 \ln n}{2\pi}.$$

Ответ: $L = \frac{\mu_0 \ln n}{2\pi}$

6. В соленоиде длиной $l = 50$ см и диаметром $d = 6$ см сила тока равномерно увеличивается на 0,3 А за одну секунду. Определите число витков соленоида, если сила индукционного тока в кольце радиусом 3,1 см из медной проволоки ($\rho = 17$ нОм · м), надетом на катушку, $I_к = 0{,}3$ А.

Дано: $l = 50$ см; $d = 6$ см; $\frac{dI}{dt} = 0{,}3$ А/с; $r_к = 3{,}1$ см; $\rho = 17$ нОм · м.

Найти: N.

Решение. При изменении силы тока в соленоиде возникает ЭДС самоиндукции

$$E_c = -L\frac{dI}{dt}, \quad (1)$$

где $L = \frac{\mu_0 \mu N^2 S}{l}$ – индуктивность соленоида. Подставив это выражение в (1) с учетом $S = \frac{\pi d^2}{4}$, получим $|E_c| = \mu_0 \mu \frac{N^2 \pi d^2}{4l} \cdot \frac{dI}{dt}$.

Электродвижущая сила индукции, возникающая в одном кольце, в N раз меньше, чем найденное значение ЭДС самоиндукции в соленоиде, состоящем из N витков, т.е.

$$|E_к| = \frac{|E_c|}{N} = \mu_0 \mu \frac{N \pi d^2}{4l} \frac{dI}{dt}. \quad (2)$$

Согласно закону Ома сила индукционного тока в кольце

$$I_к = \frac{|E_к|}{R_к}, \quad (3)$$

где $R_к = \frac{\rho l_к}{S_к}$ – сопротивление кольца. Поскольку $l_к = \pi d$, а $S_к = \pi r_к^2$, то выражение (3) примет вид $I_к = \frac{|E_к| r_к^2}{\rho d}$.

Подставив в эту формулу выражение (2), найдем искомое число витков соленоида

$$N = \frac{4l\rho I_к}{\mu_0 \mu \pi d \frac{dI}{dt} r_к^2} = 150.$$

Ответ: N=150

7. Соленоид без сердечника с однослойной обмоткой из медной проволоки диаметром $d = 0{,}3$ мм и площадью поперечного сечения $S_1 = 3$ мм^2 имеет длину $l = 0{,}6$ м. Определите индуктивность соленоида, если сопротивление обмотки $R = 10$ Ом. Удельное сопротивление меди $\rho = 17$ нОм $\cdot$ м.

Дано: $\mu = 1$; $d = 0{,}3$ мм; $l = 0{,}6$ м; $S_1 = 3$ мм^2; $R = 10$ Ом; $\rho = 17$ нОм $\cdot$ м.

Найти: L.

Решение. Индуктивность соленоида

$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l}, \tag{1}$$

где μ_0 – магнитная постоянная; μ – магнитная проницаемость среды; N – число витков соленоида; l – его длина; S – площадь поперечного сечения соленоида.

Для определения N и S необходимо найти длину проволоки l_1, из которой изготовлен соленоид. Учитывая, что электрическое сопротивление обмотки $R = \rho \frac{l_1}{S_1}$, найдем

$$l_1 = \frac{R S_1}{\rho}.$$

С другой стороны,

$$l_1 = 2\pi r N,$$

где $2\pi r$ – длина одного витка (r – радиус соленоида); N – число витков.

Тогда, приравняв два последних выражения, получим

$$N = \frac{R S_1}{2\pi\rho r}. \tag{2}$$

Площадь сечения соленоида

$$S = \pi r^2. \tag{3}$$

Подставив выражения (2) и (3) в формулу (1), найдем индуктивность соленоида

$$L = \mu_0 \mu \frac{R^2 S_1^2 \pi r^2}{4\pi^2 \rho^2 r^2 l} = \mu_0 \mu \frac{R^2 S_1^2}{4\pi \rho^2 l} = 0{,}519 \text{ Гн}$$

Ответ: $L = 0{,}519$ Гн

8. Две катушки намотаны на общий сердечник. Индуктивность первой катушки $L_1 = 0{,}16$ Гн, второй – $L_2 = 1$ Гн, сопротивление второй катушки $R_2 = 400$ Ом. Определите силу тока I_2 во второй катушке, если ток $0{,}4$ А, текущий в первой катушке, выключить в течение $0{,}002$ с.

Дано: $L_1 = 0{,}16$ Гн; $L_2 = 1$ Гн; $R_2 = 400$ Ом; $I_1 = 0{,}4$ А; $\Delta t = 0{,}002$ с.

Найти: I_2.

Решение. Сила тока во второй катушке

$$I_2 = \frac{\left|E_{i_2}\right|}{R_2}, \tag{1}$$

где E_{i_2} – ЭДС, индуцируемая во второй катушке при изменении силы тока в первой.

