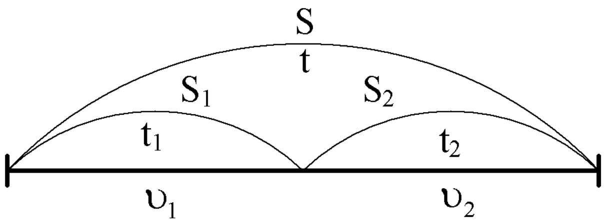
1. МЕХАНИКА

1.1 Кинематика

1.1 Автомобиль первую половину пути движется с постоянной скоростью $\upsilon_1 = 25\ м/с$, а вторую половину пути – со скоростью $\upsilon_2 = 16\ м/с$. Найти среднюю путевую скорость $\upsilon_{ср}$ за полное время движения.

Дано	Решение
$S_1 = S_2 = \dfrac{S}{2}$;	Введем обозначения: S – общий путь, пройденный за все время движения – t; S_1 – участок, пройденный за первый отрезок времени t_1; S_2 – участок, пройденный за второй отрезок времени t_2 (см рисунок).
$\upsilon_1 = 25\ м/с$;	
$\upsilon_2 = 16\ м/с$;	
$\upsilon_{ср}$ – ?	



Согласно определению средней путевой скорости находим:

$$\upsilon_{ср} = \frac{S}{t}$$

где $S = S_1 + S_2$, $t = t_1 + t_2$, поскольку $t_1 = \dfrac{S_1}{\upsilon_1}$, а $t_2 = \dfrac{S_2}{\upsilon_2}$, то, учитывая, что выражение для средней скорости можем переписать в виде:

$$\upsilon_{ср} = \frac{S_1 + S_2}{\dfrac{S_1}{\upsilon_1} + \dfrac{S_2}{\upsilon_2}} = \frac{\dfrac{S}{2} + \dfrac{S}{2}}{\dfrac{S}{2\upsilon_1} + \dfrac{S}{2\upsilon_2}} = \frac{2\upsilon_1\upsilon_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2}.$$

Проверим размерность полученной формулы:

$$\left[\upsilon_{\text{ср}}\right] = \frac{2[\upsilon_1][\upsilon_2]}{[\upsilon_1] + [\upsilon_2]} = \frac{\text{м/с} \cdot \text{м/с}}{\text{м/с}} = \text{м/с}.$$

Подставляя числовые данные, получим:

$$\upsilon_{ср} = \frac{2 \cdot 25 \cdot 16}{25 + 16} = 19{,}5\ \text{м/с}.$$

Ответ: $19{,}5\ м/с$.

1.2 Материальная точка движется по прямой. Уравнение ее движения $S = t^4 + 2t^2 + 5$. Определить мгновенную скорость и ускорение точки в конце второй секунды от начала движения, среднюю скорость и путь, пройденный за это время.

Дано:
$S = t^4 + 2t^2 + 5$
$t = 2$ с
υ; a; $\langle \upsilon \rangle$; S' – ?

Решение

Продифференцировав по времени уравнение движения материальной точки, можно найти выражение для скорости материальной точки:

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} = 4t^3 + 4t$$

Мгновенная скорость в заданный момент времени:

$$\upsilon = 4(2^3 + 2) = 40 \text{ (м/с)}$$

Аналогично определим мгновенное ускорение как первую производная от скорости по времени:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = 12t^2 + 4 = 12 \cdot 2^2 + 4 = 52 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Среднюю скорость точки $\langle \upsilon \rangle$ за время $\Delta t = t - t_0$ определим по формуле

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{dS}{dt} = \frac{S(t) - S(0)}{t - t_0}.$$

Так как $t_0 = 0$, то

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{t^4 + 2t^2 + 5 - 5}{t} = t^3 + 2t = 12 \text{ м/с}.$$

Путь, пройденный точкой за время $t = 2$ с, будет равен

$$S = S(t) - S(0) = t^4 + 2t^2 + 5 - 5 = 2^4 + 2 \cdot 2^2 = 24 \text{ м}.$$

Ответ: $\upsilon = 40$ м/с; $a = 52$ м/с^2; $\langle \upsilon \rangle = 12$ м/с; $S = 24$ м.

1.3 Заданы уравнения движения двух материальных точек: $x_1 = A_1 + B_1t + + C_1t^2$, $x_2 = A_2 + B_2t + C_2t^2$, где $A_1 = 18$ м; $A_2 = 2$ м; $B_1 = B_2 = 3$ м/с; $C_1 = -3$ м/с^2; $C_2 = 1$ м/с^2. Найти момент времени, когда скорости движения точек будут одинаковы. Определить скорости υ_1 и υ_2 и ускорения a_1 и a_2 точек в этот момент времени.

Дано:
$x_1 = A_1 + B_1t + + C_1t^2$
$x_2 = A_2 + B_2t + C_2t^2$
$A_1 = 18$ м, $A_2 = 2$ м
$B_1 = B_2 = 3$ м/с
$C_1 = -3$ м/с^2, $C_2 = 1$ м/с^2

υ_1; υ_2; a_1; a_2; t – ?

Решение

Заданы кинематические уравнения движения в координатной форме. Уравнение зависимости скорости точки от времени найдем, дифференцируя заданное уравнение движения по времени, т.е.

$$\upsilon_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A_1 + B_1t + C_1t^2\right) = B_1 + 2C_1t\,;$$

$$\upsilon_2 = \frac{dx_2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A_2 + B_2t + C_2t^2\right) = B_2 + 2C_2t$$

По условию задачи $\upsilon_1 = \upsilon_2$ в момент времени t, т.е.

$$B_1 + 2C_1t = B_2 + 2C_2t,$$

откуда

$$t = \frac{B_1 - B_2}{2C_2 - 2C_1} \text{ и, т.к. по условию } B_1 = B_2\text{, то } \quad t = 0.$$

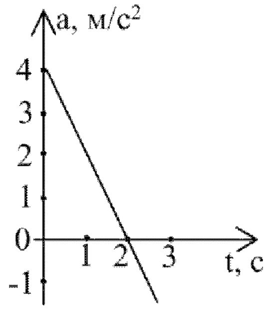
Значит, $\upsilon_1 = B_1 = 3$ (м/с); $\upsilon_2 = B_2 = 3$ (м/с).

Ускорение в произвольный момент времени найдем, продифференцировав найденное выражение для зависимости скорости от времени (взяв вторую производную от заданного уравнения движения по времени):

$$a_1 = \frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}\left(B_1 + 2C_1t\right) = 2C_1 \text{ , т.о. } \quad a_1 = -6 \text{ м/с}^2;$$

$$a_2 = \frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}\left(B_2 + 2C_2t\right) = 2C_2 \text{ , т.о. } \quad a_2 = 2 \text{ м/с}^2;$$

Ответ: $t = 0$; $\upsilon_1 = \upsilon_2 = 3$ м/с; $a_1 = -6$ м/с^2; $a_2 = 2$ м/с^2.



1.4 На рисунке представлена зависимость ускорения a от времени t для материальной точки, движущейся прямолинейно. Определить скорость υ и координату x точки через t = 3 с после начала движения. В какой момент времени t_1 точка изменит направление движения?

Дано:
t = 3 с
υ; x; t_1 – ?

Решение

Из графика следует, что зависимость ускорения от времени можно представить в виде

$$a(t) = A - Bt \tag{1}$$

где A = 4 м/с^2; B = 2 м/с^3.

В случае прямолинейного движения скорость материальной точки при $\upsilon_0 = 0$ (согласно условию задачи)

$$\upsilon = \int_0^t a dt\,. \tag{2}$$

Подставив в формулу (2) выражение (1) и проинтегрировав, получим искомую скорость: $\upsilon = At - \dfrac{Bt^2}{2}$. Проверим размерность: $[\upsilon] = \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\text{с} - \dfrac{\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}^3} = \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$; тогда $\upsilon = 4\cdot 3 - \dfrac{2\cdot 9}{2} = 12 - 9 = 3$ м/с.

Искомая координата $x = \int_0^t \upsilon dt = \int_0^t \left(At - \dfrac{Bt^2}{2}\right)dt = \dfrac{At^2}{2} - \dfrac{Bt^3}{6}$ Проверим размерность: $[x] = \dfrac{\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2} - \dfrac{\text{м}\cdot\text{с}^3}{\text{с}^3} = \text{м}$; тогда $x = \dfrac{4\cdot 9}{2} - \dfrac{2\cdot 27}{6} = 18 - 9 = 9$ м.

Точка изменяет направление движения в момент, когда скорость $\upsilon = 0$, т.е. $At - \dfrac{Bt^2}{2} = 0$, откуда $t = \dfrac{2A}{B}$; Проверим размерность: $[t] = \dfrac{\text{м}\cdot\text{с}^3}{\text{с}^2\cdot\text{м}} = \text{с}$; тогда $t_1 = \dfrac{2\cdot 4}{2} = 4$ с.

Ответ: υ = 3 м/с; x = 9 м; t_1 = 4 с.

1.5 Тело брошено вверх с высоты 12 м под углом 30° к горизонту с начальной скоростью 12 м/с. Определить продолжительность полета тела до точки *A* и до точки *B* (см. рисунок); максимальную высоту, которой достигает тело, дальность полета тела. Сопротивление воздуха не учитывать.

Дано:
$H = 12$ м
$\upsilon_0 = 12$ м/с
$\alpha = 30°$

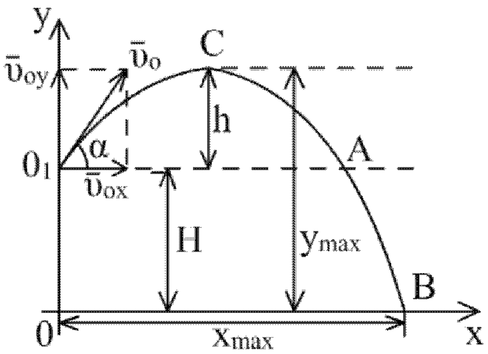
t_A; t_B; H_{max}; x_{max} – ?

Решение.

В обозначенной на рисунке системе координат составляющие скорости

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\alpha; \quad (1)$$

$$\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha - gt. \quad (2)$$



Координаты тела с течением времени меняются в соответствии с уравнением равнопеременного движения:

$$y = H + \upsilon_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}; \quad (3)$$

$$x = \upsilon_0 t \cos\alpha. \quad (4)$$

Время подъема тела найдем из условия, что в наивысшей точке подъема тела скорость $\upsilon_y = 0$. Тогда из уравнения (2)

$$t_{подъема} = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g}. \quad (5)$$

Время спуска тела от точки *C* до точки *A* равно времени подъема, поэтому продолжительность полета из точки O_1 до точки *A* равна:

$$t_A = 2t_{подъема} = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}. \quad (6)$$

Максимальную высоту подъема найдём из уравнения (3), подставив в него время подъема из уравнения (5):

$$y_{max} = H_{max} = H + \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g}. \quad (7)$$

Время полета до точки *B* найдем из уравнения (3), приравняв координату *y* к нулю ($y = 0$):

$$t_B = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{2H}{g}}. \quad (8)$$

Дальность полета найдем из уравнения (4), подставив в него время движения из уравнения (8):

$$x_{max} = \upsilon_0 t_B \cos\alpha . \qquad (9)$$

Проведем вычисления по формуле (6): $t_A = \dfrac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}$, тогда $t_A = \dfrac{2\cdot 12\cdot 0{,}5}{9{,}81} = 1{,}22$ с; Проверим размерность $[t_A] = \dfrac{\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}\cdot\text{м}} = \text{с}$;

По формуле (8) $t_B = \dfrac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g} + \sqrt{\left(\dfrac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + \dfrac{2H}{g}}$; тогда:

$$t_B = \frac{12\cdot 0{,}5}{9{,}81} + \sqrt{\left(\frac{12\cdot 0{,}5}{9{,}81}\right)^2 + \frac{2\cdot 12}{9{,}81}} \approx 2{,}29 \text{ с};$$

$$[t_B] = \frac{\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}\cdot\text{м}} + \sqrt{\left(\frac{\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}\cdot\text{м}}\right)^2 + \frac{\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{м}}} = \text{с} + \text{с} = \text{с};$$

по формуле (7): $H_{max} = H + \dfrac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = 12 + \dfrac{12^2\cdot 0{,}5^2}{2\cdot 9{,}81} \approx 12 + 1{,}83 = 13{,}83$ м;

$$[H_{max}] = \text{м} + \frac{\text{м}^2\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{м}} = \text{м} + \text{м} = \text{м};$$

по формуле (9):

$x_{max} = \upsilon_0 t_B \cos\alpha$; $\quad x_{max} = 12\cdot 0{,}866\cdot 2{,}29 = 23{,}8$ м; $\quad [x_{max}] = \dfrac{\text{м}}{\text{с}}\cdot\text{с} = \text{м}$.

Ответ: $t_A = 1{,}22$ с; $t_B = 2{,}29$ с; $H_{max} = 13{,}83$ м; $x_{max} = 23{,}8$ м.

1.6 Материальная точка движется по закону $\vec{r}(t) = A\sin(5t)\vec{i} + B\cos^2(5t)\vec{j}$, где $A = 2$ м, $B = 3$ м. Определить вектор скорости, вектор ускорения и траекторию движения точки.

Дано:
$A = 2$ м; $B = 3$ м
$\vec{\upsilon}(t)$; $\vec{a}(t)$; $y(x)$ – ?

Решение

По условию задачи движение материальной точки задается изменением радиус-вектора с течением времени:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} . \qquad (1)$$

Сравнивая уравнение (1) с заданным, запишем движение точки координатным способом:

$$\begin{cases} x(t) = A\sin(5t); \\ y(t) = B\cos^2(5t); \\ z(t) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Определим проекции вектора скорости на оси координат:

$$\begin{cases} \upsilon_x = \dfrac{dx}{dt} = 5A\cos(5t); \\ \upsilon_y = \dfrac{dy}{dt} = -5B\cdot 2\cos(5t)\sin(5t) = -5B\sin(10t); \\ \upsilon_z = \dfrac{dz}{dt} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Согласно выражению для вектора мгновенной скорости $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \upsilon_x \vec{i} + \upsilon_y \vec{j} + \upsilon_z \vec{k}$, в данном случае выражение для вектора скорости будет иметь вид:

$$\vec{\upsilon}(t) = 5A\cos(5t)\vec{i} + \left(-5B\sin(10t)\right)\vec{j}. \quad (4)$$

Определим проекции вектора ускорения на координатные оси:

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{d\upsilon_x}{dt} = -25A\sin(5t); \\ a_y = \dfrac{d\upsilon_y}{dt} = -50\cos(10t); \\ a_z = \dfrac{d\upsilon_z}{dt} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Согласно выражению для вектора мгновенного ускорения $\vec{a} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, в данном случае для вектора ускорения:

$$\vec{a}(t) = -25A\sin(5t)\vec{i} - 50B\cos(10t)\vec{j}. \quad (6)$$

Для определения траектории движения точки исключим из системы уравнений (2) время. Для этого представим систему в виде

$$\begin{cases} \sin(5t) = \dfrac{x}{A}; \\ \cos^2(5t) = \dfrac{y}{B}. \end{cases} \quad (7)$$

Возведя в квадрат левую и правую части первого уравнения в системе (7) и просуммировав уравнения, получим:

$$\sin^2(5t) + \cos^2(5t) = \frac{x^2}{A^2} + \frac{y}{B}. \tag{8}$$

Левая часть уравнения (8) равна 1, тогда

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y}{B} = 1. \tag{9}$$

Выражение (9) является уравнением параболы:

$$y = \frac{A^2B - Bx^2}{A^2}. \tag{10}$$

Подставив в (10) данные из условия задачи, найдем траекторию движения точки:

$$y = 3 - \frac{3}{4}x^2.$$

Из полученного уравнения следует, что при $y \geq 0$ траектория имеет вид параболы, расположенной выше оси x, по которой точка совершает колебательное движение.

Ответ: $\vec{\upsilon}(t) = 10\cos(5t)\vec{i} - 15\sin(10t)\vec{j}$; $\vec{a}(t) = -50\sin(5t)\vec{i} - 150\cos(10t)\vec{j}$; $y = 3 - \frac{3}{4}x^2$.

1.7 Маховик, вращавшийся с постоянной частотой n_0 = 10 об/с, при торможении начал вращаться равнозамедленно. Когда торможение прекратилось, вращение маховика снова сделалось равномерным, но уже с частотой n = 6 об/с. Определить угловое ускорение ε маховика и время торможения t, если за время торможения маховик сделал N = 50 оборотов.

Дано:
n_0 = 10 об/с
n = 6 об/с
N = 50

ε, t – ?

Решение

Воспользуемся соотношением углового ускорения ε с начальной ω_0 и конечной скоростью ω:

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi.$$

Так как $\omega = 2\pi n$; $\varphi = 2\pi N$, получим:

$$\varepsilon = \frac{4\pi^2(n^2 - n_0^2)}{2\cdot 2\pi N} = \frac{\pi(n^2 - n_0^2)}{N}; \quad [\varepsilon] = \frac{1}{c^2}; \quad \varepsilon = \frac{3{,}14(36-100)}{50} = -4{,}02 \text{ рад/с}^2.$$

Знак «минус» для углового ускорения говорит о том, что движение равнозамедленное. Для нахождения времени торможения воспользуемся уравнением угловой скорости для вращательного движения:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t; \qquad 2\pi n = 2\pi n_0 + \varepsilon t;$$

$$t = \frac{2\pi\,(n - n_0)}{\varepsilon}; \qquad t = \frac{2\cdot 3{,}14(6-10)}{-4{,}02} = 6{,}25 \text{ с}.$$

Ответ: $\varepsilon = -4{,}02$ рад/с^2; $t = 6{,}25$ с.

1.8 Диск радиусом 10 см вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота диска от времени задается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $B = 1$ рад/с, $C = 1$ рад/с^2, $D = 0{,}5$ рад/с^3. Определить для точек на ободе диска к концу второй секунды после начала движения: 1) угловую скорость; 2) угловое ускорение; 3) среднюю угловую скорость за этот промежуток времени; 4) среднее угловое ускорение за этот промежуток времени; 5) тангенциальное ускорение a_τ; 6) нормальное ускорение a_n; 7) полное ускорение a.

Дано:
$\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$
$B = 1$ рад/с
$C = 1$ рад/с^2
$D = 0{,}5$ рад/с^3
$t = 2$ с
$R = 0{,}1$ м

ω; ε; $\langle\omega\rangle$; $\langle\varepsilon\rangle$; a_n; a_τ; a – ?

