Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ, НЕ СОДЕРЖАЩИХ ИСХОДНЫХ ПУНКТОВ

Методические указания
к выполнению лабораторных работ
для студентов специальности 1-56 02 01 «Геодезия»

Новополоцк
ПГУ
2012

УДК 519.6:528.063(075.8)
ББК 22.19:26.1я73

Авторы:

МИЦКЕВИЧ В. И.
ГРИЩЕНКОВ А. В.
ГРИЩЕНКОВ Е. В.
СЫРОВА Н. С.
УСОВ Д. В.

Одобрено и рекомендовано к изданию методической комиссией геодезического факультета (протокол № 4 от 26.12.2012)

Кафедра прикладной геодезии и фотограмметрии

Рецензенты:

канд. техн. наук, доц. каф. прикладной геодезии и фотограмметрии В. В. ЯЛТЫХОВ;
канд. техн. наук, доц. каф. геодезии и кадастров А. М. ДЕГТЯРЕВ

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МЕТОДАХ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ ВЕСОВ, ПРЕДНАЗНАЧЕННОЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ, НЕ СОДЕРЖАЩИХ ИСХОДНЫХ ПУНКТОВ

1.1. Получение обратной матрицы весов методом А. Н.Тихонова

Известно, что для геодезических сетей, не содержащих исходных пунктов, определитель матрицы системы нормальных уравнений при параметрическом способе уравнивания равен нулю. То есть говорят, что матрица коэффициентов нормальных уравнений вырожденная. Существует несколько методов получения обратной матрицы Q от вырожденной матрицы коэффициентов системы нормальных уравнений R. Если матрица системы нормальных уравнений особенная (вырожденная), то в MATLABе обратная матрица весов может быть получена так:

$$q = pinv(r), \tag{1.1}$$

где функция *pinv* всегда записывается прописными буквами, которые удобно использовать при записи имени как матрицы обратных весов Q, так и матрицы коэффициентов нормальных уравнений R. В MATLABе можно записать

$$Q = pinv(R), \tag{1.2}$$

что неудобно использовать при записи с переключением CapsLock.

Если матрица R вырожденная, то формула (1.2) приведет к верному результату, а формула

$$Q = inv(R) \tag{1.3}$$

где *inv* – функция обращения матриц,
даст деление на ноль.

Если использовать другие программные продукты, например, Excel, то подпрограмму *pinv* можно не найти и, для того чтобы обращать вырожденную матрицу R, необходимо использовать другие методы. Например:

– метод регуляризации, предложенный А. Н.Тихоновым;

– метод Г. Г. Асташенкова (только для нивелирных и спутниковых сетей);

– метод В. Н. Ганьшина, применяемый для нивелирных и спутниковых сетей;

– метод В. И. Мицкевича, предназначенный для уравнивания любых геодезических сетей без исходных пунктов, как плановых, нивелирных, так и спутниковых GNSS построений.

Рассмотрим основные формулы метода А. Н. Тихонова [1]:

$$Q_\alpha = \left(R^2 + \alpha E\right)^{-1} R, \tag{1.4}$$

где Q_α – обратная весовая матрица, используемая для оценки точности функции измеренных и уравненных величин, размерностью $t \times t$ (t – число параметров);

α – параметр регуляризации (скаляр);

$E_{t\times t}$ – единичная матрица.

$R_{t\times t}$ – матрица коэффициентов нормальных уравнений, вычисляемая по формуле

$$R = A^T PA, \tag{1.5}$$

где $A_{N\times t}$ – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок, вычисляемая для каждого из N измерений (для одного измерения в матрице A будет отведена одна строка);

$P_{N\times N}$ – матрица весов измерений.