Согласно закону Фарадея

$$E_{i_2} = -L\frac{dI}{dt}, \tag{2}$$

где L – взаимная индуктивность катушек, намотанных на общий сердечник, равная

$$L = \mu_0\mu\frac{N_1NS}{l}, \tag{3}$$

где μ_0 – магнитная постоянная; μ – магнитная проницаемость среды; l – длина сердечника; S – площадь поперечного сечения сердечника.

Учитывая, что индуктивности

$$L_1 = \mu_0\mu\frac{N_1^2S}{l} \quad \text{и} \quad L_2 = \mu_0\mu\frac{N_2^2S}{l},$$

формулу (3) можно представить в виде

$$L = \sqrt{\mu_0\mu\frac{N_1^2S}{l}}\cdot\sqrt{\mu_0\mu\frac{N_2^2S}{l}} = \sqrt{L_1L_2}.$$

Подставив это значение L в формулу (2), а формулу (2) – в выражение (1), найдем значение силы тока во второй катушке

$$I_2 = \frac{\sqrt{L_1L_2}}{R_2}\cdot\frac{\Delta I_1}{\Delta t} = 0{,}2 \text{ А}.$$

Ответ: $I_2 = 0{,}2$ А

9. Соленоид без сердечника с однослойной обмоткой из проволоки диаметром $d = 0{,}4$ мм имеет длину $l = 0{,}5$ м и поперечное сечение $S = 60\ \text{см}^2$. За какое время при напряжении $U = 10$ В и силе тока $I = 1{,}5$ А в обмотке выделится количество теплоты, равное энергии поля внутри соленоида? Поле считать однородным.

Дано: $d = 0{,}4$ мм; $l = 0{,}5$ м; $S = 60\ \text{см}^2$; $I = 1{,}5$ А; $U = 10$ В; $Q = W$.

Найти: t.

Решение. При прохождении тока I при напряжении U в обмотке за время t выделяется теплота

$$Q = IUt. \tag{1}$$

Энергия поля внутри соленоида

$$W = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}V = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}lS, \tag{2}$$

где $B = \dfrac{\mu_0\mu NI}{l}$ (N – общее число витков соленоида).

Если витки вплотную прилегают друг к другу, то $l = Nd$, откуда $N = \dfrac{l}{d}$.

Подставив выражения для B и N в (2), получаем

$$W = \frac{\mu_0\mu}{2}\frac{I^2 lS}{d^2}. \tag{3}$$

Согласно условию задачи $Q = W$. Приравняв (1) и (3), найдем искомое время

$$t = \frac{\mu_0\mu ISl}{2Ud^2} = 1{,}77\ \text{мс}.$$

Ответ: $t = 1{,}77$ мс

10. Катушка без сердечника длиной $l = 50$ см содержит $N = 200$ витков. По катушке течет ток $I = 1$ А. Определите объемную плотность энергии магнитного поля внутри катушки.

Дано: $l = 50$ см; $N = 200$; $I = 1$ А.

Найти: ω.

Решение. Объемная плотность энергии магнитного поля (энергия единицы объема)

$$\omega = \frac{W}{V}, \tag{1}$$

где $W = \frac{LI^2}{2}$ – энергия магнитного поля (L – индуктивность катушки); $V = Sl$ – объем катушки (S – площадь катушки; l – длина катушки).

Магнитная индукция поля внутри соленоида с сердечником с магнитной проницаемостью μ равна

$$B = \mu_0 \mu \frac{NI}{l}.$$

Полный магнитный поток, сцепленный со всеми витками соленоида,

$$\Phi = NBS = \mu_0 \mu \frac{N^2 I}{l} S.$$

Учитывая, что $\Phi = LI$, получаем формулу для индуктивности соленоида

$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l}. \tag{2}$$

Подставив выражение (2) в формулу (1) с учетом того, что $W = \frac{LI^2}{2}$, найдем объемную плотность энергии магнитного поля внутри катушки

$$\omega = \mu_0 \mu \frac{N^2 I^2}{2l^2} = 0{,}1\ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}.$$

Ответ: $\omega = 0{,}1\ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}$

2. Определение зависимости тока и энергии от времени в цепях с индуктивностью при их коммутации

1. Определите время t, за которое сила тока замыкания достигнет $0{,}8$ предельного значения, если источник ЭДС замыкают на катушку сопротивлением $R = 10$ Ом и индуктивностью $L = 0{,}1$ Гн.

Дано: $I = 0{,}8I_0$; $R = 10$ Ом; $L = 0{,}1$ Гн.

Найти: t.

Решение. Сила тока при замыкании цепи, содержащей источник ЭДС,

$$I = I_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right), \qquad (1)$$

где R – сопротивление катушки; L – ее индуктивность; I_0 – установившаяся сила тока.