Решение

1. Уравнение, описывающее зависимость угловой скорости от времени найдем, продифференцировав по времени уравнение, описывающее зависимость угла поворота диска:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct + 3Dt^2;$$

Для искомого момента времени:

$$\omega = 1 + 2\cdot 1\cdot 2 + 3\cdot 0{,}5\cdot 2^2 = 11 \text{ рад/с}.$$

2. Уравнение, описывающее зависимость углового ускорения можно найти, продифференцировав найденное уравнение зависимости угловой скорости от времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2C + 6Dt;$$

Для искомого момента времени:

$$\varepsilon = 2\cdot 1 + 6\cdot 0{,}5\cdot 2 = 8 \text{ рад/с}^2.$$

3. Средняя угловая скорость

$$\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$

где $\Delta\varphi$ – угол, на который поворачивается радиус за время от $t_0 = 0$ до $t = 2$ с;

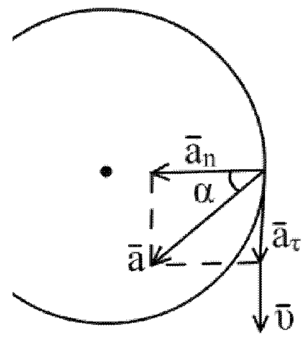
$$\langle\omega\rangle = \frac{A + Bt + Ct^2 + Dt^3 - A}{t} = BtCt + Dt^2;$$

$$\langle\omega\rangle = 1 + 1\cdot 2 + 0{,}5\cdot 2^2 = 5 \text{ рад/с}.$$

4. Среднее угловое ускорение $\langle\varepsilon\rangle = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$, где $\Delta\omega$ – измерение скорости за время от $t_0 = 0$ до $t = 2$ с. Тогда

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{B + 2Ct + 3Dt^2 - B}{t} = 2C + 3Dt; \qquad \langle\varepsilon\rangle = 2\cdot 1 + 3\cdot 0{,}5\cdot 2 = 5 \text{ рад/с}^2.$$

На рисунке показан вектор линейной скорости в момент времени $t = 2$ с. Направление тангенциального ускорения $\vec{a}_\tau$ совпадает с вектором скорости $\vec{\upsilon}$, а вектор $\vec{a}_n$ направлен по радиусу к центру диска.



5. Тангенциальное ускорение выражает изменение линейной скорости по модулю, $a_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt}$, и может быть найдено как $a_\tau = \varepsilon R = 8\cdot 0{,}1 = 0{,}8$ м/с^2.

6. Нормальное ускорение показывает изменение скорости по направлению

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R; \qquad a_n = 11^2\cdot 0{,}1 = 12{,}1 \text{ м/с}^2.$$

7. Полное ускорение

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}; \qquad a = \sqrt{12{,}1^2 + 0{,}8^2} = 12{,}13 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $\omega = 11$ рад/с; $\varepsilon = 8$ рад/с^2; $\langle\omega\rangle = 5$ рад/с; $\langle\varepsilon\rangle = 5$ рад/с^2; $a_\tau = 0{,}8$ м/с^2; $a_n = 12{,}1$ м/с^2; $a = 12{,}1$ м/с^2.

1.9 Зависимость пути S от времени t для вращающейся по окружности радиусом R = 6 м точки M дается в виде уравнения $S = At^3$, где A = 0,2 м/с^3. Определить тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорение для момента времени, когда линейная скорость точки υ = 0,6 м/с, а также угол φ между векторами $\vec{a}_\tau$ и a.

Дано:	**Решение**
$S = At^3$ A = 0,2 м/с^3 R = 6 м υ = 0,6 м/с	Найдем выражение, определяющее зависимость линейной скорости точки как первую производную от заданного выражения пути от времени:
a_n; a_τ; a; α – ?	$$\upsilon = \frac{dS}{dt} = 3At^2.$$

Найдем момент времени t, когда линейная скорость υ = 0,6 м/с:

$$t = \sqrt{\frac{\upsilon}{3A}}; \qquad [t] = \sqrt{\frac{\text{м} \cdot \text{с}^3}{\text{с} \cdot \text{м}}} = \text{с}, \quad t = 1 \text{ с}.$$

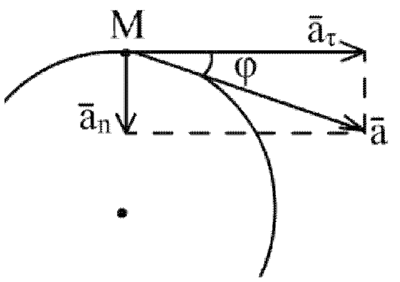
Тангенциальное ускорение точки:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = 6At \qquad [a_\tau] = \frac{\text{м}}{\text{с}^3} \cdot \text{с} = \text{м/с}^2; \quad a_\tau = 1{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Нормальное ускорение:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}; \qquad [a_n] = \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{м}} = \text{м/с}^2; \qquad a_n = 0{,}06 \text{ м/с}^2.$$

Полное ускорение $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$;



$$[a] = \sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^4}} = \text{м/с}^2; \quad a = 1{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$ направлено по касательной к окружности, а нормальное ускорение $\vec{a}_n$ – перпендикулярно к $\vec{a}_\tau$ (см. рисунок).

Из рисунка tgφ = $\dfrac{a_n}{a_\tau}$, тогда $\varphi = arctg\dfrac{a_n}{a_\tau}$. Получим φ = 3°.

Ответ: a_τ = 1,2 м/с^2; a_n = 0,06 м/с^2; a = 1,2 м/с^2; φ = 3°.

1.10 Нормальное ускорение точки, движущейся по окружности радиусом $r = 4$ м, задается уравнением $a_n = 1 + 6t + 9t^2$ Определить: 1) тангенциальное ускорение точки; 2) путь, пройденный точкой за время $t_1 = 5$ с после начала движения; 3) полное ускорение в момент времени $t_2 = 1$ с.

Дано:	**Решение**
$r = 4$ м;	Тангенциальное ускорение
$a_n = 1 + 6t + 9t^2$;	$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}. \quad (1)$$
$t_1 = 5$ с; $t_2 = 1$ с;	
a_τ – ? a_2 – ? S_1 – ?	Нормальное ускорение $a_n = \frac{\upsilon^2}{r}$. Согласно условию за-

дачи $a_n = A + Bt + Ct^2$, тогда

$$\upsilon = \sqrt{r(A + Bt + Ct^2)} = \sqrt{4(1 + 6t + 9t^2)} = 2(1 + 3t) = 2 + 6t. \quad (2)$$

Из выражения (1) с учетом (2) тангенциальное ускорение

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}(2 + 6t) = 6 \text{ м/с}^2. \quad (3)$$

Искомый путь за время t_1

$$S_1 = \int_0^{t_1} \upsilon dt = \int_0^{t_1} (2 + 6t)dt = 2t_1 + 3t_1^{\ 2}.$$

Полное ускорение точки в момент времени t_2

$$a_2 = \sqrt{a_{\tau 2}^{\ 2} + a_{n2}^{\ 2}} = \sqrt{a_\tau^{\ 2} + (\frac{\upsilon^2}{r})^2} = \sqrt{a_\tau^{\ 2} + \frac{(2 + 6t_2)^4}{r^2}}$$

(учли, что $a_\tau = \text{const}$).

Вычисляя, получим: $a_\tau = 6$ м/с^2; $S_1 = 85$ м; $a_2 = 17{,}1$ м/с^2.

Ответ: $a_\tau = 6$ м/с^2; $S_1 = 85$ м; $a_2 = 17{,}1$ м/с^2

1.2 Динамика материальной точки

1.11 Принимая, что масса Земли неизвестна, определить высоту h, на которой ускорение свободного падения g_1 будет в $n = 3$ раза меньше, чем ускорение свободного падения у поверхности Земли g. Радиус Земли $R_0 = 6{,}37 \cdot 10^3$ м.

Дано:

$g_1 = \frac{g}{n}$

$n = 3$

$R_0 = 6{,}37 \cdot 10^6$ м

h – ?

Решение

Если пренебречь суточным вращением Земли вокруг своей оси, то сила тяжести и сила гравитационного взаимодействия равны:

$$mg_1 = \frac{GmM}{(R_0 + h)^2}, \qquad (1)$$

где M – масса Земли; m – масса тела; R_0 – радиус Земли; h – высота орбиты над поверхностью Земли; G – гравитационная постоянная.

Учитывая условие задачи, выражение (1) запишем в виде

$$\frac{g}{n} = \frac{GM}{\left(R_0 + h\right)^2},$$

откуда

$$h = \sqrt{\frac{nGM}{g}} - R_0 . \qquad (2)$$

Для тела, находящегося у поверхности Земли,

$$mg = G\frac{mM}{R_0{}^2}, \text{ откуда } GM = gR_0{}^2.$$

Подставив это значение в формулу (2), найдем искомую высоту:

$$h = R_0\left(\sqrt{n} - 1\right); \quad [h] = \text{м};$$

$$h = 6{,}37 \cdot 10^6\left(\sqrt{3} - 1\right) = 6{,}37 \cdot 10^6\left(1{,}73 - 1\right) = 4{,}65 \cdot 10^6 \text{ м}.$$

Ответ: $h = 4{,}65 \cdot 10^6$ м $= 4{,}65$ Мм.

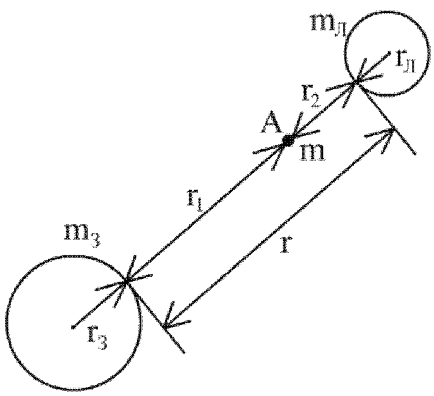
1.12 Определить точку либрации Земли, т.е. точку пространства, в которой материальное тело массой m одинаково притягивается Землей и Луной.

Дано:
$F_1 = F_2$.

r_1 – ?

Решение

Допустим, что точка A, лежащая на линии соединения центров Земли и Луны, является либрационной точкой



(см. рисунок). Выпишем табличные данные:

масса Земли $m_З = 5{,}976 \cdot 10^{24}$ кг;

масса Луны $m_Л = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ кг;

радиус Земли $r_З = 6{,}378 \cdot 10^{6}$ м;

радиус Луны $r_Л = 1{,}737 \cdot 10^{6}$ м;

среднее расстояние до Луны $r = 3{,}844 \cdot 10^{8}$ м.

Пусть r_1 – расстояние от поверхности Земли до искомой точки A; r_2 – расстояние от поверхности Луны до точки A.

Найдем силы притяжения: F_1 – между телом массой m и Землей и F_2 – между телом и Луной:

$$F_1 = G\frac{m \cdot m_{\text{Ç}}}{(r_1 + r_{\text{Ç}})^2} \qquad F_2 = G\frac{m \cdot m_{\text{Ë}}}{(r_2 + r_{\text{Ë}})^2}$$

По условию задачи модули этих сил равны, т.е. $F_1 = F_2$ или

$$G\frac{m \cdot m_З}{\left(r_1 + r_З\right)^2} = G\frac{m \cdot m_Л}{\left(r_2 + r_Л\right)^2}. \qquad (1)$$

Расстояние от поверхности Земли до Луны $r = r_1 + r_2$, тогда

$$r_2 = r - r_1. \qquad (2).$$

Подставив (2) в (1) и извлекая квадратный корень из обеих частей уравнения, получим:

$$\frac{\sqrt{m_З}}{r_1 + r_З} = \frac{\sqrt{m_Л}}{r - r_1 + r_Л},$$

откуда

$$r_1 + r_З = \sqrt{\frac{m_З}{m_Л}}\left(r - r_1 + r_Л\right). \qquad (3)$$

Преобразуем выражение (3):

$$r_1\left(1 + \sqrt{\frac{m_З}{m_Л}}\right) = \sqrt{\frac{m_З}{m_Л}}(r + r_Л) - r_З; \qquad (4)$$

$$1+\sqrt{\frac{m_З}{m_Л}}=\frac{\sqrt{m_З}+\sqrt{m_Л}}{\sqrt{m_Л}}. \qquad (5)$$

Тогда из (4) и (5) находим:

$$r_1=\frac{(r+r_З)\sqrt{m_З}-r_З\sqrt{m_Л}}{\sqrt{m_З}+\sqrt{m_Л}};\quad [r_1]=\frac{\sqrt{кг}\cdot м-\sqrt{кг}\cdot м}{\sqrt{кг}+\sqrt{кг}}=м.$$

Подставив табличные данные, получим, что либрационная точка находится на расстоянии r_1 = $3{,}4\cdot 10^8$ м от поверхности Земли.

Ответ: $r_1 = 3{,}4\cdot 10^8$ м.

1.13 Тело скользит по наклонной плоскости, составляющей угол α = 60° с горизонтом. Зависимость пути S от времени t задается уравнением $S=A+Bt+Ct^2$, где A = 5 м; B = −1 м/с; C = 1,5 м/с^2. Найти коэффициент трения μ тела о плоскость.

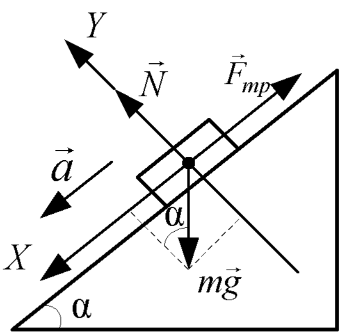
Дано:
α = 60°
$S=A+Bt+Ct^2$
A = 5 м
B = −1 м/с
C =2,5 м/с^2

μ − ?

Решение

Дифференцируя дважды заданное уравнение движения тела по времени, найдем уравнение, описывающее зависимость ускорения от времени:

$$a=\frac{d^2S}{dt^2}=2C \qquad (1)$$



На рисунке показаны силы, действующие на тело. Согласно второго закона Ньютона для данного тела можем записать:

$$m\vec{a}=m\vec{g}+\vec{F}_{тр}+\vec{N} \qquad (2)$$

Запишем уравнение (2) в проекциях на координатные оси:

OX:

$$ma=-F_{тр}+mg\sin\alpha; \qquad (3)$$

OY:

$$0=N-mg\cos\alpha\,. \qquad (4)$$

Из уравнения (4) найдем силу реакции опоры: $N=mg\cos\alpha$.

Сила трения

$$F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha. \qquad (5)$$

Подставляя уравнение (5) в (3), получим: $ma = -\mu mg\cos\alpha + mg\sin\alpha$, откуда $a = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha$, согласно выражению (1) $a = 2C$, тогда $g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha = 2C$

и $\mu = \dfrac{g\sin\alpha - 2C}{g\cos\alpha}$; $[\mu] = \dfrac{\left(\dfrac{м}{с^2} - \dfrac{м}{с^2}\right)}{\dfrac{м}{с^2}} = 1$; т.е. μ – безразмерная величина

$$\mu = \frac{9,8\sin 60 - 2\cdot 2,5}{9,8\cos 60} = 0,7\,.$$

Ответ: μ=0,7.

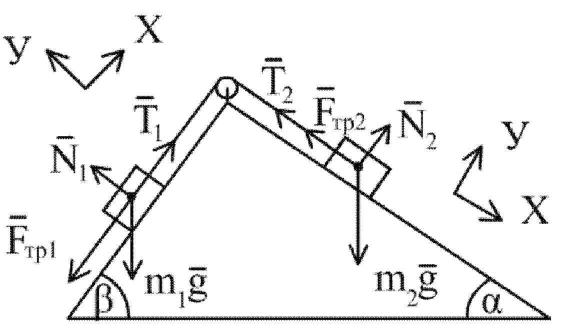
1.14 На вершине двух наклонных плоскостей, образующих с горизонтом углы α = 30° и β = 45°, укреплен блок. Грузы $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг соединены нитью, перекинутой через блок. Определить ускорение *a*, с которым начнут двигаться грузы вдоль наклонной плоскости, и силу натяжения нити *T*. Коэффициенты трения грузов о плоскости равны между собой: $\mu_1 = \mu_2 = \mu = 0,1$. Блок и нить невесомы.

Дано:
α = 30°
β = 45°
$m_1 = 1$ кг
$m_2 = 2$ кг
$\mu = 0,1$
g = 9,8м м/с^2

a; *T* – ?

Решение

На каждый из грузов действуют четыре силы: сила тяжести $m\vec{g}$, силы реакции опоры $\vec{N}$, сила натяжения $\vec{T}$ и сила трения скольжения $\vec{F}_{тр}$ (см. рисунок). Мы не знаем направления силы трения. Сила трения скольжения направлена всегда в сторону, противоположную скорости движущегося тела. Сила трения не может изменить направления движения. При отсутствии силы трения ускорение грузов определяется разностью составляющих сил тяжести, направленных вдоль наклонных плоскостей.



Так как $m_1 g\sin\beta < m_2 g\sin\alpha$ (1·9,8·0,71< 2·9,8·0,5), то груз m_1 будет двигаться вверх по наклонной плоскости, а груз m_2 – вниз.

Так как блок невесомый, то сила натяжения нити

$$T_1 = T_2 = T.$$

Запишем основное уравнение динамики для поступательного движения в векторной форме:

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T} + \vec{F}_{mp1} = m_1\vec{a}; \\ m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{T} + \vec{F}_{mp2} = m_2\vec{a}. \end{cases}$$

Запишем для грузов уравнения в проекциях на выбранные оси координат. Оси выберем так, чтобы ось X совпадала с ускорением. Так как нить нерастяжима, то ускорения тел $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = |\vec{a}|$.

$$\begin{cases} -m_1 g\sin\beta - F_{mp1} + T = m_1 a; \\ N_1 - m_1 g\cos\beta = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} m_2 g\sin\alpha - F_{mp2} - T = m_2 a; \\ N_2 - m_2 g\cos\alpha = 0. \end{cases}$$

Сила трения $F_{mp} = \mu N$, тогда

$$\begin{cases} -m_1 g\sin\beta - \mu m_1 g\cos\beta + T = m_1 a; \\ m_2 g\sin\alpha - \mu m_2 g\cos\alpha - T = m_2 a. \end{cases}$$

Складывая уравнения, получим:

$$a = \frac{m_2 g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m_1 g(\sin\beta + \mu\cos\beta)}{m_1 + m_2}; \quad [a] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{кг}\cdot\text{с}^2} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a = \frac{2\cdot 9{,}8(0{,}5 - 0{,}1\cdot 0{,}86) - 1\cdot 9{,}8(0{,}71 + 0{,}1\cdot 0{,}71)}{3} = 0{,}15\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

$$T = m_2\big(g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - a\big);$$

$T = 2(9{,}8(0{,}5 - 0{,}1\cdot 0{,}87) - 0{,}15) = 7{,}8$ Н; $\qquad [T] = \text{кг}\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} - \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right) = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}$

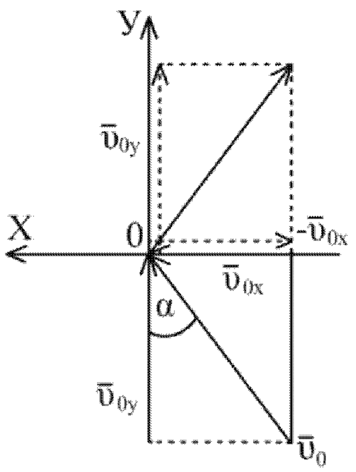
Ответ: $a = 0{,}15\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $T = 7{,}8$ Н.

1.15 Найти импульс ΔP, полученный плоской поверхностью в результате абсолютно упругого удара о нее шара массой m = 0,5 кг, если перед ударом шар имел скорость 0,5 м/с, направленную под углом α = 30° к поверхности.

Дано:
m = 0,5 кг
$\upsilon_0 = 5$ м/с
α = 30°
ΔP – ?

Решение

При ударе о плоскость (см. рисунок) шар сообщает ей импульс, численно равный изменению импульса шара при ударе. При абсолютно упругом ударе проекция импульса шара на ось OY не изменяется, а проекция импульса шара на ось OX изменяет свое направление на противоположное, не изменяясь по абсолютной величине. Поэтому изменение импульса шара при ударе:



$$\Delta P_ш = m\Delta\upsilon_x = -m\upsilon_0\sin\alpha - m\upsilon_0\sin\alpha = -2m\upsilon_0\sin\alpha.$$

Импульс, получаемый стенкой,

$$\Delta P = -\Delta P_ш = 2m\upsilon_0\sin\alpha; \quad [\Delta P] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}};$$

$$\Delta P = 2\cdot 0{,}5\cdot 5\cdot 0{,}5 = 2{,}5\,\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}.$$

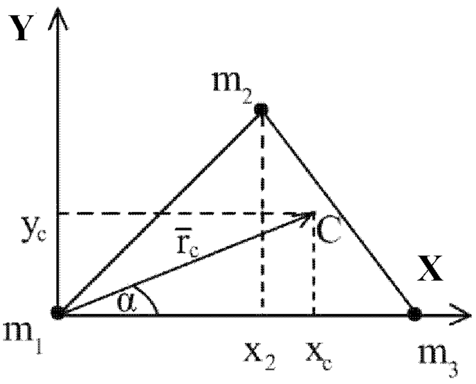
Ответ: $\Delta P = 2{,}5\,\dfrac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}$.