Формула (1.4) универсальна: если матрица R неособенная, то можно принять $\alpha = 0$, если матрица R вырожденная, то α необходимо искать особыми методами. Один из таких методов разработал Ю. Г. Карпушин. Суть этого метода в следующем:

1) для некоторого вектора свободных членов y вычисляют вектор поправок в предварительные координаты пунктов размерностью $t \times 1$:

$$\delta x_\alpha = -\left(R^2 + \alpha E\right)^{-1} R y_{t\times 1}; \tag{1.6}$$

2) находят целевую функцию:

$$\Phi = \left|\delta - \Theta\right|, \tag{1.7}$$

в которой

$$\delta = \sqrt{\delta x_\alpha^T \delta x_\alpha}; \tag{1.8}$$

$$\Theta = \sqrt{\Delta \mathrm{B}^{\mathrm{T}} \Delta B}, \tag{1.9}$$

где $\Delta B_{t\times 1}$ – некоторый вектор, зависящий от y.

Задача нахождения α решается путем минимизации функции Φ методом приближений, начиная с α = 0,1. Величину α отыскивают приближениями, уменьшая ее в 10 раз.

Например:

$$\alpha_1 = 0{,}1; \qquad \Phi_1 = \left|\delta_1 - \Theta_1\right|;$$

$$\alpha_2 = 0{,}01; \qquad \Phi_2 = \left|\delta_2 - \Theta_1\right|;$$

$$\alpha_3 = 0{,}001; \qquad \Phi_3 = \left|\delta_3 - \Theta_1\right|;$$

$$\alpha_4 = 0{,}0001; \qquad \Phi_4 = \left|\delta_4 - \Theta_1\right|.$$

При переходе от одного приближения к другому Φ должна уменьшаться. Приближения продолжаются до тех пор, пока не произойдет увеличение Φ.

Метод А. Н. Тихонова позволяет вычислять Q_α для любых геодезических сетей.

1.2. Метод Г. Г. Асташенкова

Этим методом можно найти псевдообратную матрицу R^+ от матрицы коэффициентов нормальных уравнений R при параметрическом способе уравнивания. Метод предназначен для вычисления R^+ только для нивелирных и спутниковых GNSSсетей.

Основная формула:

$$Q = R^+ = \left(R + I^T I\right)^{-1} - I^T I / t^2, \tag{1.10}$$

где $I = (1,\ 1,\ 1,\ ...,\ 1)_{1\times t}$ – вспомогательная матрица;

t – число параметров.

Это наиболее простой метод получения псевдообратной матрицы для нивелирных сетей. При этом $R = A^T PA$ согласно формуле (1.5).

1.3. Метод В. Н. Ганьшина

В основе метода[2]лежит принцип нахождения средней плоскости относительно пунктов нивелирной сети, отметки которых вычисляются по соответствующим формулам.

Для нахождения расширенной псевдообратной матрицы F и матрицы Q используют формулы

$$F = G\left(S^T PS\right)^{-1} S^T P; \tag{1.11}$$

$$Q = FP^{-1}F^T\,; \qquad (1.12)$$

$$G_{t\times(t-1)} = \frac{1}{t}\begin{pmatrix} t-1 & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & t-1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & -1 & t-1 & \ldots & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & t-1 \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 \end{pmatrix}, \qquad (1.13)$$

где $G_{t\times(t-1)}$ – вспомогательная псевдообратная матрица, формируемая программой,

$S_{N,t-1}$ – матрица A без последнего столбца для одного исходного пункта;

$A_{N\times 1}$ – матрица коэффициентов уравнений поправок;

$P_{N\times N}$ –диагональная матрица весов измерений.

