Примеры решения типовых задач по разделам «Электростатика. Постоянный ток», «Электромагнетизм», «Электромагнитные колебания и волны»

Электростатика

1. Закон Кулона. Поле точечных зарядов.

1. Три одинаковых положительных заряда $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1$ нКл расположены по вершинам равностороннего треугольника. Какой отрицательный заряд Q_4 нужно поместить в центре треугольника, чтобы сила притяжения с его стороны уравновесила силы взаимного отталкивания зарядов, находящихся в вершинах?

Дано: $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1$ нКл.

Найти: Q_4.

Решение. Все три заряда, расположенные по вершинам треугольника, находятся в одинаковых условиях. Поэтому для решения задачи достаточно выяснить, какой заряд следует поместить в центре треугольника, чтобы один из трех зарядов, например Q_1, находился в равновесии. В соответствии с принципом суперпозиции на этот заряд действует каждый заряд независимо от остальных. Поэтому заряд Q_1 будет находиться в равновесии, если векторная сумма действующих на него сил будет равна нулю:

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F} + \vec{F}_4 = 0, \qquad (1)$$

где $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ – силы, с которыми соответственно действуют на заряд Q_1 заряды Q_2, Q_3 и Q_4; $\vec{F}$ – равнодействующая сил $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$. Так как силы $\vec{F}$ и $\vec{F}_4$ направлены по одной прямой (см. рис.), то векторное равенство (1) можно заменить скалярной суммой:

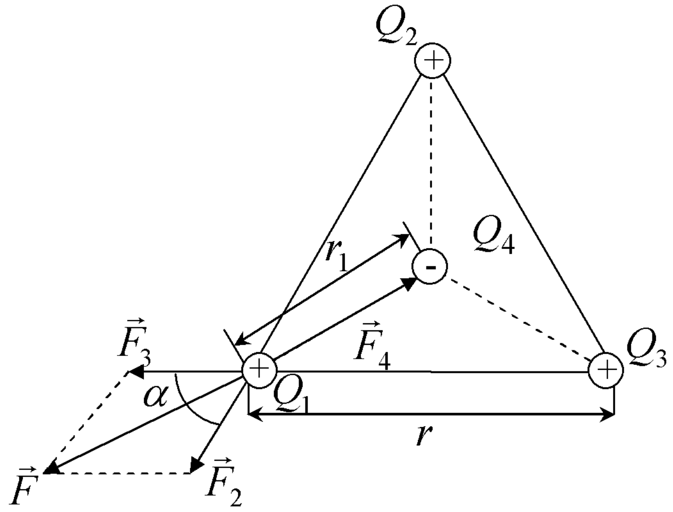


Рис.

$$F - F_4 = 0 \text{ или } F_4 = F.$$

Выразив в последнем равенстве F через F_2 и F_3 и учитывая, что $F_2 = F_3$, получим

$$F_4 = F_2\sqrt{2(1+\cos\alpha)}\,.$$

Применяя закон Кулона и имея в виду, что $Q_2 = Q_3 = Q_1$, найдем

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_4}{\varepsilon r_1^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1^2}{\varepsilon r_1^2}\sqrt{2(1+\cos\alpha)}\,, \qquad (2)$$

откуда

$$Q_4 = \frac{Q_1 r_1^2}{r^2}\sqrt{2(1+\cos\alpha)}\,.$$

Из геометрических построений в равностороннем треугольнике следует, что

$$r_1 = \frac{r/2}{\cos 30^\circ} = \frac{r}{2\cos 30^\circ} = \frac{r}{\sqrt{3}}\,;$$

$$\cos\alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}\,.$$

С учетом этого формула (2) примет вид

$$Q_4 = \frac{Q_1}{\sqrt{3}} = 0{,}58 \text{ нКл}\,.$$

Поскольку система находится в равновесии, заряды, находящиеся в двух других вершинах треугольника, будут также в равновесии. На заряд Q_4 действуют три силы, равнодействующая этих трех сил равна нулю. Поэтому заряд Q_4 также будет находиться в равновесии.

Ответ: $Q_4 = 0{,}58$ нКл

2. Четыре точечных одинаковых заряда $Q = 10$ нКл размещены по вершинам квадрата со стороной $b = 0{,}1$ м (рис. *а*). Заряды в вершинах 1 и 2 – положительные, а в вершинах 3 и 4 – отрицательные. Определить: 1) напряженность электрического поля в центре квадрата; 2) потенциал в той же точке поля.

Дано: $Q = 10$ нКл; $b = 0{,}1$ м.

Найти: E; φ.

Решение: 1. Напряженности электрического поля каждого из рассматриваемых зарядов в центре квадрата одинаковы и равны

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2},$$

где $r = b\frac{\sqrt{2}}{2}$. Направления векторов $\vec{E}_i$ (i = 1, 2, 3, 4) указаны на рис. Результирующий вектор $\vec{E}$ находим как векторную сумму этих векторов (в данном случае как диагональ квадрата со стороной $2E_i$) $E = 2E_i\sqrt{2}$.

Таким образом,

$$E = 2\sqrt{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} = \frac{\sqrt{2}Q}{\pi\varepsilon_0 b^2}.$$

Выполним вычисления:

$$E = \frac{\sqrt{2}\cdot 10\cdot 10^{-9}}{3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 10^{-2}} = 51\ \frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

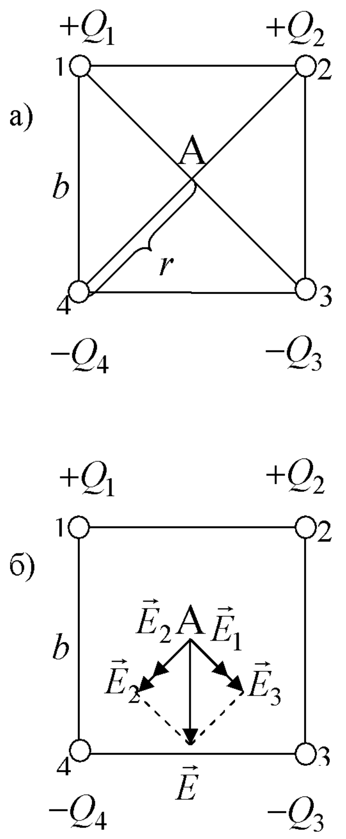


Рис.

2. Потенциалы полей зарядов $Q_1, \ldots, Q_4$ суммируются как скалярные величины:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_3}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_4}{r}.$$

Учитывая, что заряды одинаковы по модулю, но имеют разные знаки, находим потенциал поля в точке А:

$$\varphi = 0.$$

Ответ: $E = 51\ \frac{\text{кВ}}{\text{м}}$; $\varphi = 0$

3. Два одинаковых заряженных шарика массой m, подвешенные на нитях равной длины, опускаются в жидкий диэлектрик, плотность которого ρ_1, а диэлектрическая проницаемость ε_1. Какова должна быть плотность ρ материала шариков, чтобы углы их расхождения в воздухе и диэлектрике были одинаковы?

Дано: m, ρ_1, ε_1, α.

Найти: ρ.

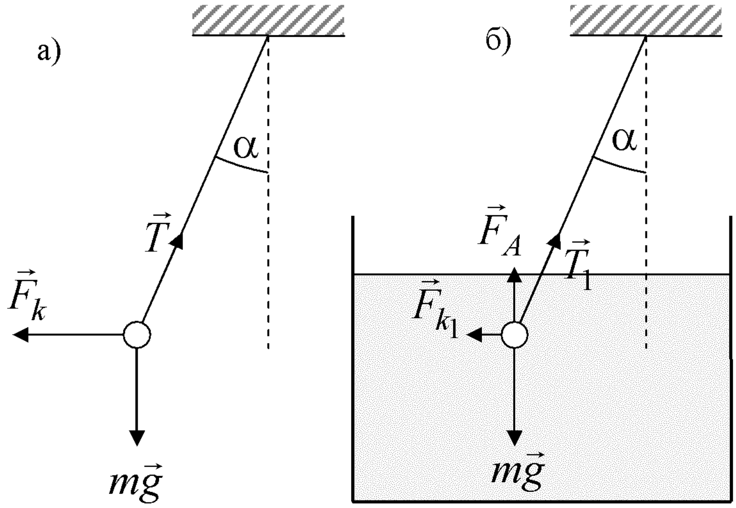


Рис.

Решение. До погружения в жидкий диэлектрик, т.е. в воздухе на каждый шарик (рис. *а*) действует сила тяжести $m\vec{g}$, кулоновская сила $\vec{F}_k$ и сила натяжения нити $\vec{T}$.

При равновесии шариков

$m\vec{g} + \vec{F}_k + \vec{T} = 0$.

После погружения в жидкий диэлектрик на каждый шарик (см. рис. б) действует сила тяжести $m\vec{g}$, кулоновская сила $\vec{F}_{k_1}$, выталкивающая (архимедова) сила $\vec{F}_A$ и сила натяжения нити $\vec{T}_1$.

При равновесии шариков

$$m\vec{g} + \vec{F}_{k_1} + \vec{F}_A + \vec{T}_1 = 0.$$

Кулоновская сила отталкивания шариков в воздухе (из треугольника на рис. *а*)

$$F_k = mg\,\mathrm{tg}\alpha, \tag{1}$$

в диэлектрике $F_k = (mg - F_A)\mathrm{tg}\alpha$ (учли выталкивающую силу).

В диэлектрике кулоновская сила уменьшается в ε_1 раз, так что

$$F_{k_1} = \frac{F_k}{\varepsilon_1}.$$

Тогда

$$\frac{F_k}{\varepsilon_1} = (mg - F_A)\mathrm{tg}\alpha. \tag{2}$$

Поделив (2) на (1), получим

$$\frac{1}{\varepsilon_1} = \frac{mg - F_A}{mg} = 1 - \frac{F_A}{mg}. \tag{3}$$

По закону Архимеда

$$F_A = \rho_1 V g,$$

где ρ_1 – плотность жидкого диэлектрика; V – объем шарика; g – ускорение свободного падения.

Масса шарика $m = \rho V$, где ρ – плотность материала шарика. Подставив эти выражения в формулу (3), получим

$$\frac{1}{\varepsilon_1} = 1 - \frac{\rho_1}{\rho}.$$

Откуда искомая плотность материала шарика

$$\rho = \frac{\varepsilon_1 \rho_1}{\varepsilon_1 - 1}.$$

Ответ: $\rho = \dfrac{\varepsilon_1 \rho_1}{\varepsilon_1 - 1}$

4. Два точечных заряда $Q_1 = 1$ мкКл и $Q_2 = -1$ мкКл расположены на расстоянии $l = 0{,}1$ м. Определить силу F, действующую на точечный заряд $Q_0 = 0{,}1$ мкКл, удаленный на расстояние $x_1 = 0{,}06$ м от первого и $x_2 = 0{,}08$ м от второго заряда.

Дано: $Q_1 = 1$ мкКл; $Q_2 = -1$ мкКл; $l = 0{,}1$ м; $Q_0 = 0{,}1$ мкКл; $x_1 = 0{,}06$ м; $x_2 = 0{,}08$ м.

Найти: F.

Решение. На заряд Q_0 будет действовать сила $\vec{F}$, определяемая векторной суммой

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

где $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ – силы, действующие со стороны зарядов Q_1 и Q_2.

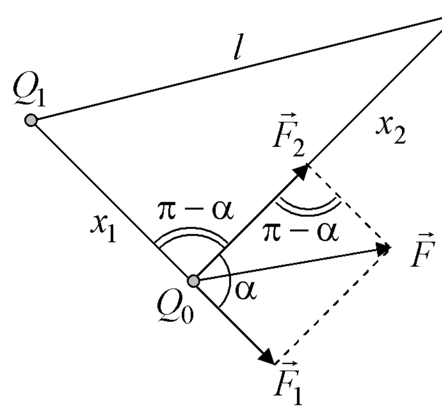


Рис.

Направление сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ показано на рис. Абсолютная величина сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ определяется выражениями

$$F_1 = \frac{Q_0 Q_1}{4\pi\varepsilon_0 x_1^2}; \quad F_2 = \frac{Q_0 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 x_2^2}.$$

Абсолютная величина силы $\vec{F}$ может быть найдена по теореме косинусов

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha},$$

где α – угол между векторами $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Из треугольника со сторонами l, x_1, x_2 находим

$$l^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\cos(\pi - \alpha) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2\cos\alpha .$$

Оценим угол α:

$$\cos\alpha = \frac{l^2 - x_1^2 - x_2^2}{2x_1x_2} = \frac{0,01 - 0,0036 - 0,0064}{2 \cdot 0,06 \cdot 0,08} = 0 .$$

Следовательно, $\alpha = \pi/2$ и

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{\left(\frac{Q_0Q_1}{4\pi\varepsilon_0 x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{Q_0Q_2}{4\pi\varepsilon_0 x_2^2}\right)^2} = \frac{Q_0\sqrt{Q_1^2x_2^4 + Q_2^2x_1^4}}{4\pi\varepsilon_0 x_1^2 x_2^2} = 0,286 \text{ Н} .$$

Ответ: $F = 0,286$ Н

2. Расчет электростатического поля с применением т. Остроградского-Гаусса.

1. В вакууме образовалось скопление зарядов в форме шара радиусом R с постоянной объемной плотностью ρ. Найти напряженность поля E в точках, лежащих внутри и вне шара.

Дано: R; ρ.

Найти: E.

Решение. В данном случае непрерывное распределение зарядов обладает центральной симметрией, поэтому для нахождения напряженности поля E воспользуемся теоремой Гаусса.

Рассмотрим вначале точки, лежащие внутри заряженного шара. В качестве поверхности интегрирования S_1 выбираем сферу радиусом r_1, концентрическую заряженному шару (рис.). Тогда

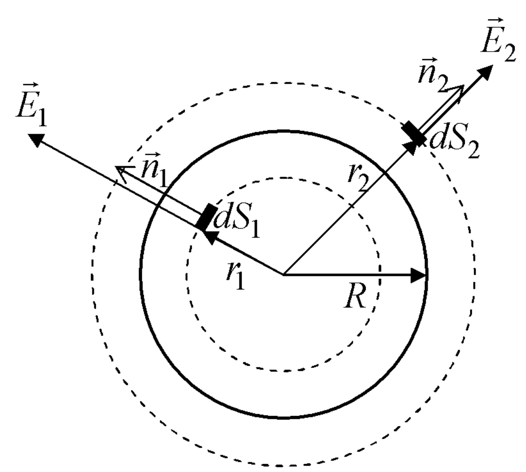


Рис.

$$\oint_{S_1} \vec{E}_1 d\vec{S}_1 = \int_{S_1} E_1 dS_1 \cos\alpha = E_1 \int_{S_1} dS_1 = E_1 4\pi r_1^2$$

.

Здесь мы учли, что $\cos\alpha = 1$ ($\alpha = 0$), так как положительная нормаль $\vec{n}_1$ к поверхности S_1 совпадает с направлением вектора напряженности $\vec{E}_1$. Такая сфера заключает в себе заряд $q_1 = \dfrac{4}{3}\pi r_1^3 \rho$.

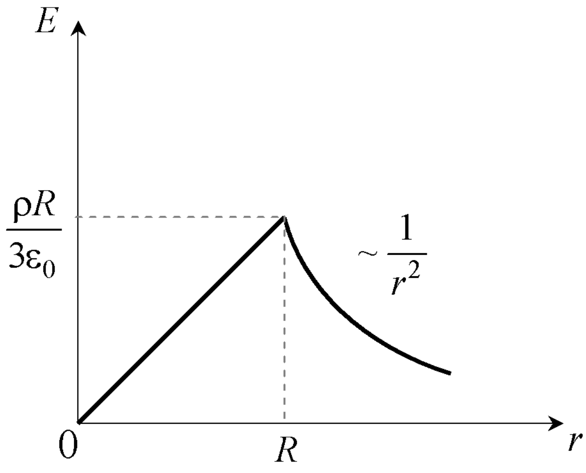


Рис.

Используя теорему Гаусса, запишем $E_1 4\pi r_1^2 = \dfrac{4}{3\varepsilon_0}\pi r_1^3 \rho$. С учетом того, что r_1 было выбрано произвольно ($r_1 < R$), окончательно получим напряженность E_1 внутри заряженного по объему шара:

$$E_1 = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}.$$

Аналогично записываем для точек, лежащих на сфере радиусом $r_2 > R$, т.е.

$$\oint_{S_2} \vec{E}_2 d\vec{S}_2 = \int_{S_2} E_2 dS_2 \cos 0 = E_2 \int_{S_2} dS_2 = E_2 4\pi r_2^2 .$$

Однако при $r_2 > R$ внутрь произвольной сферы попадает весь заряд q, создающий поле, следовательно,

$$E_2 4\pi r_2^2 = \rho \frac{4}{3\varepsilon_0}\pi R^3 .$$

Так как r_2 выбрано произвольно ($r_2 > R$), то

$$E_2 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}.$$

При значениях $r_1 = r_2 = R$ напряженность

$$E = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0},$$

следовательно, в точке $r = R$ вектор напряженности не терпит разрыва, а имеет конечное значение. На рис. изображен график зависимости величины напряженности поля E заряженного шара от расстояния r.

Ответ: $E_1 = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}$; $E_2 = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$

2. Электростатическое поле создается бесконечным круглым цилиндром радиусом R, заряженным в вакууме равномерно с линейной плотностью τ. Определите напряженность E электростатического поля: 1) на расстоянии $r > R$ от оси цилиндра; 2) на расстоянии $r' < R$ от оси цилиндра.

Дано: R; τ; 1) $r > R$; 2) $r' < R$.

Найти: E.

Решение. Из соображений симметрии следует, что вектор $\vec{E}$ в каждой точке перпендикулярен оси цилиндра, а модуль вектора $\vec{E}$ зависит только от расстояния r от оси цилиндра. При такой конфигурации поля в качестве произвольной замкнутой поверхности следует выбрать коаксиальную с заряженным цилиндром цилиндрическую поверхность радиусом r и высотой l (рис.). Для всех точек боковой поверхности этой цилиндрической поверхности

$$E_n = E(r) = \text{const},$$

для оснований цилиндра $E_n = 0$.

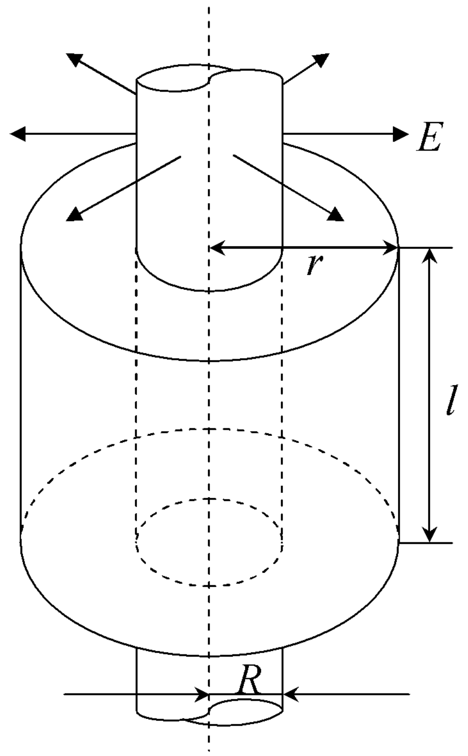


Рис.

Согласно теореме Гаусса для поля в вакууме

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

где Q – общий заряд, охватываемый произвольной поверхностью S.

1. Если $r > R$. В данном случае поток вектора $\vec{E}$ сквозь торцы построенного цилиндра равен нулю, а поток сквозь его боковую поверхность равен $E2\pi rl$ ($2\pi rl$ – боковая поверхность цилиндра). Тогда по теореме Гаусса

$$E2\pi rl = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\tau l}{\varepsilon_0}$$

(учли, что τ – линейная плотность заряда). Откуда искомая напряженность

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r}; \quad (r \geq R).$$

2. Если $r' < R$. В данном случае рассматриваемая замкнутая поверхность зарядов внутри не содержит, а поэтому искомая напряженность

$$E = 0; \quad (r' < R).$$

3. Сплошной непроводящий шар радиусом R обладает полным зарядом Q, причем плотность этого заряда распределена в объеме по линейному закону $\rho = br$. Найти напряженность электрического поля на расстоянии r от центра шара.

Дано: R; Q; $\rho = br$.

Найти: $E(R)$.

Решение. Выразим сначала постоянную b через параметры Q и R.

Полный заряд шара находим интегрированием по его объему V

$$Q = \int_V \rho(r)dV = 4\pi\int_0^R \rho(r)r^2dr = 4\pi b\int_0^R r^3dr = \pi bR^4,$$

откуда получаем выражение для постоянной

$$b = \frac{Q}{\pi R^4}.$$

Выполнив интегрирование лишь для внутренней части сферы радиусом r, найдем заряд $Q(r)$ внутри нее:

$$Q(r) = 4\pi b\int_0^r r^3dr = \pi br^4 = Q\frac{r^4}{R^4}.$$

По теореме Гаусса напряженность электрического поля внутри шара

$$E(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Qr^2}{4\pi\varepsilon_0 R^4}, \quad (r \le R). \tag{1}$$

Напряженность же поля вне шара определяется тем же выражением, что и для точечного заряда

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \qquad (r \ge R). \tag{2}$$

На поверхности шара оба выражения (1) и (2) дают одинаковый результат

$$E(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Ответ: $E(R) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$

4. Электрическое поле создано двумя параллельными бесконечными заряженными плоскостями с поверхностными плотностями заряда $\sigma_1 = 0{,}4\ \dfrac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}$ и $\sigma_2 = 0{,}1\ \dfrac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}$. Определить напряженность электрического поля, создаваемого этими заряженными плоскостями.

Дано: $\sigma_1 = 0{,}4\ \dfrac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}; \sigma_2 = 0{,}1\ \dfrac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}$.

Найти: E.

Решение. Согласно закону суперпозиции, поля, создаваемые каждой заряженной плоскостью в отдельности, накладываются друг на друга, причем каждая заряженная плоскость создает электрическое поле независимо от присутствия другой заряженной плоскости.

Напряженности однородных электрических полей, создаваемых первой и второй плоскостями, соответственно равны

$$\mathrm{E}_1 = \frac{1}{2}\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}; \quad \mathrm{E}_2 = \frac{1}{2}\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}.$$

Плоскости делят все пространство на три области: I, II, III (рис. 6).

Как видно из рисунка, в областях I и III электрические силовые линии обоих полей направлены в одну сторону и, следовательно, напряженности полей $\mathrm{E}^{(\mathrm{I})}$ и $\mathrm{E}^{(\mathrm{III})}$ в областях I и III равны между собой и равны сумме напряженностей полей, создаваемых первой и второй плоскостями:

$$\mathrm{E}^{(\mathrm{I})} = \mathrm{E}^{(\mathrm{III})} = \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2$$

или

$$\mathrm{E}^{(\mathrm{I})} = \mathrm{E}^{(\mathrm{III})} = \frac{1}{2}\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\varepsilon_0}.$$

Во второй (II) области (между плоскостями) электрические силовые линии полей направлены в противоположные стороны, следовательно, напряженность поля $\mathrm{E}^{(\mathrm{II})}$ равна разности напряженностей полей, создаваемых первой и второй плоскостями:

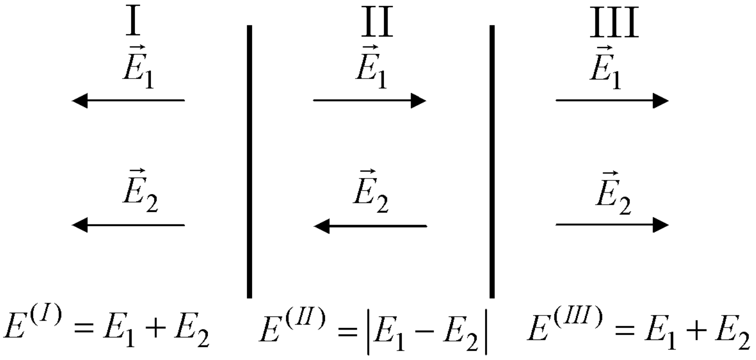


Рис.

$$\mathrm{E}^{(\mathrm{II})} = |\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_2|$$

или

$$E^{(II)} = \frac{1}{2}\frac{\left|\sigma_1 - \sigma_2\right|}{\varepsilon_0}.$$

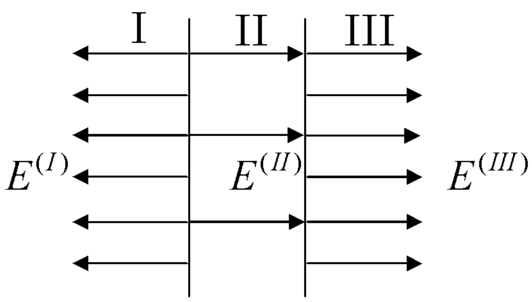


Рис.

Подставив данные и произведя вычисления, получим

$$E^{(I)} = E^{(III)} = 28{,}3 \ {}^{\text{кВ}}\!/_{\text{м}};$$

$$E^{(II)} = 17 \ {}^{\text{кВ}}\!/_{\text{м}}.$$

Картина распределения силовых линий суммарного поля представлена на рис.

Ответ: $E^{(II)} = 17 \ {}^{\text{кВ}}\!/_{\text{м}}$

5. Две концентрические проводящие среды радиусами $R_1 = 6$ см и $R_2 = 10$ см несут соответственно заряды $Q_1 = 1$ нКл и $Q_2 = -0{,}5$ нКл. Найти напряженность E поля в точках, отстоящих от центра сфер на расстояниях $r_1 = 5$ см, $r_2 = 9$ см и $r_3 = 15$ см. Построить график $E(r)$.

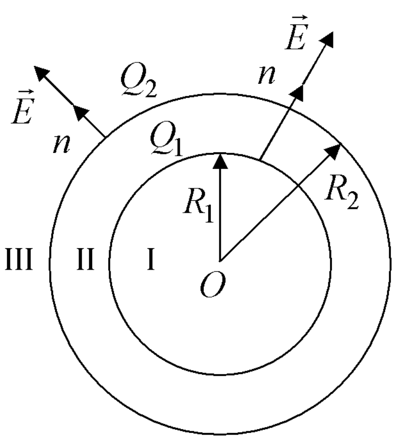


Рис.

Дано: $R_1 = 6$ см; $R_2 = 10$ см; $Q_1 = 1$ нКл; $Q_2 = -0{,}5$ нКл; $r_1 = 5$ см; $r_2 = 9$ см; $r_3 = 15$ см.