1.16 Определить положение центра масс (радиус-вектор центра масс $\vec{r}_c$ и его модуль $|\vec{r}_c|$) системы, состоящей из трех материальных точек массами $m_1 = 1{,}4$ кг, $m_2 = 1{,}2\,кг$ и $m_3 = 1{,}8$ кг, находящихся в вершинах равностороннего треугольника со стороной a = 0,6 м. Определить также угол между основанием треугольника и направлением радиус-вектора центра масс.

Дано:
$m_1 = 1{,}4$ кг
$m_2 = 1{,}2$ кг
$m_3 = 1{,}8$ кг
a = 0,6 м
$\vec{r}_c$, r_c, α – ?

Решение

Начало координат поместим в точку расположения массы m_1, а ось X направим вдоль прямой, соединяющей материальные точки массами m_1 и m_3 (см. рисунок). Тогда координаты соответствующих материальных точек массами m_1, m_2 и m_3 :



$$x_1 = 0;\ y_1 = 0;$$

$$x_2 = a\sin\pi/6;\ y_2 = a\cos\pi/6;$$

$$x_3 = a;\ y_3 = 0.$$

Учитывая выражение для координат центра масс системы материальных точек,

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}; \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},$$

где x_i, y_i – координаты i-той точки; m_i – масса i-той точки; n – число материальных точек системы.

Для нашей задачи можем записать:

$$x_c = \frac{m_2 a \sin\frac{\pi}{6} + m_3 a}{m_1 + m_2 + m_3};$$

$$y_c = \frac{m_2 a \cos\frac{\pi}{6}}{m_1 + m_2 + m_3}. \qquad (1)$$

Искомый радиус-вектор центра масс системы материальных точек

$$\vec{r}_c = x_c\vec{i} + y_c\vec{j} = \frac{m_2 a \sin\frac{\pi}{6} + m_3 a}{m_1 + m_2 + m_3}\vec{i} + \frac{m_2 a \cos\frac{\pi}{6}}{m_1 + m_2 + m_3}\vec{j}; \quad \left[\vec{r}_c\right] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{кг}} = \text{м};$$

$$\vec{r}_c = \left(32{,}7\vec{i} + 14\vec{j}\right)\ \text{см}.$$

Модуль радиус-вектора центра масс системы материальных точек

$$\left|\vec{r}_c\right| = \sqrt{x_c^{\,2} + y_c^{\,2}} = \frac{a\sqrt{\left(m_2\sin\frac{\pi}{6} + m_3\right)^2 + \left(m_2\cos\frac{\pi}{6}\right)^2}}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$\left[r_c\right] = \frac{\text{м}\sqrt{\text{кг}^2}}{\text{кг}} = \text{м}; \quad r_c = 35{,}7\ \text{см}.$$

Искомый угол (см. рисунок)

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{m_2\cos\frac{\pi}{6}}{m_2\sin\frac{\pi}{6}+m_3};\ \ \alpha = \frac{\text{кг}}{\text{кг}} = 1;\quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{1{,}2\cdot 0{,}866}{1{,}2\cdot 0{,}5+1{,}8} = 23°25'.$$

Ответ: $\vec{r}_c = \left(32{,}7\vec{i} + 14\vec{j}\right)$ см; $r_c = 35{,}7$ см; $\alpha = 23°25'$.

1.17 На железнодорожной платформе, движущейся со скоростью $\upsilon_0 = 3{,}6$ км/ч, укреплено орудие. Масса платформы с орудием M = 1 т. Ствол орудия направлен в сторону движения платформы и приподнят над горизонтом на угол $\alpha = 60°$. Найти скорость снаряда υ' (m = 10 кг) относительно платформы, если после выстрела скорость платформы уменьшилась в n = 2 раза.

Дано:

$\upsilon_0 = 1$ м/с

$M = 10^3$ кг

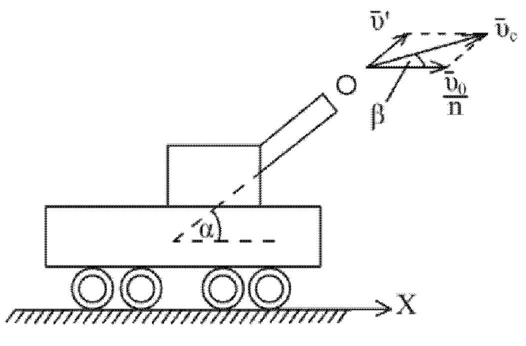
$\alpha = 60°$

m = 10 кг

υ' – ?

Решение

Система состоит из двух тел – платформы и снаряда. Силы, действующие на систему ($m\vec{g}$ и $\vec{N}$), направлены по вертикали. По оси X векторная сумма сил равна нулю: $\sum\vec{F} = 0$, следовательно, изменение импульса вдоль оси X равна нулю: $\Delta\sum m\upsilon_x = 0$, т.е. импульс по оси X сохраняется до и после выстрела. Относительно неподвижной системы отсчета, связанной с Землей, можно записать:



$$(M+m)\upsilon_0 = M\frac{\upsilon_0}{n} + m\upsilon_c\cos\beta,$$

где $\vec{\upsilon}_c = \vec{\upsilon}' + \dfrac{\vec{\upsilon}_0}{n}$. – скорость снаряда относительно Земли. Спроектируем на ось X:

$\upsilon_c\cos\beta = \upsilon'\cos\alpha + \dfrac{\upsilon_0}{n}$; тогда

$$(M+m)\upsilon_0 = M\frac{\upsilon_0}{n} + m\left(\upsilon'\cos\alpha + \frac{\upsilon_0}{n}\right);$$

$$(M+m)\upsilon_0 = M\frac{\upsilon_0}{n} + m\upsilon'\cos\alpha + \frac{m\upsilon_0}{n};$$

$$\upsilon' = \frac{\upsilon_0\left(M + m - \frac{M}{n} - \frac{m}{n}\right)}{m\cos\alpha} = \frac{\upsilon_0(n-1)(M+m)}{nm\cos\alpha};$$

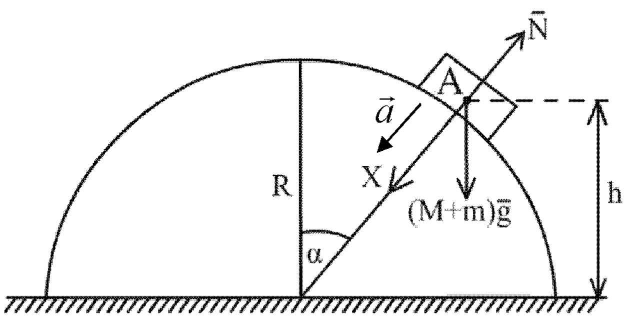
$$[\upsilon'] = \frac{\text{м} \cdot \text{кг}}{\text{с} \cdot \text{кг}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad \upsilon' = \frac{1 \cdot 1 \cdot (10^3 + 10)}{2 \cdot 10 \cdot 0{,}5} = 101 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\upsilon' = 101 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

1.18 Небольшое тело массой M лежит на вершине гладкой полусферы радиусом R. В тело попадает пуля массой m, летящая горизонтально со скоростью υ_0, и застревает в нем. Пренебрегая смещением тела во время удара, определить высоту h, на которой тело оторвется от поверхности полусферы. При какой скорости пули тело сразу оторвется от полусферы?

Дано:
M; m; R; υ_0.
h; υ_0' – ?

Решение



Здесь происходит неупругое взаимодействие, следовательно, чтобы определить скорость системы пуля – тело после удара, можно применить закон сохранения импульса

$$m\upsilon_0 = (M + m)u. \tag{1}$$

Предположим, что отрыв происходит в точке A (см. рисунок). Принимая во внимание показанные на рисунке силы, запишем уравнение движения:

$$\vec{N} + (M + m)\vec{g} = (M + m)\vec{a}. \tag{2}$$

Напишем условие отрыва: $N = 0$. Воспользуемся законом сохранения механической энергии: полная механическая энергия системы пуля – тело после удара равна полной механической энергии этой системы в момент отрыва (трение отсутствует):

$$\frac{(M+m)u^2}{2} + (M+m)gR = \frac{(M+m)\upsilon^2}{2} + (M+m)gh. \tag{3}$$

Из уравнения (1) определяем:

$$u = \frac{m\upsilon_0}{M+m}.$$

Чтобы от векторного уравнения (2) перейти к скалярным соотношениям, введем в соответствии с рисунком ось X вдоль радиуса полусферы:

$$X: \quad (M+m)g\cos\cos\alpha = (M+m)\frac{\upsilon^2}{R}. \tag{4}$$

Как видно из рисунка, $h = R\cos\alpha$, следовательно, равенство (4) запишется следующим образом:

$$gh = \upsilon^2. \tag{5}$$

Подставим (5) и (1) в (3) и определим высоту отрыва:

$$h = \frac{2R}{3} + \frac{1}{3g}\left(\frac{m\upsilon_0}{m+M}\right)^2. \tag{6}$$

Чтобы определить скорость пули υ_0', при которой тело сразу же оторвется от полусферы, достаточно высоту отрыва h в уравнении (6) приравнять к радиусу R и решить уравнение:

$$R = \frac{2R}{3} + \frac{1}{3g}\left(\frac{m\upsilon_0'}{m+M}\right)^2.$$

Получим:

$$\upsilon_0' = \frac{M+m}{m}\sqrt{gR}.$$

Ответ: $h = \frac{2R}{3} + \frac{1}{3g}\left(\frac{m\upsilon_0}{m+M}\right)^2$; $\upsilon_0' = \frac{M+m}{m}\sqrt{gR}$.

1.17 Тело брошено вниз в безветренную погоду с высоты h с нулевой начальной скоростью и попадает на землю в точку с географической широтой $\varphi = 50°$ северного полушария. Определить эту высоту h, если отклонение l тела от вертикали при его падении составляет 9 см.

Дано:
$\varphi = 50°$
$l = 9\cdot 10^{-2}$ м
$\upsilon_0 = 0$

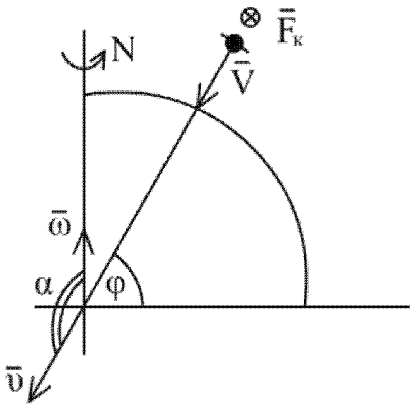
h – ?

Решение

Тело отклоняется от вертикали вследствие действия на него силы Кориолиса (см. рисунок)

$$\vec{F}_к = 2m[\vec{\upsilon}, \vec{\omega}], \tag{1}$$

где m – масса тела; $\vec{\upsilon}$ вектор скорости тела относительно Земли; $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости суточного вращения Земли. Эта сила возникает вследствие суточного вращения Земли вокруг своей оси, т.е. неинерциальности системы отсчета, связанной с Землей. Как следует из рисунка и



анализа формулы(1), сила Кориолиса $\vec{F}_к$ направлена перпендикулярно к плоскости чертежа от нас, т.е. к востоку. В этом же направлении будет происходить отклонение тела.

Модуль силы Кориолиса

$$F_к = 2m\upsilon\omega\sin\alpha, \qquad (2)$$

где α – угол между векторами $\vec{\upsilon}$ и $\vec{\omega}$. Из рисунка следует, что $\alpha = 90° + \varphi$, откуда $\sin\alpha = \cos\varphi$.

Скорость падающего тела направлена вдоль радиуса, $\upsilon = gt$ (t – время падения). Тогда сила Кориолиса (1) запишется в виде $F_к = 2m\omega gt\cos\varphi$.

Ускорение, сообщаемое телу силой Кориолиса и совпадающее с ней по направлению $a_к = \dfrac{F_к}{m} = 2\omega gt\cos\varphi$.

Скорость тела, обусловленная действием силы Кориолиса,

$$\upsilon_к = \int_0^t a_к dt = \int_0^t 2\omega gt\cos\varphi dt = \omega gt^2\cos\varphi.$$

Отклонение тела от вертикали $l = \int_0^t \upsilon_к dt = \int_0^t \omega gt^2\cos\varphi dt = \dfrac{1}{3}\omega gt^3\cos\varphi$,

откуда время падения

$$t = \sqrt[3]{\frac{3l}{\omega g\cos\varphi}}. \qquad (3)$$

Время падения t связано с высотой h соотношением $h = \dfrac{gt^2}{2}$.

Учитывая формулу (3) и то, что $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ (T = 24 ч – период суточного обращения Земли), найдем искомую высоту:

$$h = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9l^2gT^2}{4\pi^2\cos^2\varphi}};\quad [h] = \sqrt[3]{м^2\cdot\frac{м}{с^2}\cdot с^2} = \sqrt[3]{м^3} = м;$$

$$h = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9\left(9\cdot 10^{-2}\right)^2 9{,}81\cdot 86400^2}{4\cdot 3{,}14^2\cdot 0{,}6428^2}} = 743\ м.$$

Ответ: $h = 743$ м.

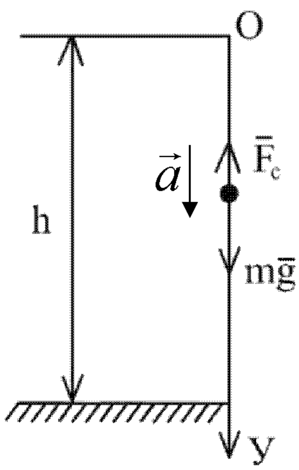
1.18 Парашютист массой m = 90 кг делает затяжной прыжок. Найти скорость парашютиста в момент раскрытия парашюта, если сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости движения: $\vec{F}_c = -r\vec{\upsilon}$, где r = 15 кг/с. Начальную скорость υ_0 принять равной нулю. Раскрытие парашюта произошло через 9 с свободного полета.

Дано:
m = 90 кг
$\vec{F}_c = -r\vec{\upsilon}$
r = 15 кг/с
$\upsilon_0 = 0$
t = 9 с

υ – ?

Решение

Рассмотрим движение в системе отсчета, связанной с Землей. Начало координат совместим с точкой, из которой начинается движение (точка O на рисунке), ось OY направим по вертикали к Земле. Считая высоту h малой по сравнению с радиусом Земли, примем ускорение свободного падения g = 9,8 м/с^2. На парашютиста действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила сопротивления воздуха $\vec{F}_c = -r\vec{\upsilon}$. По второму закону Ньютона запишем:



$$ma = mg - F_c \quad \text{или} \quad m\frac{d\upsilon}{dt} = mg - r\upsilon. \qquad (1)$$

Разделим переменные в уравнении (1):

$$\frac{d\upsilon}{g - \frac{r}{m}\upsilon} = dt. \qquad (2)$$

Проинтегрируем обе части выражения (2). Пределы интегрирования определяются условием задачи: при $t_0 = 0$ скорость $\upsilon_0 = 0$, в момент времени t скорость равна υ:

$$-\frac{m}{r}\int_0^{\upsilon}\frac{d\left(g - \frac{r}{m}\upsilon\right)}{g - \frac{r}{m}\upsilon} = \int_0^t dt; \quad \ln\left[\frac{g - \frac{r}{m}\upsilon}{g}\right] = -\frac{r}{m}t;$$

$$\upsilon = \frac{m}{r}g\left(1 - e^{-\frac{r}{m}t}\right); \quad \left[\frac{r}{m}t\right] = \frac{\text{кг}\cdot\text{с}}{\text{с}\cdot\text{кг}} = 1;$$

$$[\upsilon] = \frac{\text{кг}\cdot\text{с}\cdot\text{м}}{\text{кг}\cdot\text{с}^2} = \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad \upsilon = 45{,}7\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\upsilon = 45{,}7\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

1.19 Верхний конец стального стержня закреплен неподвижно, к нижнему подвешен груз 2000 кг. Длина стержня 5 м, сечение 4 см^2. Определить: а) нормальное напряжение материала стержня; б) абсолютное и относительное удлинения стержня; в) потенциальную энергию растянутого стержня.

Дано:
$m = 2000$ кг
$l = 5$ м
$S = 4 \cdot 10^{-4}$ м^2

σ, Δl, ε, $W_П$ – ?

Решение

а) нормальное напряжение σ материала растянутого стержня выражается формулой

$$\sigma = \frac{F}{S},$$

где F – сила, действующая вдоль оси стержня (в нашем случае вес P груза); S – площадь поперечного сечения стержня.

$$F = P = mg = 2 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8 = 2 \cdot 10^4 \text{ Н};$$

$$\sigma = \frac{2 \cdot 10^4}{4 \cdot 10^{-4}} = 5 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2;$$

б) абсолютное удлинение выражается формулой

$$\Delta l = \frac{Fl}{ES}, \qquad (1)$$

где F – сила (вес P груза); l – длина стержня; S – площадь поперечного сечения стержня; E – модуль Юнга (для стали $E = 20 \cdot 10^{10}$ Н/м^2).

$$\Delta l = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 5}{20 \cdot 10^{10} \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 1{,}25 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Относительное удлинение ε стержня определяется как отношение абсолютного удлинения Δl к первоначальной длине l:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

$$\varepsilon = \frac{1{,}25 \cdot 10^{-3}}{5} = 2{,}5 \cdot 10^{-4}; \qquad \varepsilon = 0{,}025 \text{ \%};$$

в) потенциальная энергия растянутого стержня выражается формулой

$$W_П = \frac{1}{2} k x^2, \qquad (2)$$

где k – жесткость стержня; в нашем случае $x = \Delta l$ – абсолютное удлинение.

Жесткость показывает величину силы, которая вызывает абсолютную деформацию, равную единице, т.е.

$$k = \frac{F}{x}. \qquad (3)$$

Подставив выражение абсолютного удлинения по (1) в (3), получим

$$k = \frac{F}{\frac{Fl}{ES}} = \frac{ES}{l}. \quad (4)$$

Подставив значение k из (7.4) в (7.2) и заменив x на Δl, запишем выражение потенциальной энергии упруго деформированного стержня в виде

$$W_П = \frac{1}{2} \cdot \frac{ES}{l} \cdot (\Delta l)^2.$$

Вычисления выполним в системе СИ.

$$W_П = \frac{20 \cdot 10^{10} \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 5}(1{,}25 \cdot 10^{-3})^2 = 12{,}5 \text{ Дж}.$$

Ответ: $\sigma = 5 \cdot 10^7$ Н/м^2; $\Delta l = 1{,}25 \cdot 10^{-3}$ м; $\varepsilon = 2{,}5 \cdot 10^{-4} = 0{,}025$ %;

$W_П = 12{,}5$ Дж.

1.20 Тело массой 1 кг под действием постоянной силы движется прямолинейно. Зависимость пути, пройденного телом, от времени задана уравнением $S = 2t^2 + 4t + 1$. Определить: 1) работу силы за 10 с от начала ее действия; 2) зависимость кинетической энергии от времени.