Подставив в выражение (1) $I = 0{,}8I_0$ (условие задачи), можем записать

$$0{,}8 = 1 - e^{-\frac{R}{L}t},$$

откуда искомое время

$$t = -\frac{L\ln 0{,}2}{R} = 16{,}2 \text{ мс}.$$

Ответ: $t = 16{,}2$ мс

3. Магнитное поле в магнетике

1. Соленоид длиной $l = 20$ см, площадью поперечного сечения $S = 10$ см^2 и общим числом витков $N = 400$ находится в диамагнитной среде. Определите силу тока в обмотке соленоида, если индуктивность $L = 1$ мГн и намагниченность j внутри соленоида равна $20\ \frac{\text{А}}{\text{м}}$.

Дано: $l = 20$ см; $S = 10$ см^2; $N = 400$; $L = 1$ мГн; $j = 20\ \frac{\text{А}}{\text{м}}$.

Найти: I.

Решение. Намагниченность внутри соленоида

$$j = \chi H,$$

где χ – магнитная восприимчивость вещества; H – напряженность магнитного поля.

Так как магнитная проницаемость вещества $\mu = 1 + \chi$, то

$$j = (\mu - 1)H. \tag{1}$$

Циркуляция вектора напряженности магнитного поля

$$\oint\limits_L \vec{H} d\vec{l} = \oint\limits_L H_l dl = \sum_k I_k,$$

т.е. равна алгебраической сумме токов, охватываемых контуром.

Для соленоида $Hl = NI$, откуда $H = \frac{NI}{l}$.

Индуктивность соленоида $L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l}$, тогда $\mu = \frac{Ll}{\mu_0 N^2 S}$.

Подставив значения μ и H в формулу (1), получим

$$j = \left(\frac{Ll}{\mu_0 N^2 S} - 1\right)\frac{NI}{l},$$

откуда сила тока

$$I = \frac{jl}{N\left(\frac{Ll}{\mu_0 N^2 S} - 1\right)}.$$

Вычисляя и учитывая, что для диамагнетиков $\chi < 0$, получаем $I = 2{,}09$ А.

Ответ: $I = 2{,}09$ А

2. На железном сердечнике в виде тора со средним диаметром $d = 70$ мм намотана обмотка с общим числом витков $N = 600$. В сердечнике сделана узкая поперечная прорезь шириной $b = 1{,}5$ мм (рис.). При силе тока через обмотку $I = 4$ А магнитная индукция в прорези $B_0 = 1{,}5$ Тл. Пренебрегая рассеянием поля на краях прорези, определите магнитную проницаемость железа для данных условий.

Дано: $d = 70$ мм; $N = 600$; $I = 4$ А; $B_0 = 1{,}5$ Тл; $b = 1{,}5$ мм.

Найти: μ.

Решение. Теорема о циркуляции вектора $\vec{H}$:

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \oint_L H_l dl = I, \qquad (1)$$

где I – алгебраическая сумма токов проводимости, охватываемых контуром.

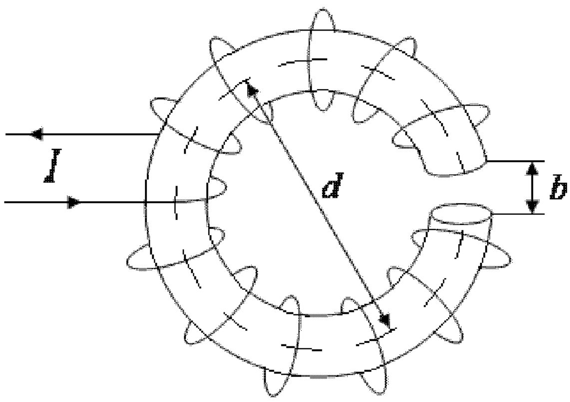


Рис.

Выбрав в качестве контура окружность диаметром d (см. рис., штриховая линия), теорему (1) можно записать в виде

$$H(\pi d - b) + H_0 b = NI,$$

где H и H_0 – соответственно модули вектора $\vec{H}$ в железе и в прорези; N – число витков тороида.

Поскольку рассеяние поля на краях прорези отсутствует, магнитные индукции поля в железе и прорези одинаковы

$$B = B_0. \qquad (2)$$

Учитывая формулу (2) и то, что $B = \mu_0 \mu H$ (μ – магнитная проницаемость железа) и $B_0 = \mu_0 H$ (магнитная проницаемость вакуума равна 1), выражение (1) можем записать в виде

$$\frac{B_0}{\mu_0 \mu}(\pi d - b) + \frac{B_0}{\mu_0} b = NI,$$

откуда магнитная проницаемость железа при рассматриваемых условиях

$$\mu = \frac{(\pi d - b)B_0}{\mu_0 NI - bB_0} = 428.$$

Ответ: $\mu = 428$

3. Тороид с железным ненамагниченным сердечником, длина которого по средней линии $l_1 = 1$ м, имеет воздушный зазор $l_2 = 3{,}14$ мм (рис.). По обмотке проходит ток, после выключения которого остаточная индукция в зазоре составляет $4{,}2$ мТл. Определить напряженность H_1 магнитного поля в сердечнике, а также остаточную намагниченность j сердечника.