Найти: E_1; E_2; E_3; $E(r)$.

Решение. Точки, в которых требуется найти напряженность электрического поля, лежат в трех областях (рис.): область I $(r_1 < R_1)$, область II $(R_1 < r_2 < R_2)$, область III $(r_3 > R_2)$.

1. Для определения напряженности E_1 в области I проведем сферическую поверхность S_1 радиусом r_1 и воспользуемся теоремой Гаусса. Так как внутри области I зарядов нет, то согласно указанной теореме получим равенство

$$\oint_{S_1} E_n dS = 0, \qquad (1)$$

где E_n – нормальная составляющая напряженности электрического поля.

Из соображений симметрии нормальная составляющая E_n должна быть равна самой напряженности и постоянна для всех точек сферы, т.е.

$E_n = E_1 = \mathrm{const}$. Поэтому ее можно вынести за знак интеграла. Равенство (1) примет вид $E_1 \oint\limits_{S_1} dS = 0$.

Так как площадь сферы не равна нулю, то $E_1 = 0$, т.е. напряженность поля во всех точках, удовлетворяющих условию $r_1 < R_1$, будет равна нулю.

2. В области II сферическую поверхность проведем радиусом r_2. Так как внутри этой поверхности находится заряд Q_1, то для нее, согласно теореме Гаусса, можно записать равенство

$$\oint\limits_{S_2} E_n dS = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}. \qquad (2)$$

Так как $E_n = E_2 = \mathrm{const}$, то из условий симметрии следует

$$E_2 \oint\limits_{S_2} dS = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} \quad \text{или} \quad E_2 S_2 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}, \quad \text{откуда} \quad E_2 = \frac{Q_1}{S_2 \varepsilon_0}.$$

Подставив сюда выражение площади сферы, получим

$$E_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}$$

3. В области III сферическую поверхность проведем радиусом r_3. Эта поверхность охватывает симметричный заряд $Q_1 + Q_2$. Следовательно, для нее уравнение, записанное на основе теоремы Гаусса, будет иметь вид

$$\oint\limits_{S_2} E_n dS = \frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon_0}.$$

Отсюда, использовав положения, применяемые в первых двух случаях, найдем

$$E_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_3^2}. \qquad (3)$$

Выразим все величины в единицах СИ ($Q_1 = 10^{-9}$ Кл; $Q_2 = -0{,}5 \cdot 10^{-9}$ Кл; $r_2 = 0{,}09$ м; $r_3 = 0{,}15$ м; $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ м/Ф) и произведем вычисления:

$$E_2 = 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-9}}{(0{,}09)^2} \text{ В/м} = 1{,}11 \cdot 10^3 \text{ В/м} = 1{,}11 \text{ кВ/м};$$

$$E_3 = 9\cdot 10^9 \frac{(1-0{,}5)\cdot 10^{-9}}{(0{,}15)^2}\ {}^{\text{В}}\!/_{\text{м}} = 200\ {}^{\text{В}}\!/_{\text{м}}.$$

4. Построим график $E(r)$. В области I $(r < R_1)$ напряженность $E = 0$. В области II $(R_1 < r < R_2)$ напряженность $E_2(r)$ изменяется по закону $\frac{1}{r^2}$.

В точке $r = R_1$ напряженность

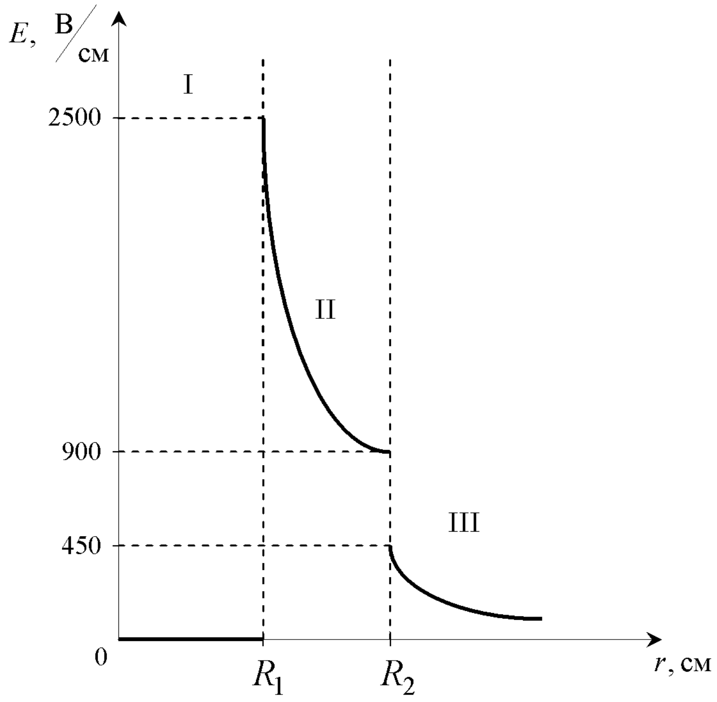


Рис.

$$E_2(R_1) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} = 2500\ {}^{\text{В}}\!/_{\text{м}}.$$

В точке $r = R_2$ (r стремится к R_2 слева)

$$E_2(R_2) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} = 900\ {}^{\text{В}}\!/_{\text{м}}.$$

В области III $(r_3 > R_2)$ $E_3(r)$ изменяется по закону $\frac{1}{r^2}$, причем в точке $r = R_2$ (r стремится к R_2 справа)

$$E_3(R_2) = \frac{Q_1 - |Q_2|}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} = 450\ {}^{\text{В}}\!/_{\text{м}}.$$

Таким образом, функция $E(r)$ в точках $r = R_1$ и $r = R_2$ терпит разрыв. График зависимости $E(r)$ представлен на рис.

3. Расчет поля распределенных зарядов.

1. Тонкий стержень длиной $L = 8$ см заряжен с линейной плотностью $\tau = 400$ нКл/м. Для точки А, расположенной на перпендикуляре к стержню, проведенном через один из его концов, на расстоянии $b = 6$ см от этого конца найти: 1) напряженность электрического поля; 2) потенциал электрического поля.

Дано: $L = 8$ см; $\tau = 400$ нКл/м; $b = 6$ см.

Найти: E, φ.

Решение. 1. Выделим на стержне физически малый участок длиной dl (см. рис.).

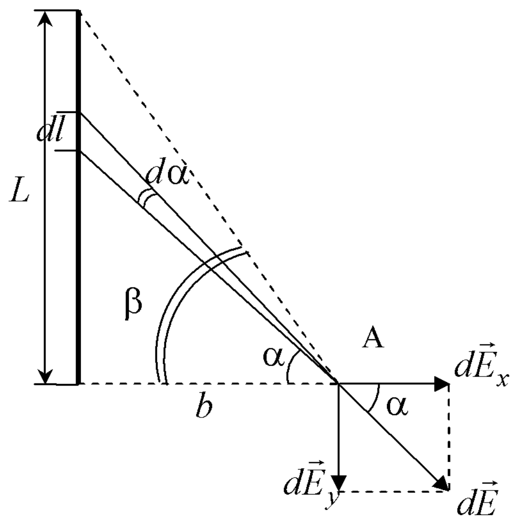


Рис.

Находящийся на нем заряд $dQ = \tau dl$ можно рассматривать как точечный, и тогда напряженность поля этого элемента определим по формуле

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau dl}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}. \quad (1)$$

Прежде чем интегрировать это выражение, необходимо две переменные величины в правой части, dl и r выразить через одну. Для этого воспользуемся тригонометрическими равенствами

$$r = \frac{b}{\cos\alpha} \quad \text{и} \quad l = b\,\mathrm{tg}\alpha.$$

Дифференцируя последнее, получим

$$dl = b\frac{1}{\cos^2\alpha}d\alpha.$$

Подставляя выражения для r и dl в формулу (1), находим

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau b\cos^2\alpha d\alpha}{b^2\cos^2\alpha}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{b}\frac{\vec{r}}{r}d\alpha.$$

Представим вектор $d\vec{E}$ как сумму двух составляющих: $d\vec{E}_x$ – перпендикулярной стержню и $d\vec{E}_y$ – параллельной ему. Из рис. видно, что $d\vec{E}_x = \cos\alpha d\vec{E}$, а $d\vec{E}_y = \sin\alpha d\vec{E}$. Тогда, интегрируя эти выражения, получим

$$E_x = \int_0^\beta \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{b}\cos\alpha d\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{b}\int_0^\beta \cos\alpha d\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{b}\sin\beta;$$

$$E_y = \int_0^\beta \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{b}\sin\alpha d\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{b}\int_0^\beta \sin\alpha d\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{b}(1-\cos\beta).$$

Из рис. следует, что

$$\sin\beta = \frac{L}{\sqrt{L^2+b^2}} = 0{,}8; \quad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{L^2+b^2}} = 0{,}6.$$

Произведем вычисления:

$$E_x = \frac{400\cdot 10^{-9}}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 6\cdot 10^{-2}}\cdot 0{,}8 = 48\ \frac{кВ}{м};$$

$$E_y = \frac{400\cdot 10^{-9}}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 6\cdot 10^{-2}}\cdot (1-0{,}6) = 24\ \frac{кВ}{м}.$$

Напряженность электрического поля определим по формуле

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}.$$

После подстановки полученных значений и вычислений находим $E = 53{,}7\ кВ/м$. Направление вектора напряженности зададим углом γ (рис.), который найдем по формуле

$$\mathrm{tg}\gamma = \frac{E_y}{E_x} = 0{,}5.$$

2. Для вычисления потенциала поля в заданной точке используем формулу

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\tau}{r}dl.$$

Подставляя в нее выражения для r и dl, получим

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\beta}\frac{\tau \mathrm{b}\cos\alpha}{\mathrm{b}\cos^2\alpha}\mathrm{d}\alpha = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\beta}\frac{1}{\cos\alpha}\mathrm{d}\alpha = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\beta} =$$

$$= \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\mathrm{tg}\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) - \ln\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\right].$$

Так как $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, то $\ln\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 0$. Используя тригонометрические формулы, сделаем преобразования:

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\frac{1}{2}\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\frac{1}{2}\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sqrt{1-\cos(\beta+\frac{\pi}{2})}}{\sqrt{1+\cos(\beta+\frac{\pi}{2})}} = \frac{\sqrt{1+\sin\beta}}{\sqrt{1-\sin\beta}} = 3.$$

Тогда $\varphi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln 3$. Произведем вычисления:

$$\varphi = \frac{400\cdot 10^{-9}\cdot\ln 3}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}} = 3960\ \text{В}.$$

Ответ: $\mathrm{E} = 53{,}7\ {}^{\text{кВ}}\!/_{\text{м}}$; $\varphi = 3960$ В

2. В одной плоскости с бесконечно длинной равномерно заряженной нитью ($\tau = 2\ {}^{\text{мкКл}}\!/_{\text{м}}$) расположен стержень под углом $\alpha = 30^\circ$ к нити. Стержень считать заряженным равномерно зарядом $\mathrm{Q} = 2{,}4\cdot 10^{-9}$ Кл, длина стержня $\mathrm{l}_0 = 0{,}08$ м. Расстояние от нити до ближайшей точки стержня $\mathrm{x}_0 = 0{,}04$ м. Определить силу F, действующую на стержень.

Дано: $\tau = 2\ {}^{\text{мкКл}}\!/_{\text{м}}$; $\alpha = 30^\circ$; $\mathrm{Q} = 2{,}4\cdot 10^{-9}$ Кл; $\mathrm{l}_0 = 0{,}08$ м; $\mathrm{x}_0 = 0{,}04$ м.

Найти: F.

Решение. Так как стержень имеет конечную длину l_0, то его необходимо разбить на элементарно малые элементы dl, к которым можно применить закон Кулона.

Пусть малый элемент dl находится на расстоянии x от нити и на расстоянии l_0 от

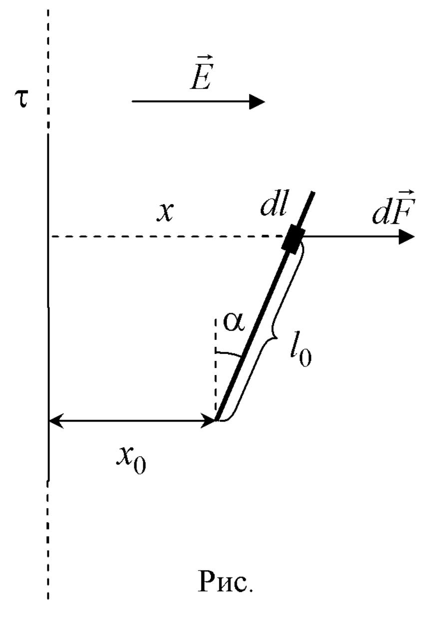


Рис.

нижнего конца стержня (рис.). Сила, действующая на этот элемент,

$$dF = EdQ, \qquad (1)$$

где $E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 x}$ – напряженность поля нити на расстоянии x от нее, а $dQ = q\dfrac{dl}{l_0}$ – заряд рассматриваемого элемента, причем элемент dl настолько мал, что поле в его пределах можно считать постоянным.

Следовательно,

$$dF = \frac{\tau Q dl}{2\pi\varepsilon_0 x l_0}. \qquad (2)$$

Так как вектор напряженности $\vec{E}$ перпендикулярен длине нити, то при переходе от одного элемента dl к другому направление элементарных сил $d\vec{F}$ меняться не будет и, следовательно, результирующая сила может быть найдена интегрированием (2) по всему стержню.

Из рисунка видно, что $x = x_0 + l_0 \sin\alpha$; $dx = dl\sin\alpha$, отсюда

$$dl = \frac{dx}{\sin\alpha}. \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (2) и интегрируя по всему стержню, т.е. в пределах от x_0 до $x_0 + l_0 \sin\alpha$, получаем

$$F = \frac{\tau Q}{2\pi\varepsilon_0 l_0 \sin\alpha}\int_{x_0}^{x_0+l_0\sin\alpha}\frac{dx}{x} = \frac{\tau Q}{2\pi\varepsilon_0 l_0 \sin\alpha}\ln\frac{x_0 + l_0\sin\alpha}{x_0} = 1{,}5\cdot 10^{-3}\ \text{Н}.$$

Ответ: $F = 1{,}5\cdot 10^{-3}$ Н

3. Кольцо радиусом R равномерно заряжено зарядом Q. Определить напряженность поля E в точке, находящейся на перпендикуляре к кольцу, проходящем через его центр, на расстоянии h от плоскости кольца.

Дано: R; Q; h.

Найти: E.

Решение. Так как заряд распределен по кольцу, то кольцо следует разбить на элементарные участки dl, которые несут на себе элементарный заряд (в силу равномерного распределения заряда) (рис.).

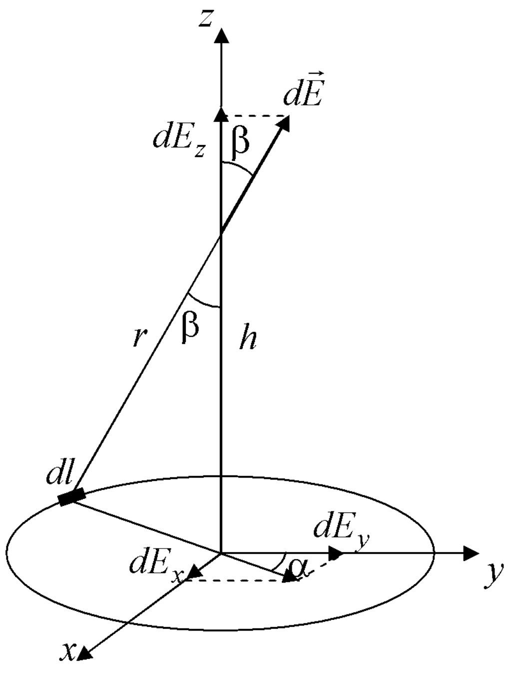


Рис.

$$dQ = \frac{Q}{2\pi R} dl.$$

(1)

Тогда напряженность поля dE, создаваемого элементарным участком dl,

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}.$$

Однако dE – это абсолютное значение вектора напряженности поля, создаваемого элементарным зарядом dQ. Поэтому определим проекции вектора $d\vec{E}$ на оси x, y, z и только после этого проинтегрируем соответствующие проекции элементарных напряженностей dE_x, dE_y, dE_z.

Из рисунка видно, что

$$dE_z = dE\cos\beta \quad \text{и} \quad r^2 = R^2 + h^2.$$

Учитывая (1), запишем

$$E_z = \int dE\cos\beta = \int \frac{Qdl}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon 2\pi R\left(R^2+h^2\right)^{3/2}}\cos\beta.$$

Так как $\cos\beta = \frac{h}{r} = \frac{h}{\left(R^2+h^2\right)^{1/2}}$, а элемент дуги dl связан с поворотом на элементарный угол $d\alpha$ соотношением $dl = Rd\alpha$, окончательно получим

$$E_z = \int_0^{2\pi} \frac{QhRd\alpha}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon 2\pi\left(R^2+h^2\right)^{3/2}} = \frac{Qh}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon 2\pi\left(R^2+h^2\right)^{3/2}}\alpha\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{Qh}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\left(R^2+h^2\right)^{3/2}}.$$

Учитывая, что $\sin\beta = \frac{R}{\sqrt{\left(R^2+h^2\right)}}$, найдем проекцию вектора E_x на ось x:

$$E_x = \int\limits_{\text{по кольцу}} dE\sin\beta\sin\alpha = \int\limits_{\text{по кольцу}} \frac{QdlR\sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon 2\pi\left(R^2+h^2\right)^{3/2}} = \int_0^{2\pi} \frac{QR\sin\alpha d\alpha}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon 2\pi\left(R^2+h^2\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{QR}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon 2\pi\left(R^2+h^2\right)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \sin\alpha d\alpha = \frac{QR}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon 2\pi\left(R^2+h^2\right)^{3/2}} \cos\alpha\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Аналогично можно показать, что проекция вектора напряженности на ось y также равна нулю:

$$E_y = 0.$$

Следовательно,

$$E_x = E_y = 0; \quad E_z = E = \frac{Qh}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\left(R^2 + h^2\right)^{3/2}}.$$

Ответ: $E_x = E_y = 0$; $E_z = E = \dfrac{Qh}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\left(R^2 + h^2\right)^{3/2}}$

4. По тонкой нити, изогнутой по дуге окружности радиусом R, равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\tau = 10$ $\text{нКл}/\text{м}$. Определить напряженность $\vec{E}$ и потенциал φ электрического поля, создаваемого таким распределенным зарядом в точке O, совпадающей с центром кривизны дуги. Длина нити составляет $1/3$ длины окружности и равна 15 см.

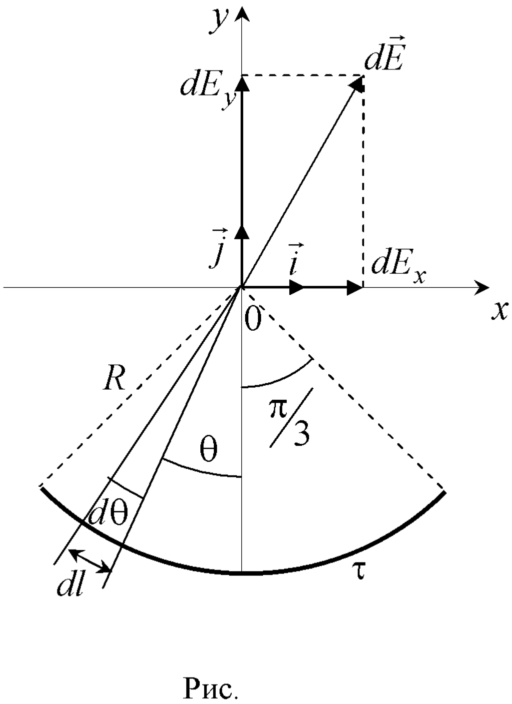


Рис.

Дано: R; $\tau = 10$ $\text{нКл}/\text{м}$; $1/3\, l = 15$ см.

Найти: $\vec{E}$, φ.

Решение. Выберем оси координат так, чтобы начало координат совпадало с центром кривизны дуги, а ось y была расположена симметрично относительно концов дуги (рис.).

На нити выделим элемент длины dl. Заряд $dQ = \tau dl$, находящийся на выделенном участке, можно считать точечным.

Определим напряженность электрического поля в точке O. Для этого найдем сначала напряженность $d\vec{E}$ поля, создаваемого зарядом dQ:

$$d\vec{E} = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r},$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, направленный от элемента dl к точке, напряженность которой вычисляется. Выразим вектор $d\vec{E}$ через проекции dE_x и dE_y на оси координат:

$$d\vec{E} = \vec{i}dE_x + \vec{j}dE_y,$$

где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – единичные векторы направлений (орты).

Напряженность $\vec{E}$ найдем интегрированием:

$$\vec{E} = \int_l d\vec{E} = \vec{i}\int_l dE_x + \vec{j}\int_l dE_y .$$

Интегрирование ведется вдоль дуги длиной l. В силу симметрии интеграл $\int_l dE_x$ равен нулю. Тогда

$$\vec{E} = \vec{j}\int_l dE_y , \qquad (1)$$

где

$$dE_y = dE\cos\theta = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta .$$

Так как $r = R = \text{const}$ и $dl = Rd\theta$, то

$$dE_y = \frac{\tau R d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\cos\theta d\theta .$$

Подставим найденное выражение dE_y в (1) и, приняв во внимание симметричное расположение дуги относительно оси OY, пределы интегрирования возьмем от 0 до $\pi/3$, а результат удвоим

$$\vec{E} = \vec{j}\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{\pi/3}\cos\theta d\theta = \vec{j}\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 R}\sin\theta\Big|_0^{\pi/3} .$$

Подставив указанные пределы и выразив R через длину дуги $(3l = 2\pi R)$, получим

$$\vec{E} = \vec{j}\frac{\tau}{2\varepsilon_0 l}\sqrt{3} .$$

Из этой формулы видно, что вектор $\vec{E}$ совпадает с положительным направлением оси OY. Подставив значения τ и l в последнюю формулу и сделав вычисления, найдем

$$E = 2{,}18 \text{ кВ/м}.$$

Определим потенциал электрического поля в точке O. Найдем сначала потенциал $d\varphi$, создаваемый точечным зарядом dQ в точке O:

$$d\varphi = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Заменим r на R и произведем интегрирование:

$$d\varphi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^l dl = \frac{l\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Так как $l = 2\pi R/3$, то

$$\varphi = \frac{\tau}{6\varepsilon_0}.$$

Произведя вычисления по этой формуле, получим

$$\varphi = 188\ \text{В}$$

Ответ: $\varphi = 188$ В

5. Определите потенциал в центре кольца с внутренним радиусом $R_1 = 30$ см и внешним $R_2 = 60$ см, если на нем равномерно распределен заряд $Q = 5$ нКл.

Дано: $R_1 = 30$ см; $R_2 = 60$ см; $Q = 5$ нКл .

Найти: φ.

Решение. Кольцо разобьем на концентрические бесконечно малые тонкие кольца внутренним радиусом r и внешним $(r + dr)$. Площадь рассматриваемого кольца (рис.)

$$dS = 2\pi r dr.$$

Потенциал в центре кольца, создаваемый бесконечно тонким кольцом,

$$d\varphi = \frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma dr}{2\varepsilon_0},$$

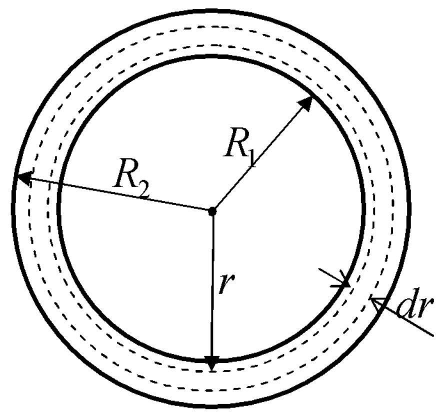


Рис.

где σ – поверхностная плотность заряда.

Для определения потенциала в центре кольца следует арифметически сложить $d\varphi$ от всех бесконечно тонких колец. Тогда

$$\varphi = \int d\varphi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dr = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(R_2 - R_1).$$

Учитывая, что заряд кольца $Q = \sigma S$, где $S = \pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)$ – площадь кольца, получим потенциал в центре кольца

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0(R_2 + R_1)} = 25 \text{ В}.$$

Ответ: $\varphi = 25$ В

6. Электростатическое поле создается в вакууме шаром радиусом $R = 8$ см, равномерно заряженным с объемной плотностью $\rho = 10 \ ^{\text{нКл}}\!/_{\text{м}^3}$. Определите разность потенциалов между двумя точками поля, лежащими от центра шара на расстояниях: 1) $r_1 = 10$ см и $r_2 = 15$ см; 2) $r_3 = 2$ см и $r_4 = 5$ см.

Дано: $R = 8$ см; $\rho = 10 \ ^{\text{нКл}}\!/_{\text{м}^3}$; $r_1 = 10$ см; $r_2 = 15$ см; $r_3 = 2$ см; $r_4 = 5$ см.

Найти: 1) $\varphi_1 - \varphi_2$; 2) $\varphi_3 - \varphi_4$.

Решение: 1. Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от центра шара,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr, \tag{1}$$

где $E = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$ – напряженность поля, создаваемого равномерно заряженным с объемной плотностью ρ шаром, в любой точке, лежащей **вне шара** на расстоянии r от его центра.

Подставив это выражение в формулу (1) и проинтегрировав, получим искомую разность потенциалов

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

2. Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_3 и r_4 от центра шара,

$$\varphi_3 - \varphi_4 = \int_{r_3}^{r_4} E dr, \tag{2}$$

где $E = \frac{r\rho}{3\varepsilon_0}$ – напряженность поля, создаваемого равномерно заряженным с объемной плотностью ρ шаром, в любой точке, лежащей **внутри шара** на расстоянии r от его центра. Подставив это выражение в формулу (2) и проинтегрировав, получим искомую разность потенциалов

$$\varphi_3 - \varphi_4 = \int_{r_3}^{r_4} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} dr = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \int_{r_3}^{r_4} r dr = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(r_4^2 - r_3^2\right).$$

Вычислив, получим: 1) $\varphi_1 - \varphi_2 = 0{,}643$ В; 2) $\varphi_3 - \varphi_4 = 0{,}395$ В.

Ответ: 1) $\varphi_1 - \varphi_2 = 0{,}643$ В; 2) $\varphi_3 - \varphi_4 = 0{,}395$ В.