Дано:
$m = 1$ кг
$S = 2t^2 + 4t + 1$
$t = 10$ с

A, W_k – ?

Решение

Работа, совершаемая силой, выражается через интеграл

$$A = \int F dS. \quad (1)$$

Сила, действующая на тело, по второму закону Ньютона :

$$F = ma, \qquad \text{или} \qquad F = \frac{d^2 S}{dt^2}. \quad (2)$$

Мгновенное значение ускорения определяется первой производной от скорости по времени или второй производной от пути по времени. В соответствии с этим находим

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} = 4t + 4, \quad (3)$$

$$a = \frac{d^2 S}{dt^2} = 4 \text{ м/с}^2. \quad (4)$$

Тогда

$$F = m\frac{d^2 S}{dt^2} = 4m. \quad (5)$$

Из выражения (3) определим

$$dS = (4t + 4)dt. \qquad (6)$$

Подставив (5) и (6) в уравнение (1), получим

$$A = \int 4m(4t+4)dt\,.$$

По этой формуле определим работу, совершаемую силой за 10 с от начала ее действия

$$A = \int_0^{10} (16mt + 16m)dt = m\left[\left.\frac{16t^2}{2}\right|_0^{10} + \left.16t\right|_0^{10}\right].$$

Кинетическая энергия определяется по формуле

$$W_k = \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

Вычисления:

$$A = 1(8\cdot 100 + 16\cdot 10) \text{ Дж} = 960 \text{ Дж};$$

$$W_k = \frac{m(4t+4)^2}{2} = \frac{m(16t^2+32t+16)}{2} = m(8t^2+16t+8).$$

Ответ: $A = 960$ Дж; $W_k = m(8t^2+16t+8)$

1.21 Два шара массами $m_1 = 6$ кг и $m_2 = 4$ кг движутся со скоростями $\upsilon_1 = 5$ м/с и $\upsilon_2 = 12$ м/с и сталкиваются друг с другом. Найти скорость шаров после удара, считая удар прямым и неупругим, в случаях, когда: а) второй шар догоняет первый; б) шары движутся навстречу друг другу.

Дано:

$m_1 = 6$ кг

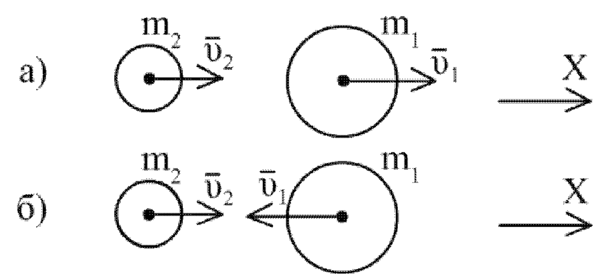
$m_2 = 4$ кг

$\upsilon_1 = 5$ м/с

$\upsilon_2 = 12$ м/с

u – ?

Решение



После неупругого удара шары движутся как единое целое, т.е. имеют одну и ту же скорость u.

Закон сохранения импульса в проекции на ось X, когда второй шар догоняет первый (см. рис. *а*), будет иметь вид:

$$m_2\upsilon_2 + m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)u,$$

откуда скорость шаров после удара

$$u = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}\ ;\ \ u = \frac{\text{кг}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}} + \text{кг}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}}}{\text{кг} + \text{кг}} = \frac{\text{м}}{\text{с}};\ \ u = \frac{6\cdot5 + 4\cdot12}{6+4} = 7{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Рассмотрим второй случай, когда шары движутся навстречу друг другу (см. рис. *б*). Предположим, что после удара шары будут двигаться в положительном направлении оси *X*. Тогда закон сохранения импульса в проекции на ось *X* будет иметь вид

$$m_2\upsilon_2 - m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)u,$$

откуда

$$u = \frac{m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}\ ;\ u = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{кг}\cdot\text{с}} = \frac{\text{м}}{\text{с}};\ u = \frac{4\cdot12 - 6\cdot5}{6+4} = \frac{48-30}{10} = \frac{18}{10} = 1{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

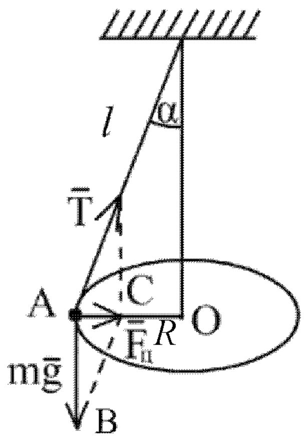
Ответ: 1) $u = 7{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; 2) $u = 1{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

1.22 Груз массой m = 4,5 кг, подвешенный на нити длиной l = 1,6 м, вращается в горизонтальной плоскости с частотой n = 36 об/мин. Найти угол α, образованный нитью с вертикалью, силу натяжения нити T и скорость вращения груза υ.

Дано:
m = 4,5 кг
l = 1,6 м
n = 0,6 с$^{-1}$

α; υ – ?

Решение



Груз движется по окружности с центром в точке *O* (см. рисунок). На груз действует сила $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$, направленная вдоль нити. Векторная сумма этих сил $\vec{F}_ц$ сообщает грузу центростремительное ускорение $a_ц = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R$,

$$\vec{F}_ц = m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}_ц\,, \tag{1}$$

где R = AO – радиус окружности, которую описывает груз в горизонтальной плоскости, $\omega = 2\pi n$ – угловая скорость вращения груза.

Из рисунка найдем радиус:

$$R = l\sin\alpha.$$

Силу $F_ц$ выразим из треугольника ABC:

$$F_ц = mg\mathrm{tg}\alpha. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) получим:

$$4m\pi^2 n^2 l\sin\alpha = mg\mathrm{tg}\alpha,$$

откуда:

$$4\pi^2 n^2 l\cos\alpha = g;\ \cos\alpha = \frac{g}{4\pi^2 n^2 l};$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{g}{4\pi^2 n^2 l}\right);\quad \left[\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{n}^2 l}\right] = \frac{\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{м}} = 1;$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{9{,}81}{4\cdot 3{,}14^2\cdot 0{,}6^2\cdot 1{,}6}\right) = 64°;\quad \alpha = 64.$$

Из треугольника ABC найдем силу натяжения нити:

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha};\ [T] = \text{кг}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н};\ T = \frac{4{,}5\cdot 9{,}8}{\cos 64°} = 103\ \text{Н}.$$

Линейная скорость груза

$$\upsilon = \omega R = 2\pi nl\sin\alpha;\quad [\upsilon] = \frac{1}{\text{с}}\cdot\text{м} = \frac{\text{м}}{\text{с}};\ \upsilon = 2\cdot 3{,}14\cdot 0{,}6\cdot 1{,}6\cdot 0{,}8988 = 5{,}1\ \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\alpha = 64°$; $T = 103$ Н; $\upsilon = 5{,}1\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

1.3 Динамика твердого тела

1.23 Зависимость угла поворота от времени для точки, лежащей на ободе колеса радиусом R, задается уравнением $\varphi = t^3 + 0{,}5t^2 + 2t + 1$. К концу третьей секунды эта точка получила нормальное ускорение, равное 153 м/с^2. Определить радиус колеса.

Дано:	Решение
$\varphi = t^3 + 0{,}5t^2 + 2t + 1$ $t = 3$ с $a_n = 153$ м/с^2	Для определения радиуса колеса воспользуемся формулой связи нормального ускорения с угловой скоростью:
R – ?	

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R, \text{ отсюда } R = \frac{a_n}{\omega^2}.$$

Угловую скорость найдем как первую производную от угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 3t^2 + t + 2.$$

Численное значение угловой скорости в конце третьей секунды найдем, подставив в полученное уравнение для ω время $t = 3$ с:

$$\omega = (2 + 3 + 3 \cdot 9) = 32 \text{ (1/с)}.$$

Радиус колеса

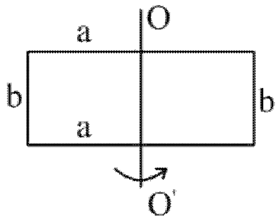
$$R = \frac{a_n}{\omega^2}; \quad [R] = \frac{\text{м/с}^2}{1/\text{с}^2} = \text{м}; \quad R = \frac{153}{32^2} = 0{,}15 \text{ м}.$$

Ответ: $R = 0{,}15$ м.

1.24 Найти момент инерции J прямоугольника, сделанного из проволоки, со сторонами $a = 20$ см и $b = 10$ см относительно оси, лежащей в плоскости прямоугольника и проходящей через середины больших сторон. Масса прямоугольника $m_0 = 0{,}3$ кг.

Дано:	Решение
$a = 0{,}2$ м $b = 0{,}1$ м $m_0 = 0{,}3$ кг	Момент инерции прямоугольника равен сумме моментов инерции его сторон. С учетом симметрии фигуры (см. рисунок) можно записать:
J – ?	$J = 2\,(J_a + J_b)$, (1)

где J_a и J_b – моменты инерции сторон a и b прямоугольника соответственно.



Определим J_a. Момент инерции стержня массой m и длиной l относительно оси, проходящей через центр инерции стержня перпендикулярно к нему, найдем по формуле

$$J = \frac{ml^2}{12}.$$

Так как на единицу длины прямоугольника приходится масса $\frac{m_0}{2\,(a+b)}$, то масса стороны a равна

$$m_a = \frac{m_0 a}{2\,(a+b)},$$

а ее момент инерции

$$J_a = \frac{m_0 a^3}{24\,(a+b)}. \tag{2}$$

Определим J_b. Момент инерции стержня относительно оси, совпадающей с осью стержня, равен нулю. Согласно теореме Штейнера момент инерции стержня длиной l и массой m относительно оси, параллельной стержню и расположенной на расстоянии r от стержня,

$$J = mr^2.$$

С учетом того, что масса стороны b

$$m_b = \frac{m_0 b}{2\,(a+b)},$$

а расстояние $r = a/2$, запишем:

$$J_b = \frac{m_0 b a^2}{8\,(a+b)}. \tag{3}$$

Подставляя выражения (2) и (3) в (1), получим:

$$J = 2\left[\frac{m_0 a^3}{24\,(a+b)} + \frac{m_0 b a^2}{8\,(a+b)}\right] = \frac{m_0 a^2}{4\,(a+b)}\left(\frac{a}{3} + b\right);$$

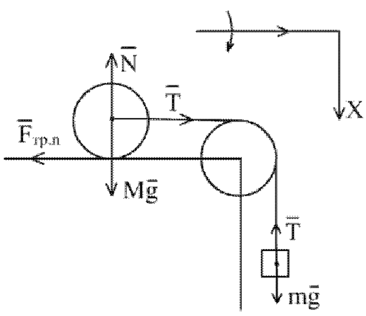
$$[J] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{м}}\cdot\text{м} = \text{кг}\cdot\text{м}^2; \quad J = \frac{0{,}3\cdot 0{,}2^2}{4(0{,}2+0{,}1)}\cdot\left(\frac{0{,}2}{3} + 0{,}1\right) = 1{,}67\cdot 10^{-3}\,\text{кг}\cdot\text{м}^2.$$

Ответ: $J = 1{,}67\cdot 10^{-3}\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$.

1.25 Система, состоящая из цилиндрического катка радиусом R и гири, связанных нитью, перекинутой через блок, под действием силы тяжести гири приходит в движение из состояния покоя. Определить ускорение $\vec{a}$ центра инерции катка и силу натяжения нити $\vec{T}$. Какую скорость υ приобретет гиря, если она спустится с высоты h? Масса цилиндра M, масса гири m, массой блока пренебречь. Считать, что цилиндр катится по горизонтальной поверхности без скольжения. Трением качения пренебречь.

Дано:
R; M; m; h
a; T; υ – ?

Решение



Катящийся цилиндр участвует в двух движениях: вращается вокруг оси и движется поступательно со скоростью оси. На каток действуют четыре силы (см. рисунок): сила натяжения нити $\vec{T}$, сила тяжести $M\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения покоя $\vec{F}_{тр.п}$.

Сила трения покоя обусловлена тем, что каток не скользит, а катится по плоскости, в то время как первые три силы, проходящие через ось, не могли бы вызвать вращение тела. Действие силы $\vec{F}_{тр.п}$ не связано с трением качения. Она проявляется как сила реакции опоры, противодействующая возникновению скольжения катка по плоскости. При исчезновении силы натяжения нити $\vec{T}$ исчезнет и сила $\vec{F}_{тр.п}$. Выберем положительные направления оси X и угла поворота. Для поступательного движения на основании закона, описывающего движение твердого тела, получим:

$$T - F_{тр.п} = Ma. \qquad (1)$$

Так как вращающий момент относительно оси цилиндра создает лишь сила трения, то согласно основному уравнению динамики вращательного движения твердого тела имеем:

$$F_{тр.п}R = J\varepsilon. \qquad (2)$$

Поскольку каток катится без проскальзывания, $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$.

Известно, что момент инерции однородного цилиндра $J = \dfrac{MR^2}{2}$.

Применим второй закон Ньютона для гири, ускорение которой равно ускорению центра инерции катка:

$$mg - T = ma. \qquad (3)$$

Решая систему (1) – (3), найдем неизвестные величины a и T:

$$a = \frac{2mg}{3M + 2m}; \;\; T = \frac{3Mmg}{3M + 2m}.$$

Зная ускорение гири, вычислим искомую скорость υ по формуле скорости равноускоренного движения:

$$\upsilon = \sqrt{2ah} = 2\sqrt{\frac{mgh}{3M + 2m}}.$$

Ответ: $a = \frac{2mg}{3M + 2m}$; $T = \frac{3Mmg}{3M + 2m}$; $\upsilon = 2\sqrt{\frac{mgh}{3M + 2m}}$.

1.26 Кинетическая энергия вращающегося с частотой n_1 = 3 с$^{-1}$ маховика равна 8,4 кДж. Во сколько раз увеличится частота вращения маховика за время t = 5 с, если на маховик начнет действовать ускоряющий момент силы M = 100 Н·м?

Дано:
$E_{к.вр}$ = 8,4·
n_1 = 3 с$^{-1}$10^3 Дж
M = 100 Н·м
t = 5 с

$\frac{n_2}{n_1}$ – ?

Решение

Кинематическое уравнение для угловой скорости вращательного движения имеет вид:

$$\omega_2 = \omega_1 + \varepsilon t \quad \text{или} \quad 2\pi n_2 = 2\pi n_1 + \varepsilon t, \tag{1}$$

где ω_1 и ω_2 – угловые скорости; $\omega_1 = 2\pi n_1$ и $\omega_2 = 2\pi n_2$; ε – угловое ускорение.

Угловое ускорение, согласно основному уравнению динамики вращательного движения

$$\varepsilon = \frac{M}{J}, \tag{2}$$

где M – момент силы относительно оси; J – момент инерции маховика относительно той же оси.

Кинетическая энергия вращающегося маховика до начала действия ускоряющего момента силы $E_{к.вр} = \frac{J\omega_1^2}{2} = 2\pi^2 n_1^2 J$ (учли, что $\omega_1 = 2\pi n_1$),

откуда момент инерции

$$J = \frac{E_{к.вр}}{2\pi^2 n_1^2}. \tag{3}$$

Подставив выражение (3) в формулу (2), найдем:

$$\varepsilon = \frac{2\pi^2 n_1^2 M}{E_{к.вр}}. \tag{4}$$

Запишем формулу (1) с учетом (4): $2\pi n_2 = 2\pi n_1 + \dfrac{2\pi^2 n_1^2 Mt}{E_{к.вр}}$,

откуда искомое отношение частот

$$\frac{n_2}{n_1} = 1 + \frac{\pi n_1 Mt}{E_{к.вр}}; \qquad \left[\frac{n_2}{n_1}\right] = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}}{\text{с}\cdot\text{Н}\cdot\text{м}} = 1; \quad \frac{n_2}{n_1} = 1 + \frac{3{,}14\cdot 3\cdot 100\cdot 5}{8{,}4\cdot 10^3} = 6{,}61.$$

Ответ: $\dfrac{n_2}{n_1} = 6{,}61.$

1.27 Через блок массой m_0 = 300 г, укрепленный на горизонтальной оси, проходящей через его центр, перекинута нить, к которой прикреплены грузы m_1 = 300 г и m_2 = 200 г. Блок считать однородным диском с радиусом 20 см.

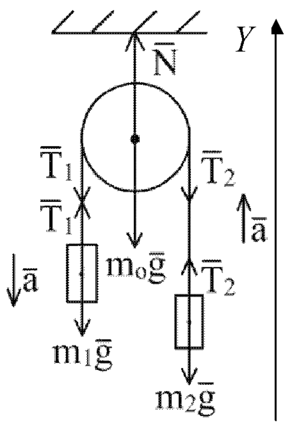
Найти: 1) ускорения грузов; 2) результирующий момент вращения блока; 3) силу давления $F_{давл.}$ блока на ось.

Дано:
$m_0 = 0{,}3$ кг
$m_1 = 0{,}3$ кг
$m_2 = 0{,}2$ кг
$R = 0{,}2$ м
$g = 10$ м/с
$a_0; M; F$ – ?

Решение

Система состоит из трех тел: грузов m_1 и m_2, движущихся поступательно, и блока m_0, который вращается. Основное уравнение динамики для поступательного движения:

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}; \\ m_2\vec{g} + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}. \end{cases}$$



в проекции на ось Y:

$$\begin{cases} -m_1 g + T_1 = -m_1 a; \\ T_2 - m_2 g = m_2 a. \end{cases}$$

На блок действуют: сила тяжести $m_0\vec{g}$, реакция опоры $\vec{N}$ со стороны оси, равная силе давления $F_{давл}$ блока на эту ось, силы натяжения нити $\vec{T}_1$ со стороны груза m_1 и $\vec{T}_2$ со стороны груза m_2. Силы $\vec{N}$ и $m_0\vec{g}$ во вращении не участвуют, так как их моменты относительно оси вращения равны нулю. Вращение вызывается только силами $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$.

Моменты сил $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ направлены по оси вращения, но в противоположные стороны. Основное уравнение динамики для вращательного движения блока: $\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = J\vec{\varepsilon}$; $R(T_1 - T_2) = J\varepsilon$.

1. Учитывая, что $J = \dfrac{m_0 R^2}{2}$, а $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$ решаем совместно уравнения:

$$\begin{cases} -m_1 g + T_1 = -m_1 a; \\ T_2 - m_2 g = m_2 a; \\ (T_1 - T_2)\,R = \dfrac{m_0 R^2}{2}\dfrac{a}{R} \end{cases}$$

$$m_1 g - T_1 + T_2 - m_2 g + T_1 - T_2 = \left(m_1 + m_2 + \frac{m_0}{2}\right)a;$$

$$a = \frac{(m_1 - m_2)\,g}{m_1 + m_2 + \dfrac{m_0}{2}};\quad [a] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2}{\text{кг}} = \text{м/с}^2;\quad a = \frac{0{,}1\cdot 10}{0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}3/2} = 1{,}54\ \text{м/с}^2.$$

2. Найдем силы натяжения $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$:

$$T_1 = m_1\,(g - a);$$

$$T_2 = m_2\,(g + a).$$

Тогда результирующий момент блока

$$M = (T_1 - T_2)R = (m_1 g - m_1 a - m_2 g - m_2 a)R = [(m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a]R;$$

$$[M] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\text{м} = \text{Н·м};$$

$$M = (0{,}1\cdot 10 - 0{,}5\cdot 1{,}54)\cdot 0{,}2 = 0{,}046\ \text{Н·м} = 0{,}05\ \text{Н·м}.$$

3. Сила давления $|F_{давл}|$ на ось блока по третьему закону Ньютона равна реакции опоры $|N|$. Сумма сил, действующих на блок по оси Y, равна нулю:

$$\vec{N} - m_0\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0;$$

$$N - T_1 - T_2 - m_0 g = 0;$$

$$N = T_1 + T_2 + m_0 g = m_1 g - m_1 a + m_2 g + m_2 a + m_0 g;$$

$$N = (m_1 + m_2 + m_0)\,g - (m_1 - m_2)a;$$

$$[N] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2} - \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}.$$

$$N = (0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}3)\,10 - (0{,}3 - 0{,}2)\,1{,}54 = 7{,}62\ \text{Н}.$$

Ответ: $a = 1{,}54$ м/с^2; $M = 0{,}05$ Н·м; $F = 7{,}62$ Н.