1.4. Метод В. И. Мицкевича

Главная псевдообратная матрица при параметрическом способе уравнивания для случая равноточных измерений вычисляется по формуле [3, стр. 47]

$$A^+ = (A^TA)^{-1}A^T. \qquad (1.14)$$

Для неравноточных измерений, когда диагональная матрица весов $P \neq E$, существует матричное выражение

$$A^+ = \left(A^T PA\right)^{-1} A^T P^{\frac{1}{2}}, \qquad (1.15)$$

а псевдообратная матрица от матрицы R, найденная по (1.5), будет такой:

$$R^+ = A^+\left(A^+\right)^T, \qquad (1.16)$$

что справедливо также и для равноточных измерений. Вычисление матрицы $(A^TPA)^{-1}$, входящей в (1.15), проблематично, если определитель матрицы $R = A^TPA$ равен нулю. Однако в 2010 г. В. И. Мицкевичем была получена новая формула:

$$A^+ = Q_{рек}A^T P^{\frac{1}{2}}, \qquad (1.17)$$

где $Q_{рек}$ – матрица обратных весов, найденная рекуррентным способом при соответствующем выборе матрицы Q_0.

Формулы для вычисления Q при неособенной матрице R хорошо известны [4, 5]:

$$Q_i = Q_{i-1} - Z_i^T Z_i / g_i\,; \tag{1.18}$$

$$Z_i^T = Q_{i-1} A_i^T\,; \tag{1.19}$$

$$g_i = \frac{1}{P_i} + A_i Z_i^T\,, \tag{1.20}$$

где i – номер измерения.

При подключении последнего n-го измерения

$$Q_{рек} = Q_n \tag{1.21}$$

Матрица $Q_{рек}$ должна быть вычислена с максимальным числом значащих цифр.

Матрица A^+, вычисленная по формуле (1.17), будет иметь $S/2$ верных значащих цифр, где S – число разрядов в разрядной сетке чисел на ЭВМ (например, в MATLABе S = 16).

Начальная матрица Q_0 может быть получена по формуле [6]

$$Q_0 = 10^m E\,, \tag{1.22}$$

предложенной Ю. И. Маркузе. Степень m может быть найдена по эмпирическим формулам, разработанным В. И. Мицкевичем в 1992 году и опубликованным его учеником, студентом Г. М. Двоенко, в 1994 году [7] после их совместных исследований. Окончательный вариант формул для вычисления степени m опубликован в [8, стр. 29].Соответствующие формулы имеют вид:

$$C = \max\left|\sqrt{P_i}A_i\right|\,; \tag{1.23}$$

$$m = \frac{S}{2\lg C} \quad \text{при } C > 10; \tag{1.24}$$

$$m = \frac{S}{2} \quad \text{при } 0{,}1 \le C \le 10; \tag{1.25}$$

$$m = \frac{S}{2}\left|lg\, C\right| \quad \text{при } C < 0{,}1. \tag{1.26}$$

2. ЧИСЛОВЫЕ ПРИМЕРЫ

2.1. Числовой пример по уравниванию нуль-свободной нивелирной сети разными методами

Рассмотрим нуль-свободную нивелирную сеть (рис. 1.1), не содержащую исходных пунктов.