7. Электрическое поле создается бесконечно длинным цилиндром радиусом $R = 7$ мм, равномерно заряженным с линейной плотностью $\tau = 15$ нКл/м. Определите разность потенциалов между двумя точками этого поля, лежащими на расстоянии $r_1 = 1$ см и $r_2 = 2$ см от поверхности цилиндра.

Дано: $R = 7$ мм; $\tau = 15$ нКл/м; $r_1 = 1$ см; $r_2 = 2$ см.

Найти: $\varphi_1 - \varphi_2$.

Решение. Для определения разности потенциалов используем соотношение между напряженностью электростатического поля и изменением потенциала

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi. \qquad (1)$$

В случае заряженного цилиндра электростатическое поле обладает сферической симметрией, поэтому формулу (1) можно записать в виде

$$E = -\frac{d\varphi}{dr} \quad \text{или} \quad d\varphi = -E dr.$$

Подставив сюда выражение для напряженности поля, создаваемого бесконечно длинным цилиндром,

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r},$$

получим

$$d\varphi = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r}.$$

Проинтегрировав это выражение, найдем искомую разность потенциалов

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int\limits_{r_1+R}^{r_2+R} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2+R}{r_1+R} = 125\ \text{В}.$$

Ответ: $\varphi_1 - \varphi_2 = 125$ В

4. Движение зарядов в поле.

1. Электрон без начальной скорости прошел разность потенциалов $U_0 = 10$ кВ и влетел в пространство между пластинами плоского конденсатора, заряженного до разности потенциалов $U_1 = 100$ В, по линии *AB*, параллельной пластинам (рис.). Расстояние d между пластинами равно 2 см. Длина l_1 пластин конденсатора в направлении полета электрона равна 20 см. Определить расстояние *BC* на экране, отстоящем от конденсатора на $l_2 = 1$ м.

Дано: $U_0 = 10$ кВ; $U_1 = 100$ В; $d = 2$ см; $l_1 = 20$ см; $l_2 = 1$ м.

Найти: *BC*.

Решение. Движение электрона внутри конденсатора складывается из двух движений:

1) по инерции вдоль линии *AB* с постоянной скоростью υ_0, приобретенной под действием разности потенциалов U_0, которую электрон прошел до конденсатора;

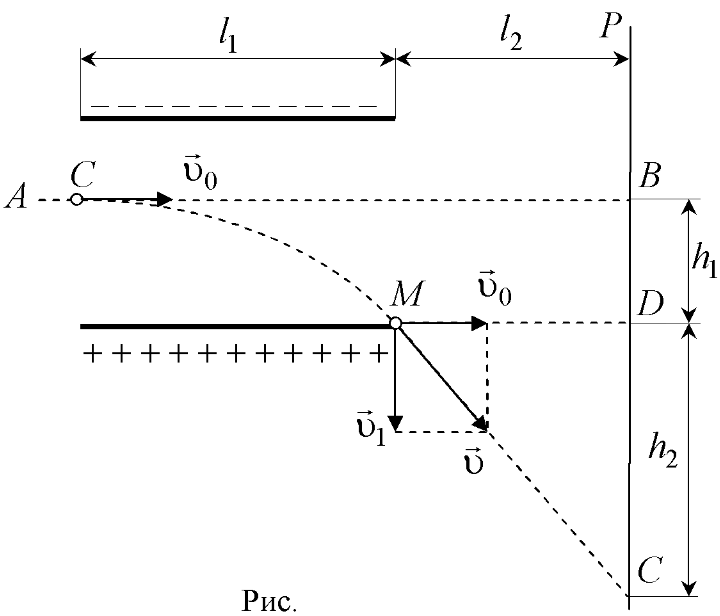


Рис.

2) равномерно ускоренного движения в вертикальном направлении к положительно заряженной пластине под действием постоянной силы поля конденсатора. По выходе из конденсатора электрон будет двигаться равномерно со скоростью υ, которую он имел в точке M в момент вылета из конденсатора.

Из рисунка видно, что искомое расстояние $|BC| = h_1 + h_2$, где h_1 – расстояние, на которое смещается электрон в вертикальном направлении во время движения в конденсаторе; h_2 – расстояние между точкой D на экране, в которую электрон попал бы, двигаясь по выходе из конденсатора по направлению начальной скорости υ_0, и точкой C, в которую электрон попадает в действительности.

Выразим отдельно h_1 и h_2.

Пользуясь формулой длины пути для равноускоренного движения, найдем

$$h_1 = \frac{at^2}{2}, \tag{1}$$

где a – ускорение, полученное электроном под действием поля конденсатора; t – время полета электрона внутри конденсатора.

По второму закону Ньютона $a = F/m$, где F – сила, с которой поле действует на электрон; m – его масса. В свою очередь,

$$F = eE = \frac{eU_1}{d},$$

где e – заряд электрона; U_1 – разность потенциалов между пластинами конденсатора; d – расстояние между ними.

Время полета электрона внутри конденсатора найдем из формулы пути равномерного движения

$$l_1 = \upsilon_0 t, \quad \text{откуда} \quad t = \frac{l_1}{\upsilon_0},$$

где l_1 – длина конденсатора.

Выражение скорости υ_0 найдем из условия равенства работы, совершаемой полем при перемещении электрона, и приобретенной им кинетической энергии:

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} = eU_0.$$

Отсюда

$$\upsilon_0^2 = \frac{2eU_0}{m}. \tag{2}$$

Подставляя в формулу (1) последовательно значения a, F, t и υ_0^2 из соответствующих выражений, получим

$$h_1 = \frac{U_1 l_1^2}{4dU_0}.$$

Длину отрезка h_2 найдем из подобия треугольников MDC и векторного

$$h_2 = \frac{\upsilon_1 l_2}{\upsilon}, \qquad (3)$$

где υ_1 – скорость электрона в вертикальном направлении в точке M; l_2 – расстояние от конденсатора до экрана.

Скорость υ_1 найдем по формуле $\upsilon_1 = at$, которая с учетом выражений для a, F и t примет вид

$$\upsilon_1 = \frac{eU_1 l_1}{dm\upsilon_0}.$$

Подставив выражение υ_1 в формулу (3), получим

$$h_2 = \frac{eU_1 l_1 l_2}{dm\upsilon_0^2}$$

или, заменив υ_0^2 по формуле (2), найдем

$$h_2 = \frac{U_1 l_1 l_2}{2dU_0}.$$

Окончательно для искомого расстояния $|BC|$ будем иметь

$$|BC| = h_1 + h_2 = \frac{U_1 l_1^2}{4dU_0} + \frac{U_1 l_1 l_2}{2dU_0} = \frac{U_1 l_1}{2dU_0}\left(\frac{l_1}{2} - l_2\right) = 5{,}5 \text{ см}.$$

Ответ: $|BC| = 5{,}5$ см

5. Работа электростатических сил. Энергия заряда в электростатическом поле. Потенциал электростатического поля.

1. Найти работу A поля по перемещению заряда $Q = 10$ нКл из точки 1 в точку 2 (рис.), которые находятся между двумя разноименно заряженными с поверхностной плотностью $\sigma = 0{,}4$ $^{\text{мкКл}}/_{\text{м}^2}$ бесконечными параллельными плоскостями, расстояние l между которыми равно 3 см.

Дано: $Q = 10$ нКл; $\sigma = 0{,}4$ $^{\text{мкКл}}/_{\text{м}^2}$; $l = 3$ см.

Найти: A.

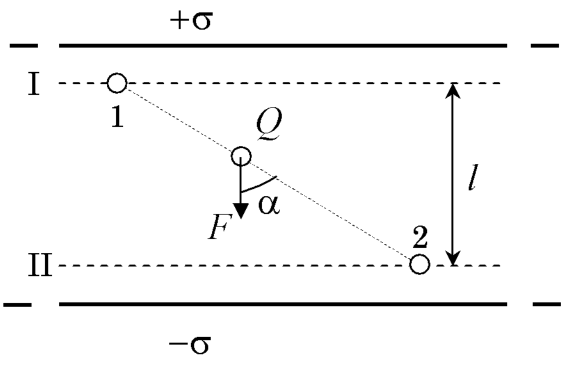


Рис.

Решение. Возможны 2 способа решения задачи.

1-й способ. Работу сил поля по перемещению заряда Q из точки 1 с потенциалом φ_1 в точку 2 с потенциалом φ_2 найдем по формуле

$$A = Q\left(\varphi_1 - \varphi_2\right). \qquad (1)$$

Для определения потенциалов в точках 1 и 2 проведем через эти точки эквипотенциальные поверхности I и II. Эти поверхности будут плоскостями, так как поле между двумя равномерно заряженными плоскостями однородно. Для такого поля справедливо соотношение

$$\varphi_1 - \varphi_2 = El, \qquad (2)$$

где E – напряженность поля; l – расстояние между эквипотенциальными поверхностями.

Напряженность поля между параллельными бесконечными разноименно заряженными плоскостями

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Подставив это выражение E в формулу (2), а затем выражение $\varphi_1 - \varphi_2$ в формулу (1), получим

$$A = Q\frac{\sigma}{\varepsilon_0}l.$$

2-й способ. Так как поле однородно, то сила, действующая на заряд Q при его перемещении, постоянна. Поэтому работу перемещения заряда из точки 1 в точку 2 можно представить формулой

$$A = F\Delta r\cos\alpha,$$

где F – сила, действующая на заряд; Δr – модуль перемещения заряда Q из точки 1 в точку 2; α – угол между направлениями перемещения и силы. Но

$$F = QE = Q\frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Подставив это выражение F в равенство (3), а также заметив, что $\Delta r\cos\alpha = 1$, получим

$$A = Q\frac{\sigma}{\varepsilon_0}1. \tag{4}$$

Таким образом, оба решения приводят к одинаковому результату. Подставив в выражение (4) значения величин, найдем

$$A = 13{,}6\ \text{мкДж}.$$

Ответ: $A = 13{,}6$ мкДж

2. Определить начальную скорость υ_0 сближения протонов, находящихся на достаточно большом расстоянии друг от друга, если минимальное расстояние r_{min}, на которое они могут сблизиться, равно 10^{-11} см.

Дано: $r_{min} = 10^{-11}$ см.

Найти: υ_0.

Решение. Между двумя протонами действуют силы отталкивания, вследствие чего движение протонов будет замедленным. Поэтому задачу можно решить как в инерциальной системе координат (связанной с центром масс двух протонов), так и в неинерциальной (связанной с одним из ускоренно движущихся протонов). Во втором случае законы Ньютона не имеют места. Применение же принципа Даламбера затруднительно из-за того, что ускорение системы будет переменным. Поэтому удобно рассмотреть задачу в инерциальной системе отсчета.

Поместим начало координат в центр масс двух протонов. Поскольку имеем дело с одинаковыми частицами, то центр масс будет находиться в точке, делящий пополам отрезок, соединяющий частицы. Относительно центра масс частицы будут иметь в любой момент времени одинаковые по модулю скорости. Когда частицы находятся на достаточно большом расстоянии друг от друга, скорость υ_i каждой частицы равна половине υ_0, т.е. $\upsilon_i = \upsilon_0/2$.

Для решения задачи применим закон сохранения энергии, согласно которому полная механическая энергия E изолированной системы постоянна, т.е.

$$E = T = \Pi,$$

где T – сумма кинетических энергий обоих протонов относительно центра масс; Π – потенциальная энергия системы зарядов.

Выразим потенциальную энергию в начальный Π_1 и конечный Π_2 моменты движения.

В начальный момент, согласно условию задачи, протоны находились на большом расстоянии, поэтому потенциальной энергией можно пренебречь $\left(\Pi_1 = 0\right)$. Следовательно, для начального момента полная энергия будет равна кинетической энергии T_1 протонов, т.е.

$$E = T_1. \tag{1}$$

В конечный момент, когда протоны максимально сблизятся, скорость и кинетическая энергия равны нулю, а полная энергия будет равна потенциальной энергии Π_2, т.е.

$$E = \Pi_2. \tag{2}$$

Приравняв правые части равенств (1) и (2), получим

$$T_1 = \Pi_2. \tag{3}$$

Кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий протонов:

$$T_1 = \frac{m\upsilon_1^2}{2} + \frac{m\upsilon_1^2}{2} = m\upsilon_1^2 = \frac{m\upsilon_0^2}{4}. \tag{4}$$

Потенциальная энергия системы двух зарядов Q_1 и Q_2, находящихся в вакууме, определяется по формуле $\Pi = \dfrac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$, где r – расстояние между зарядами. Воспользовавшись этой формулой, получим

$$\Pi_2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{min}}. \tag{5}$$

С учетом равенств (4) и (5) формула (3) примет вид

$$\frac{m\upsilon_0^2}{4} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{min}}, \quad \text{откуда} \quad \upsilon_0 = \frac{e}{\sqrt{\pi\varepsilon_0 m r_{min}}}.$$

Выполнив вычисления, найдем

$$\upsilon_0 = 2{,}35 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\upsilon_0 = 2{,}35 \cdot 10^6$ м/с

3. Три точечных заряда $Q_1 = 2$ нКл, $Q_2 = 3$ нКл и $Q_3 = -4$ нКл расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной длиной $a = 10$ см. Определите потенциальную энергию этой системы.

Дано: $Q_1 = 2$ нКл, $Q_2 = 3$ нКл, $Q_3 = -4$ нКл, $a = 10$ см.

Найти: Π.

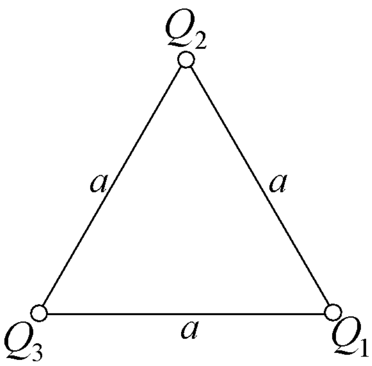


Рис.

Решение. Потенциальная энергия системы зарядов (рис.) равна алгебраической сумме энергий взаимодействия каждой из взаимодействующих пар зарядов, т.е.

$$\Pi = \Pi_{12} + \Pi_{13} + \Pi_{23}, \quad (1)$$

где соответственно потенциальные энергии одного из зарядов, находящегося в поле другого заряда на расстоянии a от него, равны

$$\Pi_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{a}; \quad \Pi_{13} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_3}{a}; \quad \Pi_{23} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2 Q_3}{a}. \quad (2)$$

Подставив формулы (2) в выражение (1), найдем искомую потенциальную энергию системы зарядов

$$\Pi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(Q_1 Q_2 + Q_1 Q_3 + Q_2 Q_3\right)}{a} = -1{,}26 \text{ мкДж}$$

Ответ: $\Pi = -1{,}26$ мкДж

4. Электростатическое поле создается положительно заряженной бесконечной нитью. Протон, двигаясь под действием электростатического поля вдоль линии напряженности от нити с расстояния $r_1 = 2$ см до $r_2 = 10$ см, изменил свою скорость от $\upsilon_1 = 1$ Мм/с до $\upsilon_2 = 5$ Мм/с. Определите линейную плотность τ заряда нити.

Дано: $r_1 = 2$ см; $r_2 = 10$ см; $\upsilon_1 = 1$ Мм/с; $\upsilon_2 = 5$ Мм/с.

Найти: τ .

Решение. Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении протона из точки поля с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_2 , идет на увеличение кинетической энергии протона

$$Q(\varphi_1 - \varphi_2) = \Delta T . \tag{1}$$

В случае нити электростатическое поле обладает осевой симметрией, поэтому

$$E = -\frac{d\varphi}{dr} \quad \text{или} \quad d\varphi = -Edr .$$

Тогда разность потенциалов между двумя точками, находящимися на расстояниях r_1 и r_2 от нити,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} Edr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{r_2}{r_1} . \tag{2}$$

Учли, что напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной нитью,

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r} .$$

Подставив выражение (2) в формулу (1) и учитывая, что

$$\Delta T = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} ,$$

получим

$$\frac{Q\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{r_2}{r_1} = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} ,$$

откуда искомая линейная плотность заряда нити

$$\tau = \frac{\pi\varepsilon_0 m\left(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right)}{Q\ln\frac{r_2}{r_1}} = 4{,}33 \ \text{мкКл}/\text{м} .$$

Ответ: $\tau = 4{,}33$ мкКл/м

5. Частица массой m, имеющая заряд q, со скоростью υ_0 приближается с большого расстояния к заряженному незакрепленному кольцу, двигаясь по его оси. Радиус кольца R, заряд $Q(Q \cdot q > 0)$, масса M. Вначале кольцо покоится. Чему будет равна скорость частицы, когда она проходит через центр кольца? Как изменится ответ, если кольцо закрепить?

Дано: m; q; υ_0; R; $Q(Q \cdot q > 0)$; M.

Найти: υ.

Решение. При движении вдоль оси заряженного кольца силы, действующие на частицу и кольцо, будут меняться. Поэтому для решения задачи удобно воспользоваться законами сохранения импульса и механической энергии.

Считая систему «частица – кольцо» замкнутой, закон сохранения импульса

$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = (m\vec{\upsilon} + M\vec{u}) - m\vec{\upsilon}_0 = 0$$

(где $\vec{\upsilon}$, $\vec{u}$ – скорости частицы и кольца в момент времени, когда частица проходит через центр кольца) запишем в проекции на направление движения тел системы:

$$m\upsilon + Mu - m\upsilon_0 = 0. \qquad (1)$$

В начальный момент полная механическая энергия тел равна кинетической энергии частицы $W_1 = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2$ и в момент, когда частица находится в центре кольца, $W_2 = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} + W_{вз}$, где $W_{вз}$ – энергия взаимодействия частицы с кольцом в рассматриваемом положении:

$$W_{вз} = q\varphi.$$

Потенциал φ, создаваемый кольцом в центре, легко определить, разбив заряд Q на элементарные заряды ΔQ, каждый из которых можно считать точечным. Так как все заряды ΔQ находятся на равных расстояниях от центра кольца, то потенциал, создаваемый ими, будет равен

$$\varphi = \sum \frac{\Delta Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R},$$

где R – радиус кольца.

Следовательно, $W_2 = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R}$ и закон сохранения механической энергии примет вид

$$W_1 = W_2 \quad \text{или} \quad \frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R}. \tag{2}$$

Выразив скорость кольца u из закона сохранения импульса (1) $u = \dfrac{m(\upsilon_0 - \upsilon)}{M}$ и подставив в закон сохранения энергии (2), получим

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{m^2(\upsilon_0^2 - 2\upsilon_0\upsilon + \upsilon^2)}{2M} + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R}. \tag{3}$$

После преобразований уравнение (3) примет вид

$$\upsilon^2 - \frac{2m\upsilon_0}{M+m}\upsilon - \frac{M-m}{M+m}\upsilon_0^2 + \frac{qQM}{2\pi\varepsilon_0 m(M+m)R} = 0.$$

Отсюда находим

$$\upsilon = \frac{m\upsilon_0}{M+m} \pm \sqrt{\frac{M^2\upsilon_0^2}{(M+m)^2} - \frac{qQM}{2\pi\varepsilon_0 m(M+m)R}}. \tag{4}$$

Для того чтобы частица пролетела сквозь кольцо, ее скорость υ должна быть больше скорости u кольца. Очевидно, что частица догонит удаляющееся от нее кольцо, если относительная скорость $\upsilon_{\text{отн}} = \upsilon - u \geq 0$, или с учетом (1) и (4)

$$\upsilon_{\text{отн}} = \upsilon - \frac{m\upsilon_0}{M} + \frac{m\upsilon}{M} = \frac{m\upsilon_0}{M} \pm \frac{M+m}{M}\sqrt{\frac{M^2\upsilon_0^2}{(M+m)^2} - \frac{qQM}{2\pi\varepsilon_0 m(M+m)R}} - \frac{m\upsilon_0}{M}.$$

По условию $\upsilon_{\text{отн}} \geq 0$ соответствует перед радикалом знак «+». Следовательно,

$$\upsilon_{\text{отн}} = \frac{m\upsilon_0}{M+m} + \sqrt{\frac{M^2\upsilon_0^2}{(M+m)^2} - \frac{qQM}{2\pi\varepsilon_0 m(M+m)R}}. \tag{5}$$

Если кольцо закреплено, то, полагая $M >> m$, из (5) получаем

$$\upsilon = \frac{m\upsilon_0}{M} + \sqrt{\upsilon_0^2 - \frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 mR}} \approx \sqrt{\upsilon_0^2 - \frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 mR}}. \tag{6}$$

Выражение (6) можно также получить, записав закон сохранения энергии в виде

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Ответ: $\upsilon = \dfrac{m\upsilon_0}{M} + \sqrt{\upsilon_0^2 - \dfrac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 mR}} \approx \sqrt{\upsilon_0^2 - \dfrac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 mR}}$

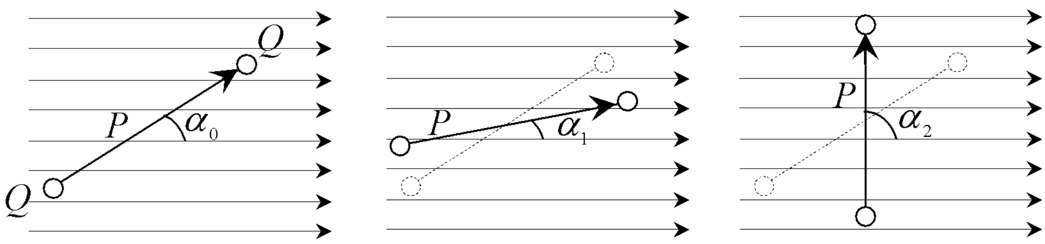
6. Поле диполя. Дипольный момент.

1. Диполь с электрическим моментом $P = 2$ нКл$\cdot$м находится в однородном электрическом поле напряженностью $E = 30$ $^{кВ}\!/_{м}$. Вектор $\vec{P}$ составляет угол $\alpha_0 = 60^\circ = \dfrac{\pi}{6}$ с направлением силовых линий поля. Определить произведенную внешними силами работу A поворота диполя на угол $\beta = 30^\circ$.

Дано: $P = 2$ нКл$\cdot$м; $E = 30$ $^{кВ}\!/_{м}$; $\alpha_0 = 60^\circ$; $\beta = 30^\circ$.

Найти: A.

Решение. Из исходного положения (рис.*а*) диполь можно повернуть на угол $\beta = 30^\circ = {}^{\pi}\!/_{6}$ двумя способами: или по часовой стрелке до угла $\alpha_1 = \alpha_0 - \beta = {}^{\pi}\!/_{3} - {}^{\pi}\!/_{6} = {}^{\pi}\!/_{6}$ (рис.*б*), или против часовой стрелки до угла $\alpha_2 = \alpha_0 + \beta = {}^{\pi}\!/_{3} + {}^{\pi}\!/_{6} = {}^{\pi}\!/_{2}$ (рис. *в*).



а) б) в)

Рис.

В первом случае диполь будет поворачиваться под действием сил поля. Следовательно, работа внешних сил при этом отрицательна. Во втором случае поворот может быть произведен только под действием внешних сил и, следовательно, работа внешних сил при этом положительна.

Работу, совершаемую при повороте диполя, можно вычислить двумя способами: 1) непосредственно интегрированием выражения элементарной работы; 2) с помощью соотношения между работой и изменением потенциальной энергии диполя в электрическом поле.

1-й способ. Элементарная работа при повороте диполя на угол α

$$dA = M d\alpha = PE \sin\alpha \, d\alpha,$$

и полная работа при повороте на угол от α_0 до α

$$A=\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} PE\sin\alpha d\alpha = PE\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\sin\alpha d\alpha = -PE\left(\cos\alpha-\cos\alpha_0\right)=PE\left(\cos\alpha_0-\cos\alpha\right).$$

Работа по часовой стрелке

$$A_1 = PE\left(\cos\alpha_0-\cos\alpha_1\right) = -21{,}9\ \text{мкДж},$$

против часовой стрелки

$$A_2 = PE\left(\cos\alpha_0-\cos\alpha_2\right) = 30\ \text{мкДж}.$$

2-й способ. Работа A внешних сил связана с изменением потенциальной энергии $\Delta П$ соотношением

$$A = \Delta П = П_2 - П_1,$$

где $П_1$ и $П_2$ – потенциальные энергии системы соответственно в начальном и конечном состояниях. Так как потенциальная энергия диполя в электрическом поле выражается формулой

$$П = -PE\cos\alpha,$$

то

$$A = PE\left(\cos\alpha_0-\cos\alpha\right),$$

что совпадает с формулой, полученной первым способом.

Ответ: по часовой стрелке $A_1 = PE\left(\cos\alpha_0-\cos\alpha_1\right) = -21{,}9\ \text{мкДж}$; против часовой стрелки $A_2 = PE\left(\cos\alpha_0-\cos\alpha_2\right) = 30\ \text{мкДж}$.

2. Три точечных заряда Q_1, Q_2 и Q_3 образуют электрически нейтральную систему, причем $Q_1 = Q_2 = 10\ \text{нКл}$. Заряды расположены в вершинах равностороннего треугольника. Определить максимальные значения напряженности E_{max} и потенциала φ_{max} поля, создаваемого этой системой зарядов, на расстоянии $r = 1\ \text{м}$ от центра треугольника, длина a стороны которого равна 10 см.

Дано: $Q_1 = Q_2 = 10\ \text{нКл}$; $r = 1\ \text{м}$; $a = 10\ \text{см}$; $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$.

Найти: E_{max}, φ_{max}.

Решение. Нейтральную систему, состоящую из трех точечных зарядов, можно представить в виде диполя. Действительно, «центр тяжести» зарядов Q_1 и Q_2 лежит на середине отрезка прямой, соединяющей эти заряды (рис. 10.26). В этой точке можно считать сосредоточенным заряд $Q = Q_1 + Q_2 = 2Q_1$. А так как система зарядов нейтральная $(Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0)$, то

$$Q_3 = -(Q_1 + Q_2) = -Q.$$

Так как расстояние 1 между зарядами Q_3 и Q, равными по значению, меньше расстояния r $(1 < r)$ (рис.), то систему этих двух зарядов можно считать диполем с электрическим моментом

$$\vec{P} = |Q|\vec{1},$$

где $\vec{1}$ – плечо диполя, равное по модулю $a\frac{\sqrt{3}}{2}$ (см. рис.). Так как $|Q| = 2Q_1$, то электрический момент такого точечного диполя

$$P = Q_1 a\sqrt{3}.$$

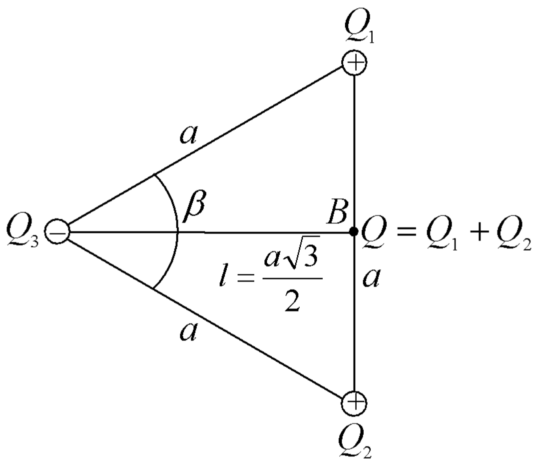


Рис.