1.28 Маховик, массу которого m = 5 кг можно считать распределенной по ободу радиусом R = 20 см, свободно вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр, с частотой n = 720 мин$^{-1}$. При торможении маховик останавливается через Δt = 20 с.

Найти: 1) тормозящий момент; 2) число оборотов, которое сделает маховик до полной остановки; 3) работу сил торможения.

Дано:
m = 5 кг
R = 0,2 м
n = 12 с$^{-1}$
Δt = 20 с

M; N; A – ?

Решение

1. Если тормозящий момент постоянен, то движение маховика равнозамедленное, и основное уравнение динамики запишется в виде:

$$M = J\,\frac{\Delta\omega}{\Delta t},$$

где $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_0 = -\omega_0 = -2\pi n$ – измерение угловой скорости за время Δt; J – момент инерции маховика, $J = mR^2$ (масса распределена по ободу);

$$M = \frac{mR^2(2\pi n)}{\Delta t}; \quad [M] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}\cdot\text{с}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Н·м};$$

$$M = \frac{5\cdot 0{,}2^2\cdot 2\cdot 3{,}14\cdot 12}{20} = 0{,}75 \text{ Нм}.$$

2. Для определения числа оборотов до остановки найдем угол поворота из уравнения кинематики для вращательного движения:

$$\varphi = \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon}; \quad \varepsilon = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\Delta t}; \quad \varphi = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\Delta t; \quad \omega_1 = 0;$$

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega_0\Delta t}{2\cdot 2\pi} = \frac{n\Delta t}{2}; \quad [N] = \text{с/с} = 1; \quad N = \frac{12\cdot 20}{2} = 120 \text{ об}.$$

3. Работа торможения будет равна изменению кинетической энергии при вращательном движении:

$$A = \frac{J\omega_1^2}{2} - \frac{J\omega_0^2}{2} = -\frac{mR^2(2\pi n)^2}{2}; \quad A = mR^2\cdot 2\pi^2 n^2;$$

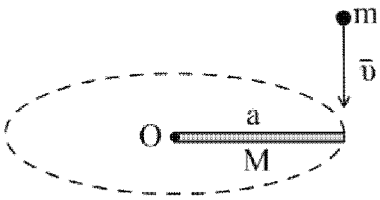
$$[A] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Дж}; \quad A = 5\cdot 0{,}2^2\cdot 2\cdot 3{,}14^2\cdot 12^2 = 567{,}91 \text{ Дж}.$$

Ответ: M = 0,75 Нм; N = 120 об; A = 367,91 Дж.

1.29 Однородный стержень массой M и длиной a может свободно вращаться в горизонтальной плоскости относительно вертикальной оси, проходящей через его конец. Во второй конец нормально к стержню ударяется шар массой m, летящий горизонтально со скоростью υ. Удар считать упругим, силы трения между поверхностью плоскости и телами пренебрежимо малы. Найти скорость шара u и угловую скорость стержня ω.

Дано:
M; a; m; υ

u, ω – ?



Решение

Воспользуемся законами сохранения механической энергии и момента импульса. Энергия системы «шар – стержень» до удара определялась кинетической энергией шара $E_0 = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$, после взаимодействия – кинетической энергией поступательного движения шара $E_ш = \dfrac{mu^2}{2}$ и вращательной энергией стержня $E_{ст} = \dfrac{J\omega^2}{2}$. Таким образом, закон сохранения энергии:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{mu^2}{2} = \frac{J\omega^2}{2}. \tag{1}$$

Момент импульса данной системы может быть найден из следующего соотношения:

(до взаимодействия) $m\upsilon a = J\omega + mua$ (после взаимодействия). (2)

Момент инерции стержня относительно оси вращения

$$J = \frac{Ma^2}{3}.$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{m\upsilon^2}{2} = \dfrac{mu^2}{2} + \dfrac{J\omega^2}{2}; \\ m\upsilon a = J\omega + mua; \\ J = \dfrac{Ma^2}{3}, \end{cases}$$

откуда

$$m(\upsilon^2 - u^2) = J\omega^2; \tag{3}$$

$$ma(\upsilon - u) = J\omega. \tag{4}$$

Делим уравнение (3) на (4) и получаем

$$\upsilon + u = \omega a, \quad \text{откуда} \quad u = \omega a - \upsilon.$$

Подставим последнее выражение в (2):

$$2m\upsilon a = \omega(J + ma^2),$$

следовательно, $$\omega = \frac{2m\upsilon a}{J + ma^2} = \frac{6m\upsilon}{(M+3m)a};$$

$$u = \omega a - \upsilon = \frac{\upsilon(3m-M)}{3m+M}.$$

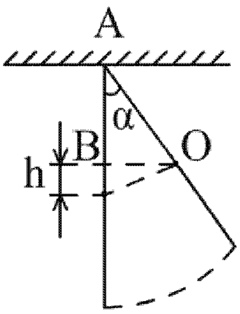
Ответ: $\omega = \dfrac{6m\upsilon}{(M+3m)a}$; $u = \dfrac{\upsilon(3m-M)}{3m+M}$.

1.30 Тонкий однородный стержень длиной l = 0,8 м имеет горизонтальную ось вращения, проходящую через его конец. Найти скорость υ нижней точки стержня, когда стержень проходит положение равновесия при отклонении его от вертикали на угол α = 30°.

Дано:
l = 0,8 м
α = 30°
υ – ?

Решение

При отклонении стержня на угол α от положения равновесия его центр поднимается на высоту h (см. рисунок), которую можно определить из треугольника AOB:



$$\frac{l}{2} - h = \frac{l}{2}\cos\alpha; \quad h = \frac{l}{2}(1-\cos\alpha) \,. \qquad (1)$$

При этом потенциальная энергия стержня увеличится на величину

$$\Delta E_п = mgh, \qquad (2)$$

где m – масса стержня. При прохождении стержнем положения равновесия потенциальная энергия $\Delta E_п$ переходит в кинетическую энергию

$$E_к = \frac{J\omega^2}{2}, \qquad (3)$$

где J – момент инерции стержня; ω – его угловая скорость вращения.

Для стержня, ось вращения которого проходит через его конец,

$$J = \frac{1}{3}ml^2. \qquad (4)$$

По закону сохранения энергии

$$E_к = \Delta E_п. \tag{5}$$

Из уравнений (1) – (5) получим:

$$mg\frac{l}{2}(1-\cos\alpha) = \frac{1}{6}m\,l^2\omega^2$$

или

$$g\,(1 - \cos\alpha) = \frac{1}{3}l\omega^2. \tag{6}$$

Из выражения (6) найдем угловую скорость:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g(1-\cos\alpha)}{l}}$$

Линейная скорость

$$\upsilon = \omega l = \sqrt{3gl(1-\cos\alpha)}; \quad [\upsilon] = \sqrt{\frac{м}{с^2}\cdot м} = \frac{м}{с};$$

$$\upsilon = \sqrt{3\cdot 9{,}8\cdot 0{,}8(1-0{,}866)} = 1{,}78 \text{ м/с}.$$

Ответ: υ = 1,78 м/с.

1.31 Горизонтальная поверхность массой m_1 = 250 кг имеет форму диска радиусом R = 2,5 м. Платформа может вращаться относительно оси, проходящей через ее центр. С какой угловой скоростью ω будет вращаться платформа, если вдоль ее края будет двигаться человек массой m_2 = 75 кг со скоростью υ = 2,5 м/с относительно платформы? Найти угол поворота платформы, если человек сделает по платформе 1 оборот.

Дано:
m_1 = 250 кг
m_2 = 75 кг
R = 2,5 м
υ = 2,5 м/с

ω, φ – ?

Решение

Согласно условию задачи платформа с человеком вращается по инерции. Это значит, что момент внешних сил, действующих на систему, равен нулю. Систему «человек – платформа» будем считать замкнутой. Применим к этой системе закон сохранения момента импульса:

$$\vec{L}_ч + \vec{L}_п = 0, \tag{1}$$

где $L_ч = m_2\upsilon R$ – момент импульса человека относительно оси вращения платформы; $L_п$ – момент импульса платформы с человеком,

$$L_п = \omega(J_п + J_ч), \tag{2}$$

где $J_п = \dfrac{1}{2} m_1 R^2$, $J_ч = m_2 R^2$ – моменты инерции платформы и человека соответственно.

Из уравнений (1) и (2) получим:

$$m_2 \upsilon R = \omega \left(\frac{1}{2} m_1 R^2 + m_2 R^2 \right), \text{ откуда } \omega = \frac{m_2 \upsilon}{\frac{1}{2} m_1 R + m_2 R} = \frac{2 m_2 \upsilon}{R\,(m_1 + 2m_2)};$$

$$[\omega] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{кг}} = \text{с}^{-1}; \quad \omega = \frac{2 \cdot 75 \cdot 2{,}5}{2{,}5(250 + 2 \cdot 75)} = 37{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{с}^{-1}.$$

Время, необходимое для совершения полного круга по платформе:

$$t = \frac{2\pi R}{\upsilon},$$

где $2\pi R$ – путь, пройденный человеком со скоростью υ относительно платформы.

Угол поворота платформы

$$\varphi = \omega t = \omega \frac{2\pi R}{\upsilon}; \quad [\varphi] = \frac{\text{рад} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{с} \cdot \text{м}} = \text{рад};$$

$$\varphi = 37{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}5}{2{,}5} = 2{,}36 \text{ рад}.$$

Ответ: $\omega = 37{,}5 \cdot 10^{-2}$ с$^{-1}$; $\varphi = 2{,}36$ рад.

1.4 Механические колебания

1.32 Написать уравнение гармонического колебания, если амплитуда его 10 см, максимальная скорость 50 см/с, начальная фаза 15°. Определить период колебаний и смещение колеблющейся точки через 0,2 с от начала колебания.

Дано:
$A = 0{,}1$ м
$\upsilon_{max} = 0{,}5$ м/с
$\varphi_0 = 15°$
$t = 0{,}2$ с

$x(t)$; T; $x(0{,}2)$ – ?

Решение

Уравнение гармонического колебания с начальной фазой φ_0 имеет вид:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Циклическая частота $\omega = 2\pi/T$. Скорость колеблющейся точки находится как первая производная смещения от времени:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Максимальная скорость достигается при значении

$$\cos(\omega t + \varphi_0) = 1, \quad \upsilon_{max} = A\omega,$$

откуда

$$\omega = \frac{\upsilon_{max}}{A} = \frac{2\pi}{T}; \quad T = \frac{2\pi A}{\upsilon_{max}}; \quad [T] = \frac{\text{м} \cdot \text{с}}{\text{м}} = \text{с};$$

$$T = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}1}{0{,}5} = 1{,}26 \text{ с}; \quad \omega = \frac{\upsilon_{max}}{A} = 5 \text{ с}^{-1}.$$

Выразим начальную фазу в радианах:

$$\varphi_0 = 2\pi\frac{15}{360} = \frac{\pi}{12}.$$

Тогда уравнение гармонического колебания запишется:

$$x(t) = 0{,}1\sin\left(5t + \frac{\pi}{12}\right).$$

В момент времени $t = 0{,}2$ с смещение $x(t)$ будет равно

$$x = 0{,}1\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{12}\right) = 0{,}1\sin\pi\left(\frac{2t}{T} + \frac{1}{12}\right); \; x = 0{,}1\sin\pi\left(\frac{2 \cdot 0{,}2}{1{,}26} + \frac{1}{12}\right) = 0{,}095 \text{ м}.$$

Следует отметить, что исходное уравнение гармонического колебания может быть определено в виде $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$. Повторив с этим уравнением вышеприведенное решение, получим тот же ответ.

Ответ: $x(t) = 0{,}1\sin\left(5t + \dfrac{\pi}{12}\right)$; $T = 1{,}26$ с; $x(0{,}2) = 0{,}095$ м.

1.33 Материальная точка массой 20 г совершает гармонические колебания с периодом 9 с. Начальная фаза колебаний 10°. Через какое время от начала движения смещение точки достигнет половины амплитуды? Найти амплитуду, максимальные скорость и ускорение точки, если полная ее энергия равна 10^{-2} Дж.

Дано:
$m = 0{,}02$ кг
$T = 9$ с
$\varphi_0 = 10° = \dfrac{\pi}{18}$
$x = 0{,}5\,A$
$E = 10^{-2}$ Дж

t; A; υ_m; a_m – ?

Решение

Уравнение гармонического колебательного движения:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0). \qquad (1)$$

Из уравнения (1) можно определить время t:

$$x = A\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0\right);$$

$$\frac{x}{A} = \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0\right); \qquad \text{тогда} \qquad \frac{2\pi t}{T} + \varphi_0 = \arcsin\frac{x}{A};$$

$$t = \frac{\left(\arcsin\dfrac{x}{A} - \varphi_0\right)T}{2\pi}. \qquad (2)$$

Подставляя числовые значения в формулу (2), получим:

$$t = \frac{\left(\arcsin 0{,}5 - \dfrac{\pi}{18}\right)}{2\pi}\cdot 9 = \frac{\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{18}}{2\pi}\cdot 9 = 0{,}5 \text{ с}.$$

Амплитуду колебаний можно определить из формулы полной энергии E колеблющейся точки:

$$E = \frac{mA^2\omega^2}{2}; \quad A = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2E}{m}} = \frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{2E}{m}}; \quad [A] = \text{с}\sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}} = \text{с}\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2\cdot\text{кг}}} = \text{с}\sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = \text{м};$$

$$A = \frac{9}{2\cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{2\cdot 10^{-2}}{2\cdot 10^{-2}}} = 1{,}43 \text{ м}.$$

Зная амплитуду, можно вычислить максимальную скорость точки, которая определяется как первая производная от смещения x по времени:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Полагая $\cos(\omega t + \varphi) = 1$, получаем значение максимальной скорости:

$$\upsilon_m = A\omega = A\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{2E}{m}}; \; [\upsilon_m] = \sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2\cdot\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = \text{м/с}; \; \upsilon_m = \sqrt{\frac{2\cdot 10^{-2}}{2\cdot 10^{-2}}} = 1 \text{ м/с}.$$

Уравнение точки определяется как первая производная скорости по времени, т.е.

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Считая при максимальном ускорении $\sin(\omega t + \varphi_0) = -1$, получим:

$$a_m = A\omega^2 = A\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{2\pi}{T}\sqrt{\frac{2E}{m}};$$

$$[a_m] = \frac{1}{\text{с}} \cdot \sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}} = \frac{1}{\text{с}}\sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}}} = \frac{1}{\text{с}} \cdot \sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = \frac{1}{\text{с}} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a_m = \frac{2 \cdot 3{,}14}{9} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-2}}} = 6{,}98 \cdot 10^{-1}\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 0{,}698\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 0{,}7\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

Ответ: $t = 0{,}5$ с; $A = 1{,}43$ м; $\upsilon_m = 1$ м/с; $a_m = 0{,}7$ м/с^2.

1.34 Материальная точка массой $m = 1$ г колеблется гармонически. Амплитуда колебаний равна 5 см, циклическая частота 2 с$^{-1}$, начальная фаза равна 0. Определить силу, действующую на точку в тот момент, когда ее скорость равна 6 м/с.

Дано:
$\upsilon = 6 \cdot 10^{-3}$ м/с
$A = 5 \cdot 10^{-2}$ м
$m = 10^{-3}$ кг
$\omega = 2$ с$^{-1}$
$\varphi_0 = 0$

F – ?

Решение

Скорость определяется первой производной от смещения по времени:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt}.$$

Смещение x определим уравнением:

$x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$, или, т.к. $\varphi_0 = 0$, то $x = A\sin\omega t$

Находим скорость:

$$\upsilon = A\omega\cos\omega t.$$

Ускорение равно производной от скорости по времени:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt}; \quad a = -A\omega^2\sin\omega t.$$

Возводим скорость и ускорение во вторую степень:

$$\upsilon^2 = A^2\omega^2\cos^2\omega t; \tag{1}$$

$$a^2 = A^2\omega^4\sin^2\omega t. \tag{2}$$

Уравнение (1) разделим на $A^2\omega^2$, а уравнение (2) на $A^2\omega^4$ и сложим их:

$$\frac{\upsilon^2}{A^2\omega^2}+\frac{a^2}{A^2\omega^4}=1.$$

Производим дальнейшие преобразования:

$$\upsilon^2\omega^2+a^2=A^2\omega^4;\quad a^2=A^2\omega^4-\upsilon^2\omega^2;\quad a^2=\omega^2(A^2\omega^2-\upsilon^2).$$

Ускорение получается равным

$$a=\omega\sqrt{A^2\omega^2-\upsilon^2}.$$

Следовательно, сила по второму закону Ньютона равна:

$$F=ma;\quad F=m\omega\sqrt{A^2\omega^2-\upsilon^2};\quad [F]=\frac{\text{кг}}{\text{с}}\sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}=\text{Н};$$

$$F=10^{-3}\cdot 2\sqrt{(5\cdot 10^{-2})^2\cdot 2^2-(6\cdot 10^{-2})^2}=16\cdot 10^{-5}\ \text{Н}.$$

Ответ: $F = 16\cdot 10^{-5}$ Н.

1.35 Пружинный маятник совершает гармонические колебания, описываемые уравнением $x = 0{,}3\cos\frac{\pi}{6}t$, м. В тот момент, когда возвращающая сила F в первый раз достигла значения –10 мН, потенциальная энергия E_n маятника оказалась равной 7,5 мДж. Определить этот момент времени t.

Дано:

$x = 0{,}3\cos\frac{\pi}{6}t$, м

$F = -10^{-2}$ Н

$E_n = 7{,}5\cdot 10^{-3}$ Дж

t – ?

Решение

Из заданного уравнения гармонических колебаний маятника $x = 0{,}3\cos\frac{\pi}{6}t$, м, следует, что амплитуда колебаний $A = 0{,}3$ м, циклическая частота $\omega = \pi/6$ с$^{-1}$. Тогда в общем виде это уравнение можно записать:

$$x = A\cos\omega t. \qquad (1)$$

Возвращающая сила упругости F деформированной пружины пропорциональна смещению x из положения равновесия и равна:

$$F = -kx = -kA\cos\omega t, \qquad (2)$$

где k – жесткость пружины.

Потенциальная энергия маятника, совершающего под действием упругой силы гармонические колебания,

$$E_n = -\int_0^x F dx = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}\cos^2 \omega t. \qquad (3)$$

Поделив (3) на (2), получаем: $\frac{E_n}{F} = -\frac{A}{2}\cos\omega t$,

откуда $\omega t = \arccos\left(-\frac{2E_n}{AF}\right) = \arccos\left(-\frac{2\cdot 7{,}5\cdot 10^{-3}}{0{,}3\cdot(-10^{-2})}\right) = \frac{\pi}{3}$ рад.