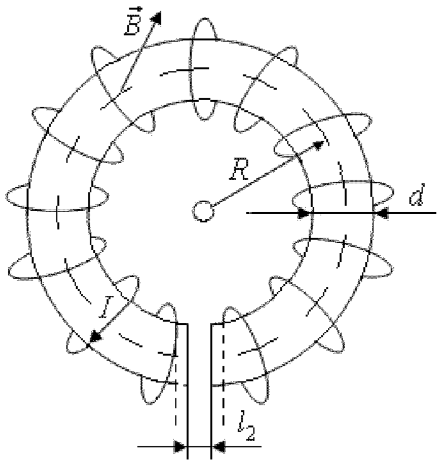


Рис.

Решение. Физическую систему составляют тороид с железным сердечником, по которому проходит ток, и магнитное поле, созданное током проводимости и микротоками железного сердечника.

Ток, проходящий по обмотке, обусловливает существование внутри тороида магнитного поля, силовые линии которого замкнуты (см. рис.).

Учитывая, что $R >> d$, можем считать величину $\vec{B} = \text{const}$ во всех точках сечения тороида, а так как воздушный зазор в тороиде узкий ($l_2 << l_1$), то рассеянием линий индукции можно пренебречь.

При переходе через границу раздела двух сред нормальная составляющая напряженности магнитного поля H_n изменяется, в то время как нормальная составляющая вектора магнитной индукции B_n остается неизменной, т.е.

$$B_{1n} = B_{2n} = B = \text{const}; \quad H_{1n} \neq H_{2n}.$$

Для определения напряженности воспользуемся теоремой о циркуляции вектора $\vec{H}$, выбрав в качестве контура интегрирования среднюю линию тороида $L = l_1 + l_2$. При этом необходимо принять во внимание, что нормальные по отношению к сечению тороида составляющие напряженности магнитного поля являются тангенциальными по отношению к выбранному контуру обхода.

Таким образом,

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 = \sum_{i=1}^{N} j = jN, \qquad (1)$$

где H_1, H_2 – напряженности полей в сердечнике и в зазоре соответственно; I – сила тока, проходящего по обмотке.

После выключения тока для выбранного контура обхода выражение (1) можно записать в виде $H_1 l_1 + H_2 l_2 = 0$, откуда

$$H_1 = -H_2 \frac{l_2}{l_1}. \qquad (2)$$

Напряженность H_2 и индукция магнитного поля B в зазоре связаны соотношением

$$H_2 = \frac{B}{\mu_0 \mu},$$

где μ – магнитная проницаемость (для воздуха $\mu = 1$).

Подставив это выражение в (2), получим, что напряженность магнитного поля в сердечнике

$$H_1 = -\frac{B}{\mu_0}\frac{l_2}{l_1}. \qquad (3)$$

Учитывая выражение (3), а также связь между векторами $\vec{H}_1$, $\vec{B}$, $\vec{j}$ $\left(j = \frac{B}{\mu_0} - H\right)$, определяем остаточную намагниченность j сердечника:

$$j = \frac{B}{\mu_0} + \frac{B}{\mu_0}\frac{l_2}{l_1} = \frac{B(l_1 + l_2)}{\mu_0 l_1}.$$

Подставляя числовые значения, получаем

$$H_1 = -10{,}49\ \frac{A}{м}, \quad j = 3{,}34 \cdot 10^3\ \frac{A}{м}.$$

Ответ: $H_1 = -10{,}49\ \frac{A}{м}$, $j = 3{,}34 \cdot 10^3\ \frac{A}{м}$.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

1. Электромагнитные колебания

1. Сила тока в колебательном контуре, содержащем катушку индуктивностью $L = 0,2$ Гн и конденсатор, со временем изменяется согласно уравнению $I = -0,2\sin 250\pi t$, А. Пренебрегая сопротивлением контура, определите: период колебаний; электроемкость конденсатора; максимальное значение напряжения на обкладках конденсатора; максимальную энергию магнитного поля; максимальную энергию электрического поля.

Дано: $L = 0,2$ Гн; $I = -0,2\sin 250\pi t$, А; $R = 0$.

Найти: T; C; U_{max}, $W^{М}_{max}$; $W^{Э}_{max}$.