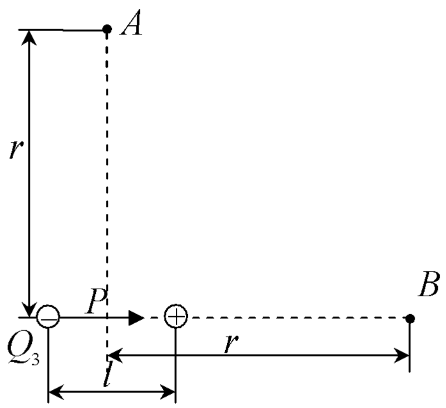


Рис.

Тот же результат можно получить другим способом.

Систему из трех зарядов представим как два диполя с электрическими моментами $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ (рис.), равными по модулю

$$\vec{P}_1 = |P_1| = Q_1 a; \quad \vec{P}_2 = |P_2| = Q_2 a.$$

Электрический момент $\vec{P}$ системы зарядов найдем как векторную сумму $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$, т.е.

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2.$$

Как это следует из рис. 10.28, имеем

$$P = 2P_1 \cos\left(\beta/2\right).$$

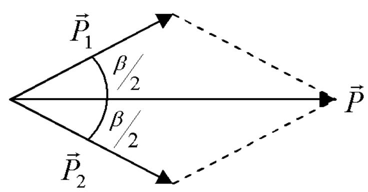


Рис.

Так как $P_1 = Q_1 a$ и $\beta = \pi/3$, то

$$P = 2Q_1 a \frac{\sqrt{3}}{2} = Q_1 a\sqrt{3},$$

что совпадает с найденным ранее.

Напряженность E и потенциал φ поля диполя выражаются формулами

$$E = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{1+3\cos^2\alpha}\ ; \quad \varphi = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha,$$

где α – угол между векторами $\vec{P}$ и $\vec{r}$ (рис.).

Напряженность и потенциал будут иметь максимальные значения при $\alpha = 0$, следовательно,

$$E_{max} = \frac{2P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}; \quad \varphi_{max} = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

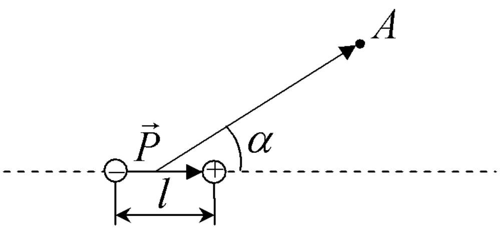


Рис.

Так как $P = Q_1 a\sqrt{3}$, то

$$E_{max} = \frac{2Q_1 a\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = 3{,}12\ \text{В/м};$$

$$\varphi_{max} = \frac{Q_1 a}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sqrt{3} = 1{,}56\ \text{В}.$$

Ответ: $E_{max} = 3{,}12$ В/м; $\varphi_{max} = 1{,}56$ В

7. Электрическая емкость. Расчет эквивалентных электрических емкостей. Энергия конденсатора.

1. Определить электрическую емкость C плоского конденсатора с двумя слоями диэлектриков: фарфора толщиной $d_1 = 2$ мм и эбонита толщиной $d_2 = 1{,}5$ мм, если площадь S пластин равна 100 см^2.

Дано: $d_1 = 2$ мм; $d_2 = 1{,}5$ мм; $S = 100$ см^2.

Найти: C.

Решение. Емкость конденсатора, по определению, $C = Q/U$, где Q − заряд на пластинах конденсатора; U − разность потенциалов пластин. Заменив в этом равенстве общую разность потенциалов U конденсатора суммой $U_1 + U_2$ напряжений на слоях диэлектриков, получим

$$C = \frac{Q}{U_1 + U_2}. \quad (1)$$

Приняв во внимание, что $Q = \sigma \cdot S$, $U_1 = E_1 d_1 = \dfrac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} d_1$ и $U_2 = E_2 d_2 = \dfrac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_2} d_2$,

равенство (1) можно переписать в виде

$$C = \frac{\sigma S}{\dfrac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} d_1 + \dfrac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_2} d_2}, \quad (2)$$

где σ − поверхностная плотность заряда на пластинах; E_1 и E_2 − напряженности поля в первом и втором слоях диэлектрика соответственно; D − электрическое смещение поля в диэлектриках.

Умножив числитель и знаменатель равенства (2) на ε_0 и учтя, что $D = \sigma$, получим

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1/\varepsilon_1 + d_2/\varepsilon_2};$$

$$C = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 100 \cdot 10^{-4}\ (\text{Ф/м}) \cdot \text{м}^2}{2 \cdot 10^{-3}/5 + 1{,}5 \cdot 10^{-3}/3\ \text{м}} = 9{,}83 \cdot 10^{-11}\ \text{Ф} = 98{,}3\ \text{пФ}.$$

Ответ: $C = 98{,}3$ пФ

2. Два плоских конденсатора одинаковой электроемкости $C_1 = C_2 = C$ соединены в батарею последовательно и подключены к источнику тока с электродвижущей силой E. Как изменится разность потенциалов U_1 на пластинах первого конденсатора, если пространство между пластинами второго конденсатора, не отключая источника тока, заполнить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon' = 7$?

Дано: $\varepsilon' = 7$; $C_1 = C_2 = C$; E.

Найти: U_1'/U.

Решение. До заполнения второго конденсатора диэлектриком разность потенциалов на пластинах обоих конденсаторов была одинакова: $U_1 = U_2 = E/2$. После заполнения электроемкость второго конденсатора возросла в ε' раз:

$$C_2' = \varepsilon' C_2 = \varepsilon' C.$$

Электроемкость первого не изменилась, т.е. $C_1' = C$. Так как источник тока не отключался, то общая разность потенциалов на батарее конденсаторов осталась прежней, она лишь перераспределилась между конденсаторами.

На первом конденсаторе

$$U_1' = \frac{Q}{C_1'} = \frac{Q}{C}, \tag{1}$$

где Q – заряд на пластинах конденсатора.

Поскольку при последовательном соединении конденсаторов заряд на каждой пластине и на всей батарее одинаков,

$$\text{то } Q = C'_{бат}E, \quad \text{где} \quad C'_{бат} = \frac{C_1'C_2'}{C_1' + C_2'} = \frac{C \cdot \varepsilon' C}{C + \varepsilon' C} = \frac{\varepsilon' C}{1 + \varepsilon'}.$$

Таким образом, $Q = \dfrac{\varepsilon' C}{1 + \varepsilon'} \cdot E$.

Подставив это выражение заряда в формулу (1), найдем

$$U_1' = \frac{Q}{C} = \frac{\varepsilon' C E}{(1 + \varepsilon')C} = \frac{\varepsilon'}{1 + \varepsilon'} E.$$

Чтобы найти, как изменилась разность потенциалов на пластинах первого конденсатора, вычислим отношение

$$\frac{U_1'}{U_1} = \frac{\varepsilon' E \cdot 2}{(1 + \varepsilon')E} = \frac{2\varepsilon'}{1 + \varepsilon'} = 1{,}75.$$

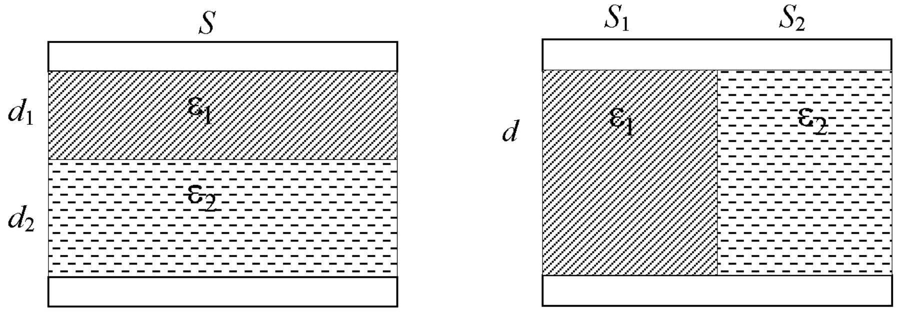
Ответ: разность потенциалов на пластинах первого конденсатора возросла в 1,75 раза.

3. Между пластинами плоского конденсатора находится два слоя диэлектриков: слюда с $\varepsilon_1 = 7$ толщиной $d_1 = 0,3$ мм и эбонит с $\varepsilon_2 = 3$ толщиной $d_2 = 0,7$ мм (рис. *а*). Площадь пластин равна $S = 20$ см^2. Найти: 1) емкость конденсатора; 2) емкость конденсатора, если между теми же пластинами помещены те же диэлектрики, поровну заполняющие объем конденсатора (рис. *б*).

Дано: $\varepsilon_1 = 7$; $d_1 = 0,3$ мм; $\varepsilon_2 = 3$; $d_2 = 0,7$ мм.

Найти: C.

Решение.



а) б)

Рис.

1. Легко видеть, что в сущности у нас последовательно соединены два конденсатора с емкостями

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{d_1}; \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{d_2},$$

соответственно, искомая емкость

$$C = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} = \frac{\varepsilon_0 S}{\dfrac{d_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{d_2}{\varepsilon_2}} = \frac{(8,85 \cdot 10^{-12})(20 \cdot 10^{-4})}{\dfrac{0,3 \cdot 10^{-3}}{7} + \dfrac{0,7 \cdot 10^{-3}}{3}} = 64,1 \cdot 10^{-12}\ \Phi = 64,1\ \text{п}\Phi.$$

2. Здесь мы имеем дело с параллельно соединенными конденсаторами, площадь пластин которых уменьшена вдвое: $S_1 = S_2 = S/2$, а расстояние между пластинами одинаково и равно $d = d_1 + d_2$. Поэтому искомая емкость

$$C = C + C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{2(d_1 + d_2)} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{2(d_1 + d_2)} = \frac{\varepsilon_0 S(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2(d_1 + d_2)} =$$

$$= \frac{(8,85 \cdot 10^{-12})(20 \cdot 10^{-4})(7 + 3)}{2(0,3 \cdot 10^{-3} + 0,7 \cdot 10^{-3})} = 88,5 \cdot 10^{-12}\ \Phi = 88,5\ \text{п}\Phi.$$

Ответ: 1) 64,1 пФ; 2) 88,5 пФ

4. Плоский воздушный конденсатор с площадью пластин $S = 10^{-2}$ $м^2$ и расстоянием между ними $d_1 = 10^{-3}$ м заряжен от батареи до разности потенциалов $U = 100$ В. Затем пластины раздвигают до расстояния $d_2 = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ м. Найти энергию конденсатора до W_1 и после $W_{2а}$ и $W_{2б}$ раздвижения пластин, если батарея перед раздвижением а) не отключается; б) отключается.

Дано: $S = 10^{-2}$ $м^2$; $d_1 = 10^{-3}$ м; $U = 100$ В; $d_2 = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ м.

Найти: W_1; $W_{2а}$; $W_{2б}$.

Решение. Так как емкость конденсатора зависит от его геометрических размеров, то

$$C_1 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d_1}.$$

Энергию конденсатора до раздвижения пластин можно определить по формуле

$$W_1 = C_1 \frac{U^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S U^2}{2d_1} = 4{,}43 \cdot 10^{-6} \text{ Дж}.$$

После раздвижения пластин емкость будет

$$C_2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d_2}.$$

В случае *а*, когда во время раздвижения пластин напряжение на обкладках постоянно, т.е $U = \text{const}$, энергия определяется по формуле

$$W_{2а} = \frac{C_2 U^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S U^2}{2d_2} = 1{,}77 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}.$$

В случае *б* на пластинах будет неизменным первоначальный заряд $Q = C_1 U$. Поэтому для нахождения энергии конденсатора воспользуемся выражением

$$W_{2б} = \frac{Q^2}{2C_2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S d_2 U^2}{2d_1^2} = 1{,}11 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}.$$

Ответ: $W_1 = 4{,}43 \cdot 10^{-6}$ Дж; $W_{2а} = 1{,}77 \cdot 10^{-7}$ Дж; $W_{2б} = 1{,}11 \cdot 10^{-5}$ Дж

5. В широкий сосуд с водой ($\varepsilon = 81$) вертикально опускаются пластины плоского конденсатора, подсоединенного к батарее, которая поддерживает на обкладках конденсатора разность потенциалов $U = 6$ кВ (рис.). Расстояние между пластинами $d = 0{,}5$ см. На какую высоту h поднимется жидкость между пластинами конденсатора? Плотность воды $\rho = 10^3\ \frac{кг}{м^3}$, ускорение свободного падения $g = 9{,}8\frac{м}{с^2}$. Жидкость несжимаема. Поверхностное натяжение пренебрежимо мало.

Дано: $\varepsilon = 81$; $U = 6$ кВ; $d = 0{,}5$ см; $g = 9{,}8\ \frac{м}{с^2}$; $\rho = 10^3\ \frac{кг}{м^3}$.

Найти: h.

Решение. Устойчивое состояние любой системы характеризуется минимумом энергии. Найдем полную энергию W нашей системы, которая складывается из энергии электрического поля конденсатора $W_э$, потенциальной энергии поднятой жидкости $W_ж$ и энергии источника постоянного напряжения $W_и$. Рассмотрим каждое слагаемое отдельно.

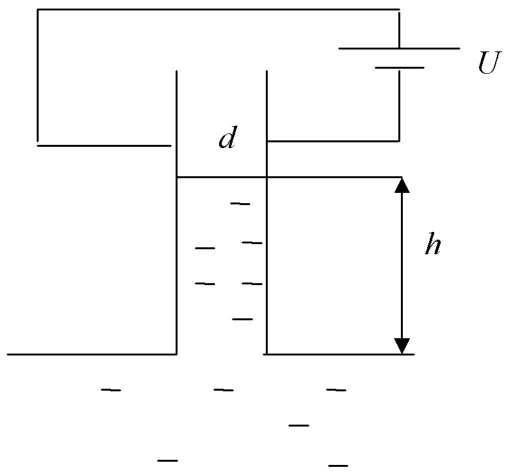


Рис.

Емкость нашего конденсатора равна сумме емкостей конденсатора с диэлектрической жидкостью высотой *h* и воздушного конденсатора высотой $(H - h)$:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon L h}{d} + \frac{\varepsilon_0 L (H - h)}{d} = \frac{\varepsilon_0 L H}{d} + \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) L h}{d},$$

где H – высота пластин конденсатора; L – их длина.

До опускания пластин в жидкость электрическая емкость была равна

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 L H}{d}.$$

Так как диэлектрическая проницаемость жидкости (ε = 81) больше единицы, то $C > C_0$. Увеличение емкости конденсатора связано с перетеканием заряда за счет работы, совершаемой источником напряжения:

$$\Delta Q = Q' - Q = CU - C_0 U = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) L h}{d} U.$$

Таким образом, электрическая энергия, запасенная в конденсаторе, составляет

$$W_э = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 LH}{2d}U^2 + \frac{\varepsilon_0 L(\varepsilon - 1)h}{d}U^2.$$

Потенциальная энергия поднятой жидкости, центр тяжести которой находится на высоте $h/2$, а масса поднятой жидкости $m = \rho Ldh$, равна

$$W_ж = \rho Ldhg\frac{h}{2} = \frac{\rho Ldgh^2}{2}.$$

Обозначим исходную энергию источника напряжения через W_0.

При касании пластин конденсатора поверхности жидкости происходит перетекание заряда ΔQ, следовательно, источник затрачивает часть своей энергии на совершение работы

$$\Delta A = \Delta QU = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)Lh}{d}U^2.$$

Очевидно, оставшаяся энергия источника напряжения составляет

$$W_u = W_0 - \Delta A = W_0 - \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)Lh}{d}U^2.$$

Тогда полная энергия рассматриваемой системы

$$W(h) = W_э + W_ж + W_и = W_0 + \frac{\varepsilon_0 LH}{2}U^2 + \rho\frac{Ldg}{2}h^2 - \frac{U^2\varepsilon_0(\varepsilon - 1)Lh}{2d}.$$

Приравняем нулю производную полной энергии по высоте *h*:

$$\frac{dW(h)}{dh} = -\frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)L}{2d} + \rho Ldgh = 0.$$

Таким образом, рассматриваемая система будет обладать минимальной полной энергией при высоте жидкости

$$h_1 = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)U^2}{2d^2\rho g} = \frac{(8,85\cdot 10^{-12})(81-1)(6\cdot 10^3)^2}{2(5\cdot 10^{-3})^2\cdot 10^3\cdot 9,81} = 0,05\ м = 5\ см$$

Ответ: 5 см

6. Три одинаковые плоские металлические пластины площадью $S = 100$ см^2 и толщиной $d = 1$ мм каждая расположены параллельно друг другу (рис.) Расстояние между соседними пластинами равно их толщине. Крайние пластины подсоединены к электрической цепи. Определить электроемкость этой системы проводников. Принять, что диэлектрическая проницаемость окружающей пластины среды $\varepsilon = 1$.

Дано: $S = 100$ см^2; $d = 1$ мм; $\varepsilon = 1$.

Найти: C.

Решение. Воспользуемся формулой $Q = C\Delta\varphi$.

Предположим, что крайним пластинам через электрическую цепь сообщили заряды $+Q$ и $-Q$. Так как пластины расположены близко друг от друга, то их можно считать бесконечными.

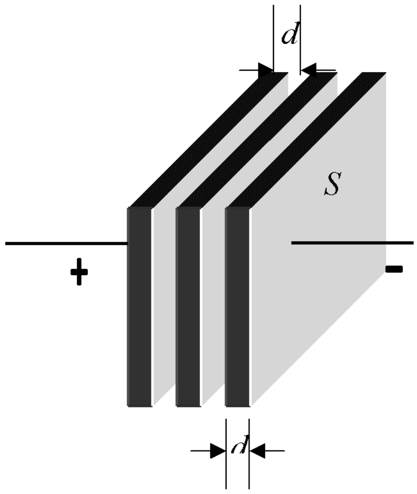


Рис.

Внутри пластин электрическое поле отсутствует, а снаружи каждая из заряженных пластин создает электрическое поле напряженностью

$$E_+ = E_- = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\varepsilon\varepsilon_0 S},$$

где σ – поверхностная плотность зарядов на пластинах.

Направления векторов напряженности полей таковы, что при их сложении вне зазоров между пластинами результирующее поле будет нулевым, а в зазорах напряженность равна

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = 2\vec{E}_+, \quad \text{т.е.} \quad E = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0 S}.$$

Разность потенциалов между соседними пластинами в однородном поле определим по формуле $\Delta\varphi = Ed$.

Тогда разность потенциалов между крайними пластинами

$$\Delta\varphi_{\text{сист}} = 2Ed = \frac{2Qd}{\varepsilon\varepsilon_0 S}.$$

По определению $C = \dfrac{Q}{\Delta\varphi_{\text{сист}}}$. Тогда $C = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{2d}$. Тогда

$$C = \frac{8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 10^{-2}}{2\cdot 10^{-3}}\,\text{Ф} = 44{,}2\cdot 10^{-12}\ \text{Ф} = 44{,}2\ \text{пФ}.$$

Ответ: 44,2 пФ

8. Энергия электростатического поля.

1. Металлический шар радиусом $R = 3$ см несет заряд $Q = 20$ нКл. Шар окружен слоем парафина толщиной $d = 2$ см. Определить энергию W электрического поля, заключенного в слое диэлектрика.

Дано: $R = 3$ см; $Q = 20$нКл; $d = 2$ см.

Найти: W.

Решение.

Так как поле, созданное заряженным шаром, является неоднородным, то энергия поля в слое диэлектрика распределена неравномерно.

Однако объемная плотность энергии будет одинакова во всех точках, отстоящих на равных расстояниях от центра сферы, так как поле заряженного шара обладает сферической симметрией.

Выразим энергию в элементарном сферическом слое диэлектрика объемом dV:

$$dW = \omega dV,$$

где ω – объемная плотность энергии (рис.).

Полная энергия выразится интегралом

$$W = \int \omega dV = 4\pi \int_{R}^{R+d} \omega r^2 dr, \qquad (1)$$

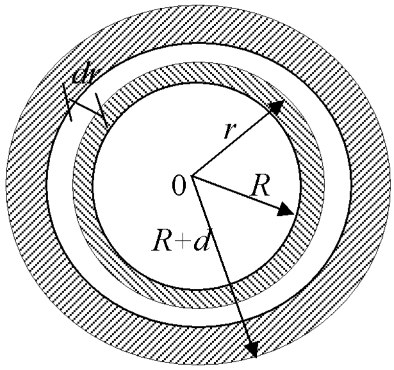


Рис.

где r – радиус элементарного сферического слоя; dr – его толщина.

Объемная плотность энергии определяется по формуле

$$\omega = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2},$$

где E – напряженность поля.

В нашем случае $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$ и, следовательно, $\omega = \dfrac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon\varepsilon_0 r^4}$.

Подставив это выражение плотности в формулу (1) и вынеся за знак интеграла постоянные величины, получим

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0} \int_{R}^{R+d} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d}\right) = \frac{Q^2 d}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R(R+d)} = 12 \text{ мкДж}.$$

Ответ: 12 мкДж

2. Определить собственную потенциальную энергию Π электростатического поля, которой обладает шар радиусом $R =$ 3 см, несущий равномерно распределенный по объему заряд $Q =$ 5 нКл.

Дано: $R = 3$ см; $Q =$ 5 нКл.

Найти: Π.

Решение. Собственная потенциальная энергия равномерно заряженного по объему шара равна работе A внешних сил, которую нужно совершить, «собирая» шар из дифференциально малых порций зарядов dq, перенося их из бесконечности. Пусть шар уже имеет некоторый заряд q и радиус r.

Потенциал поверхности такого шара

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Для присоединения заряда dq необходимо совершить работ

$$dA_{\text{вн.сил}} = \varphi dq.$$

Эта работа равна приращению собственной потенциальной энергии

$$d\Pi = A_{\text{вн.сил}} = \varphi dq = \frac{q dq}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Будем считать, что заряд dq равномерно распределяется по поверхности шара радиуса r. Тогда

$$dq = \rho dV = \rho S dr = 4\pi r^2 \rho dr,$$

где ρ – объемная плотность заряда; dV – объем сферического слоя.

Тогда

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{(4/3)\pi r^3 \rho}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_0} r^2 \text{ и}$$

$$d\Pi = \frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_0} r^4 4\pi\rho dr = \frac{4\pi}{3}\frac{\rho^2}{\varepsilon_0} r^4 dr.$$

Проинтегрируем это выражение в пределах от 0 до R:

$$\Pi = \int_0^R d\Pi(r) = \frac{4\pi}{3}\frac{\rho^2}{\varepsilon_0}\frac{R^5}{5}.$$

Так как $\rho = \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi\rho^3}$ и $\rho^2 = \dfrac{Q^2}{(\frac{4\pi}{3})^2 R^6}$, то

$$\Pi = \frac{4\pi}{3}\frac{Q^2R^5}{(\frac{4\pi}{3})^2R^6 5\varepsilon_0} \quad \text{или} \quad \Pi = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Вычисляя, получим

$$\Pi = \frac{3}{5}\frac{5\cdot 10^{-9}}{3\cdot 10}9\cdot 10^9 \text{ Дж} = 4{,}5\cdot 10^{-6} \text{ мкДж}.$$

Ответ: $\Pi = 4{,}5\cdot 10^{-6}$ мкДж.

9. Поле в диэлектрике.

1. В пространстве, наполовину заполненном парафином ($\varepsilon_2 = 2$), создано однородное электростатическое поле, напряженность которого в вакууме $E_1 =$ 4 В/м. Вектор $\vec{E}_1$ образует с плоской границей вакуум – слюда угол $\alpha =$ 60°. Определите в парафине:1) электрическое смещение D_2; 2) напряженность E_2 электростатического поля; 3) поляризованность P_2.

Дано: ε_2 = 2; E_1 = 4 В/м; α = 60°; ε_1 = 1.

Найти: 1) D_2; 2) E_2; 3) P_2.

Решение. Поскольку в задаче задан вектор $\vec{E}_1$ как по модулю, так и по направлению (рис.), то задано и направление вектора $\vec{D}_1$ в вакууме (рис.) (векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{D}_1$ параллельны).

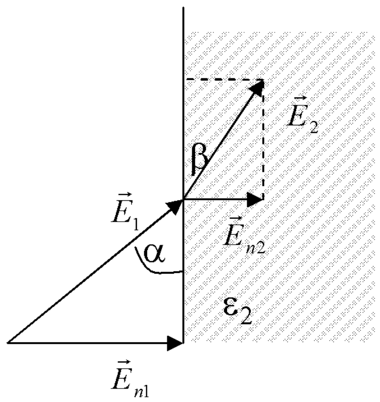


Рис.

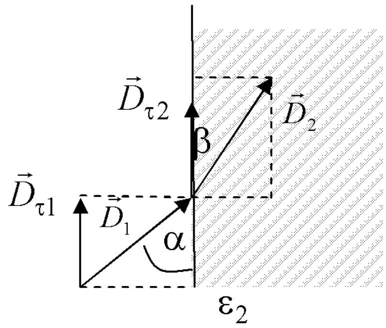


Рис.

Связь между нормальной и тангенциальной составляющими векторов $\vec{D}$ и $\vec{E}$

$$D_n = \varepsilon\varepsilon_0 E_n \quad \text{и} \quad D_\tau = \varepsilon\varepsilon_0 E_\tau . \tag{1}$$

При переходе через границу раздела тангенциальная составляющая вектора $\vec{E}_1 = (E_\tau)$ и нормальная составляющая вектора $\vec{D}_1 = (D_n)$ не претерпевают скачка, т.е.

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}; \quad D_{n1} = D_{n2}, \tag{2}$$

а нормальная составляющая вектора $\vec{E}_1 = (E_n)$ и тангенциальная составляющая вектора $\vec{D}_1 = (D_\tau)$

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}; \quad \frac{D_{\tau 1}}{D_{\tau 2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \tag{3}$$

что схематически изображено на рис.