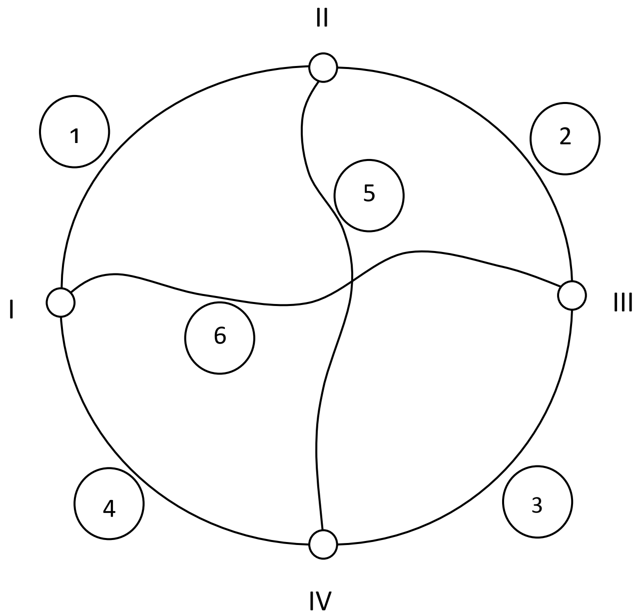

Рисунок 1.1 – Нивелирная сеть без исходных пунктов

Так как нет исходных пунктов, то число параметров $t = 4$ – количество определяемых пунктов. Матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок составляется по известным правилам с учетом направления нивелирования, показываемого стрелкой. На рисунке 1.1. стрелок нет, и это правильно, потому что в дальнейшем мы будем выполнять предрасчет точности нивелирной сети в процессе ее проектирования. Так как нивелирную сеть мы проектируем, то направление нивелирования неизвестно. В этом случае в строках матрицы A левый коэффициент, равный единице, запишем без минуса, а правый – с минусом. В результате матрица A для нашего примера будет такой:

$$A_{6\times 4} = \begin{array}{r|cccc|}
 & I & II & III & IY \\ \hline
1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
4 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
5 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
6 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline
\end{array}$$

Матрица коэффициентов нормальных уравнений, найденная по формуле (1.5) при равноточных измерениях, полагая $P = E$, будет следующей:

$$R_{4\times 4} = \begin{array}{c|cccc|} & I & II & III & IY \\ \cline{2-5} 1 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ \cline{2-5} \end{array}$$

2.2. Метод А. Н. Тихонова

При проектировании нивелирных сетей вектор y (см.(1.6)) задают произвольно. Пусть его компоненты будут такими:

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Продолжая вычисления по формулам (1.7), (1.8), (1.9), получим

$$\Theta = 5{,}477226;$$

$$\alpha_1 = 0{,}1; \qquad \Phi_1 = 4{,}921681;$$

$$\alpha_2 = 0{,}01; \qquad \Phi_2 = 4{,}918558;$$

$$\alpha_3 = 0{,}001; \qquad \Phi_3 = 4{,}918244;$$

$$\alpha_4 = 0{,}0001; \qquad \Phi_4 = 4{,}918212;$$

$$\alpha_5 = 0{,}00001; \qquad \Phi_5 = 4{,}918208.$$

Полагая $\alpha = 0{,}00001$, по формуле (1.4) найдем

$$Q_\alpha = \begin{pmatrix} 0{,}187499 & -0{,}062499 & -0{,}062499 & -0{,}062499 \\ & 0{,}187499 & -0{,}062499 & -0{,}062499 \\ & & 0{,}187499 & -0{,}062499 \\ & sim & & 0{,}187499 \end{pmatrix}.$$

На этом вычисления по методу А. Н. Тихонова считаются завершенными. Получая матрицу Q_α другими методами, мы найдем близкие значения элементов этой матрицы к указанным выше величинам, что является контролем вычислений.

2.3. Применение стандартной подпрограммы *pinv*

Зная матрицу R, по формуле (1.2) найдем

$$R^{+}=\begin{pmatrix} 0,187500 & -0,062500 & -0,062500 & -0,062500 \\ & 0,187500 & -0,062500 & -0,062500 \\ & & 0,187500 & -0,062500 \\ & sim & & 0,187500 \end{pmatrix}.$$

Процедура *pinv* универсальна для любых геодезических сетей, но имеет недостаток. Если коэффициенты матрицы R из-за малой ошибки в весах измерений будут возмущены на малую величину, то этой процедурой матрицу R^{+} можно не получить. Например, в нашем случае, полагая $R(1,1) = 3,01$, применяя $pinv(R)$, найдем

$$R^{+}=\begin{pmatrix} 100,5 & 100 & 100 & 100 \\ & 100,5 & 100,25 & 100,25 \\ & & 100,5 & 100,25 \\ & sim & & 100,5 \end{pmatrix},$$

что является неверным результатом.