Тогда искомый момент времени

$$t = \frac{\frac{\pi}{3}}{\omega} = \frac{\pi}{3\omega} = \frac{6\pi}{3\pi} = \frac{6}{3} = 2 \text{ с}.$$

Ответ: $t = 2$ с.

1.36 Материальная точка массой m = 50 г совершает гармонические колебания согласно уравнению $x = 0{,}1 \cos \frac{3\pi}{2} t$, м. Определить: 1) возвращающую силу F для момента времени t = 0,5 с; 2) полную энергию.

Дано:
$m = 5\cdot 10^{-2}$ кг
$t = 0{,}5$ с
$x = 0{,}1 \cos \frac{3\pi}{2} t$, м

F; E – ?

Решение

Возвращающая сила $F = ma$, где ускорение:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -0{,}1\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 \cos\frac{3\pi}{2} t,$$

через t = 0,5 с ускорение равно:

$$a = -0{,}1\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 \cos\frac{3\pi}{4}.$$

Возвращающая сила будет равна:

$$F = ma; \quad F = 5\cdot 10^{-2}\cdot 0{,}1\cdot\frac{9\pi^2}{2}\cdot 0{,}71 = 78{,}7 \text{ мН}.$$

Полная энергия $E = \frac{mA^2\omega^2}{2}$; $[E] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Дж}$;

$$E = \frac{5\cdot 10^{-2}\cdot 10^{-2}\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2}{2} = 5{,}55\cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 5{,}55 \text{ мДж}.$$

Ответ: $F = 78{,}7$ мН; $E = 5{,}55$ мДж.

1.37 Складываются два гармонических колебания одного направления с периодами $T_1 = T_2 = 2$ с, амплитудами $A_1 = A_2 = 3$ см и начальными фазами $\varphi_1 = \pi/2$ и $\varphi_2 = \pi/3$. Записать уравнение результирующих колебаний, найти амплитуду A и начальную фазу φ, построить векторную диаграмму.

Дано:
$T_1 = T_2 = 2$ с
$A_1 = A_2 = 0{,}03$ м
$\varphi_1 = \pi/2$
$\varphi_2 = \pi/3$
A, φ – ?

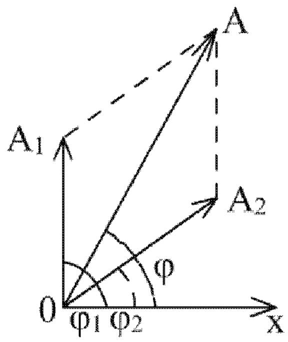
Решение

Амплитуду и начальную фазу результирующего колебания определим по формулам

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}; \quad A = 5{,}8\cdot10^{-2} \text{ м};$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} = 75^\circ;$$

$$\varphi = 0{,}417\,\pi \text{ рад}.$$



Запишем уравнения складывающихся колебаний:

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1);$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

и результирующих колебаний:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) = 5{,}8\cdot10^{-2}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + 0{,}417\pi\right) = 5{,}8\cdot10^{-2}$$

$$\cos(\pi t + 0{,}417\pi) \text{ м}.$$

Векторная диаграмма складываемых колебаний показана на рисунке.

Ответ: $A = 5{,}8\cdot10^{-2}$ м; $\varphi = 0{,}417\,\pi$ рад; $x = 5{,}8\cdot10^{-2}\cos(\pi t + 0{,}417\pi)$ м.

1.38 Найти период T затухающих колебаний математического маятника длиной $l = 1$ м, если известен логарифмический декремент затухания $\theta = 0{,}6$.

Дано:
$l = 1$ м
$\theta = 0{,}6$
T – ?

Решение

Найдем период T_0 свободных колебаний: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Частота затухающих колебаний $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$,

где $\omega = \frac{2\pi}{T}$; $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$; $\delta = \frac{\theta}{T}$ – коэффициент затухания.

Следовательно,

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{T_0^2} - \frac{\theta^2}{T^2}};$$

Из этого выражения определим период затухающих колебаний:

$$T = \frac{T_0}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 + \theta^2} = \sqrt{\frac{l}{g}(4\pi^2 + \theta^2)}\,; \quad [T] = \sqrt{\frac{\text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{м}}} = \text{с};$$

$$T = \sqrt{\frac{1}{9{,}8}(4 \cdot 3{,}14^2 + 0{,}6^2)} = 2 \text{ с}.$$

Ответ: $T = 2$ с.

1.39 Тело массой m = 0,6 кг, подвешенное к пружине жесткостью k = 30 Н/м, совершает в некоторой среде упругие колебания. Логарифмический декремент затухания θ = 0,01. Определить: 1) время t_1, за которое амплитуда колебаний уменьшится в 3 раза; 2) число полных колебаний N, которые должно совершить тело, чтобы прошло подобное уменьшение амплитуды.

Дано:
m = 0,6 кг
k = 30 Н/м
θ = 0,01
$\frac{A_1}{A_2} = 3$

t_1; N – ?

Решение

Уравнение смещения для затухающих колебаний:

$$x = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $A = A_0 e^{-\delta t}$ – амплитуда затухающих колебаний;

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_0 e^{-\delta t}}{A_0 e^{-\delta(t+t_1)}} = e^{-\delta t_1}; \qquad e^{\delta t_1} = 3;$$

$$t_1 = \frac{\ln 3}{\delta} = \frac{\ln 3}{0{,}01} = 110 \text{ с}.$$

Период колебаний пружинного маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ – время одного полного колебания. Число полных колебаний

$$N = \frac{t_1}{T}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}6}{30}} = \frac{2\pi}{7{,}07} = 0{,}89 \text{ с}; \quad N = \frac{110}{0{,}89} = 123.$$

Ответ: t_1 = 110 с; N = 123.

1.40 Точка одновременно совершает гармонические колебания, происходящие по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемые уравнениями $x = A_1\sin\omega t$ и $y = A_2\cos\omega t$, где $A_1 = 0{,}5$ см; $A_2 = 2$ см. Найти уравнение траектории и построить ее, указав направление движения.

Дано:
$x = A_1\sin\omega t$
$y = A_2\cos\omega t$
$A_1 = 0{,}5$ см
$A_2 = 2$ см
$y = y(x)$ – ?

Решение

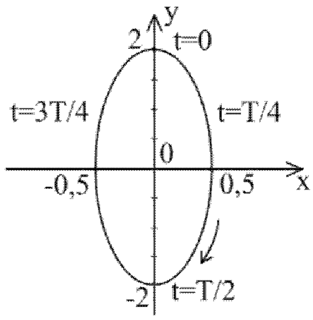
Размерность амплитуд и смещений колебаний целесообразно оставить в сантиметрах. По условию задачи

$$x = A_1\sin\omega t = 0{,}5\sin\omega t; \qquad (1)$$

$$y = A_2\cos\omega t = 2\cos\omega t. \qquad (2)$$

Исключая из уравнений (1) и (2) параметр t, с помощью основного тригонометрического тождества $\cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1$ получим:

$$\begin{cases} \sin\omega t = \dfrac{x}{0{,}5}; \\ \cos\omega t = \dfrac{y}{2}, \end{cases} \quad \text{отсюда} \quad \frac{x^2}{0{,}5^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1.$$



Траектория представляет собой эллипс с полуосями $a = 0{,}5$ см и $b = 2$ см (см. рисунок).

Направление движения по эллипсу определим, построив таблицу. Время t выразим через период колебаний T.

t	0	$T/4$	$T/2$	$3T/4$	T
x, см	0	0,5	0	–0,5	0
y, см	2	0	–2	0	2

Ответ: эллипс, $\dfrac{x^2}{0{,}5^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$.

1.5 Механика жидкости

1.41 Два мальчика массами $m_1 = 20$ кг и $m_2 = 25$ кг катаются на льдинах. Определить минимальную площадь $S_{\min}$ льдины, способной удержать их обоих, если толщина льда $h = 0,4$ м. Плотность льда $\rho = 0,9$ г/см^3, плотность воды $\rho_1 = 1$ г/см^3.

Дано:
$m_1 = 20$ кг
$m_2 = 25$ кг
$h = 0,4$ м
$\rho = 900$ кг/м^3
$\rho_1 = 10^3$ кг/м^3

$S_{\min}$ – ?

Решение

На льдину с мальчиками действуют сила тяжести

$$F = \rho Shg + (m_1 + m_2)g \qquad (1)$$

и выталкивающая сила (определяется законом Архимеда)

$$F_A = \rho_1 Sh_1 g, \qquad (2)$$

где S – площадь льдины; g – ускорение свободного падения; h_1 – толщина погрузившейся под воду части льдины. Льдина плавает, если силы (1) и (2) равны:

$$\rho Shg + (m_1 + m_2)g = \rho_1 Sh_1 g,$$

откуда площадь льдины $S = \dfrac{m_1 + m_2}{h_1\rho_1 - h\rho}$.

Из приведенной формулы следует, что $S = S_{\min}$, когда $h_1 = h$. Следовательно, искомая минимальная площадь льдины

$$S_{\min} = \frac{m_1 + m_2}{h(\rho_1 - \rho)}; \quad S_{\min}] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^3}{\text{м}\cdot\text{кг}} = \text{м}^2; \quad S_{\min} = \frac{20 + 25}{0,4(10^3 - 900)} = 1,13 \text{ м}^2.$$

Ответ: $S_{\min} = 1,13$ м^2.

1.42 Цилиндрический сосуд высотой $H = 1$ м до краев заполнен жидкостью. Пренебрегая вязкостью жидкости, определить, на какой высоте h должно быть проделано малое отверстие в стенке сосуда, чтобы струя, вытекающая из отверстия, падала на пол на расстоянии 50 см от цилиндра.

Дано:
$H = 1$ м
$l = 0,5$ м

h – ?

Решение

Согласно уравнению Бернулли

$$\frac{\rho\upsilon_1^2}{2} + \rho gH + p_1 = \frac{\rho\upsilon_2^2}{2} + \rho gh + p_2, \qquad (1)$$

где ρ – плотность жидкости, υ_1 – скорость понижения уровня жидкости в цилиндре; p_1 и p_2 – статическое давление у поверхности жидкости и у отверстия соответственно; υ_2 – скорость вытекания жидкости из отверстия.

Поскольку сосуд открыт, $p_1 = p_2$ (равны атмосферному давлению).

Согласно уравнению неразрывности

$$S_1 \upsilon_1 = S_2 \upsilon_2,$$

где S_1 и S_2 – площади сечений цилиндра и отверстия соответственно, причем по условию $S_1 >> S_2$. Следовательно, $\upsilon_1 << \upsilon_2$. Учитывая приведенные рассуждения, уравнение Бернулли (1) запишется в виде:

$$\frac{\rho \upsilon_2^2}{2} = \rho g (H - h),$$

откуда

$$\upsilon_2{}^2 = 2g(H - h). \qquad (2)$$

Учитывая кинематические уравнения $h = \dfrac{gt^2}{2}$ и $l = \upsilon_2 t$ (t – время падения струи на поверхность земли), найдем:

$$\upsilon_2{}^2 = \frac{gl^2}{2h}. \qquad (3)$$

Приравняв (2) и (3), запишем:

$$2g\,(H - h) = \frac{gl^2}{2h},$$

откуда

$$4h^2 - 4hH + l^2 = 0.$$

Решая это уравнение, найдем искомую высоту:

$$h = \frac{H \pm \sqrt{H^2 - l^2}}{2}; \quad [h] = \text{м} + \sqrt{\text{м}^2} = \text{м} + \text{м} = \text{м};$$

$$h = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 0{,}5^2}}{2}; \quad h_1 = 0{,}933 \text{ м}; \quad h_2 = 0{,}067 \text{ м}.$$

Ответ: $h_1 = 93{,}3$ см; $h_2 = 6{,}7$ см.

1.43 За 15 минут по трубе диаметром 2 см протекает 50 кг воды. Найти скорость течения.

Дано:	**Решение**
$t = 9\cdot10^2$ с $d = 2\cdot10^{-2}$ м $\rho = 10^3$ кг/м^3 $m = 50$ кг	За время t через поперечное сечение трубы S, равное $\dfrac{\pi d^2}{4}$, протекает объем воды, равный $$V = S\upsilon t,$$
υ – ?	где υ – скорость течения.

Плотность $\rho = \dfrac{m}{V}$, откуда $V = \dfrac{m}{\rho}$.

Подставляя выражения для V и S в формулу объема, получим:

$$\frac{m}{\rho} = \frac{\pi d^2}{4}\upsilon t,$$

Откуда

$$\upsilon = \frac{4m}{\pi d^2 \rho t}; \qquad [\upsilon] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^3}{\text{м}^2\cdot\text{кг}\cdot\text{с}} = \text{м/с};$$

$$\upsilon = \frac{4\cdot50}{3{,}14\cdot4\cdot10^{-4}\cdot10^3\cdot9\cdot10^2} = 0{,}18 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\upsilon = 0{,}18$ м/с.

1.44 Свинцовый шарик диаметром 2 мм падает с постоянной скоростью 3,6 см/с в сосуде, наполненном глицерином. Найти коэффициент вязкости глицерина.

Дано:	**Решение**
$d = 0{,}2$ см $\rho_1 = 11{,}3$ г/см^3 $\rho_2 = 1{,}2$ г/см^3 $\upsilon = 3{,}6$ см/с	На тело массой m и объемом V, движущееся в жидкости (газе), действуют три силы: $F_T = mg$ – сила тяжести; $F_A = \rho_2 V g$ – выталкивающая сила Архимеда; $F_C = 6\pi\eta r\upsilon$ – сила сопротивления (внутреннего трения), определяемая
η – ?	по формуле Стокса.

В случае если тело движется равномерно, сила тяжести уравновешивается силой Архимеда и силой сопротивления, т.е. $F_T = F_A + F_C$;

$$mg = \rho_2 V g + 6\pi\eta r\upsilon.$$

Учитывая, что

$$m = \rho_1 V = \rho_1 \frac{\pi d^3}{6}, \quad V = \frac{\pi d^3}{6}, \quad r = d/2,$$

где ρ_1 и ρ_2 – плотности шарика и глицерина; r и d – радиус и диаметр шарика; υ – скорость опускания шарика, получим:

$$\frac{\rho_1 \pi d^3 g}{6} = \frac{\rho_2 \pi d^3 g}{6} + 3\pi\eta d\upsilon.$$

Отсюда коэффициент вязкости η будет равен:

$$\eta = \frac{(\rho_1 - \rho_2) d^2 g}{18\upsilon};$$

$$[\eta] = \frac{\text{г}}{\text{см}^3} \cdot \frac{\text{см}^3 \cdot \text{см} \cdot \text{с}}{\text{с}^2 \cdot \text{см}} = \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{с}} \cdot \frac{\text{с}}{\text{с}} = \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{с}^2} \cdot \text{с} = \text{Па} \cdot \text{с};$$

$$\eta = \frac{10{,}1 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 9{,}81}{18 \cdot 3{,}6} = 6{,}1 \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{с}^2} = 0{,}61 \text{ Па·с}.$$

Ответ: $\eta = 0{,}61$ Па·с.

1.45 Шарик радиусом $r = 2$ мм падает в глицерине с постоянной скоростью $\upsilon = 8{,}5$ мм/с. Определить число Рейнольдса, $Re_{кр} = 0{,}5$. Плотность глицерина $\rho = 1{,}26$ г/см^3, динамическая вязкость глицерина $\eta = 1{,}48$ Па·с.

Дано:
$r = 2 \cdot 10^{-3}$ м
$\upsilon = 8{,}5 \cdot 10^{-3}$ м/с
$Re_{кр} = 0{,}5$
$\eta = 1{,}48$ Па·с
$\rho = 1{,}26 \cdot 10^3$ кг/м^3

Re; ρ_1 – ?

Решение

Характер течения жидкости зависит от числа Рейнольдса, определяемого формулой

$$Re = \frac{\rho \upsilon d}{\eta},$$

где ρ – плотность жидкости; υ – скорость жидкости; d – диаметр шарика; η – динамическая вязкость жидкости.

Учитывая данные задачи, получаем Re = 0,029.

Поскольку $Re < Re_{кр}$, то движение жидкости является ламинарным.

Стокс установил, что при небольших скоростях и размерах тел (при малых Re) сопротивление среды обусловлено практически только силой трения, определяемой по формуле

$$F = 6\pi\eta r\upsilon,$$

где r – радиус шарика.

При установившемся движении шарика в глицерине (υ = const) сила тяжести шарика (P) уравновешивается выталкивающей силой (F_A) и силой трения (F):

$$p = F_A + F \quad \text{или} \quad \rho_1 gV = \rho gV + 6\pi\eta r\upsilon, \qquad (1)$$

где g – ускорение свободного падения; V – объем шарика.

Подставив в уравнение (1) $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ и решив его, найдем искомую плотность материала шарика:

$$\rho_1 = \rho + \frac{9\eta\upsilon}{2gr^2};$$

$$[\rho_1] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} + \frac{\text{Па}\cdot\text{с}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}\cdot\text{м}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} + \frac{\text{Н}\cdot\text{с}^2}{\text{м}^2\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} + \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{м}^2\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} + \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

$$\rho_1 = 1{,}26\cdot10^3 + \frac{9\cdot1{,}48\cdot8{,}5\cdot10^{-3}}{2\cdot9{,}81\cdot(2\cdot10^{-3})^2} = 2{,}7 \text{ г/см}^3.$$

Ответ: Re = 0,029; ρ_1 = 2,7 г/см^3.

1.46 За время t = 1 ч через трубу диаметром d = 40 см прокачивается газ массой m = 15 кг. Динамическая вязкость газа $\eta = 10^{-5}$ Па·с. Если за характерный размер принять диаметр трубы, то критическое значение числа Рейнольдса $\text{Re}_{кр}$ для ламинарного течения газа равно 2000. Определить характер течения газа.

Дано:

t = 3600 с

d = 0,4 м

m = 15 кг

$\eta = 10^{-5}$ Па·с

$\text{Re}_{кр}$ = 2000

Re – ?

Решение

Масса m газа, протекающего за время t через поперечное сечение трубы S,

$$m = \rho V = \rho S\upsilon t,$$

где ρ – плотность газа; V – объем протекающего газа; υ – скорость потока.

Тогда, учитывая, что $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$, получим:

$$\upsilon = \frac{4m}{\pi d^2 \rho t}, \qquad (1)$$

По определению число Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \upsilon d}{\eta}. \qquad (2)$$

Подставив в (2) выражение (1), найдем число Рейнольдса:

$$\mathrm{Re} = \frac{4m}{\pi \eta t d}; \quad [\mathrm{Re}] = \frac{\text{кг}}{\text{Па} \cdot \text{с} \cdot \text{с} \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{Н} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м}} = 1;$$

$$\mathrm{Re} = \frac{4 \cdot 15}{3{,}14 \cdot 10^{-5} \cdot 3600 \cdot 0{,}4} = 1330.$$

Поскольку $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{кр}$, течение газа является ламинарным.

Ответ: течение ламинарное

1.5 Элементы специальной теории относительности

1.47 Протон движется со скоростью 0,7 скорости света. Найти импульс и кинетическую энергию протона.

Дано:	**Решение**
$m_0 = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг $\beta = 0{,}7$ $c = 3 \cdot 10^8$ м/с	Импульс частицы в релятивистской механике определяется по формуле
$P;\ T$ – ?	

$$P = \frac{m_0 \upsilon}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \quad \text{или} \quad P = m_0 c \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (1)$$

где $\beta = \dfrac{\upsilon}{c}$.