Из формулы (3), учитывая, что $\varepsilon_1 = 1$, получим

$$E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2} \quad \text{и} \quad D_{\tau 1} = \frac{D_{\tau 2}}{\varepsilon_2}. \tag{4}$$

Из рис. с учетом формул (1) и (4), следует, что

$$D_2 = \sqrt{D_{n2}{}^2 + D_{\tau 2}{}^2} = \sqrt{D_{n1}{}^2 + \varepsilon_2{}^2 D_{\tau 1}{}^2}.$$

В вакууме (см. рис. 10.35)

$$D_{n1} = D_1 \sin\alpha = \varepsilon_0 E_1 \sin\alpha; \quad D_{\tau 2} = D_1 \cos\alpha = \varepsilon_0 E_1 \cos\alpha.$$

Тогда искомое электрическое смещение в парафине

$$D_2 = \varepsilon_0 E_1 \sqrt{\sin^2\alpha + \varepsilon_2{}^2 \cos^2\alpha}$$

Из рис. с учетом формул (1) и (4) следует, что

$$E_2 = \sqrt{E^2{}_{n2} + E^2{}_{\tau 2}} = \sqrt{\frac{E^2{}_{n1}}{\varepsilon_2^2} + E^2{}_{\tau 1}}.$$

В вакууме (см. рис.) $E_{n1} = E_1 \sin\alpha$; $E_{\tau 1} = E_1 \sin\alpha$.

Тогда искомая напряженность электростатического поля в парафине

$$E_2 = E_1 \sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{\varepsilon_2^2} + \cos^2\alpha}.$$

Поляризованность $\vec{P}$ связана с $\vec{E}_1$ и с $\vec{D}_1$ соотношением

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad ,$$

отсюда следует, что вектор $\vec{P}_2$ в парафине направлен так же, как вектор $\vec{D}_2$ (или $\vec{E}_2$).

Тогда искомая поляризованность в парафине

$$P_2 = D_2 - \varepsilon_0 E_2.$$

Вычисляя, получим:

1) $D_2 = 46$ пКл/м^2; 2) $E_2 = 2{,}6$ В/м; 3) $P_2 = 23$ пКл/м^2.

Ответ: 1) $D_2 = 46$ пКл/м^2; 2) $E_2 = 2{,}6$ В/м; 3) $P_2 = 23$ пКл/м^2.

2. Между обкладками плоского конденсатора, заряженного до разности потенциалов 1,5 кВ, зажата парафиновая пластинка ($\varepsilon =$ 2) толщиной 5 мм. Определите поверхностную плотность связанных зарядов на парафине.

Дано: U = 1,5 кВ; $\varepsilon =$ 2; d = 5 мм.

Найти: σ'.

Решение. Векторы $\vec{D}$, $\vec{E}$ и $\vec{P}$ связаны соотношением

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P},$$

где $\vec{D}$ и $\vec{E}$ – соответственно векторы электрического смещения и напряженности поля плоского конденсатора; $\vec{P}$ – вектор поляризованности диэлектрика.

Так как векторы $\vec{D}$ и $\vec{E}$ нормальны к поверхности диэлектрика, то

$$D_n = D \quad и \quad E_n = E.$$

Тогда можем записать $D = \varepsilon_0 E + P$,

где $p = \sigma'$, т.е. равна поверхностной плотности связанных зарядов диэлектрика (учли, что $p_n = p$).

Тогда $\sigma' = D - \varepsilon_0 E$.

Учитывая, что $D = \varepsilon\varepsilon_0 E$ и $E = \dfrac{U}{d}$, где d – расстояние между обкладками конденсатора, найдем

$$\sigma' = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\frac{U}{d} = 2{,}65 \text{ мкКл/м}^2.$$

Ответ: $\sigma' = 2{,}65$ мкКл/м^2

3. Расстояние между обкладками плоского конденсатора d = 1 мм. После зарядки конденсатора до разности потенциалов U = 700 В между обкладками вставили стеклянную пластинку ($\varepsilon =$ 7).

Определите: 1) диэлектрическую восприимчивость χ стекла; 2) поверхностную плотность σ' связанных зарядов на стеклянной пластине.

Дано: d = 1 мм; U = 700 В; $\varepsilon =$ 7.

Найти: 1) χ; 2) σ'.

Решение. Связь диэлектрической проницаемости ε и диэлектрической восприимчивости χ

$$\varepsilon = 1 + \chi, \quad \text{откуда искомая} \quad \chi = \varepsilon - 1.$$

Напряженность поля внутри конденсатора после его зарядки

$$E_0 = \frac{U}{d}, \tag{1}$$

а после того, как в конденсатор вставили диэлектрик, с учетом формулы (1)

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{U}{\varepsilon d}.$$

Поверхностная плотность связанных зарядов σ' равна поляризованности P:

$$\sigma' = P.$$

Связь между поляризованностью диэлектрика и напряженностью электростатического поля

$$P = \chi\varepsilon_0 E.$$

Тогда искомая поверхностная плотность связанных зарядов

$$\sigma' = \chi\varepsilon_0 E = \frac{\chi\varepsilon_0 U}{\varepsilon d}.$$

Вычисляя, получаем:

$$1)\ \chi = 6;\quad 2)\ \sigma' = 5{,}31\ \text{мКл/м}^2.$$

Ответ: 1) $\chi = 6$; 2) $\sigma' = 5{,}31$ мКл/м^2.

4. Пространство между обкладками плоского конденсатора с площадью обкладок $S = 100$ см^2 заполнено эбонитом ($\varepsilon = 3$). Определите поверхностную плотность σ' связанных зарядов на эбоните, если обкладки конденсатора притягиваются друг к другу с силой $F = 10$ мН.

Дано: $S = 100$ см^2; $\varepsilon = 3$; $F = 10$ мН.

Найти: σ'.

Решение. Поверхностная плотность σ' связанных зарядов равна поляризованности P: $\sigma' = P$.

Поляризованность диэлектрика P и напряженность E электростатического поля связаны соотношением

$$P = \chi\varepsilon_0 E,$$

где χ – диэлектрическая восприимчивость диэлектрика:

$$\chi = \varepsilon - 1$$

(ε – диэлектрическая проницаемость).

Учитывая вышесказанное, получим, что

$$\sigma' = P = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E. \qquad (1)$$

Напряженность электростатического поля

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}, \qquad (2)$$

где σ – поверхностная плотность зарядов на обкладках конденсатора, которую найдем из формулы для силы притяжения между обкладками конденсатора

$$|F| = \frac{Q}{2\varepsilon\varepsilon_0 S} = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Учли, что заряд на обкладках конденсатора $Q = \sigma \cdot S$.

Тогда

$$\sigma = \sqrt{\frac{2\varepsilon\varepsilon_0 |F|}{S}}. \tag{3}$$

Подставив (3) в (2), получим

$$E = \sqrt{\frac{2|F|}{\varepsilon\varepsilon_0 S}}. \tag{4}$$

Подставив выражение (4) в формулу (1), найдем искомую плотность связанных зарядов на эбоните:

$$\sigma' = (\varepsilon - 1)\sqrt{\frac{2\varepsilon_0 |F|}{\varepsilon S}} = 4{,}86 \text{ мкКл/м}^2.$$

Ответ: $\sigma' = 4{,}86$ мкКл/м^2

ПОСТОЯННЫЙ ТОК

1. Расчет электрических цепей с применением законов Ома и Джоуля-Ленца.

1. Сила тока в проводнике сопротивлением $R = 20$ Ом нарастает в течение времени $\Delta t = 2$ с по линейному закону от $I_0 = 0$ до $I_{max} = 6$ А. Определить количество теплоты Q_1, выделившееся в этом проводнике за первую секунду, и Q_2 – за вторую, а также найти отношение этих количеств теплоты Q_2/Q_1.

Дано: $R = 20$ Ом; $\Delta t = 2$ с; $I_0 = 0$; $I_{max} = 6$ А.

Найти: Q_1; Q_2; Q_2/Q_1.

Решение. Закон Джоуля – Ленца $Q = I^2 Rt$ применим в случае постоянного тока $(I = \text{const})$. Если же сила тока в проводнике изменяется, то указанный закон справедлив для бесконечно малого промежутка времени и записывается в виде

$$dQ = I^2 R dt. \tag{1}$$

Здесь сила тока I является некоторой функцией времени. В нашем случае

$$I = Kt, \qquad (2)$$

где K – коэффициент пропорциональности, равный отношению приращения силы тока к интервалу времени, за который произошло это приращение:

$$K = \frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

С учетом равенства (2) формула (1) имеет вид

$$dQ = K^2 R t^2 dt. \qquad (3)$$

Для определения количества теплоты, выделившейся за конечный промежуток времени Δt, выражение (3) следует проинтегрировать в пределах от t_1 до t_2: $Q = K^2 R \int\limits_{t_1}^{t_2} t^2 dt = \frac{1}{3} K^2 R \left(t_2^3 - t_1^3\right)$.

При определении количества теплоты, выделившегося за первую секунду, пределы интегрирования $t_1 = 0$ с, $t_2 = 1$ с и, следовательно, $Q_1 = 60$ Дж, а за вторую секунду пределы интегрирования – $t_1 = 1$ с, $t_2 = 2$ с и тогда $Q_2 = 420$ Дж. Следовательно, $\frac{Q_2}{Q_1} = 7$

Ответ: за вторую секунду выделится теплоты в 7 раз больше, чем за первую.

2. Определить заряд Q, прошедший по проводу с сопротивлением $R = 3$ Ом при равномерном нарастании напряжения на концах провода от $U_0 = 2$ В до $U = 4$ В в течение $t = 20$ с.

Дано: $R = 3$ Ом; $U_0 = 2$ В; $U = 4$ В; $t = 20$ с.

Найти: Q.

Решение. Так как сила тока в проводе изменяется, то воспользоваться для подсчета заряда формулой $Q = It$ нельзя. Поэтому возьмем дифференциал заряда $dQ = Idt$ и проинтегрируем:

$$Q = \int\limits_0^t I dt. \qquad (1)$$

Выразив силу тока по закону Ома, получим

$$Q = \int\limits_0^t \frac{U}{R} dt. \qquad (2)$$

Напряжение U в данном случае переменное. В силу равномерности нарастания оно может быть выражено формулой

$$U = U_0 + KT, \qquad (3)$$

где K – коэффициент пропорциональности.

Подставив это выражение U в формулу (2), найдем

$$Q = \int_0^t \left(\frac{U_0}{R} + \frac{Kt}{R} \right) dt = \frac{U_0}{R} \int_0^t dt + \frac{K}{R} \int_0^t t dt .$$

Проинтегрировав, получим

$$Q = \frac{U_0 t}{R} + \frac{Kt^2}{2R} = \frac{t}{2R}\left(2U_0 + Kt\right). \qquad (4)$$

Значение коэффициента пропорциональности K найдем из формулы (3), если заметим, что при $t = 20$ с $U = 4$ В.

$$K = \frac{U - U_0}{t} = \frac{4-2}{20} = 0{,}1 \ \text{В}/\text{с} .$$

Подставив значения величин в формулу (4), найдем

$$Q = 20 \ \text{Кл} .$$

Ответ: $Q = 20$ Кл

3. В цепь источника постоянного тока с ЭДС $E = 6$ В включен резистор сопротивлением $R = 80$ Ом. Определить: 1) плотность тока в соединительных проводах площадью поперечного сечения $S = 2$ мм^2; 2) число N электронов, проходящих через сечение проводов за время $t = 1$ с. Сопротивлением источника тока и соединительных проводов пренебречь.

Дано: $E = 6$ В; $R = 80$ Ом; $S = 2$ мм^2; $t = 1$ с.

Найти: j; N.

Решение. 1. Плотность тока по определению есть отношение силы тока I к площади поперечного сечения провода:

$$j = \frac{I}{S}. \qquad (1)$$

Силу тока в этой формуле выразим по закону Ома:

$$I = \frac{E}{R + R_1 + r_i}, \qquad (2)$$

где R – сопротивление резистора; R_1 – сопротивление соединительных проводов; r_i – внутреннее сопротивление источника тока.

Пренебрегая сопротивлениями R_1 и r_i из (2), получим

$$I = \frac{E}{R}.$$

Подставив это выражение силы тока в (1), найдем

$$j = \frac{E}{RS}.$$

Вычисляя, получим

$$j = \frac{6}{80 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} \ \frac{\text{В}}{\text{Ом} \cdot \text{м}^2} = 3{,}75 \cdot 10^4 \ \text{А}/\text{м}^2.$$

2. Число электронов, проходящих за время t через поперечное сечение, найдем, разделив заряд Q, протекающий за это время через сечение, на элементарный заряд:

$$N = \frac{Q}{e}$$

или с учетом того, что $Q = It$ и $I = E/R$,

$$N = \frac{Et}{eR}.$$

Вычисляя, получим

$$N = \frac{6 \cdot 1}{80 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} \ \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{Кл} \cdot \text{Ом}} = 4{,}69 \cdot 10^{17} \ \text{электронов}.$$

Ответ: $j = 3{,}75 \cdot 10^4 \ \text{А}/\text{м}^2$; $N = 4{,}69 \cdot 10^{17}$ электронов

4. Потенциометр с сопротивлением $R = 100$ Ом подключен к источнику тока, ЭДС E которого равна 150 В и внутреннее сопротивление $r = 50$ Ом (рис.).

Определить показание вольтметра с сопротивлением $R_B = 500$ Ом, соединенного проводником с одной из клемм потенциометра и подвижным контактом с серединой обмотки потенциометра. Какова разность потенциалов между теми же точками потенциометра при отключенном вольтметре?

Дано: $R = 100$ Ом; $E = 150$ В; $r = 50$ Ом; $R_B = 500$ Ом.

Найти: U; U_2.

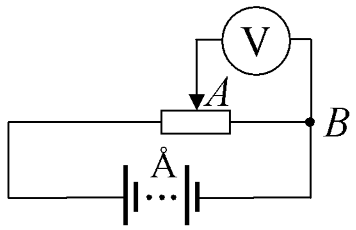


Рис.

Решение. Показания U_1 вольтметра, подключенного к точкам A и B (см. рис.), определяются по формуле

$$U_1 = I_1 R_1, \tag{1}$$

где I_1 – сила тока в неразветвленной части цепи, R_1 – сопротивление параллельно соединенных вольтметра и половины потенциометра.

Силу тока I_1 найдем по закону Ома для всей цепи:

$$I_1 = \frac{E}{R_{BH} + r}, \tag{2}$$

где R_{BH} – сопротивление внешней цепи.

Внешнее сопротивление R_{BH} есть сумма двух сопротивлений

$$R_{BH} = \frac{R}{2} + R_1. \tag{3}$$

Сопротивление R_1 параллельного соединения может быть найдено по формуле $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_{BH}} + \frac{2}{R}$, откуда

$$R_1 = \frac{R \cdot R_{BH}}{R + 2R_{BH}} = 45{,}5 \text{ Ом}.$$

Поставив в выражение (2) правую часть равенства (3), определим силу тока:

$$I_1 = \frac{E}{R/2 + R_1 + r} = 1{,}03 \text{ А}.$$

Если подставить значения I_1 и R_1 в формулу (1), то найдем показания вольтметра:

$$U = 46{,}9\ \text{В}.$$

Разность потенциалов между точками A и B при отключенном вольтметре равна произведению тока I_2 на половину сопротивления потенциометра, т.е.

$$U_2 = I_2 \frac{R}{2} \quad \text{или} \quad U_2 = \frac{E}{R + r}\frac{R}{2} = 50\ \text{В}.$$

Ответ: $U_2 = 50$ В

5. На рис. *а* приводится схема, общее сопротивление которой надо определить.

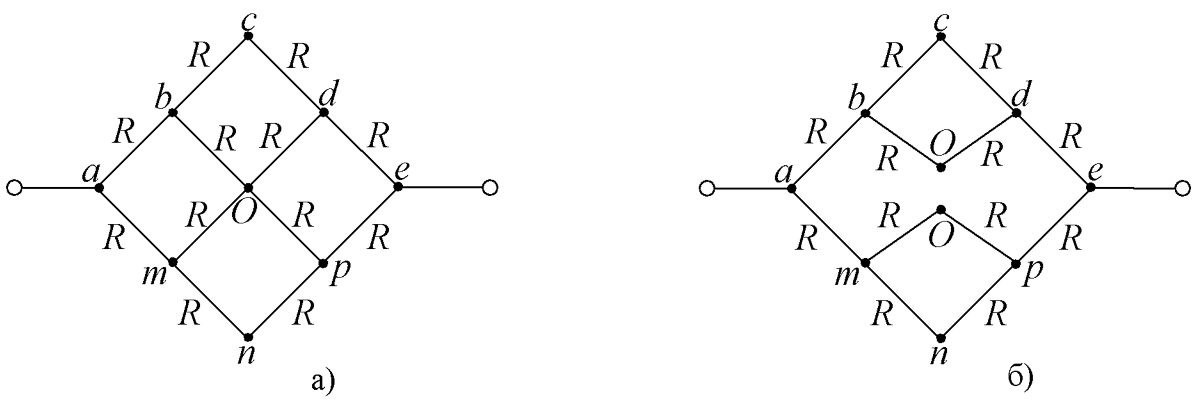


Рис.

Решение. Для решения данной задачи проводники, соединенные в узле O, удобно развести так, как показано на рис. *б*. Тогда сразу становится ясно, что здесь мы имеем две параллельные ветви abcde и amnpe. Ветвь abcde состоит из трех последовательно соединенных участков ab, bcd и de. Общее сопротивление участка bcdob, состоящего из двух параллельных сопротивлений по $2R$ каждое, равно $2R/2 = R$. Тогда общее сопротивление ветви abcde будет равно $R + R + R = 3R$. Ветвь amnpe совершенно такая же, как и abcde, поэтому ее общее сопротивление, очевидно, тоже равно $3R$. Поскольку эти ветви параллельны и имеют одинаковые сопротивления $3R$, то общее сопротивление всей этой цепи

$$R_{\text{общ}} = \frac{3R}{2} = 1{,}5R.$$

Ответ: $R_{\text{общ}} = 1{,}5R$

6. Определите общее сопротивление между точками A и B цепи проводников в виде шестиугольника (рис.). Сопротивление каждой проволоки $r = 1$ Ом.

Дано: $r = 1$ Ом.

Найти: R.

Решение. В силу симметрии токи, текущие по сопротивлениям 8, 9, 11 и 12 одинаковы. Поэтому ток через узел O равен нулю. Тогда схема, представленная на рис., является эквивалентной той, которая задана в виде шестиугольника (см. рис.).

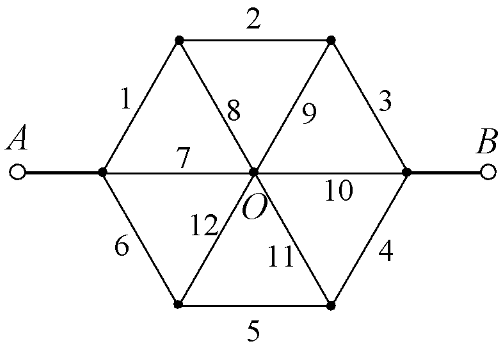


Рис.

Сопротивления 8 и 9 соединены между собой последовательно и параллельно с сопротивлением 2. Тогда

$$R_{8,9,2} = \frac{2}{3}r.$$

Эквивалентное сопротивление $R_{8,9,2}$ соединено последовательно с сопротивлениями 1 и 3, поэтому

$$R_{1\to3} = \frac{2}{3}r + r + r = \frac{8}{3}r.$$

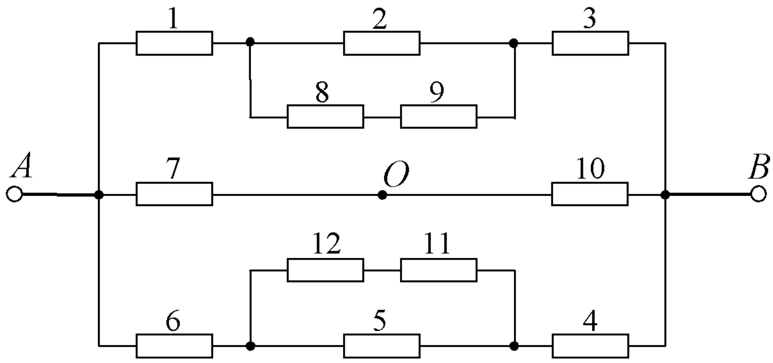


Рис.

Из схемы следует, что эквивалентное сопротивление $R_{4\to6}$ равно $R_{1\to3}$, т.е. $R_{4\to6} = \frac{8}{3}r$. Сопротивления $R_{1\to3}$, $R_{4\to6}$, 7 и 10 соединены параллельно, поэтому $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{1\to3}} + \frac{1}{R_{4\to6}} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r}$

или, подставив значения $R_{1\to3}$ и $R_{4\to6}$, получим $\frac{1}{R} = \frac{3}{8r} + \frac{3}{8r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{5}{4r}$,

откуда общее сопротивление

$$R = \frac{4}{5} r = 0{,}8 \text{ Ом}.$$

Ответ: $R = 0{,}8$ Ом

7. Два одинаковых источника с ЭДС $E_1 = E_2 = 1{,}2$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}4$ Ом соединены как показано на рис.

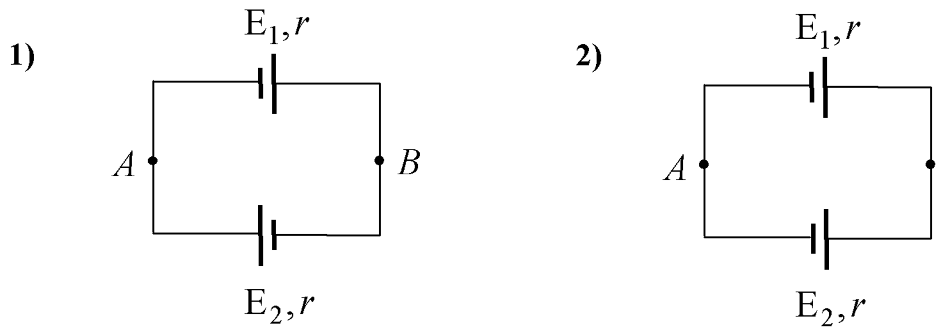


Рис.

Какова сила тока I и разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ между точками A и B в первом и во втором случаях?

Дано: $E_1 = E_2 = 1{,}2$ В; $r = 0{,}4$ Ом.

Найти: I; $\varphi_A - \varphi_B$.

Решение. 1. Запишем закон Ома $\left(I = E/(R+r)\right)$ для нашей замкнутой цепи

$$I = \frac{E_1 + E_2}{2r} = 3 \text{ А}.$$

Закон Ома $(\pm IR = \varphi_1 - \varphi_2 \pm E)$ для участка цепи AE_1B $Ir = \varphi_A - \varphi_B + E_1$, Откуда $\varphi_A - \varphi_B = Ir - E_1$, $\varphi_A - \varphi_B = 0$ В.

2. В этом случае закон $\left(I = E/(R+r)\right)$ запишется как

$$I = \frac{E_1 - E_2}{2r} = 0 \text{ А},$$

а для участка цепи AE_1B выражение $(\pm IR = \varphi_1 - \varphi_2 \pm E)$ будет иметь вид

$$Ir = \varphi_A - \varphi_B + E_1,$$

откуда $\varphi_A - \varphi_B = Ir - E_1$; $\varphi_A - \varphi_B = -1{,}2$ В.

Следовательно, $\varphi_B > \varphi_A$.

Ответ: 1) $\varphi_A - \varphi_B = 0$ В; $\varphi_A - \varphi_B = -1{,}2$ В

8. Определить внутреннее сопротивление и ЭДС батареи, образованной тремя источниками ЭДС (рис.) $E_1 = 2$ В; $E_2 = 4$ В и $E_3 = 6$ В, если их внутренние сопротивления одинаковы и равны $0{,}2$ Ом.

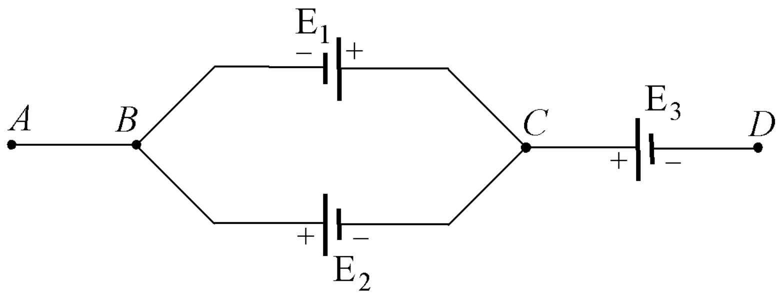


Рис.

Дано: $E_1 = 2$ В; $E_2 = 4$ В; $E_3 = 6$ В; $r_1 = r_2 = r_3 = r = 0{,}2$ Ом.

Найти: $r_б$; $E_б$.

Решение. Общее внутреннее сопротивление на участке BC (источники E_1 и E_2 соединены параллельно)

$$\frac{1}{r_{BC}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2}{r}, \quad \text{откуда} \quad r_{BC} = \frac{r}{2}. \qquad (1)$$

Внутреннее сопротивление батареи (она подключена между точками A и D)

$$r_б = r_{BC} + r_3 = \frac{r}{2} + r = \frac{3}{2}r \quad [\text{с учетом (1)}].$$

Для участка BC можем записать

$$\frac{E_{BC}}{r_{BC}} = \frac{E_1}{r_1} + \frac{E_2}{r_2} = \frac{E_1 + E_2}{r},$$

откуда

$$E_{BC} = \frac{r_{BC}\left(E_1 + E_2\right)}{r} = \frac{E_1 + E_2}{2} \quad [\text{с учетом (1)}].$$

Искомая ЭДС батареи

$$E_б = E_{BC} + E_3 = \frac{E_1 + E_2}{2} + E_3.$$

Из рис. следует, что если считать ЭДС E_2 и E_3 положительными, то ЭДС E_1 отрицательна.

Ответ: $r_б = 0{,}3$ Ом; $E_б = 7$ В.