2.4. Метод Г. Г. Асташенкова

В этом методе для нашего примера имеем $I = (1, 1, 1, 1)_{1\times 4}$ – вспомогательная матрица при $t = 4$. Тогда

$$I^{T}I = ones(4)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

где *ones* – вспомогательная функция MATLABа, позволяющая не набирать вектор I и не вычислять произведение матриц $I^{T}I$. Применяя процедуру *ones*, вместо формулы (1.10) в MATLABе можно записать

$$R^{+}=\left(R+ones(4)\right)^{-1}-ones(4)/16.$$

В результате получим матрицу R^{+}, такую же, как в невозмущенном методе с использованием программы *pinv*:

$$R^{+} = \begin{pmatrix} 0{,}187500 & -0{,}062500 & -0{,}062500 & -0{,}062500 \\ & 0{,}187500 & -0{,}062500 & -0{,}062500 \\ & & 0{,}187500 & -0{,}062500 \\ & sim & & 0{,}187500 \end{pmatrix}.$$

2.5. Метод В. Н. Ганьшина

Матрица G (см.(1.13)) при $t = 4$ будет следующей:

$$G_{4\times 3} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрица S, определяемая по матрице A (без последнего столбца), будет такой:

$$S_{6\times 4} = \begin{array}{c|ccc|} & I & II & III \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & -1 \\ \hline \end{array}$$

Матрица F, найденная по формуле (1.11) при $P = E$, будет следующей:

$$F = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 & 0 & 0{,}25 & 0 & 0{,}25 \\ -0{,}25 & 0{,}25 & 0 & 0 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & -0{,}25 & 0{,}25 & 0 & 0 & -0{,}25 \\ 0 & 0 & -0{,}25 & -0{,}25 & -0{,}25 & 0 \end{pmatrix}.$$

По формуле (1.12) при $P^{-1} = E$ (так как $P = E$) окончательно получим

$$R^{+} = \begin{pmatrix} 0{,}187500 & -0{,}062500 & -0{,}062500 & -0{,}062500 \\ & 0{,}187500 & -0{,}062500 & -0{,}062500 \\ & & 0{,}187500 & -0{,}062500 \\ & sim & & 0{,}187500 \end{pmatrix}.$$

2.6. Метод В. И. Мицкевича

Согласно (1.23), $C = 1$. По формуле (1.25) найдем $m = 8$ (так как $S = 16$), и начальная матрица Q_0 будет такой [6]:

$$Q_0 = 10^m E = \begin{pmatrix} 100000000 & 0 & 0 & 0 \\ & 100000000 & 0 & 0 \\ & & 100000000 & 0 \\ & sim & & 100000000 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $N = 6$ (количество измерений), то, используя последовательно строки матрицыA, применим формулы (1.18) – (1.20) шесть раз и по формуле (1.20) найдем [9]:

g =						
	$2 \cdot 10^8$	$1{,}5 \cdot 10^8$	$1{,}33 \cdot 10^8$	4	2	2

Подключая последнюю строку матрицы A (применяя шестой раз формулу (1.18)), получим

$$Q_{рек} = 10^7 \begin{pmatrix} 2{,}50 & 2{,}50 & 2{,}50 & 2.50 \\ & 2.50 & 2.50 & 2.50 \\ & & 2.50 & 2.50 \\ & sim & & 2.50 \end{pmatrix}.$$

При $P = E$ по формуле (1.17) вычислим A^+:

$$A^+ = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 & 0 & 0{,}25 & 0 & 0{,}25 \\ -0{,}25 & 0{,}25 & 0 & 0 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & -0{,}25 & 0{,}25 & 0 & 0 & -0{,}25 \\ 0 & 0 & -0{,}25 & -0{,}25 & -0{,}25 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как видим, в нашем случае и во всех других случаях в методе В. И. Мицкевича $A^+ = F$ (см. метод В. Н. Ганьшина). По формуле (1.16) найдем матрицу R^+, близкую к Q_α:

$$Q_\alpha \approx R^+ = \begin{pmatrix} 0{,}187500 & -0{,}062500 & -0{,}062500 & -0{,}062500 \\ & 0{,}187500 & -0{,}062500 & -0{,}062500 \\ & & 0{,}187500 & -0{,}062500 \\ & sim & & 0{,}187500 \end{pmatrix}.$$