Подставив в формулу (1) числовые значения, получим:

$$P = 1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot \frac{0{,}7}{\sqrt{1-0{,}7^2}} \approx 4{,}91 \cdot 10^{-19} \text{ кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$[P] = \text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

В релятивистской механике кинетическая энергия частицы $E_к$ определяется как разность между полной энергией E и энергией покоя этой частицы:

$$E_к = E - E_0,$$

где

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}; \ E_0 = m_0 c^2.$$

Тогда формула $E_к$ примет вид:

$$E_к = m_0 c^2 \left(\frac{1}{1-\beta^2} - 1 \right); \quad [E] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Дж};$$

$$E_к = 1{,}5 \cdot 10^{-10} \left(\frac{1}{1-0{,}7^2} - 1 \right) \approx 6{,}02 \cdot 10^{-11} \text{ Дж}.$$

Ответ: $P = 4{,}91 \cdot 10^{-19}$ кг $\cdot \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$; $E_к = 6{,}02 \cdot 10^{-11}$ Дж.

1.48 Тело движется со скоростью, равной 0,9 *с*. Найти релятивистское сокращение объема тела.

Дано:
$\upsilon = 0{,}9\ c$
τ – ?

Решение

Поскольку поперечные размеры тела при его движении не изменяются, то изменение объема тела будет определяться релятивистским сокращением продольного размера, определяемого формулой:

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\ .$$

Тогда сокращение объема можно найти по аналогичной формуле:

$$V = V_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\ .$$

Определим относительное изменение объема:

$$\tau = \frac{V_0 - V}{V_0}100\% = \frac{V_0 - V_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}{V_0}100\% = \left(1-\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\right)100\%.$$

$$\tau = 56\ \%.$$

Ответ: $\tau = 56\ \%$.

1.49 Скорость движения мезона $\upsilon = 0{,}95\ c$. Какой промежуток времени $\Delta\tau$ по часам неподвижного наблюдателя соответствует одной секунде «собственного времени» мезона?

Дано:
$\upsilon = 0{,}95\ c$
$\Delta t = 1$ с
$\Delta\tau$ – ?

Решение

Промежуток времени $\Delta\tau$ по часам неподвижного наблюдателя и соответствующий ему промежуток собственного времени связаны соотношением

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\ ,$$

Отсюда $\Delta\tau = \dfrac{1}{\sqrt{1-0{,}95^2}} = 3{,}2$ с.

Ответ: $\Delta\tau = 3{,}2$ с.

1.50 Определить скорость нестабильной частицы, если время ее жизни по часам наблюдателя с Земли увеличилось в n = 1,8 раз.

Дано:	**Решение**
$n = \dfrac{\tau'}{\tau} = 1{,}8$	Системой отсчета K свяжем с частицей, тогда промежуток времени между возникновением и распадом частицы в этой системе отсчета равен ее собственному времени жизни τ. Поскольку система K
υ – ?	

движется вместе с частицей, то эти события происходят в одной точке, что является необходимым условием применения формулы, описывающей релятивистское замедление хода часов. Для системы K', связанной с Землей, время жизни частицы – τ'.

Тогда

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Откуда

$$\frac{\tau'}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = n,$$

откуда искомая скорость

$$\upsilon = c\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\ ;\ \ \upsilon = 3\cdot 10^8\sqrt{1-\frac{1}{1{,}8^2}} = 8{,}831\ \text{с}.$$

Ответ: υ = 8,831 с.

1.51 Космическая платформа движется со скоростью $\upsilon = 0{,}8c$ относительно наблюдателя. На платформе одновременно происходят два события в точках, расположенных на расстоянии l_0 = 150 м друг от друга. Определить промежуток времени τ' между этими событиями, отсчитанный по часам наблюдателя.

Дано:	**Решение**
$\upsilon = 0{,}8c$	
$l_0 = x_2 - x_1 = 150$ м	Систему отсчета K свяжем с платформой, систему
$t_2 = t_1 = t$	отсчета K' – с наблюдателем. По условию задачи K'
τ' – ?	движется относительно K со скоростью υ в направлении, принятом за положительное.

Искомый промежуток времени

$$\tau' = t_1' - t_2', \tag{1}$$

где t_1' и t_2' – показания синхронизированных часов в системе K', расположенных в точках x_1' и x_2', в те моменты времени, когда в каждой из точек произошло рассматриваемое событие.

Согласно преобразованиям Лоренца

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{\upsilon}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \quad t_2' = \frac{t_2 - \frac{\upsilon}{c^2} x_2}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}. \tag{2}$$

Подставив выражение (2) в формулу (1) и учитывая, что $t_2 = t_1 = t$ и $x_2 - x_1 = l_0$, найдем:

$$\tau' = \frac{l_0 \upsilon}{c^2 \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \quad [\tau'] = \frac{\text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с} \cdot \text{м}^2} = \text{с};$$

$$\tau' = \frac{150 \cdot 0{,}8 \cdot 3 \cdot 10^8}{\left(3 \cdot 10^8\right)^2 \sqrt{1 - \frac{\left(0{,}8 \cdot 3 \cdot 10^8\right)^2}{3 \cdot 10^8}}} = 0{,}667 \text{ мкс}.$$

Ответ: $\tau' = 0{,}667$ мкс.

2 МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

2.1 Основы молекулярно-кинетической теории идеального газа

2.1 Найти число молекул газа, находящегося в сосуде объемом $V = 0{,}5$ л при нормальных условиях.

Дано:
$V = 5\cdot10^{-4}$ м^3
$P = 10^5$ Па
$T = 273$ К

N – ?

Решение

Считая газ идеальным, из уравнения Менделеева – Клапейрона $pV = \nu RT$ найдем количества вещества газа ν: $\nu = \dfrac{PV}{RT}$, где $R = 8{,}31\,\dfrac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ – молярная газовая постоянная.

Число молекул газа N, находящегося в сосуде, найдем как произведение количества вещества ν на постоянную Авогадро N_A:

$$N = \nu N_A \quad \text{или} \quad N = \frac{PV}{RT}N_A;$$

$$[N] = \frac{\text{Па}\cdot\text{м}^3\cdot\text{моль}\cdot\text{К}}{\text{Дж}\cdot\text{К}\cdot\text{моль}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^3}{\text{Н}\cdot\text{м}^2\cdot\text{м}} = 1 \text{ – безразмерная величина}$$

$$N = \frac{10^5\cdot 5\cdot10^{-4}}{8{,}31\cdot273}\cdot 6{,}02\cdot10^{23} = 1{,}3\cdot10^{22}.$$

Ответ: $N = 1{,}3\cdot10^{22}$.

2.2 Сосуд емкостью $V = 10$ л, заполненный воздухом при температуре 500 К, соединяется трубочкой с чашкой, в которой находится ртуть. Найти количество ртути Δm, перешедшей в сосуд при остывании воздуха в нем до 300 К.

Дано:
$V = 10^{-2}$ м^3
$T_1 = 500$ К
$T_2 = 300$ К

Δm – ?

Решение

Поскольку объем сосуда не меняется, найдем изменение давления ΔP воздуха в нем с уменьшением температуры.

По закону Шарля запишем:

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}; \quad P_2 = \frac{T_2}{T_1} P_1,$$

откуда

$$\Delta P = P_1 - P_2 = P_1 - \frac{P_1 T_2}{T_1} = \frac{P_1(T_1 - T_2)}{T_1}.$$

Считая, что

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{\Delta P}{P_1},$$

получим

$$\frac{\Delta m}{\rho V} = \frac{P_1(T_1 - T_2)}{P_1 T_1},$$

откуда

$$\Delta m = \rho V \frac{(T_1 - T_2)}{T_1},$$

где ρV – масса ртути, помещающейся в объеме V; ρ – плотность ртути.

$$[\Delta m] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^3} \cdot \frac{\text{К}}{\text{К}} = \text{кг}; \qquad \Delta m = 13{,}6 \cdot 10^3 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{500 - 300}{500} = 54{,}4 \text{ кг}.$$

Ответ: $\Delta m = 54{,}4$ кг.

2.3 Найти среднюю кинетическую энергию $\langle E_{K1вр} \rangle$ вращательного движения одной молекулы кислорода при температуре $T = 286$ К, а также кинетическую энергию $E_{K\,вр}$ вращательного движения всех молекул этого газа, если его масса $m = 4$ г.

Дано:
$T = 286$ К
$m = 4$ г
$\langle E_{K1вр} \rangle; E_{K\,вр}$ – ?

Решение

Известно, что на каждую степень свободы молекул газа приходится одинаковая средняя энергия $\frac{1}{2}kT$. Так как молекула кислорода двухатомная, а, следовательно, обладает двумя вращательными степенями свободы, то средняя кинетическая энергия вращательного движения молекулы кислорода

$$\langle E_{K1вр} \rangle = 2\frac{1}{2}kT = kT; \qquad [\langle E_{K1вр} \rangle] = \frac{\text{Дж}}{\text{К}} \cdot \text{К} = \text{Дж};$$

$$\left\langle E_{K1вр}\right\rangle = 1{,}38\cdot10^{-23}\cdot286 = 3{,}95\cdot10^{-21}\ \text{Дж}.$$

Средняя кинетическая энергия вращательного движения всех молекул газа выражается соотношением $E_{K\,вр} = N\left\langle E_{K1вр}\right\rangle$, где число молекул газа $N = \frac{m}{M}N_A$. В результате

$$E_{K\,вр} = \frac{m}{M}N_A\left\langle E_{K1вр}\right\rangle;$$

$$\left[E_{K\,вр}\right] = \frac{\text{кг}\cdot\text{моль}}{\text{моль}\cdot\text{кг}}\cdot\text{Дж} = \text{Дж};$$

$$E_{K\,вр} = 6{,}02\cdot10^{23}\cdot\frac{4\cdot10^{-3}}{32\cdot10^{-3}}\cdot3{,}95\cdot10^{-21} = 297\ \text{Дж}.$$

Ответ: $\left\langle E_{K1вр}\right\rangle = 3{,}95\cdot10^{-21}$Дж; $E_{K\,вр} = 297$ Дж.

2.4 Найти относительное число молекул ω идеального газа, скорости которых находятся в пределах от 0 до одной сотой наиболее вероятной скорости $\upsilon_в$.

Дано:
$\upsilon_{\min} = 0$ м/с
$\upsilon_{\max} = 0{,}01\cdot\upsilon_в$
$\omega - ?$

Решение

Воспользуемся распределением молекул по скоростям

$$dN(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}Ne^{-u^2}u^2du,$$

где $u = \frac{\upsilon}{\upsilon_в}$; dN – число молекул, скорости которых u заключены в пределах от u до du. Так как $\upsilon_{\max} = 0{,}01\cdot\upsilon_в$, то $u_{\max} = \frac{\upsilon_{\max}}{\upsilon_в} = 0{,}01$.

Для $u \ll 1$ имеем: $e^{-u^2} = 1 - u^2$.

Пренебрегая значением $u^2 = 0{,}01^2 = 10^{-4}$ по сравнению с 1, получим

$$\omega = \int\limits_0^{u_{\max}}\frac{4}{\sqrt{\pi}}u^2du = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{0{,}01}u^2du = 7\cdot10^{-7}.$$

Ответ: $\omega = 7\cdot10^{-7}$.

2.5 В сосуде объемом $V = 1\,\text{см}^3$ находится водород при нормальных условиях. Найти число молекул ΔN, скорости которых лежат в диапазоне от 0 до 1 м/с.

Дано:	**Решение**
$T = 273$ К $V = 10^{-6}$ м^3 $P = 10^5$ Па $\upsilon_{\min} = 0$ м/с $\upsilon_{\max} = 1$ м/с $M = 2\cdot 10^{-3}$кг/моль $\Delta N\ \ -?$	Воспользуемся распределением молекул по скоростям $$dN(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N e^{-u^2} u^2 du, \qquad (1)$$ где $dN(u)$ – число молекул, скорости u которых заключены в интервале от u до du; N – полное число молекул.

Найдем значение максимальной скорости интересующих нас молекул:

$$u_{\max} = \frac{\upsilon_{\max}}{\upsilon_в},$$

где $\upsilon_в = \sqrt{\dfrac{2RT}{M}}$ – наиболее вероятная скорость.

Тогда $u_{max} = 0{,}66 \cdot 10^{-3}$.

Для таких значений u выражение (1) можно упростить; учитывая, что $u \ll 1$, выполняется равенство $e^{-u^2} = 1 - u^2$.

Если пренебречь значением $u^2 = 0{,}44 \cdot 10^{-6}$ по сравнению с 1, выражение (1) примет вид:

$$dN(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N u^2 du\ ;$$

$$\Delta N = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \int_0^{u_{\max}} u^2 du = \frac{4N}{3\sqrt{\pi}} u^3_{\max}. \qquad (2)$$

Число молекул $N = N_A$, а количество вещества ν выразим из уравнения Менделеева – Клапейрона:

$$pV = \nu RT,$$

откуда

$$\nu = \frac{PV}{RT}.$$

Тогда

$$N = \frac{PV}{RT} N_A. \qquad (3)$$

Подставив выражение (3) в (2), получим

$$\Delta N = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{PV}{RT} N_A u^3{}_{\max};$$

$$[\Delta N] = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{моль} \cdot \text{К}}{\text{моль} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3}{\text{Дж}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{м}} = 1;$$

$$\Delta N = \frac{4}{3\sqrt{3{,}14}} \cdot \frac{10^5 \cdot 10^{-6} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}{8{,}31 \cdot 273} \cdot 1^3 = 5{,}8 \cdot 10^9.$$

Ответ: $\Delta N = 5{,}8 \cdot 10^9$.

2.6 Определить высоту полета самолета, если барометр в его кабине показывает давление $P =\ 2{,}5 \cdot 10^4$ Па. Температуру воздуха считать постоянной и равной $T = 220$ К, а давление у поверхности Земли $P_0 = 10^5$ Па.

Дано:	Решение
$T = 220$ К $P =\ 2{,}5 \cdot 10^4$ Па $P_0 = 10^5$ Па	
$h\ \ -?$	

Воспользуемся барометрической формулой

$$P = P_0 e^{\frac{-Mgh}{RT}}, \qquad (1)$$

где $M = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса воздуха.

Приведем уравнение (1) к виду

$$\frac{P_0}{P} = e^{\frac{Mgh}{RT}}$$

и прологарифмируем его:

$$\frac{Mgh}{RT} = \ln \frac{P_0}{P},$$

откуда

$$h = \frac{RT}{Mg} \ln \frac{P_0}{P};$$

$$[h] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{моль} \cdot \text{с}^2}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Н}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{Н}} = \text{м}; \quad h = \frac{8{,}3 \cdot 220}{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8} \ln \frac{10^5}{2{,}5 \cdot 10^4} = 8700 \text{ м}.$$

Ответ: $h = 8700$ м.

2.7 Найти, во сколько раз отличается коэффициент диффузии D_1 кислорода от коэффициента диффузии D_2 гелия, если оба газа находятся в нормальных условиях.

Дано:	**Решение**
$T = 273$ К $P = 10^5$ Па $M_1 = 32\cdot10^{-3}$ кг/моль $M_2 = 4\cdot10^{-3}$ кг/моль $d_1 = 3\cdot10^{-10}$ м $d_2 = 2\cdot10^{-10}$ м	Коэффициент диффузии определяется по формуле $$D = \frac{\langle \upsilon \rangle \langle \lambda \rangle}{3},$$ где $\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$ – средняя арифметическая скорость.
$\frac{D_1}{D_2}$. – ?	Среднюю длину свободного пробега определим по формуле $\langle \lambda \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 P}$.

Таким образом, $D = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}\frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 P}$

Отношение коэффициентов диффузии $\frac{D_1}{D_2} = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2$;

$$\frac{D_1}{D_2} = \sqrt{\frac{4\cdot10^{-3}}{32\cdot10^{-3}}}\left(\frac{2\cdot10^{-10}}{3\cdot10^{-10}}\right)^2 = 0{,}16.$$

Ответ: $\frac{D_1}{D_2} = 0{,}16$.

2.2 Основы термодинамики

2.8 Вычислить удельную теплоемкость $c_{V\,см}$ смеси двух газов (гелия массой $m_1 = 6$ г и азота массой $m_2 = 10$ г) при постоянном объеме.

Дано:

$m_1 = 6 \cdot 10^{-3}$ кг

$m_2 = 1 \cdot 10^{-2}$ кг

$i_1 = 3$

$i_2 = 5$

$M_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$M_2 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$c_{V\,см}$ – ?

Решение

Удельная теплоемкость смеси газов определяется отношением теплоемкости $C_{см}$ к массе $m_{см}$ этой смеси:

$$c_{см} = \frac{C_{см}}{m_{см}}.$$

Теплоемкость вещества – величина аддитивная, поэтому для двух газов можно записать:

$$c_{V\,см} = \frac{C_1 + C_2}{m_1 + m_2},$$

где C_1 и C_2 – теплоемкость газов; m_1 и m_2 – их массы.

Теплоемкость газов при постоянном объеме определяется соотношениями

$$C_{V1} = \frac{m_1}{M_1}\frac{i_1 R}{2} \quad \text{и} \quad C_{V2} = \frac{m_2}{M_2}\frac{i_2 R}{2},$$

где M_1 и M_2 – молярные массы газов; i_1 и i_2 – числа степеней свободы; R – молярная газовая постоянная.

Тогда

$$c_{V\,см} = \frac{i_1 \dfrac{m_1}{M_1} + i_2 \dfrac{m_2}{M_2}}{m_1 + m_2}\frac{R}{2};$$

$$c_{V\,см} = \frac{3\dfrac{6 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-3}} + 5\dfrac{10^{-2}}{28 \cdot 10^{-3}}}{6 \cdot 10^{-3} + 10^{-2}}\frac{8{,}31}{2} = 1{,}63 \cdot 10^3 \ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} = 1{,}63 \ \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Ответ: $c_{V\,см} = 1{,}63 \ \dfrac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$

2.9 Найти работу A расширения двухатомного идеального газа, которому при постоянном давлении сообщено количество теплоты $Q = 4{,}9$ кДж.

Дано:	**Решение**
$i = 5$	Работа газа при изобарическом процессе ($P = \text{const}$) определяется формулой
$Q = 4{,}9 \cdot 10^3$ Дж	$$A = P\left(V_2 - V_1\right), \qquad (1)$$
$P = const$	
$A - ?$	

где V_1 и V_2 – начальный и конечный объемы газа.

Для двух состояний газа (до и после сообщения газу количества теплоты Q) запишем уравнения Менделеева – Клапейрона:

$$PV_1 = \nu RT_1; \qquad (2)$$

$$PV_2 = \nu RT_2, \qquad (3)$$

где T_1 и T_2 – температуры газа до и после нагревания.

Вычтем из уравнения (3) уравнение (2): $P\left(V_2 - V_1\right) = \nu R\left(T_2 - T_1\right)$.

Тогда из (1) следует:

$$A = \nu R\left(T_2 - T_1\right). \qquad (4)$$

Найдем по формуле $U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT = \frac{m}{M}C_V T$ изменение внутренней энергии газа ΔU:

$$\Delta U = \frac{i}{2}\nu R\left(T_2 - T_1\right), \qquad (5)$$

где i – число степеней свободы молекулы газа, $i = 5$ для двухатомного газа.

Из сравнения выражений (4) и (5) видно, что

$$\Delta U = \frac{i}{2}A. \qquad (6)$$

Согласно первому началу термодинамики теплота, сообщенная телу,

$$Q = \Delta U + A. \qquad (7)$$

Подставив (6) в (7), получим: $Q = \frac{i}{2}A + A = \frac{i+2}{2}A$, откуда

$$A = \frac{2}{i+2}Q;$$

$$A = \frac{2}{5+2}4{,}9 \cdot 10^3 = 1{,}4 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 1{,}4 \text{ кДж}.$$

Ответ: $A = 1{,}4$ кДж.