Решение. Сила тока в колебательном контуре согласно условию задачи

$$I = -0,2\sin 250\pi t, \text{ А},$$

откуда следует, что амплитуда силы тока $I_m = 0,2$ А, а циклическая частота $\omega_0 = 250\pi$ с$^{-1}$. Период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$.

Электроемкость конденсатора найдем из формулы Томсона, определяющей период колебаний в электрическом контуре

$$T = 2\pi\sqrt{LC}, \quad \text{откуда} \quad C = \frac{T^2}{4\pi^2 L}.$$

Максимальное значение напряжения на обкладках конденсатора

$$U_m = \frac{Q_m}{C}, \qquad (1)$$

где Q_m – амплитуда колебаний заряда конденсатора. Заряд Q совершает гармонические колебания (при $R \approx 0$) по закону $Q = Q_m \cos\omega t$ (начальную фазу приняли равной нулю). Тогда сила тока в колебательном контуре

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega_0 Q_m \sin\omega t = -I_m \sin\omega t,$$

где амплитуда колебаний силы тока

$$I_m = \omega_0 Q_m, \quad \text{откуда} \quad Q_m = \frac{I_m}{\omega_0}. \qquad (2)$$

Подставив формулу (2) в выражение (1), найдем максимальное значение напряжения на обкладках конденсатора $U_m = \dfrac{I_m}{\omega_0 C}$.

В случае незатухающих колебаний полная энергия контура, равная сумме энергий электрического поля конденсатора $\frac{CU^2}{2}$ и магнитного поля катушки $\frac{LI^2}{2}$, остается постоянной. Следовательно,

$$\frac{CU_m^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2},$$

т.е. максимальные энергии электрического и магнитного полей равны.

Таким образом, максимальные значения

$$W_{max}^{Э} = W_{max}^{M} = \frac{LI_m^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2}.$$

Вычисляя, получаем

$$T = 8 мс; C = 8{,}11\ мкФ;\ U_m = 31{,}4\ В;\ W_{max}^{Э} = W_{max}^{M} = 4\ мДж.$$

Ответ: $T = 8 мс; C = 8{,}11\ мкФ;\ U_m = 31{,}4\ В;\ W_{max}^{Э} = W_{max}^{M} = 4\ мДж$

2. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 100\ пФ$, катушки индуктивностью $L = 0{,}01\ Гн$ и резистора сопротивлением $R = 20\ Ом$. Определите: период затухающих колебаний; через сколько полных колебаний амплитуда тока в контуре уменьшится в e раз.

Дано: $C = 100\ пФ$; $L = 0{,}01\ Гн$; $R = 20\ Ом$.

Найти: T; N_e.

Решение. Период электромагнитных колебаний в контуре

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} = 2\ мкс$$

(учли, что собственная частота контура $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ и коэффициент затухания $\delta = \frac{R}{2L}$). Число полных колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды силы тока в e раз,

$$N_e = \frac{\tau}{T}, \qquad (1)$$

где τ – время релаксации $\left(\tau = \frac{1}{\delta} = \frac{2L}{R}\right)$. Подставив выражение τ в формулу (1), найдем число полных колебаний

$$N_e = \frac{2L}{RT} = 5.$$

Ответ: $T = 2\ мкс$; $N_e = 5$

3. Определите добротность Q колебательного контура, если его собственная частота ω_0 отличается на 5 % от частоты ω свободных затухающих колебаний.

Дано: $\omega_0 = 1{,}05\omega$.

Найти: Q.

Решение. В реальном колебательном контуре (т.е. обладающем сопротивлением) частота ω свободных затухающих электромагнитных колебаний меньше собственной частоты ω_0 колебательного контура (при $R \approx 0$)

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \tag{1}$$

где δ – коэффициент затухания.

Добротность колебательного контура

$$Q = \frac{\pi}{\theta},$$

где логарифмический декремент затухания $\theta = \delta T$. (T – период затухающих колебаний, $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$).

Учитывая приведенные формулы, найдем коэффициент затухания

$$\delta = \frac{\theta}{T} = \frac{\pi}{QT} = \frac{\pi\omega}{Q \cdot 2\pi} = \frac{\omega}{2Q}. \tag{1}$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), получаем

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\omega^2}{4Q^2}} \quad \text{или} \quad \omega_0 = \omega\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}},$$

откуда добротность колебательного контура

$$Q = \frac{1}{2\sqrt{\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2 - 1}} = 1{,}56.$$

Ответ: $Q = 1{,}56$

4. Цепь переменного тока состоит из последовательно включенных катушки индуктивности L, конденсатора емкостью C и резистора сопротивлением R (рис.). Амплитудное значение суммарного напряжения на катушке и конденсаторе $U_{LC} = 100$ В, амплитудное значение напряжения на резисторе $U_R = 160$ В. Определите сдвиг фаз между током и внешним напряжением.

Дано: $U_{LC} = 100$ В; $U_R = 160$ В.