Этот метод позволяет находить матрицы A^+ и R^+, используемые при оценке точности и уравнивании любых плановых, высотных или спутниковых геодезических сетей, и так же, как метод А. Н. Тихонова, устойчив к возмущениям в элементах матриц P и A. Исследования показали, что изложенный метод является одним из наилучших по своей простоте, универсальности и надежности.

3. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ «ПРОЕКТИРОВАНИЕ НИВЕЛИРНОЙ СЕТИ БЕЗ ИСХОДНЫХ ПУНКТОВ РАЗЛИЧНЫМИ МЕТОДАМИ»

Методы, изложенные выше, универсальны для любых геодезических сетей. Пусть дана нивелирная сеть, показанная на рис. 3.1. Связь между пунктами для превышений указаны в таблице 3.1.

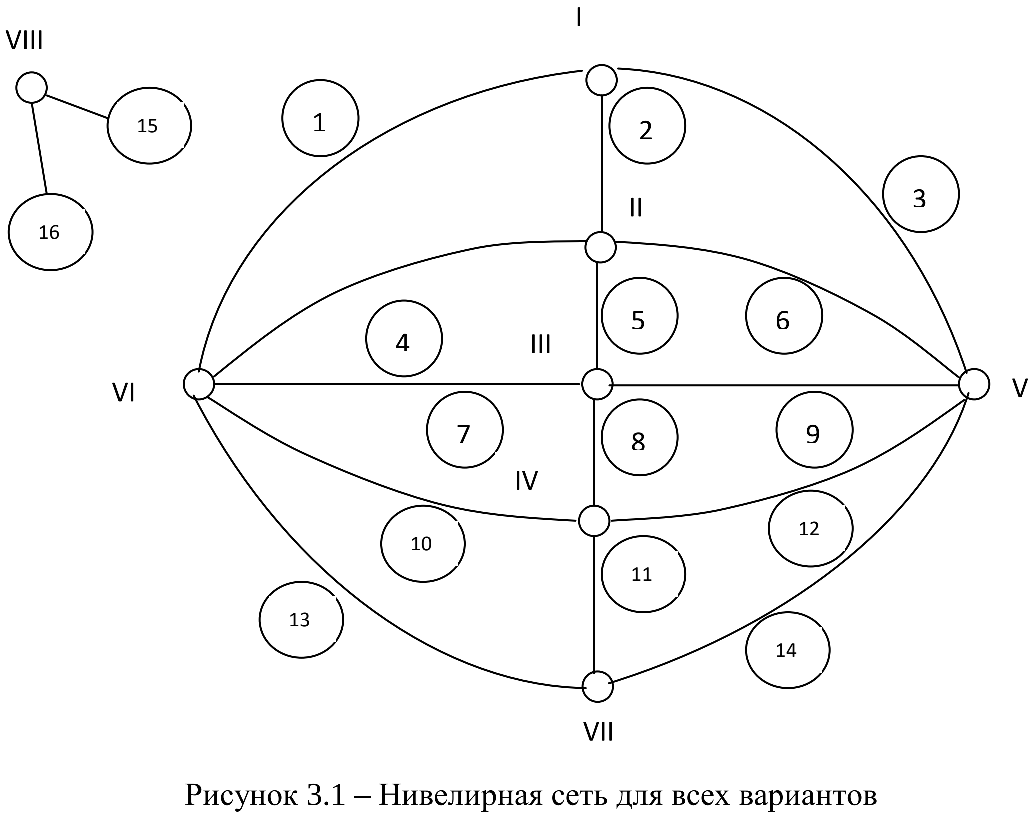

Рисунок 3.1 – Нивелирная сеть для всех вариантов

Таблица 3.1 –Сведения о превышениях

Номер превышения	Связи		Номер превышения	Связи		Номер превышения	Связи	
1	I	VI	6	II	V	11	IV	VII
2	I	II	7	III	VI	12	IV	V