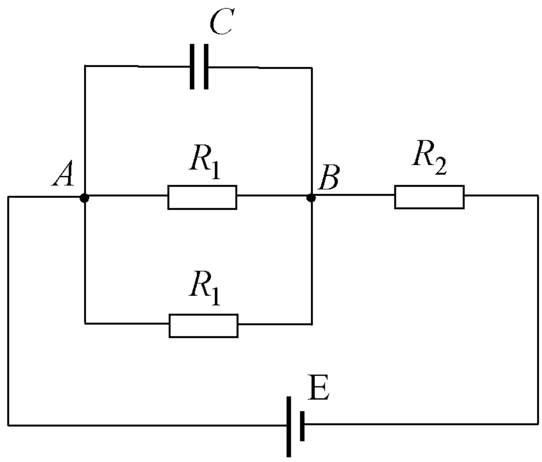
9. Два одинаковых резистора сопротивлением $R_1 = 10$ Ом и резистор сопротивлением $R_2 = 20$ Ом подключены к источнику ЭДС (рис.).

К участку AB подключен плоский конденсатор емкостью $C = 0{,}1$ мкФ. Заряд Q на обкладках конденсатора равен 2 мкКл. Определите ЭДС источника, пренебрегая его внутренним сопротивлением.

Дано: $R_1 = 10$ Ом; $R_2 = 20$ Ом; $C = 0{,}1$ мкФ; $Q = 2$ мкКл.

Найти: E.

Решение



ЭДС источника

$$E = U_1 + U_2, \qquad (1)$$

где U_1 – напряжение между обкладками конденсатора (равно напряжению на параллельно включенных резисторах сопротивлением R_1); U_2 – падение напряжения на резисторе сопротивлением R_2. Учитывая, что резисторы сопротивлением R_1 включены параллельно и их сопротивления равны

$$U_1 = I\frac{R_1}{2} = \frac{Q}{C}, \qquad (2)$$

где I – сила тока в общей цепи, имеем

$$I = \frac{2Q}{CR_1}. \qquad (3)$$

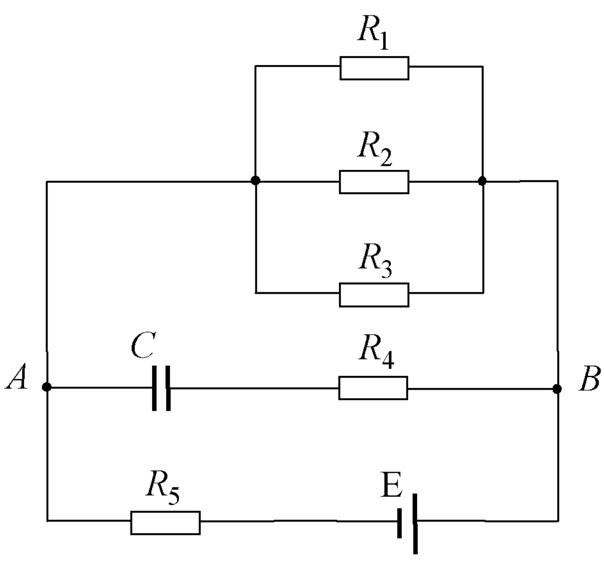
Падение напряжения

$$U_2 = IR_2 = \frac{2QR_2}{CR_1}. \qquad (4)$$

Здесь учли формулу (3). Подставив выражения (2) и (4) в формулу (1), найдем искомую ЭДС источника

$$E = \frac{Q}{C} + \frac{2QR_2}{CR_1} = \frac{Q}{C}\left(1 + \frac{2R_2}{R_1}\right) = 100\ \text{В}.$$

Ответ: $E = 100$ В



10. Определите разность потенциалов на обкладках конденсатора в схеме, приведенной на рис.

Сопротивления всех резисторов равны, ЭДС источника $E = 20$ В. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

Дано:
$E = 20$ В; $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5$.

Найти: U.

Решение. Сопротивление конденсатора постоянному току бесконечно велико, поэтому через резистор сопротивлением R_4 ток протекать не будет. Следовательно, разность потенциалов между обкладками конденсатора определяется падением напряжения на участке AB, состоящем из трех параллельно включенных резисторов сопротивлением R_1, R_2 и R_3:

$$U = IR, \tag{1}$$

где R – результирующее сопротивление трех сопротивлений R_1, R_2 и R_3.

Ток в общей цепи, согласно закону Ома для замкнутой цепи,

$$I = \frac{E}{R_5 + R}, \tag{2}$$

где

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{3}{R_1},$$

откуда

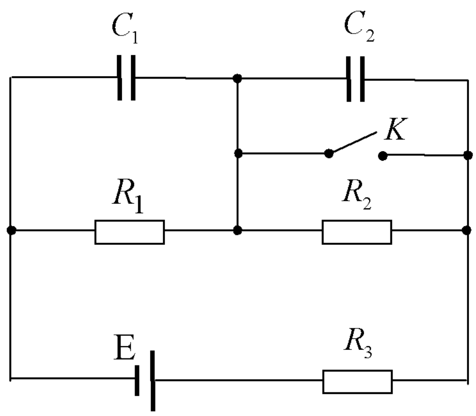
$$R = \frac{R_1}{3}. \tag{3}$$

Подставив выражение (2) в формулу (1) и учитывая (3), найдем искомую разность потенциалов на обкладках конденсатора

$$U = \frac{E}{R_5 + R} R = \frac{E}{R_1 + \frac{R_1}{3}} \cdot \frac{R_1}{3} = \frac{E}{4} = 5 \text{ В}.$$

Ответ: $U = 5$ В.

11. Два конденсатора емкостью $C_1 = 1$ мкФ и $C_2 = 2$ мкФ подключены к источнику постоянного напряжения, как показано на рис.



Сопротивления резисторов $R_1 = 300$ Ом, $R_2 = 100$ Ом и $R_3 = 100$ Ом. При разомкнутом ключе конденсатор C_2 имеет заряд $Q_2 = 4 \cdot 10^{-6}$ Кл. Какой заряд Q_1 установится на конденсаторе C_1, если ключ замкнуть? Внутренним сопротивлением источников пренебречь.

Дано: $C_1 = 1$ мкФ; $C_2 = 2$ мкФ; $R_1 = 300$ Ом; $R_2 = 100$ Ом; $R_3 = 100$ Ом; $Q_2 = 4 \cdot 10^{-6}$ Кл.

Найти: Q_1.

Решение. При разомкнутом ключе K ток от источника течет по цепи, состоящей из последовательно соединенных резисторов R_1, R_2 и R_3.

Используя соотношения $I = \dfrac{E}{(R + r)}$ и $R = R_1 + R_2 + R_3$, запишем

$$I_2 = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3}. \qquad (1)$$

Тогда падение напряжения на резисторе R_2 будет

$$U_2 = I_2 R_2, \qquad (2)$$

а на конденсаторе C_2 установится заряд

$$Q_2 = C_2 U_2. \qquad (3)$$

Используя (1), (2) и (3), можно записать

$$Q_2 = \frac{C_2 E R_2}{R_1 + R_2 + R_3},$$

откуда можно найти ЭДС источника E:

$$E = \frac{Q_2 (R_1 + R_2 + R_3)}{R_2 C_2}. \qquad (4)$$

Если ключ замкнуть, то практически весь ток потечет через ключ K ($R_2 = 100$ Ом) и ток I_1 определяем из закона Ома

$$I_1 = \frac{E}{(R_1 + R_3)}.$$

В этом случае падение напряжения на конденсаторе C_1 равно $U_1 = I_1 R_1$, а искомый заряд Q_1 найдем по формуле

$$Q_1 = C_1 U_1 = \frac{C_1 E R_1}{R_1 + R_3}.$$

Окончательно, используя (4), получим

$$Q_1 = \frac{Q_2 C_1 R_1 (R_1 + R_2 + R_3)}{R_2 C_2 (R_1 + R_3)} = 7{,}5 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}.$$

Ответ: $Q_1 = 7{,}5 \cdot 10^{-6}$ Кл

2. Расчет электрических цепей с применением правил Кирхгофа.

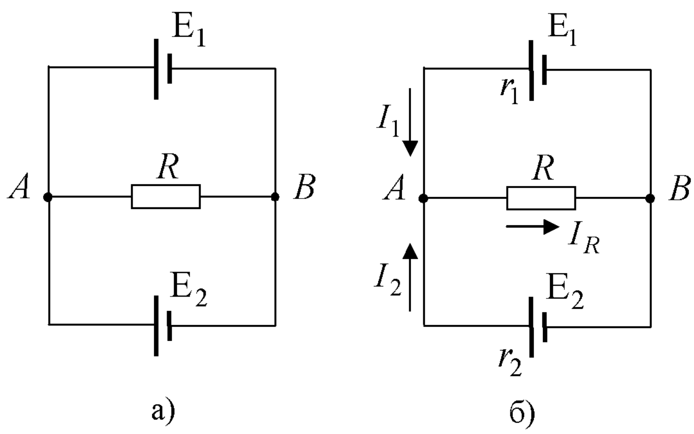


Рис.

1. Два источника, ЭДС которых $E_1 = 2$ В и $E_2 = 4$ В, соединены, как показано на рис. *а*.

Внешнее сопротивление $R = 1$ Ом, а внутренние сопротивления источников $r_1 = r_2 = 0{,}5$ Ом. Определите силы токов, протекающих через источники и внешнее сопротивление.

Дано: $E_1 = 2$ В; $E_2 = 4$ В; $R = 1$ Ом; $r_1 = r_2 = 0{,}5$ Ом.

Найти: I_1; I_2; I_R.

Решение. Выбираем направление токов, как указано на рис.*б*. Согласно первому правилу Кирхгофа для узла A

$$I_R = I_1 + I_2. \tag{1}$$

Второе правило Кирхгофа для замкнутых контуров ε_1,R и ε_2,R

$$I_1 r_1 + I_R R = E_1; \tag{2}$$

$$I_2 r_2 + I_R R = E_2. \tag{3}$$

Решая уравнения (1) – (3), получим (с учетом того, что $r_1 = r_2 = r$)

$$I_1 = \frac{E_1 - I_R R}{r}; \quad I_2 = \frac{E_2 - I_R R}{r}; \quad I_3 = \frac{E_1 + E_2}{r + 2R}.$$

Вычисляя, получаем $I_R = 2{,}4$ А; $I_1 = -0{,}8$ А; $I_2 = 3{,}2$ А.

Ответ: $I_R = 2{,}4$ А; $I_1 = -0{,}8$ А; $I_2 = 3{,}2$ А.

МАГНИТОСТАТИКА

1. Определение индукции и напряженности магнитного поля, создаваемого проводником с током произвольной формы, в любой точке пространства.

1. Длинный провод с током $I = 50$ А изогнут в точке *O* под углом $120°$ (рис.). Определить магнитную индукцию в точке *A*, расположенной на биссектрисе этого угла на расстоянии $d = 5$ см от точки *O*.

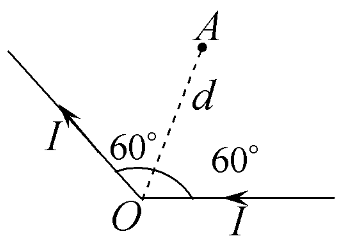


Рис.

Дано: $I = 50A$; $\alpha = 120°$; $d = 5$ см.

Найти: B.

Решение. В соответствии с принципом суперпозиции магнитных полей магнитная индукция в точке *A* будет равна векторной сумме магнитных индукций $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ полей, создаваемых прямыми участками провода, т.е.

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2. \tag{1}$$

Учтем, что для всех участков провода векторное произведение $\left[d\vec{l}, \vec{e}_r\right]$ имеет направление, перпендикулярное к плоскости рисунка. Поэтому выражение (1) можно записать в скалярной форме: $B = B_1 + B_2$.

Магнитную индукцию поля каждого из прямых участков находим с помощью соответствующей формулы (магнитного поля прямого тока $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)$), приняв для правого участка $\varphi_1 = 0$ (считаем, что правый конец провода находится в бесконечности), $\varphi_2 = 120°$. Тогда

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}\left(\cos 0 - \cos\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\mu_0 I}{8\pi r_0}, \text{ где } r_0 = d\sin\frac{\pi}{3}.$$

Для левого участка $\varphi_1 = 60°$, $\varphi_2 = 180°$. Соответственно запишем

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\pi\right) = \frac{3\mu_0 I}{8\pi r_0}.$$

Суммируем индукции полей

$$B = B_1 + B_2 = \frac{6\mu_0 I}{8\pi d \sin\frac{\pi}{3}}. \qquad B = \frac{6\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}}{8\pi\cdot 5\cdot 10^{-2}\frac{\sqrt{3}}{2}} = 3{,}46\cdot 10^{-4} \text{ Тл}$$

Ответ: $B = 3{,}46\cdot 10^{-4}$ Тл.

2. Два бесконечно длинных прямых проводника скрещены под прямым углом (рис.). По проводникам текут токи $I_1 = 80$ А и $I_2 = 60$ А. Расстояние между проводниками $d = 10$ см. Чему равна магнитная индукция в точке A, одинаково удаленной от обоих проводников?

Дано: $I_1 = 80$ А; $I_2 = 60$ А; $d = 10$ см.

Найти: B.

Решение. Прямолинейный бесконечно длинный проводник с током I создает на расстоянии r от своей оси магнитное поле индукций

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

направление которого можно определить по правилу буравчика (правого винта).

Проводники, рассматриваемые в задаче, находятся на равных расстояниях от точки A, поэтому индукции, создаваемые токами I_1 и I_2, будут равны

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \frac{d}{2}} = \frac{\mu_0 I_1}{\pi d}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{\pi d}$$

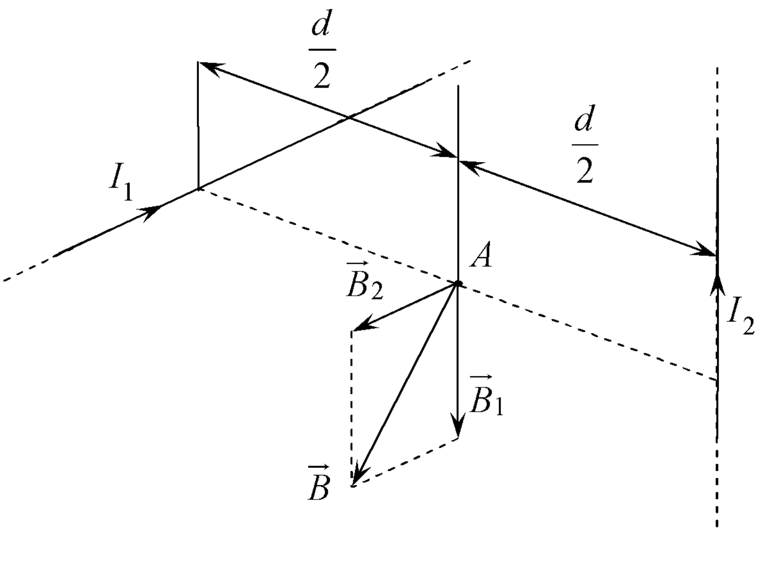


Рис.

соответственно.

Вектор индукции $\overrightarrow{B_1}$ тока I_1 в точке A будет направлен параллельно проводнику с током I_2 вертикально вниз, а вектор индукции $\overrightarrow{B_2}$ тока I_2 – параллельно проводнику с током I_1 на нас. Индукция магнитного поля в точке A будет равна их векторной сумме:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

Поскольку векторы $\overrightarrow{B_1}$ и $\overrightarrow{B_2}$ составляют между собой прямой угол, то

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \frac{\mu_0}{\pi d}\sqrt{I_1^2 + I_2^2} = 4 \cdot 10^4 \text{ Тл}.$$

Ответ: $B = 4 \cdot 10^4$ Тл

3. Найти величину индукции магнитного поля в центре петли радиусом $R = 10$ см, образованной бесконечно длинным тонким проводником с током $I = 50$ A (рис.).

Дано: $R = 10$ см; $I = 50$ A.

Найти: B.

Решение. Вектор индукции магнитного поля бесконечно длинного прямолинейного проводника с током на расстоянии R от него по величине равен $B_1 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}$ и направлен в центре (в точке O) петли перпендикулярно ее плоскости на нас.

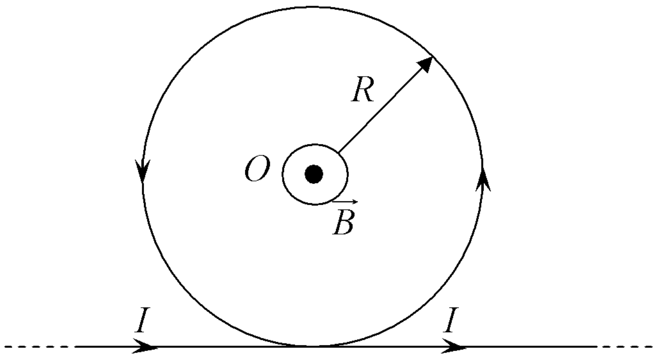


Рис.

Вектор индукции $\overrightarrow{B_2}$ магнитного поля кругового тока в центре петли по направлению совпадает с $\overrightarrow{B_1}$ и по величине равен

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Следовательно, индукция поля, создаваемого проводником и круговым витком в рассматриваемой точке, $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$.

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} + \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 I(1+\pi)}{2\pi R} \approx 414 \text{ мкТл}.$$

Ответ: $B \approx 414$ мкТл

2. Расчет магнитного момента контуров с током в магнитном поле. Расчет механического момента, действующего на контур с током в однородном магнитном поле.

1. Подвижный элемент гальванометра представляет собой квадратную рамку, содержащую $N = 100$ витков тонкой проволоки, помещенную в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл. Плоскость рамки параллельна линиям индукции. Сторона рамки $a = 4$ см.

Необходимо:

1. Определить механический момент сил, действующих на рамку со стороны магнитного поля, при пропускании по ней тока $I = 1$ мА.

2. Найти работу, совершаемую этими силами при повороте рамки в положение, при котором вектор магнитной индукции противоположен вектору дипольного магнитного момента.

Дано: $N = 100$; $B = 0{,}1$ Тл; $a = 4$ см; $I = 1$ мА.

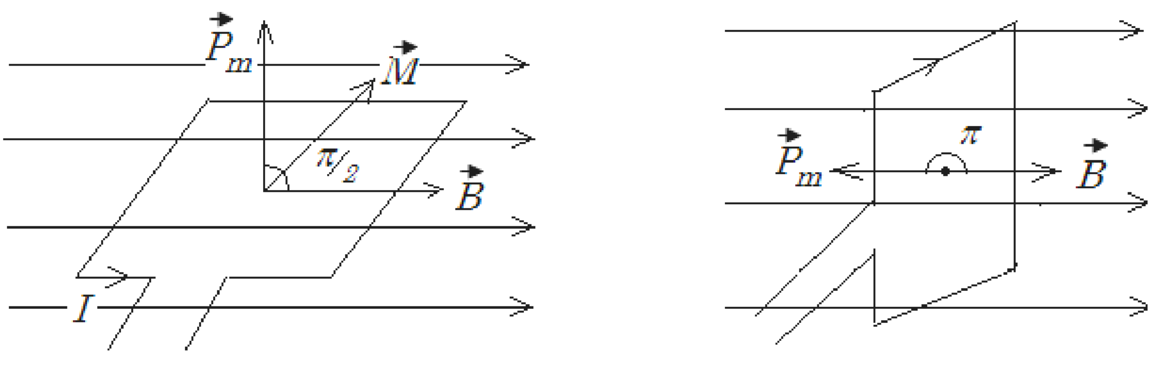
Найти: 1) M; 2) A.

Решение. 1. Дипольный магнитный момент рамки равен сумме дипольных магнитных моментов всех витков

$$P_m = ISN = Ia^2N$$

и направлен перпендикулярно к плоскости рамки и вектору $\vec{B}$ (рис. *а*), тогда механический момент сил $\vec{M}$ (см. (12.14) направлен так, что стремится повернуть вектора $\vec{P_m}$ до совпадения с вектором $\vec{B}$ (рис. 12.11, *б*), и определяется по формуле

$$M = P_m B \sin\frac{\pi}{2} = Ia^2NB.$$



а) б)

Рис.

2. Работа сил Ампера при повороте рамки из исходного положения ($\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$) в конечное ($\alpha_2 = \pi$) равна разности значений потенциальной энергии в начальном и конечном положениях рамки:

$$A = W_{П1} - W_{П2} = (-P_m B\cos(\frac{\pi}{2})) - (-P_m B\cos\pi) = -P_m B = -Ia^2 NB.$$

Произведя вычисления, получим

$$M = 16 \text{ мкН} \cdot \text{м}; \quad A = -16 \text{ мкДж}.$$

Отрицательное значение работы объясняется тем, что действующий со стороны магнитного поля момент сил стремится повернуть рамку в противоположном направлении.

Ответ: $M = 16$ мкН · м; $A = -16$ мкДж.

2. Проволочный виток радиусом $R = 5$ см находится в однородном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл. Плоскость витка составляет угол $\beta = 60°$ с направлением поля. Определить магнитный момент витка и механический момент, действующий на виток, если по нему течет ток силой $I = 5$ А.

Дано: $R = 5$ см; $B = 0{,}1$ Тл; $\beta = 60°$; $I = 5$ А.

Найти: P_m; M_Z.

Решение. На виток с током, расположенный в магнитном поле так, что его плоскость не перпендикулярна к направлению силовых линий поля, относительно произвольной неподвижной оси OZ будет действовать механический момент M_Z, который стремится повернуть виток так, чтобы магнитный момент $\overrightarrow{P_m}$ витка был направлен по полю. Величина магнитного момента произвольного плоского контура с током зависит лишь от силы тока и площади, ограниченной контуром. Следовательно, для витка радиусом R, по которому течет ток I,

$$P_m = IS = I\pi R^2 \approx 0{,}04 \text{ А} \cdot \text{м}^2$$

Величина механического момента, действующего на виток в магнитном поле относительно произвольной оси, зависит от магнитного момента, величины индукции магнитного поля и ориентации контура в магнитном поле

$M_Z = P_m B\sin\alpha$,

где α – угол, который составляет нормаль к плоскости контура с направлением поля. В нашем случае $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$. Следовательно,

$$M_Z = I\pi R^2 B \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = I\pi R^2 B \cos\beta \approx 2 \cdot 10^{-3}\ \text{Н} \cdot \text{м}.$$

Ответ: $P_m \approx 0{,}04\ \text{А} \cdot \text{м}^2$; $M_Z \approx 2 \cdot 10^{-3}\ \text{Н} \cdot \text{м}$

3. Применение закона Био-Савара-Лапласа для расчета магнитных полей

1. Электрон e и протон p зарегистрированы в некоторый момент движущимися навстречу друг другу с одинаковыми скоростями $\upsilon = 10^6\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Расстояние между ними $b = 10^{-9}$ м. Определить индукцию магнитного поля в точке, находящейся на одинаковом расстоянии $L = 7{,}05 \cdot 10^{-10}$ м от обеих частиц.

Дано: $\upsilon = 10^6\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; $b = 10^{-9}$ м; $L = 7{,}05 \cdot 10^{-10}$ м.

Найти: B.

Решение. Для определения магнитного поля частиц в нерелятивистском случае воспользуемся формулой для индукции магнитного поля протона в точке A

$$B_P = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_p\left[\overrightarrow{\upsilon_p}, \overrightarrow{e_{pr}}\right]}{L^2}, \qquad (1)$$

где $\overrightarrow{e_{pr}}$ – единичный вектор, направленный от протона p к точке A.

Направление вектора магнитной индукции $\overrightarrow{B_p}$ определено по векторному произведению (1), показано на рис. (касательно к пунктирной окружности).

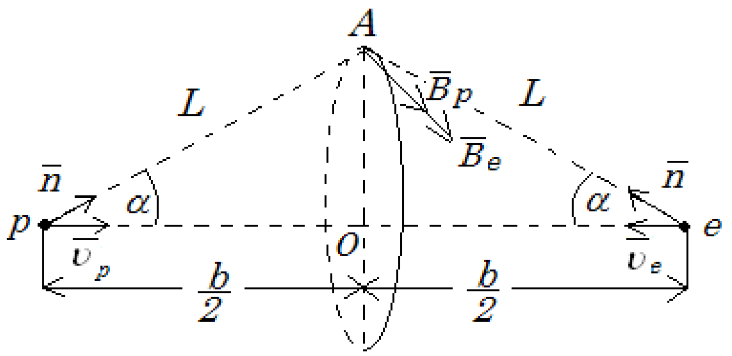


Рис.

Аналогично находим модуль и направление вектора магнитной индукции поля электрона

$$\overrightarrow{B_e} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_e\left[\overrightarrow{\upsilon_e}, \overrightarrow{e_{er}}\right]}{L^2}.$$

С учетом отрицательного знака электрона направление его магнитного поля совпадает с направлением магнитного поля протона.

Заряд протона равен по модулю заряду электрона ($q_p = -q_e = e$). Поэтому по модулю оба вектора тоже равны:

$$B_p = B_e = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\upsilon}{L^2}\sin\alpha .$$

Используя заданные в условии значения b и L, находим $\sin\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{b/2}{L} = \frac{b}{2L}; \quad \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{b^2}{4L^2}} .$$

Тогда результирующее поле можно рассчитать по формуле

$$B = B_p + B_e = 2\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\upsilon}{L^2}\sqrt{1-\frac{b^2}{4L^2}} .$$

После вычислений получим $B = 45{,}4$ Тл.

Ответ: $B = 45{,}4$ Тл

4. Магнитное взаимодействие проводников с током. Закон Ампера.

1. Тонкое резиновое кольцо с электропроводным покрытием поместили в однородное магнитное поле, перпендикулярное к плоскости кольца. Индукция магнитного поля $B = 0{,}3$ Тл. На сколько (в процентах) увеличится радиус кольца, если по нему пропустить ток $I = 10$ А? Коэффициент упругости резины $k = 10\ \dfrac{\text{Н}}{\text{м}}$.

Дано: $B = 0{,}3$ Тл; $I = 10$ А; $k = 10\ \dfrac{\text{Н}}{\text{м}}$.

Найти: $\dfrac{R}{R_0}$.

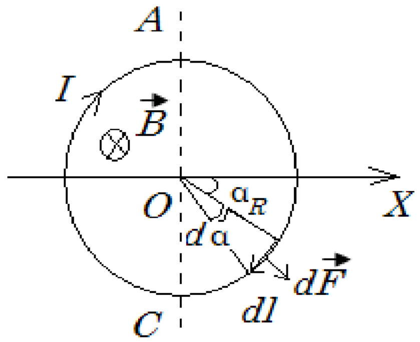


Рис.