Найти: φ.

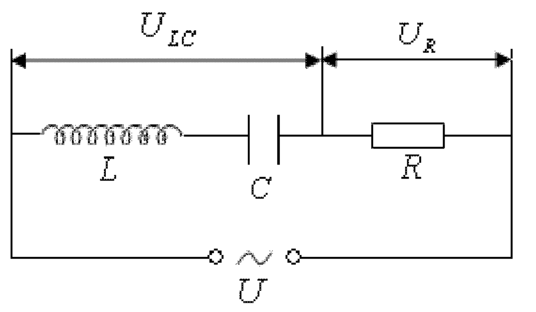


Рис.

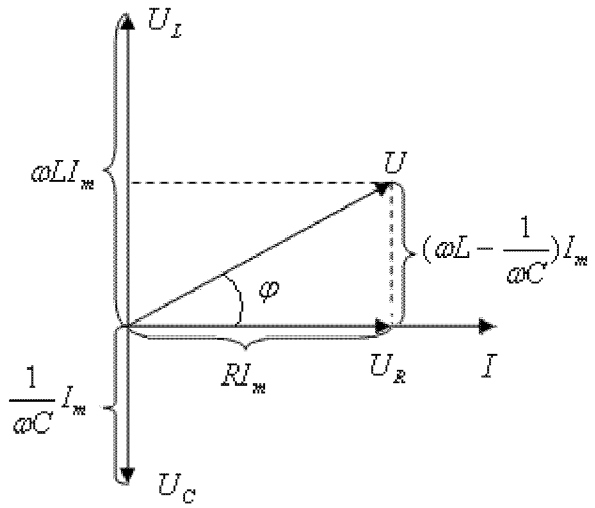


Рис.

Решение. В приведенной на рис. цепи возникает переменный ток, который вызовет на всех элементах цепи падение напряжений. На рис. приведена векторная диаграмма амплитуд падений напряжений на резисторе (U_R), катушке (U_L) и конденсаторе (U_C).

Амплитуда U_m приложенного напряжения равна векторной сумме амплитуд этих падений напряжений.

Разность фаз между током и внешним напряжением определим с помощью векторной диаграммы

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \qquad (1)$$

Реактивные (ωL и $\frac{1}{\omega C}$) и активное (R) сопротивления найдем из выражений для амплитуд напряжений на соответствующих элементах цепи.

Амплитудные значения напряжения на резисторе $U_R = RI_m$, на катушке индуктивности $U_L = \omega LI_m$, на конденсаторе $U_C = \frac{1}{\omega C}I_m$, где I_m – амплитуда силы тока. Из приведенных выражений находим

$$R = \frac{U_R}{I_m};\ \omega L = \frac{U_L}{I_m};\ \frac{1}{\omega C} = \frac{U_C}{I_m}. \qquad (2)$$

Подставив выражения (2) в формулу (1), найдем

$$\lg\varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R}. \qquad (3)$$

Учитывая, что $U_{LC} = U_L - U_C$ (см. векторную диаграмму, рис.), выражение (3) можно записать в виде

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{U_{LC}}{U_R}, \quad \text{откуда} \quad \varphi = \mathrm{arctg}\frac{U_{LC}}{U_R} = 32°.$$

Ответ: $\varphi = 32°$

5. В цепь переменного тока частотой ω резистор сопротивлением R и катушка индуктивностью L один раз включены последовательно, другой – параллельно. Определите для обоих случаев полное сопротивление цепи Z.

Дано: R; L; ω.

Найти: Z.

Решение

Последовательное включение *R* и *L* (рис.)

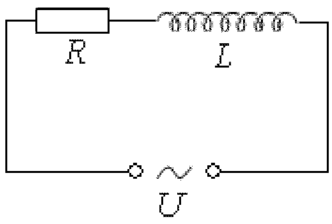


Рис.

На рис. приведена векторная диаграмма амплитудных значений падений напряжений на резисторе (U_R) и катушке (U_L), причем исходной для построения векторной диаграммы выбирается ось токов.

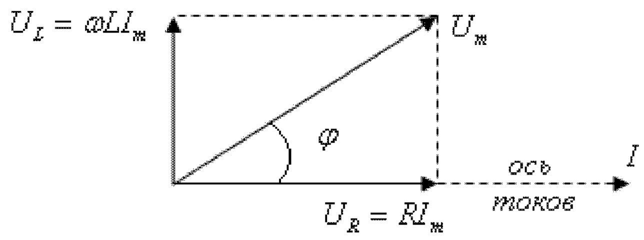


Рис.

Амплитуда U_m приложенного напряжения равна векторной сумме амплитуд падений напряжений U_R и U_L.