Окончание таблицы 3.1

Номер превышения	Связи		Номер превышения	Связи		Номер превышения	Связи	
3	I	V	8	III	IV	13	VI	VII
4	II	IV	9	III	V	14	V	VII
5	II	III	10	IV	VI	–	–	–

В таблице 3.2 даны варианты, включающие в себя все семь пунктов основной сети (одинаковые во всех вариантах) и пункт VIII для превышений 15, 16.

Таблица 3.2 – Дополнительные превышения с номерами 15, 16 между пунктами VIII и всеми другими реперами

№ варианта	Связи с VIII пунктом		№ варианта	Связи с VIII пунктом		№ варианта	Связи с VIII пунктом	
1	I	II	8	II	IV	15	III	VII
2	I	III	9	II	V	16	IV	V
3	I	IV	10	II	VI	17	IV	VI
4	I	V	11	II	VII	18	IV	VII
5	I	VI	12	III	IV	19	V	VI
6	I	VII	13	III	V	20	V	VII
7	II	III	14	III	VI	21	VI	VII

Например, в первом варианте превышение 15 будет между пунктами VIII–I, превышение 16 – между пунктами VIII–II, а в варианте 16 превышение 15 – VIII–IV; превышение 16 VIII – V и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов, А. Н. О вариационном методе регуляризации при уравнивании свободных геодезических сетей / А. Н. Тихонов [и др.] // Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1980. – 1. – С.45–53.

2. Ганьшин, В. Н. Измерение вертикальных смещений сооружений и анализ устойчивости реперов / В. Н. Ганьшин [и др.] ; под общ. ред. В. Н. Ганьшина. – М. : Недра, 1981. – 215 с.

3. Воеводин, В. В. Матрицы и вычисления / В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов. – М. : Наука, 1984. – 320 с.

4. Маркузе, Ю. И. Уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей / Ю. И. Маркузе. – М. : Недра, 1982. – 191 с.

5. Маркузе, Ю. И. Алгоритмы для уравнивания геодезических сетей на ЭВМ / Ю. И. Маркузе. – М. : Недра, 1989. – 248 с.

6. Маркузе, Ю. И. Основы уравнительных вычислений : учеб. пособие для вузов / Ю. И. Маркузе. – М. : Недра, 1990. – 240 с.

7. Двоенко, Г. М. О выборе начальной матрицы при рекуррентном способе уравнивания плановых геодезических сетей / Г. М. Двоенко // Геодезия и картография. – 1994. – № 8. – С. 9–11.

8. Мицкевич, В. И. Математические методы и модели на ЭВМ : учеб.-метод. комплекс / В. И. Мицкевич. – Новополоцк : ПГУ, 2007. – 184 с.

9. Грищенков, Е. В. Универсальный алгоритм идентификации необходимых и избыточных измерений и его практические приложения. / Е. В. Грищенков, В. И. Мицкевич // Автоматизированные технологии изысканий и проектирования. – 2011. – № 3. – С. 64–68.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ,
НЕ СОДЕРЖАЩИХ ИСХОДНЫХ ПУНКТОВ

Методические указания
к выполнению лабораторных работ
для студентов специальности 1-56 02 01 «Геодезия»

Редактор *В. В. Демиденко*

Подписано в печать 13.01.2012. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Ризография. Усл. печ. л. 0,93. Уч.-изд. л. 0,38. Тираж 99 экз. Заказ 40.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Полоцкий государственный университет».

ЛИ № 02330/0548568 от 26.06.2009 ЛП № 02330/0494256 от 27.05.2009

Ул. Блохина, 29, 211440, г. Новополоцк.