Решение. Разобьем кольцо сечением AC на две половины и определим результирующую силу Ампера, действующую на правую половину кольца (рис.). Для этого выделим на нем малый элемент длины $d\vec{l}$. По закону Ампера на него действует сила $d\vec{F} = I\left[d\vec{l}, \vec{B}\right]$. Ее направление определим по правилу векторного произведения. В данном случае сила $d\vec{F}$ направлена радиально от центра кольца.

Учитывая, что $d\vec{l} \perp \vec{B}$, запишем закон Ампера в виде $dF = IBdl$. Результирующую силу, действующую на правую сторону кольца, определим интегрированием $d\vec{F}$ по длине правой части L. Из соображений симметрии учитываем только проекцию этой силы dF_X. Тогда

$$F_X = \int_L dF_X = \int_L IBdl\cos\alpha .$$

Элемент дуги dl и угол $d\alpha$ связаны геометрическим соотношением $dl = Rd\alpha$. С учетом этого выражение для F_X перепишем в виде

$$F_X = IBR\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha d\alpha = IBR\sin\alpha\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2IBR .$$

На левую половину кольца действует такая же сила в противоположном направлении. Следовательно, в сечениях кольца A и C (и в любом другом) действует сила натяжения

$$F_н = \frac{F_X}{2} = IBR .$$

Эта сила равна силе упругости $F_{\text{óï ð}} = k\Delta L$, где изменение длины кольца равно $\Delta L = L_2 - L_1 = 2\pi(R - R_0)$.

Тогда

$$IBR = 2\pi k(R - R_0) \quad \text{или} \quad \frac{IB}{2\pi k} = 1 - \frac{R_0}{R}.$$

После преобразования получим

$$\frac{R}{R_0} = \frac{1}{1 - \dfrac{IB}{2\pi k}}.$$

Выполним вычисления: $\dfrac{R}{R_0} = 1{,}05$. Таким образом, радиус кольца увеличится на 5 %.

Ответ: $\dfrac{R}{R_0} = 1{,}05$

2. Металлический стержень массой $\mathrm{m} = 0{,}5$ кг и длиной $\mathrm{l} = 1$ м соскальзывает с наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом. В пространстве создано однородное магнитное поле с индукцией $\mathrm{B} = 0{,}1$ Тл, силовые линии которого направлены вертикально вниз. Определить ускорение этого стержня, если по нему пропустить ток силой $\mathrm{I} = 5$ А в направлении, показанном на рис. *а*. Коэффициент трения между стержнем и поверхностью наклонной плоскости $\mu = 0{,}2$.

Дано: $\mathrm{m} = 0{,}5$ кг; $\mathrm{l} = 1$ м; $\alpha = 30^\circ$; $\mathrm{B} = 0{,}1$ Тл; $\mathrm{I} = 5$ А; $\mu = 0{,}2$.

Найти: a.

Решение. При движении стержня с током в магнитном поле на него будут действовать: сила тяжести $\mathrm{m}\vec{\mathrm{g}}$, силы реакции $\vec{\mathrm{N}}$ и трения $\vec{\mathrm{F}}_{\text{тр}}$ между стержнем и поверхностью наклонной плоскости и сила Ампера $\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{A}}$. Направление силы Ампера определяется правилом левой руки (рис. *б*).

Из уравнения движения стержня, записанного в проекциях на оси системы координат

$$\mathrm{OX}: \quad \mathrm{ma} = \mathrm{mg}\sin\alpha - \mathrm{F}_{\text{тр}} - \mathrm{F}_{\mathrm{A}}\cos\alpha,$$

$$\mathrm{OY}: \quad 0 = \mathrm{N} - \mathrm{mg}\cos\alpha - \mathrm{F}_{\mathrm{A}}\sin\alpha,$$

с учетом, что $\mathrm{F}_{\text{тр}} = \mu\mathrm{N}$, получим

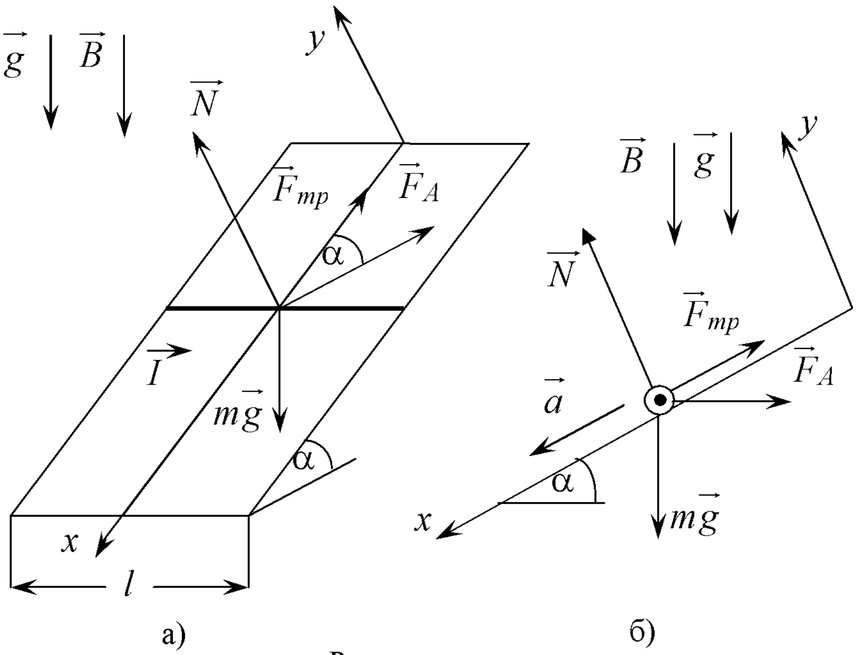


Рис.

$$N = mg\cos\alpha + F_A\sin\alpha, \quad F_{тр} = \mu\left(mg\cos\alpha + F_A\sin\alpha\right);$$

$$ma = mg\sin\alpha - \mu\left(mg\cos\alpha + F_A\sin\alpha\right) - F_A\cos\alpha.$$

Поскольку сила Ампера в нашем случае равна

$$F_A = IBl, \quad \text{то}$$

$$ma = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - \mu IBl\sin\alpha - IBl\cos\alpha;$$

$$a = g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right) - \frac{IBl}{m}\left(\mu\sin\alpha + \cos\alpha\right) \approx 2{,}2\ \frac{м}{с^2}$$

Ответ: $a \approx 2{,}2\ \frac{м}{с^2}$

5. Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца. Определение удельного заряда частицы

1. Протон p, ускоренный разностью потенциалов $U = 500$ кВ, влетает в область однородного магнитного поля перпендикулярно к вектору $\vec{B}$ (рис.*а*). Ширина области $d = 10$ см, индукция магнитного поля $B = 0{,}51$ Тл. Под каким углом к первоначальному направлению движения протон вылетит из области поля? Масса протона $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг (точка *O* – центр окружности).

Дано: $U = 500$ кВ; $d = 10$ см; $B = 0{,}51$ Тл; $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг.

Найти: α.

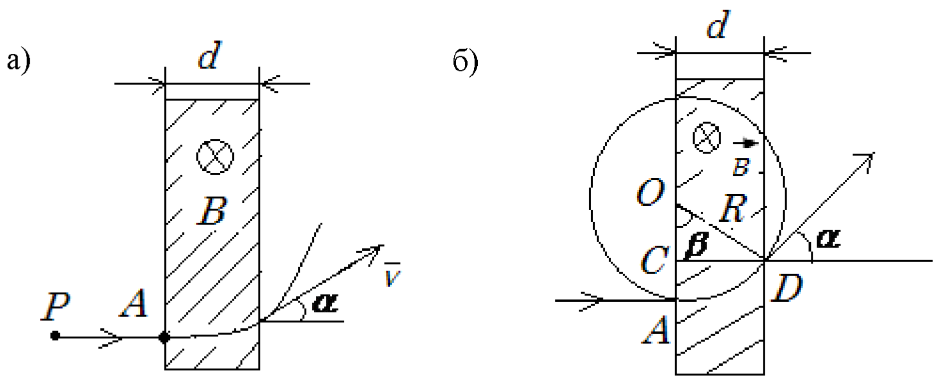


Рис.

Решение. Влетев в точке A в область однородного магнитного поля, протон под действием силы Лоренца начинает двигаться с центростремительным ускорением по дуге окружности (см. рис. *а*). Запишем второй закон Ньютона для рассматриваемого случая, учитывая, что заряд протона равен элементарному заряду e:

$$\vec{F}_М = ma_Ц \quad \text{или} \quad evB\sin\frac{\pi}{2} = \frac{mv^2}{R}.$$

Необходимое для вычислений значение скорости протона находим, применив закон сохранение энергии в облости ускоряющего напряжения:

$$eU = \frac{mv^2}{2}. \quad \text{Тогда} \quad v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

Подставив это выражение в формулу второго закона Ньютона, получим уравнение для расчета радиуса окружности:

$$R = \frac{mv}{eB} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}}.$$

После вычислений имеем $R = 0{,}2$ м. Это значение больше ширины области магнитного поля $d = 0{,}1$ м, и протон вылетит из нее, описав только часть окружности – дугу AD (рис. *б*). Вылетев из области действия магнитного поля в точке D, протон будет двигаться прямолинейно по касательной к окружности. Угол отклонения протона α равен углу β, стягивающему дугу окружности между точками A и D (по двум взаимно перпендикулярным сторонам). Из треугольника ODC следует, что $\sin\alpha = \frac{d}{R} = \frac{1}{2}$. Тогда $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Ответ: $\alpha = \frac{\pi}{6}$

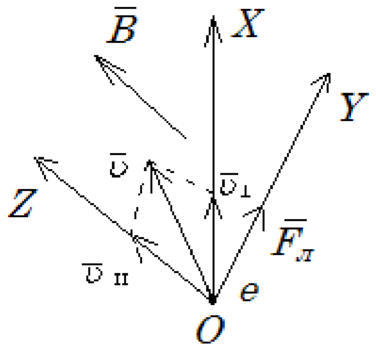
2. Электрон движется в однородном магнитном поле так, что вектор его скорости, равной $2 \cdot 10^6$ $\frac{\text{м}}{\text{с}}$, составляет с направлением вектора индукции магнитного поля угол $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Определить шаг винтовой линии, по которой движется электрон, если $B = 0{,}01$ Тл.

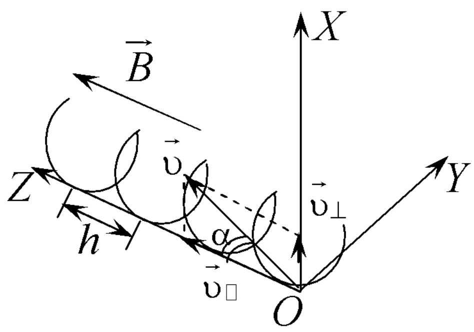
Дано: $\upsilon = 2 \cdot 10^6$ $\frac{\text{м}}{\text{с}}$; $\alpha = \frac{\pi}{3}$; $B = 0{,}01$ Тл.

Найти: h.

Решение. Сложное движение электрона в данных условиях представили как сумму двух независимых движений: вдоль направления поля $\vec{B}$ и в плоскости, перпендикулярной к направлению поля $\vec{B}$.

Для этого разложим вектор скорости на две составляющие: $\vec{\upsilon} = \overrightarrow{\upsilon_\perp} + \overrightarrow{\upsilon_\parallel}$, где $\overrightarrow{\upsilon_\perp} \perp \vec{B}$ и $\overrightarrow{\upsilon_\parallel} \parallel \vec{B}$ (на рис. вектор $\vec{B}$ направлен параллельно оси OZ). Действующая на электрон сила Лоренца зависит только от $\overrightarrow{\upsilon_\perp}$, и ее направление перпендикулярно к полю $\vec{B}$. Поэтому в направлении вдоль поля $\vec{B}$ ускорение электрона равно нулю и он движется с постоянной скоростью $\overrightarrow{\upsilon_\parallel}$.





а) б)

Рис.

Одновременно под действием силы Лоренца электрон движется по окружности в плоскости, перпендикулярной к вектору $\vec{B}$ (на рис. *а* в плоскости OXY). Результирующим является движение по винтовой линии h – расстояние между соседними витками (рис. *б*), которое равно перемещению электрона вдоль оси OZ за один период T вращательного движения со скоростью $\vec{\upsilon_{\parallel}}$, т.е. $h = \upsilon_{\parallel} \cdot T$. Для определения периода запишем второй закон Ньютона:

$$\vec{F_M} = m\vec{a_ц} \quad \text{или} \quad e\upsilon_{\perp}B = \frac{m\upsilon_{\perp}^2}{2}.$$

Тогда $R = \dfrac{m\upsilon_{\perp}}{eB}$, а период

$$T = \frac{2\pi R}{V_{\perp}} = \frac{2\pi m\upsilon_{\perp}}{eB\upsilon_{\perp}} = \frac{2\pi m}{eB}.$$

Подставим полученное выражение для периода в формулу $h = \upsilon_{\parallel} \cdot T$

$$h = \frac{2\pi m\upsilon_{\parallel}}{eB} = \frac{2\pi m\upsilon\cos\alpha}{eB}.$$

После вычислений находим

$$h = 3{,}57 \cdot 10^{-3}\ м = 3{,}57\ мм.$$

Ответ: $h = 3{,}57 \cdot 10^{-3}$ м.

3. Небольшой шарик массой $m = 10$ г и зарядом $q = 10^{-6}$ Кл вращается в горизонтальной плоскости на невесомой диэлектрической нити длиной $l = 50$ см. В пространстве создано однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл, силовые линии которого направлены вдоль силы тяжести вниз (рис.). При движении нить образует с

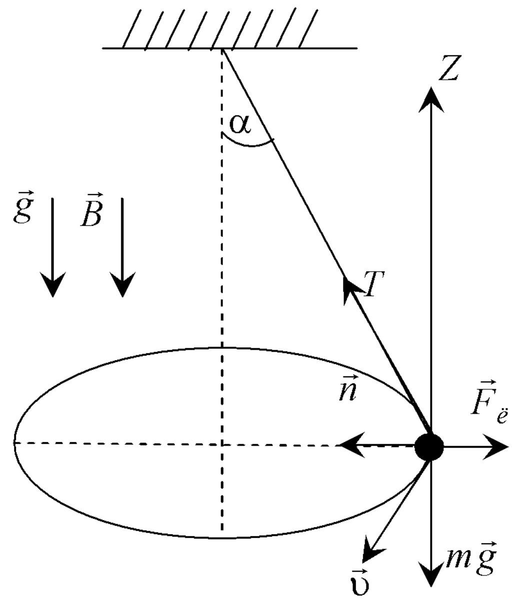


Рис.

вертикалью угол $\alpha = 30°$. Найти период обращения шарика.

Дано: $m = 10$ г; $q = 10^{-6}$ Кл; $l = 50$ см; $B = 0{,}1$ Тл; $\alpha = 30°$.

Найти: T.

Решение. При движении заряженного тела в магнитном поле на него будет действовать сила Лоренца. В зависимости от того, в какую сторону вращается шарик, сила Лоренца будет направлена или к центру окружности, описываемой шариком, или в противоположную сторону. Пусть в положении, показанном на рисунке, скорость шарика направлена на нас; тогда сила Лоренца будет направлена по радиусу окружности от ее центра.

Запишем уравнения движения шарика в проекции на нормаль $\vec{n}$ к траектории и ось OZ, перпендикулярную к плоскости движения:

$$\frac{m\upsilon^2}{R} = N\sin\alpha - q\upsilon B; \quad 0 = N\cos\alpha - mg,$$

где учтено, что $F_л = q\upsilon B$.

Отсюда находим $\quad N = \dfrac{mg}{\cos\alpha}; \quad \dfrac{m\upsilon^2}{R} + q\upsilon B - mg\,\mathrm{tg}\,\alpha = 0$

или $\quad \upsilon = \dfrac{-qB + \sqrt{q^2B^2 + 4m^2g\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{R}}}{\dfrac{2m}{R}}$.

Следовательно, период обращения шарика по окружности радиусом $R = l\sin\alpha$

$$T = \frac{2\pi R}{\upsilon} = \frac{4\pi m}{\sqrt{q^2B^2 + 4m^2g\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{R}} - qB} = \frac{4\pi m}{\sqrt{q^2B^2 + \dfrac{4m^2g}{l\cos\alpha}} - qB} \approx 1{,}31 \text{ с}.$$

Ответ: 1,31 с

4. Электрон движется в магнитном поле, индукция которого $\vec{B}$, по винтовой линии с радиусом r и шагом «винта» h. Определить энергию W электрона и направление вектора скорости $\vec{\upsilon}$ в начальный момент.

Дано: $\vec{e}$; $\vec{B}$; r; h.

Найти: W; α.

Решение. Сила Лоренца, действующая на электрон, движущийся в магнитном поле, $F_л = e\left[\vec{\upsilon},\vec{B}\right]$. Скорость $\vec{\upsilon}$ можно разложить на две составляющие:

$$\vec{\upsilon}_{\parallel} \parallel \vec{B} \quad \text{и} \quad \vec{\upsilon}_{\perp} \perp \vec{B} \text{ (рис. 12.16).}$$

Тогда

$$F_{л\parallel} = e\upsilon_{\parallel} B \sin\left(\widehat{\vec{\upsilon}_{\parallel}, \vec{B}}\right) = 0;$$

$$F_{л\perp} = e\upsilon_{\perp} B \sin\left(\widehat{\vec{\upsilon}_{\perp}, \vec{B}}\right) = e\upsilon_{\perp} B.$$

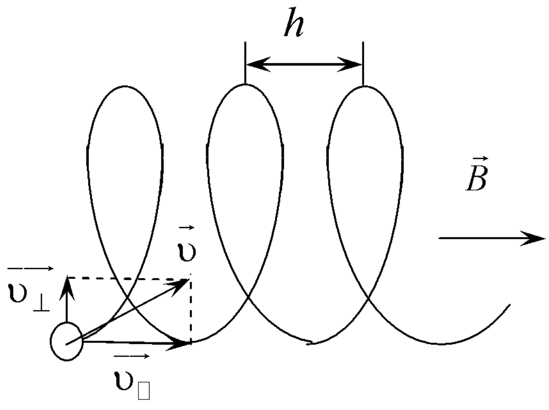


Рис.

Следовательно, под действием силы Лоренца движущийся заряд может приобретать нормальное ускорение a_n. При этом следует отметить, что при движении по винтовой линии вектор результирующей скорости электрона $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_{\parallel} + \vec{\upsilon}_{\perp}$ изменяет свое направление, но не меняется по величине, следовательно, и кинетическая энергия остается постоянной.

Это значит, что сила Лоренца не совершает работы.

Величину соответствующей скорости $\upsilon_{\perp}$ можно определить из второго закона Ньютона, которому подчиняется движение электрона:

$$ma_n = F_{л\perp},$$

где $a_n = \dfrac{\upsilon_{\perp}^2}{r}$; m – масса электрона.

Отсюда

$$\frac{m\upsilon_{\perp}^2}{r} = e\upsilon_{\perp} B \quad \text{или} \quad \upsilon_{\perp} = \frac{rBe}{m}. \qquad (1)$$

Шаг винта определяется соотношением $h = \upsilon_{\parallel} T$, где T – период обращения электрона, равный

$$T = \frac{2\pi r}{\upsilon_{\perp}} = \frac{2\pi m}{Be}.$$

Следовательно,

$$\upsilon_{\parallel} = \frac{h}{T} = \frac{hBe}{2\pi m}. \qquad (2)$$

Кинетическая энергия электрона с учетом (1) и (2) равна

$$W=\frac{m\upsilon^2}{2}=e^2B^2\frac{\left(r^2+\frac{h^2}{4\pi^2}\right)}{2m}.$$

Угол α может быть определен из отношения скоростей

$$\alpha=\mathrm{arctg}\frac{\upsilon_\perp}{\upsilon_\parallel}=\mathrm{arctg}\left(\frac{2\pi r}{h}\right).$$

Ответ: $W=e^2B^2\frac{\left(r^2+\frac{h^2}{4\pi^2}\right)}{2m}$; $\alpha=\mathrm{arctg}\left(\frac{2\pi r}{h}\right)$

6. Расчет индукции и напряженности магнитного поля с использованием теоремы о циркуляции.

1. Магнитная индукция B на оси тороида без сердечника (внешний диаметр тороида $d_1 = 60$ см, внутренний $d_2 = 40$ см), содержащего $N = 200$ витков, составляет $0{,}16$ мТл. Пользуясь теоремой о циркуляции вектора $\vec{B}$, определите силу тока в обмотке тороида.

Дано: $d_1 = 60$ см; $d_2 = 40$ см; $B = 0{,}16$ мТл; $N = 200$.

Найти: I.

Решение. Циркуляция вектора $\vec{B}$

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \mu_0 \sum_{k=1}^{n} I_k\ , \tag{1}$$

т.е. равна алгебраической сумме токов, охватываемых контуром, вдоль которого вычисляется циркуляция, умноженной на магнитную постоянную. В качестве контура выберем окружность, расположенную так же, как и линия магнитной индукции, т.е. окружность некоторым радиусом r, центр который лежит на оси тороида. Из условия симметрии следует, что модуль вектора $\vec{B}$ во всех точках линии магнитной индукции одинаков, а поэтому выражение (1) можно записать в виде

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = B\oint_L dl = 2\pi r B = \mu_0 N I \tag{2}$$

(учли, что сила тока во всех витках одинакова, а контур охватывает число токов, равное числу витков тороида). Для средней линии тороида $r = \dfrac{d_1 + d_2}{4}$.

Подставив r в (2), получим искомую силу тока

$$I = \frac{\pi(d_1 + d_2)B}{2\mu_0 N} = 1\text{А}$$

Ответ: 1 А

7. Магнитный поток. Энергия контура с током в магнитном поле

1. В однородной плоскости с бесконечно длинным прямым проводом, по которому течет ток $I = 50$ А, расположена прямоугольная рамка так, что две ее стороны длиной $b = 65$ см параллельны проводу, а расстояние от провода до ближайшей из сторон рамки равно ее ширине a (рис.). Чему равен поток вектора магнитной индукции через рамку?

Дано: $I = 50$ А; $b = 65$ см; a.

Найти: Φ.

Решение. Находим поток вектора магнитной индукции через поверхность площадью S

$$\Phi = \int\limits_S \vec{B}d\vec{S} = \int\limits_S B_n dS,$$

где B_n – компонента вектора $\vec{B}$, перпендикулярная к элементу площади dS. Для определения магнитной индукции, создаваемой прямым бесконечным проводом с током, используем теорему о циркуляции

$$\oint\limits_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i .$$

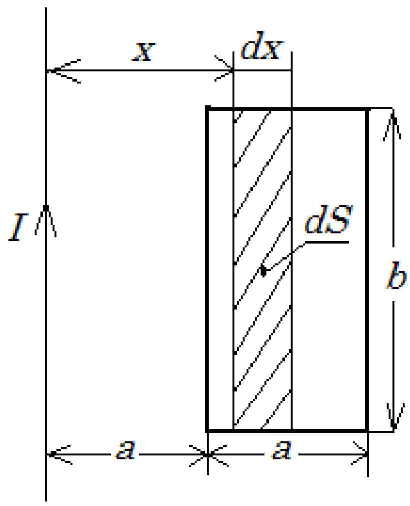


Рис.

Допустим, что точка A, в которой необходимо определить магнитную индукцию, находится на расстоянии x от провода (рис.). Проведем через нее окружность с центром на оси провода. Линии магнитной индукции поля касательны к этой окружности. Поэтому $\vec{B}d\vec{l} = Bdl$. В силу симметрии магнитного поля на всем выбранном контуре модуль вектора магнитной индукции B постоянен. Тогда левую часть формулы запишем в виде

$$B\oint\limits_L dl = B2\pi x,$$

а правую – в виде

$$\mu_0 \sum_i I_i = \mu_0 I .$$

Приравнивая эти выражения, получим

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}.$$

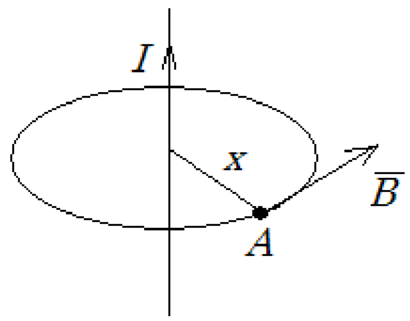


Рис.

В нашем случае вектор магнитной индукции $\vec{B}$ во всех точках плоскости рамки перпендикулярен к ней. Для вычисления потока вектора магнитной индукции через рамку разобьем ее площадь на узкие полоски длиной b, шириной dx и площадью $dS = bdx$ (см. рис.). В пределах одной полоски магнитную индукцию считаем постоянной, так как все части площади полоски равноудалены от провода (на расстояние x). С учетом сделанных замечаний элементарный поток магнитной индукции через площадь dS запишем в виде

$$d\Phi = BdS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} bdx .$$

Проинтегрировав полученное выражение в пределах от $x_1 = a$ до $x_2 = 2a$, находим поток

$$\Phi = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi} \int_a^{2a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi} \ln\frac{2a}{a} = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi} \ln 2 .$$

Производя вычисления, получим $\Phi = 4{,}5 \cdot 10^{-6}$ Вб.

Ответ: $\Phi = 4{,}5 \cdot 10^{-6}$ Вб

2. Круговой проводящий контур радиусом $r = 6$ см и током $I = 2$ А установился в магнитном поле так, что плоскость контура перпендикулярна к направлению однородного магнитного поля с индукции $B = 10$ мТл. Определите работу, которую следует совершить, чтобы медленно повернуть контур на угол $\alpha = \frac{\pi}{2}$ относительно оси, совпадающей с диаметром контура.

Дано: $r = 6$ см; $I = 2$ А; $B = 10$ мТл; $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Найти: $A_{вн}$.

Решение. Работа сил поля по перемещению замкнутого проводника с током I равна

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1), \tag{1}$$

где Φ_1 и Φ_2 – потоки магнитной индукции, пронизывающие контуры в начальном и конечном положениях. Ток в контуре считаем постоянным, так как при медленном повороте контура в магнитном поле индукционными токами можно пренебречь.

Поток магнитной индукции сквозь плоский контур площадью S в однородном магнитном поле с индукцией B

$$\Phi = BS\cos\alpha ,$$

где α – угол между вектором нормали $\vec{n}$ к плоскости контура и вектором магнитной индукции $\vec{B}$.