Из прямоугольного треугольника имеем

$$U_m{}^2 = U_R{}^2 + U_L{}^2.$$

Учитывая, что $U_m = ZI_m$; $U_R = RI_m$; $U_L = \omega LI_m$, получаем

$$Z^2 = R^2 + (\omega L)^2,$$

откуда

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}.$$

В данном случае $\varphi > 0$, т.е. ток отстает по фазе от внешнего напряжения.

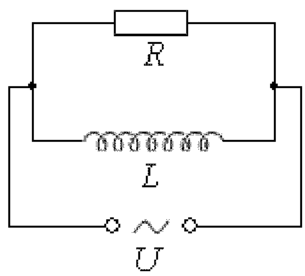


Рис.

Параллельное включение *R* и *L*
(рис.)

На рис. приведена векторная диаграмма параллельной цепи. Она строится аналогично векторной диаграмме последовательной цепи (см. рис.), только исходной для построения выбирается ось напряжений. Из прямоугольного треугольника имеем

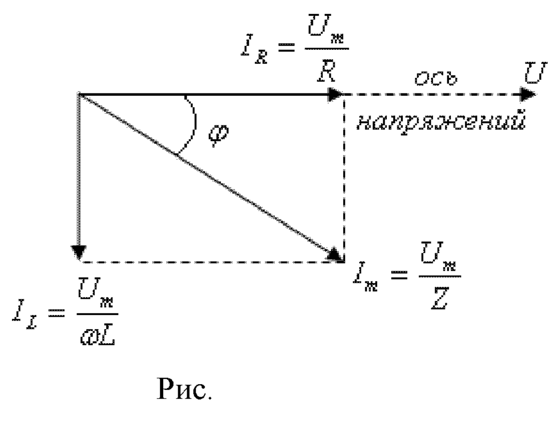


Рис.

$$I_m = \sqrt{I_R{}^2 + I_L{}^2}.$$

Учитывая, что при параллельном соединении $U_m = U_R = U_L$ и амплитуды силы токов

$$I_m = \frac{U_m}{Z};\ I_R = \frac{U_R}{R};\ I_L = \frac{U_L}{\omega L},$$

получаем

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}},$$

откуда полное сопротивление цепи при параллельном включении резистора и катушки

$$Z = \frac{R\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}.$$

В данном случае $\varphi < 0$, т.е. ток опережает по фазе внешнее напряжение.

Ответ: 1) $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$; 2) $Z = \dfrac{R\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$

6. В цепи переменного тока (рис.) с частотой $\nu = 50$ Гц амплитуда силы тока внешней (неразветвленной) цепи равна нулю. Определите индуктивность L катушки, если электроемкость C конденсатора равна 10 мкФ.

Дано: $\nu = 50$ Гц; $I_m = 0$; $C = 10$ мкФ.

Найти: L.

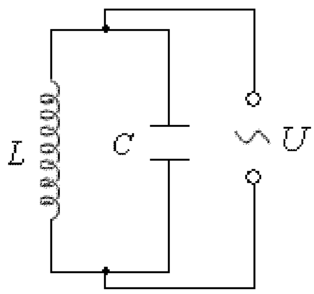


Рис.

Решение. В рассматриваемой параллельной цепи переменного тока, содержащей электроемкость C и индуктивность L, наблюдается резонанс токов. Амплитуда силы тока во внешней (неразветвленной) цепи

$$I_m = |I_C - I_L| = 0, \tag{1}$$

где I_C и I_L – соответственно амплитудные значения силы тока в обеих ветвях (содержащих C и L). Знак «минус» в формуле (1) показывает, что токи в обеих ветвях противоположны по знаку.

Из формулы (1) следует, что

$$I_C = I_L. \tag{2}$$

Поскольку имеем параллельную цепь, то амплитудные значения внешнего напряжения и напряжений на конденсаторе и катушке равны:

$$U_C = U_L = U_m.$$

Учитывая эту формулу, выражение (2) можем записать как

$$\frac{U_m}{R_C} = \frac{U_m}{R_L},$$

откуда следует, что емкостное реактивное $\left(R_C = \frac{1}{\omega C}\right)$ и индуктивное реактивное ($R_L = \omega L$) сопротивления равны, т.е.

$$\frac{1}{\omega C} = \omega L. \qquad (3)$$

Так как $\omega = 2\pi\nu$, то из формулы (3) найдем индуктивность

$$L = \frac{1}{4\pi^2\nu^2 C} = 1{,}05 \text{ Гн}.$$

Ответ: $L = 1{,}05$ Гн

7. В колебательном контуре, содержащем конденсатор емкостью $C = 5$ нФ и катушку индуктивностью $L = 10$ мкГн и активным сопротивлением $R = 0{,}2$ Ом, поддерживаются незатухающие гармонические колебания. Определите амплитудное значение напряжения U_{Cm} на конденсаторе, если средняя мощность, потребляемая колебательным контуром, составляет 5 мВт.