2.10 Азот массой $m = 20$ г при температуре $T_1 = 293$ К был сжат адиабатически. Объем газа уменьшился в $n = 5$ раз. Найти температуру газа T_2 после сжатия.

Дано:

$m = 20 \cdot 10^{-3}$ кг

$T_1 = 293$ Ê

$n = \dfrac{V_1}{V_2} = 5$

T_2 – ?

Решение

Связь между начальными и конечными значениями температуры T и объема V газа при адиабатическом процессе устанавливается уравнением Пуассона

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \quad \text{или} \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{nV_1}{V_1}\right)^{\gamma-1} = n^{\gamma-1},$$

где $\gamma = \dfrac{c_P}{c_V} = \dfrac{i+2}{i}$.

Так как газ двухатомный, то $i = 5$ и $\gamma = \dfrac{i+2}{2} = 1{,}4$.

Тогда

$$T_2 = T_1 n^{0,4};$$

$$T_2 = 293 \cdot 5^{0,4} = 558 \text{ К}.$$

Ответ: $T_2 = 558$ К.

2.11 Двухатомный газ необходимо сжать от объема V_1 = 5 л до объема V_2 = 2,5 л. Определить, во сколько раз и как выгоднее сжимать газ, адиабатно или изотермически.

Дано:

$i = 5$

$V_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ м^3

$V_2 = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ м^3

$V_2 = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$м^3;

$Q = 0$

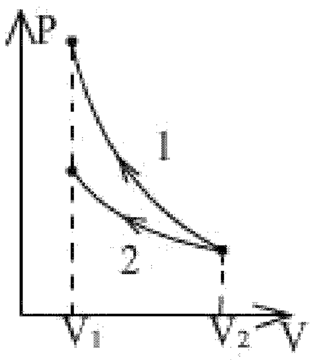
$T = const$

$\dfrac{A_1}{A_2}$ – ?

Решение

Диаграммы обоих процессов – адиабата (кривая 1) и изотерма (кривая 2) в координатах P,V представляют собой гиперболы (см. рисунок), но адиабата $\left(PV^{\gamma} = \text{const}\right)$ – более крутая, чем изотерма $\left(PV = \text{const}\right)$.

Поскольку работа в обоих процессах численно равна площади, ограниченной осью абсцисс, прямыми V_1 и V_2 и, соответственно, адиабатой и изотермой, из рисунка следует, что газ изотермически сжимать выгоднее (при сжатии газа работа совершается внешними силами).



Подтвердим этот вывод вычислениями. Работа при адиабатическом сжатии

$$A_1 = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\frac{m}{M}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right], \qquad (1)$$

где $\gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{i+2}{i}$; $i = 5$; $\gamma = 1{,}4$; T_1 – начальная температура газа; V_1 и V_2 – начальный и конечный объемы газа соответственно. Работа газа при изотермическом сжатии

$$A_2 = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) с учетом того, что $T = T_1$ следует, что

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}}{(\gamma - 1)\ln\frac{V_2}{V_1}} \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{1 - \left(\frac{5\cdot 10^{-3}}{2{,}5\cdot 10^{-3}}\right)^{0{,}4}}{(1{,}4 - 1)\ln 0{,}5} = 1{,}15.$$

Изотермически сжимать газ выгоднее.

Ответ: $\frac{A_1}{A_2} = 1{,}15$ – изотермически сжимать газ выгоднее.

2.12 Некоторый двухатомный газ подвергают политропному сжатию, в результате чего давление газа возросло от $P_1 = 10$ кПа до $P_2 = 30$ кПа, а объем газа уменьшился от $V_1 = 2{,}5$ л до $V_2 = 1$ л. Определить: 1) показатель политропы n; 2) изменение внутренней энергии ΔU газа.

Дано:
$i = 5$;
$P_1 = 10^4$ Па;
$P_2 = 3\cdot 10^4$ Па;
$V_1 = 2{,}5\cdot 10^{-3}$ м^3;
$V_2 = 10^{-3}$ м^3.

1) n; 2) ΔU – ?

Решение

1. Уравнение политропного процесса для двух состояний газа (начального 1 и конечного 2) можно записать в виде

$$P_1 V_1^{\,n} = P_2 V_2^{\,n},$$

где n – показатель политропы.

Возможна другая форма записи:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^n$$

или, учитывая условие задачи, $\frac{P_2}{P_1} = 3$ и $\frac{V_1}{V_2} = 2{,}5$, получим $3 = (2{,}5)^n$, откуда искомый показатель политропы $n = 1{,}2$.

2. Внутренняя энергия газа – однозначная функция состояния, при всех процессах изменение внутренней энергии одинаково и равно

$$\Delta U = \nu C_V (T_2 - T_1), \tag{1}$$

где ν – количество вещества; $C_V = \frac{iR}{2}$ – молярная теплоемкость при постоянном объеме.

Записав уравнение Менделеева – Клапейрона для двух состояний газа $P_1V_1 = \nu RT_1$; $P_2V_2 = \nu RT_2$, найдем температуры T_2 и T_1:

$$T_1 = \frac{P_1V_1}{\nu R}; \quad T_2 = \frac{P_2V_2}{\nu R}. \tag{2}$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), получим:

$$\Delta U = \frac{C_V}{R}(P_2V_2 - P_1V_1) = \frac{i}{2}(3P_1 \cdot 3V_1 - P_1V_1) = \frac{8i}{2}P_1V_1 = 20P_1V_1;$$

$$[\Delta U] = \text{Па} \cdot \text{м}^3 = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \cdot \text{м}^3 = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}; \qquad \Delta U = 20 \cdot 10^4 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3} = 200 \text{ Дж}.$$

Ответ: 1) $n = 1{,}2$; 2) $\Delta U = 200$ Дж.

2.13 Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, совершает за один цикл работу $1{,}5 \cdot 10^5$ Дж. Температура нагревателя 400 К, температура холодильника 260 К. Найти КПД машины, количество теплоты, получаемое машиной за один цикл от нагревателя, и количество теплоты, отдаваемое за один цикл холодильнику.

Дано:	Решение
$A = 1{,}5 \cdot 10^5$ Дж	Для цикла Карно КПД определяется формулой
$T_1 = 400$ К	
$T_2 = 260$ К	$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \tag{1}$$
η; Q_1; Q_2 – ?	

С другой стороны, термический КПД выражается так

$$\eta = \frac{A}{Q_1}, \tag{2}$$

где A – работа, совершенная рабочим телом тепловой машины; Q_1 – теплота, полученная от нагревателя. Из (1) и (2) имеем:

$$Q_1 = \frac{A}{\eta} = \frac{AT_1}{T_1 - T_2}. \tag{3}$$

Работа, совершенная рабочим телом машины, определяется разностью полученной от нагревателя теплоты Q_1 и отданной холодильнику теплоты Q_2: $A = Q_1 - Q_2$.

Отсюда $Q_2 = Q_1 - A$ или с учетом (3)

$$Q_2 = \frac{AT_1}{T_1 - T_2} - A = \frac{AT_2}{T_1 - T_2}. \tag{4}$$

Проверим размерность равенств (1), (3) и (4) и произведем вычисления:

$$[\eta] = \frac{\text{К}}{\text{К}} = 1; \qquad \eta = \frac{400 - 260}{400} = 0{,}35 = 35\ \%;$$

$$[Q_1] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{К}} = \text{Дж}; \qquad [Q_2] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{К}} = \text{Дж};$$

$$Q_1 = \frac{1{,}5 \cdot 10^5 \cdot 400}{400 - 260} = 429\ \text{Дж}; \qquad Q_2 = \frac{1{,}5 \cdot 10^5 \cdot 260}{400 - 260} = 279\ \text{Дж}.$$

Ответ: $\eta = 35\ \%$; $Q_1 = 429$ Дж; $Q_2 = 279$ Дж.

2.14 Лед массой 2 кг, находящийся при температуре t_1 = –10 °С, нагрели и превратили в пар. Определить изменение энтропии.

Дано:

$m = 2$ кг

T_1 = 263 К

T_2 = 273 К

T_3 = 373 К

$C_1 = 2{,}1 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К)

$C_2 = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К)

$\lambda = 3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг

$r = 2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг

ΔS – ?

Решение

Изменение энтропии определяется по формуле

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

Общее изменение энтропии равно сумме $\sum \Delta S_i$, где ΔS_i – изменение энтропии, происходящее на отдельных этапах процесса;

$$\Delta S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i.$$

Изменение энтропии ΔS_1 происходит при нагревании льда от начальной температуры $T_1 = 263$ К до температуры плавления $T_2 = 273$ К;

$$\Delta S_1 = \int_1^2 \frac{dQ_1}{T};$$

так как $dQ_1 = mc_1 dT$, то

$$\Delta S_1 = mc_1 \ln\frac{T_2}{T_1},$$

где m – масса льда; c_1 – удельная теплоемкость льда.

Изменение энтропии ΔS_2 происходит при плавлении льда. В этом случае $dQ_2 = m$, тогда

$$\Delta S_2 = \frac{m\lambda}{T_2},$$

где T_2 – температура плавления льда; λ – удельная теплота плавления.

Изменение энтропии ΔS_3 происходит при нагревании воды от температуры T_2 до температуры кипения $T_3 = 373$ К. Величина вычисляется аналогично ΔS_1:

$$\Delta S_3 = mc_2 \ln\frac{T_3}{T_2},$$

где c_2 – удельная теплоемкость воды.

Изменение энтропии ΔS_4 происходит при испарении воды; так как $dQ = mr$,то

$$\Delta S_4 = \frac{mr}{T_3},$$

где r – удельная теплота парообразования.

Общее изменение энтропии

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4 = m\left(c_1 \ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{\lambda}{T_2} + c_2 \ln\frac{T_3}{T_2} + \frac{r}{T_3}\right);$$

$$\Delta S = 2\left(2{,}1\cdot 10^3 \ln\frac{273}{263} + \frac{3{,}35\cdot 10^5}{273} + 4{,}19\cdot 10^3 \ln\frac{373}{273} + \frac{2{,}26\cdot 10^6}{373}\right) =$$

$$= 1{,}73\cdot 10^4\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Ответ: $\Delta S = 1{,}73\cdot 10^4\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

2.3 Реальные газы, жидкости и твердые тела

2.15 Вычислить поправки Ван-дер-Ваальса для кислорода, если критическая температура $T_{кр}$ = 15 К и критическое давление $P_{кр}$ = 5,08 МПа.

Дано:	**Решение**
$T_{кр} = 15$ К $P_{кр} = 5{,}08 \cdot 10^6$ Па.	Поправки Ван-дер-Ваальса a и b присутствуют в уравнении состояния реальных газов (уравнении Ван-дер-Ваальса)
a, b – ?	

$$\left(P + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(V - \nu b\right) = \nu RT,$$

где ν – количество вещества.

Это уравнение можно привести к виду

$$PV^3 - \left(\nu RT + \nu bP\right)V^2 + \nu^2 aV - \nu^3 ab = 0. \qquad (1)$$

Подставляя в (1) критическую температуру и критическое давление, получим:

$$P_{кр}V^3 - \left(\nu RT_{кр} + \nu bP_{кр}\right)V^2 + \nu^2 aV - \nu^3 ab = 0. \qquad (2)$$

С другой стороны, поскольку в критической точке все три корня полученного уравнения совпадают и равны $V_{кр}$, уравнение (2) можно записать также в виде

$$P_{кр}\left(V - V_{кр}\right)^3 = 0$$

или

$$P_{кр}V^3 - 3P_{кр}V_{кр}V^2 + 3P_{кр}V_{кр}{}^2 V - P_{кр}V_{кр}{}^3 = 0.$$

Так как уравнения (2) и (3) тождественны, в них должны быть равны и коэффициенты при известных соответствующих степеней. Поэтому можно записать:

$$P_{кр}V_{кр}{}^3 = \nu^3 ab; \quad 3P_{кр}V_{кр}{}^2 = \nu^2 a; \quad 3P_{кр}V_{кр} = \nu RT_{кр} + \nu bP_{кр}.$$

Решая полученные уравнения, найдем

$$a = \frac{27R^2 T_{кр}{}^2}{64P_{кр}}; \qquad b = \frac{RT_{кр}}{8P_{кр}}.$$

Ответ: $a = 0{,}138$ Н $\cdot$ м^4/моль^2; $b = 3{,}17 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль^2.

2.16 В цилиндре под поршнем находится хлор массой $m = 20$ г. Определить изменение ΔU внутренней энергии хлора при изотермическом расширении его от $V_1 =$ 200 см^3 до $V_2 =$ 500 см^3.

Дано:	Решение
$m = 20 \cdot 10^{-3}$ кг; $V_1 = 2 \cdot 10^{-4}$ м^3; $V_2 = 5 \cdot 10^{-4}$ м^3.	Внутренняя энергия U реального газа определяется выражением
$\Delta U.$ – ?	

$$U = \nu\left(C_V T - \frac{a}{V_m}\right).$$

Выразив молярный объем V_m через объем V и количества вещества ν $(V_m = V/\nu)$ и учтя, что $\nu = \frac{m}{M}$, получим

$$U = \frac{m}{M}\left(C_V T - \frac{ma}{VM}\right).$$

Изменение ΔU внутренней энергии в результате изотермического расширения найдем как разность двух значений внутренней энергии при объемах V_2 и V_1:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{m^2 a (V_2 - V_1)}{M^2 V_1 V_2};$$

$$[\Delta U] = \frac{\text{кг}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{м}^4 \cdot \text{м}^3 \cdot \text{моль}^2}{\text{моль}^2 \cdot \text{кг}^2 \cdot \text{м}^3 \cdot \text{м}^3} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж};$$

$$\Delta U = \frac{(20 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 0{,}650(5-2) \cdot 10^{-4}}{(71 \cdot 10^{-3}) 2 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 154 \text{ Дж}.$$

Ответ: $\Delta U = 154$ Дж.

2.17 В сосуд с ртутью опущен открытый капилляр. Разность уровней ртути в сосуде и капилляре $h = 37$ мм. Принимая плотность ртути $\rho = 13{,}6$ г/см^3, а ее поверхностное натяжение $\sigma = 0{,}5$ Н/м, определить радиус кривизны R ртутного мениска в капилляре.

Дано:	Решение
$h = 3{,}7 \cdot 10^{-3}$ м; $\rho = 1{,}36 \cdot 10^4$ кг/м^3; $\sigma = 0{,}5$ Н/м	Избыточное давление, вызванное кривизной мениска,
R – ?	

$$\Delta P = \frac{2\sigma}{R},$$

где σ – поверхностное натяжение; R – радиус кривизны ртутного мениска.

Ртуть – несмачивающая жидкость, поэтому в капилляре опускается на такую глубину, при которой давление столба жидкости (гидростатическое давление) $\rho g h$ уравновешивается избыточным давлением ΔP, т.е.

$$\frac{2\sigma}{R} = \rho g h,$$

где ρ – плотность ртути; g – ускорение свободного падения.

Откуда искомый радиус кривизны ртутного мениска

$$R = \frac{2\sigma}{\rho g h};$$

$$[R] = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{с}^2}{\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}} = \text{м};$$

$$R = \frac{2 \cdot 0{,}5}{1{,}36 \cdot 10^4 \cdot 9{,}81 \cdot 3{,}7 \cdot 10^{-3}} = 2{,}03 \cdot 10^{-3}\,\text{м} = 2{,}03 \text{ мм}.$$

Ответ: $R = 2{,}03$ мм

2.18 Две одинаковые длинные плоскопараллельные пластины, расстояние между которыми $d = 1$ мм, погружены в воду (см. рисунок). Считая смачивание полным, определить, на какую высоту h поднимется вода в зазоре. Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3, а ее поверхностное натяжение $\sigma = 73$ мН/м.

Дано:

$d = 10^{-3}$ м

$\rho = 10^3$ кг/м^3

$\sigma = 73 \cdot 10^{-3}$ Н/м

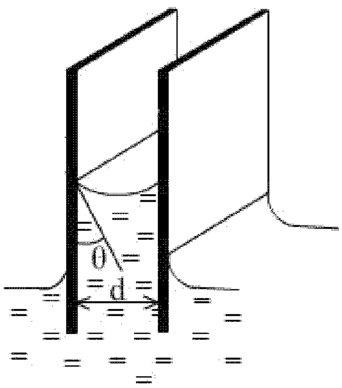
$\theta = 0$

h – ?

Решение

Избыточное давление ΔP уравновешивается давлением столба жидкости (гидростатическим давлением) $\rho g h$, т.е.

$$\Delta P = \rho g h. \quad (1)$$



Избыточное давление под вогнутой поверхностью жидкости, согласно формуле Лапласа,

$$\Delta P = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \quad (2)$$

где $R_1 = \dfrac{d}{2\cos\theta}$ (θ – краевой угол); $R_2 = \infty$ (поверхность цилиндрическая).

Подставив R_1 и R_2 в формулу (2), найдем

$$\Delta P = \frac{2\sigma\cos\theta}{d}. \qquad (3)$$

Тогда, согласно (1) и (3), $\frac{2\sigma\cos\theta}{d} = \rho g h$, откуда искомая высота $h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g d}$;

$$[h] = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^3\cdot\text{с}^2}{\text{м}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}^3\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{м}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}} = \text{м};$$

$$h = \frac{2\cdot 73\cdot 10^{-3}\cdot 1}{1000\cdot 9{,}81\cdot 10^{-3}} = 1{,}49\cdot 10^{-2}\,\text{м} = 1{,}49\ \text{см}.$$

Ответ: $h = 1{,}49$ см.

2.19 Найти добавочное давление внутри мыльного пузыря диаметром 10 см. Какую работу нужно совершить, чтобы выдуть этот пузырь?

Дано:
$d = 0{,}1$ м
$P; A - ?$

Решение

Пленка мыльного пузыря имеет две сферические поверхности – внешнюю и внутреннюю. Обе поверхности оказывают давление на воздух, заключенный внутри пузыря. Так как толщина пленки чрезвычайно мала, то диаметры обеих поверхностей практически одинаковы. Поэтому добавочное давление $P = 2\frac{2\sigma}{r}$, где $r-$ радиус пузыря.

Так как $r = \frac{d}{2}$, то $P = \frac{8\sigma}{d}$; $[P] = \frac{\text{Н}}{\text{м}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}.$

Коэффициент поверхностного натяжения мыльной воды $\sigma = 40$ мН/м, диаметр пузыря $d = 0{,}1$ м. Следовательно, $P = \frac{8\cdot 40\cdot 10^{-3}}{0{,}1} = 3{,}2$ Па.

Работа, которую нужно совершить, чтобы, растягивая пленку, увеличить ее поверхность на ΔS, выражается формулой $A = \sigma\Delta S$ или $A = \sigma(S - S_0)$.

В данном случае $S-$ общая площадь двух сферических поверхностей пленки мыльного пузыря; S_0- общая площадь двух поверхностей плоской пленки, затягивающей отверстие трубки до выдувания пузыря.

Пренебрегая S_0, получаем: $A \approx \sigma\Delta S = 2\pi d^2\sigma$;

$$[A] = \frac{\text{м}^2\cdot\text{Н}}{\text{м}} = \text{Н}\cdot\text{м} = \text{Дж}; \qquad A = 2\cdot 3{,}14\cdot 0{,}1^2\cdot 40\cdot 10^{-3} \approx 2{,}5\cdot 10^{-3}\,\text{Дж}.$$

Ответ: $A = 2{,}5\cdot 10^{-3}$ Дж.