Дано: $C = 5$ нФ; $L = 10$ мкГн; $R = 0{,}2$ Ом; $< P >= 5$ мВт.

Найти: U_{Cm}.

Решение. Средняя мощность, потребляемая контуром,

$$< P >= \frac{1}{2} R I_m^2, \qquad (1)$$

где $I_m = U_{Cm}\omega C$ – амплитуда силы тока.

Так как в контуре поддерживаются незатухающие колебания, $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Подставив эти выражения в формулу (1), получаем

$$< P >= \frac{R U_{Cm} \omega^2 C^2}{2} = \frac{R U_{Cm} C}{2L},$$

откуда найдем амплитудное значение напряжения на конденсаторе

$$U_{Cm} = \sqrt{\frac{2L < P >}{RC}} = 10 \text{ В}.$$

Ответ: $U_{Cm} = 10$ В

2. Электромагнитные волны

1. Определите, во сколько раз изменится длина ультразвуковой волны при переходе ее из меди в сталь, если скорости распространения ультразвука в меди и стали соответственно равны $\upsilon_1 = 3{,}6\ ^{\text{км}}/_{\text{с}}$ и $\upsilon_2 = 5{,}5\ ^{\text{км}}/_{\text{с}}$.

Дано: $\upsilon_1 = 3{,}6\ ^{\text{км}}/_{\text{с}}$, $\upsilon_2 = 5{,}5\ ^{\text{км}}/_{\text{с}}$.

Найти: $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

Решение. При распространении волн частота колебаний не изменяется при переходе из одной среды в другую (она зависит только от свойств источника волн), т.е. $\nu_1 = \nu_2 = \nu$.

Связь длины λ волны с частотой ν

$$\lambda = \frac{\upsilon}{\nu}, \qquad (1)$$

где υ – скорость волны.

Искомое отношение, согласно (1),

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = 1{,}53 \text{ (увеличится в 1,53 раза).}$$

Ответ: 1,53

2. Плоская электромагнитная волна распространяется в вакууме в соответствии с уравнениями

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{K}\vec{r} + \varphi_0);$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 \cos(\omega t - \vec{K}\vec{r} + \varphi_0),$$

где $\vec{E}_0 = \{30;\ \ 30;\ \ 0\}\ ^{\text{мВ}}/_{\text{м}}$, вектор $\vec{B}$ параллелен некоторому вектору $\vec{a} = \{-1;\ \ 1;\ \ 0\}$, $\omega = 3\cdot 10^7\ \text{с}^{-1}$.

Найти: 1) направление распространения волны; 2) волновое число 3) максимальное значение плотности энергии волны в произвольной точке.

Решение. 1. Векторы $\vec{E}$, $\vec{B}$ и $\vec{k}$ составляют правовинтовую тройку. Это значит, что вектор $\vec{k}$ сонаправлен векторному произведению $\left[\vec{E},\vec{B}\right]$ или $\left[\vec{E}_0,\vec{a}\right]$. Воспользовавшись этим свойством, определим направление вектора $\vec{k}$, которое совпадает с направлением распространения электромагнитной волны

$$\left[\vec{E}_0,\vec{a}\right]=\begin{bmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ E_{xo} & E_{yo} & 0\\ a_x & a_y & 0\end{bmatrix}=\vec{e}_z(E_{xo}a_y-E_{yo}a_x)=\vec{e}_z(30+30)\ {}^{мВ}\!/_{м}=60\vec{e}_z\ {}^{мВ}\!/_{м}.$$

Следовательно, волна распространяется в направлении $+OZ$.

2. Волновое число находим по формуле $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$:

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{\omega}{c}=\frac{3\cdot10^7}{3\cdot10^8}\ м^{-1}=0{,}1\ м^{-1}.$$

3. Максимальное значение плотности энергии электромагнитного поля в любой точке пространства получим по формуле (15.3) при условии $E^2=E_0^2$ и $B^2=B_0^2$. Тогда

$$\omega_{max}=\frac{\varepsilon_0E_0^2}{2}+\frac{B_0^2}{2\mu_0}=\frac{\varepsilon_0E_0^2}{2}+\frac{E_0^2}{2\mu_0c^2}=\frac{\varepsilon_0E_0^2}{2}+\frac{\varepsilon_0E_0^2}{2}=\varepsilon_0E_0^2=\varepsilon_0(E_{ox}^2+E_{oy}^2).$$

Произведем вычисления

$$\omega_{max}=8{,}85\cdot10^{-12}(30^2+30^2)\cdot10^{-6}\ {}^{Дж}\!/_{м^3}=1{,}6\cdot10^{-14}\ {}^{Дж}\!/_{м^3}.$$

Ответ: $\omega_{max}=1{,}6\cdot10^{-14}\ {}^{Дж}\!/_{м^3}$