В начальном положении (рис. *а*) контура (контур установился свободно) поток магнитной индукции максимален ($\alpha = 0;\ \cos\alpha = 1$) и $\Phi_1 = BS$ (S – площадь контура), а в конечном положении (рис. *б*) ($\alpha = \dfrac{\pi}{2};\ \cos\alpha = 0$) $\Phi_2 = 0$.

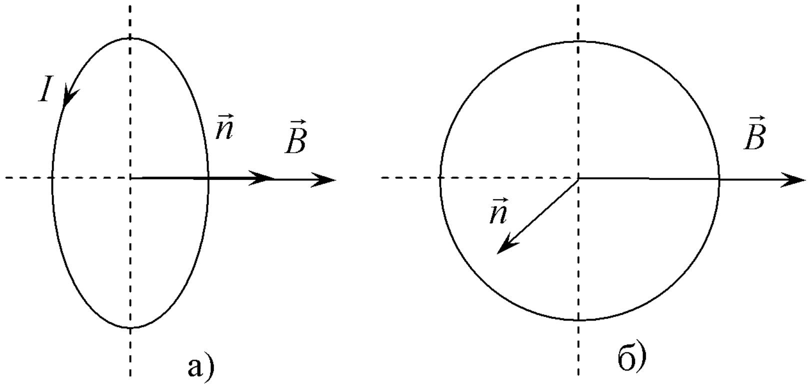


Рис.

Тогда, подставив эти выражения в формулу (1), с учетом того, что площадь кругового контура $S = \pi r^2$, получим, что

$$A = -IBS = -\pi IBr^2$$

Работа внешних сил направлена против сил поля (равна ей по модулю, но противоположна по знаку), поэтому искомая работа

$$A_{вн} = \pi IBr^2 = 226\ \text{мкДж}.$$

Ответ: $A_{вн} = 226$ мкДж

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

1. Определение ЭДС индукции, самоиндукции, индуктивности соленоида и параметров магнитного поля в соленоиде, объемной плотности энергии магнитного поля

1. Имеется круговой проводящий контур радиусом a с сопротивлением R. Первоначально ток в нем отсутствует. Затем включается перпендикулярное к плоскости контура однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, направленное за плоскость чертежа. Определить: 1) в каком направлении будет течь возникший при этом ток; 2) какой заряд q протечет по контуру.

Дано: a; R; $\vec{B}$.

Найти: q.

Решение. 1. Выберем направление положительной нормали к контуру «на нас», т.е. $\vec{n} \uparrow\downarrow \vec{B}$ (рис.). Тогда в начальный момент времени поток Φ_0, пронизывающий контур, будет равен $\Phi_0 = B_0 S\cos\alpha = 0$, так как $B_0 = 0$.

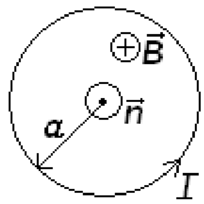


Рис.

После включения магнитного поля, когда магнитная индукция достигнет своего максимального значения B, конечное значение магнитного потока будет $\Phi = BS\cos\alpha < 0$, так как угол α между направлением нормали к контуру и вектором $\vec{B}$ равен $180°$.

Затем по формуле $\Delta\Phi = \Delta BS\cos\alpha$ определяем знак изменения магнитного потока

$$\Delta\Phi = \Phi - \Phi_0 = \left(B - B_0\right)S\cos\alpha = BS\cos\alpha < 0.$$

Из закона Фарадея $E_{инд} = -\dfrac{d\Phi}{dt}$ ЭДС индукции $E_{инд}$, возникающая в контуре за время Δt,

$$E_{инд} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -BS\cos\frac{\alpha}{\Delta t} = -B\pi a^2\left(\frac{-1}{\Delta t}\right) = \frac{\pi a^2 B}{\Delta t} > 0.$$

Так как $E_{инд} > 0$, то, следовательно, направление положительной нормали $\vec{n}$ выбрано верно и ток I в соответствии с данной $\vec{n}$ потечет против часовой стрелки.

В случае если бы $E_{инд}$ оказалась отрицательной, это бы означало, что мы неправильно выбрали направление нормали к контуру, т.е. положительная нормаль должна бы быть $\vec{n} \uparrow\uparrow \vec{B}$, и ток тек бы в противоположную сторону.

2. Для определения заряда q найдем, прежде всего, силу тока I, который потечет по контуру.

По закону Ома $I = \dfrac{E}{R + r}$ запишем

$$I = \frac{E_{инд}}{R} = \frac{\pi a^2 B}{R\,\Delta t}.$$

Тогда заряд q будет равен

$$q = I\Delta t = \frac{\pi a^2 B}{R}.$$

Ответ: $q = \dfrac{\pi a^2 B}{R}$

2. Длинный провод, расположенный в горизонтальной плоскости, согнут под углом $\alpha = 30°$. В вершине угла расположен металлический стержень, перпендикулярный к биссектрисе угла. Стержень может без трения скользить по проводу. Система помещена в вертикальное однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}05$ Тл. К стержню прикладывают горизонтальную силу $F = kx$ (направленную вдоль биссектрисы угла), которая растет линейно с расстоянием x, отсчитываемым от вершины угла (рис., вид сверху).

Определить максимальную скорость стержня, если сопротивление единицы его длины равно $\rho = 0{,}2$ Ом/м, а коэффициент пропорциональности $k = 0{,}1$ Н/м. Сопротивлением провода пренебречь.

Дано: $\alpha = 30°$; $B = 0{,}05$ Тл; $F = kx$; $\rho = 0{,}2$ Ом/м; $k = 0{,}1$ Н/м.

Найти: υ_{max}.

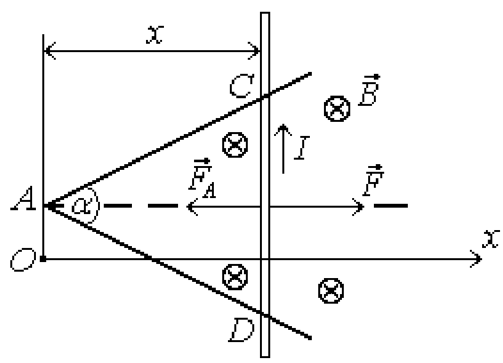


Рис.

Решение. Если к стержню приложить силу $\vec{F}$, то при его перемещении будет меняться площадь треугольника *ACD*, ограниченного проводом и стержнем, и, следовательно, возникнет изменяющийся со временем поток индукции магнитного поля

$$\Phi = BS,$$

где $S = x^2 \sin\frac{\alpha}{2}$ – площадь контура (расстояние x отсчитывается от вершины угла CAD).

Наличие нестационарного магнитного потока приведет к возникновению в контуре ЭДС электромагнитной индукции

$$\left|E_i\right| = \frac{d\Phi}{dt} = B\frac{dS}{dt} = 2Bx\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)\frac{dx}{dt} = 2Bx\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)\upsilon,$$

что, в свою очередь, вызовет появление индукционного тока I и силы Ампера $\vec{F}_A$.

Поскольку при движении стержня магнитный поток, пронизывающий контур, увеличивается, то по правилу Ленца в контуре возникнет индукционный ток такого направления, чтобы его собственный магнитный поток ослаблял внешний (в нашем случае магнитное поле тока I, пронизывающее площадь ΔACD, будет направлено на нас, а ток в стержне – от точки D к точке C).

Направление силы Ампера, действующей на стержень с током I в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, можно определить по правилу левой руки (см. рис.)

$$F_A = IB2x\sin\frac{\alpha}{2}. \qquad (1)$$

По закону Ома сила тока в стержне

$$I = \frac{\left|E_i\right|}{R},$$

где $R = 2\rho x\sin\frac{\alpha}{2}$ – сопротивление части стержня между точками C и D контакта с проводом. Следовательно,

$$I = \frac{\left|E_i\right|}{2\rho x\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{2Bx\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)\upsilon}{2\rho x\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{B\upsilon}{\rho}. \qquad (2)$$

С учетом выражения (2) силу Ампера (1) можно представить в виде

$$F_A = \frac{2B^2 x\upsilon}{\rho}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Запишем уравнение движения стержня на ось *OX* системы координат

$$m a = F - F_A \quad \text{или} \quad m a = kx - \frac{2B^2 x\upsilon}{\rho}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Скорость стержня будет максимальна в момент времени, когда его ускорение станет равным нулю. Следовательно,

$$0 = k - \frac{2B^2 \upsilon_{max}}{\rho} \sin\frac{\alpha}{2}; \qquad \upsilon_{max} = \frac{\rho k}{2B^2 \sin\frac{\alpha}{2}} \approx 15{,}45 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\upsilon_{max} = 15{,}45$ м/с

3. По двум параллельным проводящим стержням, образующим угол α с горизонтом, соскальзывает горизонтальная проводящая перемычка массой m и длиной l (рис. *а*). В верхней части стержни замкнуты сопротивлением R. Вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, силовые линии которого направлены вертикально вниз. Определить максимальную скорость движения перемычки, если коэффициент трения между поверхностями стержней и перемычкой равен μ. Сопротивлением стержней и перемычки пренебречь.

Дано: α; m; l; R; $\vec{B}$; μ.

Найти: $\upsilon_{\max}$.

Решение. При соскальзывании перемычки возникнет переменный магнитный поток $\Phi = BS\cos\alpha$, обусловленный тем, что меняется площадь $S = lx$, ограниченная контуром, где x – координата перемычки, отсчитываемая от верхнего края контура.

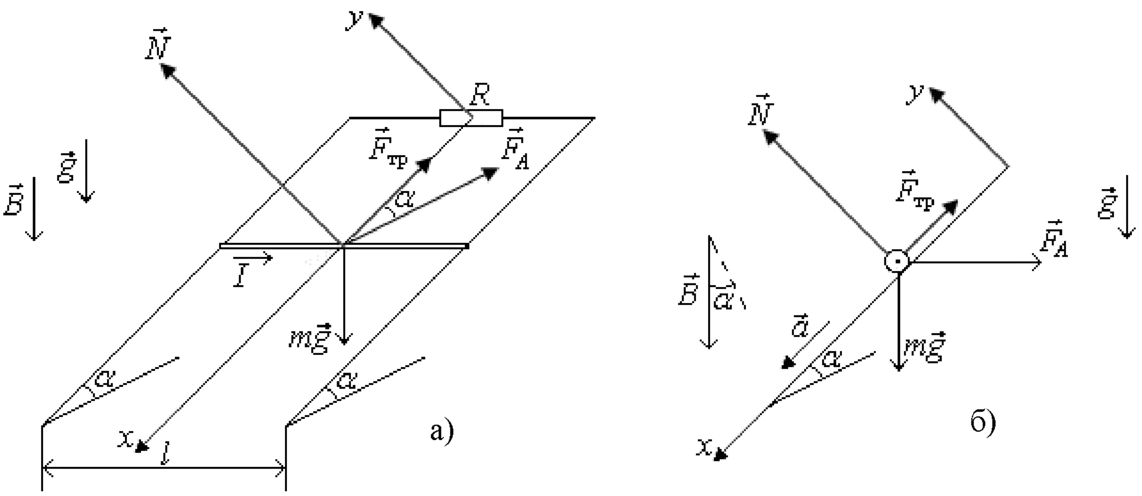


Рис.

Это приведет к возникновению в контуре ЭДС электромагнитной индукции

$$\left|E_i\right| = \frac{d\Phi}{dt} = B\cos\alpha\frac{dS}{dt} = Bl\cos\alpha\frac{dx}{dt} = Bl\upsilon\cos\alpha$$

и вызовет появление тока в контуре и силы Ампера, направленных так, как показано на рис. (направления тока в контуре и силы Ампера определяются правилами Ленца и левой руки соответственно).

По закону Ома ток в контуре будет равен

$$I = \frac{|E_i|}{R} = \frac{Bl\upsilon\cos\alpha}{R},$$

а сила, действующая на перемычку,

$$F_A = IBl = \frac{B^2l^2\upsilon\cos\alpha}{R}. \qquad (1)$$

Запишем уравнения движения перемычки в проекции на оси *OX* и *OY* системы координат

$$OX: \quad ma = mg\sin\alpha - F_A\cos\alpha - F_{тр}; \qquad (2)$$

$$OY: \quad 0 = N - mg\cos\alpha - F_A\sin\alpha, \qquad (3)$$

где $F_{тр} = \mu N$.

Решив уравнения движения (2), (3) относительно ускорения перемычки, получим

$$N = mg\cos\alpha + F_A\sin\alpha; \quad F_{тр} = \mu(mg\cos\alpha + F_A\sin\alpha);$$

$$ma = mg\sin\alpha - \mu(mg\cos\alpha + F_A\sin\alpha) - F_A\cos\alpha$$

или с учетом выражения (1)

$$ma = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - \frac{B^2l^2\upsilon\cos\alpha}{R}(\mu\sin\alpha + \cos\alpha).$$

Скорость перемычки будет максимальной в момент времени, когда ее ускорение станет равным нулю.

Следовательно,

$$0 = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - \frac{B^2l^2\upsilon_{max}\cos\alpha}{R}(\mu\sin\alpha + \cos\alpha).$$

Отсюда находим

$$\upsilon_{max} = \frac{mgR(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{B^2l^2\cos\alpha(\mu\sin\alpha + \cos\alpha)}.$$

Такая максимальная скорость будет у перемычки при $\mu \le \operatorname{tg}\alpha$. В противном случае перемычка останется в покое.

Ответ: $\upsilon_{max} = \dfrac{mgR(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{B^2l^2\cos\alpha(\mu\sin\alpha + \cos\alpha)}$

4. Определить индуктивность длинного соленоида, в котором при увеличении тока от $I_1 = 4$ А до $I_2 = 6$ А энергия магнитного поля увеличивается на $\Delta W = 10$ мДж.

Дано: $I_1 = 4$ А; $I_2 = 6$ А; $\Delta W = 10$ мДж.

Найти: L.

Решение. Энергия магнитного поля внутри соленоида с индуктивностью L при увеличении тока в нем от I_1 до I_2 увеличивается от $W_1 = \frac{1}{2} L I_1^2$ до $W_2 = \frac{1}{2} L I_2^2$.

По условию задачи $\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{1}{2} L I_2^2 - \frac{1}{2} L I_1^2$,

отсюда находим

$$L = \frac{2\Delta W}{I_2^2 - I_1^2} \approx 10^{-3}\ \text{Гц}.$$

Ответ: $L = 10^{-3}$ Гц

5. Найти индуктивность единицы длины кабеля, представляющего собой два тонкостенных коаксиальных цилиндра, если радиус внешнего цилиндра в n раз больше, чем радиус внутреннего. Магнитную проницаемость среды между цилиндрами считать равной единице.

Решение. Пусть ток в кабеле I. Тогда напряженность магнитного поля между цилиндрами кабеля определяется с помощью теоремы о циркуляции для вектора H: $H = \frac{I}{2\pi r}$, где r – расстояние от оси кабеля до точки наблюдения.

При этом плотность энергии магнитного поля равна $\omega = \frac{\mu_0 H^2}{2}$. Интегрируя это соотношение по объему, заключенному между обкладками кабеля единичной длины, получим заключенную там магнитную энергию

$$W = \int_r^R 2\pi r_1 \omega\, dr_1 = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \int_r^R \frac{dr_1}{r_1} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln\frac{R}{r}.$$

Отсюда, воспользовавшись формулой $W = \frac{1}{2} L I^2$ и тем, что $n = \frac{R}{r}$, найдем индуктивность единицы длины кабеля:

$$L = \frac{\mu_0 \ln n}{2\pi}.$$

Ответ: $L = \dfrac{\mu_0 \ln n}{2\pi}$

6. В соленоиде длиной $l = 50$ см и диаметром $d = 6$ см сила тока равномерно увеличивается на $0{,}3$ А за одну секунду. Определите число витков соленоида, если сила индукционного тока в кольце радиусом $3{,}1$ см из медной проволоки ($\rho = 17$ нОм $\cdot$ м), надетом на катушку, $I_к = 0{,}3$ А.

Дано: $l = 50$ см; $d = 6$ см; $\dfrac{dI}{dt} = 0{,}3$ А/с; $r_к = 3{,}1$ см; $\rho = 17$ нОм $\cdot$ м.

Найти: N.

Решение. При изменении силы тока в соленоиде возникает ЭДС самоиндукции

$$E_c = -L\frac{dI}{dt}, \qquad (1)$$

где $L = \dfrac{\mu_0 \mu N^2 S}{l}$ – индуктивность соленоида. Подставив это выражение в (1) с учетом $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$, получим $\left|E_c\right| = \mu_0 \mu \dfrac{N^2 \pi d^2}{4l} \cdot \dfrac{dI}{dt}$.

Электродвижущая сила индукции, возникающая в одном кольце, в N раз меньше, чем найденное значение ЭДС самоиндукции в соленоиде, состоящем из N витков, т.е.

$$\left|E_к\right| = \frac{\left|E_c\right|}{N} = \mu_0 \mu \frac{N \pi d^2}{4l} \frac{dI}{dt}. \qquad (2)$$

Согласно закону Ома сила индукционного тока в кольце

$$I_к = \frac{\left|E_к\right|}{R_к}, \qquad (3)$$

где $R_к = \dfrac{\rho l_к}{S_к}$ – сопротивление кольца. Поскольку $l_к = \pi d$, а $S_к = \pi r_к^2$, то выражение (3) примет вид $I_к = \dfrac{\left|E_к\right| r_к^2}{\rho d}$.

Подставив в эту формулу выражение (2), найдем искомое число витков соленоида

$$N = \frac{4 l \rho I_к}{\mu_0 \mu \pi d \dfrac{dI}{dt} r_к^2} = 150.$$

Ответ: N=150

7. Соленоид без сердечника с однослойной обмоткой из медной проволоки диаметром $d = 0{,}3$ мм и площадью поперечного сечения $S_1 = 3\ мм^2$ имеет длину $l = 0{,}6$ м. Определите индуктивность соленоида, если сопротивление обмотки $R = 10$ Ом. Удельное сопротивление меди $\rho = 17$ нОм $\cdot$ м.

Дано: $\mu = 1$; $d = 0{,}3$ мм; $l = 0{,}6$ м; $S_1 = 3\ мм^2$; $R = 10$ Ом; $\rho = 17$ нОм $\cdot$ м.

Найти: L.

Решение. Индуктивность соленоида

$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l}, \tag{1}$$

где μ_0 – магнитная постоянная; μ – магнитная проницаемость среды; N – число витков соленоида; l – его длина; S – площадь поперечного сечения соленоида.

Для определения N и S необходимо найти длину проволоки l_1, из которой изготовлен соленоид. Учитывая, что электрическое сопротивление обмотки $R = \rho \frac{l_1}{S_1}$, найдем

$$l_1 = \frac{RS_1}{\rho}.$$

С другой стороны,

$$l_1 = 2\pi r N,$$

где $2\pi r$ – длина одного витка (r – радиус соленоида); N – число витков.

Тогда, приравняв два последних выражения, получим

$$N = \frac{RS_1}{2\pi \rho r}. \tag{2}$$

Площадь сечения соленоида

$$S = \pi r^2. \tag{3}$$

Подставив выражения (2) и (3) в формулу (1), найдем индуктивность соленоида

$$L = \mu_0 \mu \frac{R^2 S_1^2 \pi r^2}{4\pi^2 \rho^2 r^2 l} = \mu_0 \mu \frac{R^2 S_1^2}{4\pi \rho^2 l} = 0{,}519\ Гн$$

Ответ: $L = 0{,}519$ Гн

8. Две катушки намотаны на общий сердечник. Индуктивность первой катушки $L_1 = 0{,}16$ Гн, второй – $L_2 = 1$ Гн, сопротивление второй катушки $R_2 = 400$ Ом. Определите силу тока I_2 во второй катушке, если ток $0{,}4$ А, текущий в первой катушке, выключить в течение $0{,}002$ с.

Дано: $L_1 = 0{,}16$ Гн; $L_2 = 1$ Гн; $R_2 = 400$ Ом; $I_1 = 0{,}4$ А; $\Delta t = 0{,}002$ с.

Найти: I_2.

Решение. Сила тока во второй катушке

$$I_2 = \frac{\left|E_{i_2}\right|}{R_2}, \tag{1}$$

где E_{i_2} – ЭДС, индуцируемая во второй катушке при изменении силы тока в первой.

Согласно закону Фарадея

$$E_{i_2} = -L\frac{dI}{dt}, \tag{2}$$

где L – взаимная индуктивность катушек, намотанных на общий сердечник, равная

$$L = \mu_0 \mu \frac{N_1 N S}{l}, \tag{3}$$

где μ_0 – магнитная постоянная; μ – магнитная проницаемость среды; l – длина сердечника; S – площадь поперечного сечения сердечника.

Учитывая, что индуктивности

$$L_1 = \mu_0 \mu \frac{N_1^2 S}{l} \quad \text{и} \quad L_2 = \mu_0 \mu \frac{N_2^2 S}{l},$$

формулу (3) можно представить в виде

$$L = \sqrt{\mu_0 \mu \frac{N_1^2 S}{l}} \cdot \sqrt{\mu_0 \mu \frac{N_2^2 S}{l}} = \sqrt{L_1 L_2}.$$

Подставив это значение L в формулу (2), а формулу (2) – в выражение (1), найдем значение силы тока во второй катушке

$$I_2 = \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{R_2} \cdot \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = 0{,}2 \text{ А}.$$

Ответ: $I_2 = 0{,}2$ А

9. Соленоид без сердечника с однослойной обмоткой из проволоки диаметром $d = 0{,}4$ мм имеет длину $l = 0{,}5$ м и поперечное сечение $S = 60\ \text{см}^2$. За какое время при напряжении $U = 10\ \text{В}$ и силе тока $I = 1{,}5\ \text{А}$ в обмотке выделится количество теплоты, равное энергии поля внутри соленоида? Поле считать однородным.

Дано: $d = 0{,}4$ мм; $l = 0{,}5$ м; $S = 60\ \text{см}^2$; $I = 1{,}5$ А; $U = 10$ В; $Q = W$.

Найти: t.

Решение. При прохождении тока I при напряжении U в обмотке за время t выделяется теплота

$$Q = IUt. \quad (1)$$

Энергия поля внутри соленоида

$$W = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}V = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}lS, \quad (2)$$

где $B = \dfrac{\mu_0\mu NI}{l}$ (N – общее число витков соленоида).

Если витки вплотную прилегают друг к другу, то $l = Nd$, откуда $N = \dfrac{l}{d}$.

Подставив выражения для B и N в (2), получаем

$$W = \frac{\mu_0\mu}{2}\frac{I^2 lS}{d^2}. \quad (3)$$

Согласно условию задачи $Q = W$. Приравняв (1) и (3), найдем искомое время

$$t = \frac{\mu_0\mu ISl}{2Ud^2} = 1{,}77\ \text{мс}.$$

Ответ: $t = 1{,}77$ мс

10. Катушка без сердечника длиной $l = 50$ см содержит $N = 200$ витков. По катушке течет ток $I = 1$ А. Определите объемную плотность энергии магнитного поля внутри катушки.

Дано: $l = 50$ см; $N = 200$; $I = 1$ А.

Найти: ω.

Решение. Объемная плотность энергии магнитного поля (энергия единицы объема)

$$\omega = \frac{W}{V}, \tag{1}$$

где $W = \frac{LI^2}{2}$ – энергия магнитного поля (L – индуктивность катушки); $V = Sl$ – объем катушки (S – площадь катушки; l – длина катушки).

Магнитная индукция поля внутри соленоида с сердечником с магнитной проницаемостью μ равна

$$B = \mu_0 \mu \frac{NI}{l}.$$

Полный магнитный поток, сцепленный со всеми витками соленоида,

$$\Phi = NBS = \mu_0 \mu \frac{N^2 I}{l} S.$$

Учитывая, что $\Phi = LI$, получаем формулу для индуктивности соленоида

$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l}. \tag{2}$$

Подставив выражение (2) в формулу (1) с учетом того, что $W = \frac{LI^2}{2}$, найдем объемную плотность энергии магнитного поля внутри катушки

$$\omega = \mu_0 \mu \frac{N^2 I^2}{2l^2} = 0{,}1\ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}.$$

Ответ: $\omega = 0{,}1\ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}$

2. Определение зависимости тока и энергии от времени в цепях с индуктивностью при их коммутации

1. Определите время t, за которое сила тока замыкания достигнет $0{,}8$ предельного значения, если источник ЭДС замыкают на катушку сопротивлением $R = 10$ Ом и индуктивностью $L = 0{,}1$ Гн.

Дано: $I = 0{,}8I_0$; $R = 10$ Ом; $L = 0{,}1$ Гн.

Найти: t.

Решение. Сила тока при замыкании цепи, содержащей источник ЭДС,

$$I = I_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right), \tag{1}$$

где R – сопротивление катушки; L – ее индуктивность; I_0 – установившаяся сила тока.

Подставив в выражение (1) $I = 0{,}8I_0$ (условие задачи), можем записать

$$0{,}8 = 1 - e^{-\frac{R}{L}t},$$

откуда искомое время

$$t = -\frac{L\ln 0{,}2}{R} = 16{,}2 \text{ мс}.$$

Ответ: $t = 16{,}2$ мс

3. Магнитное поле в магнетике

1. Соленоид длиной $l = 20$ см, площадью поперечного сечения $S = 10\ \text{см}^2$ и общим числом витков $N = 400$ находится в диамагнитной среде. Определите силу тока в обмотке соленоида, если индуктивность $L = 1$ мГн и намагниченность j внутри соленоида равна $20\ \dfrac{\text{А}}{\text{м}}$.

Дано: $l = 20$ см; $S = 10\ \text{см}^2$; $N = 400$; $L = 1$ мГн; $j = 20\ \dfrac{\text{А}}{\text{м}}$.

Найти: I.

Решение. Намагниченность внутри соленоида

$$j = \chi H,$$

где χ – магнитная восприимчивость вещества; H – напряженность магнитного поля.

Так как магнитная проницаемость вещества $\mu = 1 + \chi$, то

$$j = (\mu - 1)H. \qquad (1)$$

Циркуляция вектора напряженности магнитного поля

$$\oint_L \vec{H}\,d\vec{l} = \oint_L H_l\,dl = \sum_k I_k,$$

т.е. равна алгебраической сумме токов, охватываемых контуром.

Для соленоида $Hl = NI$, откуда $H = \dfrac{NI}{l}$.

Индуктивность соленоида $L = \mu_0 \mu \dfrac{N^2 S}{l}$, тогда $\mu = \dfrac{Ll}{\mu_0 N^2 S}$.

Подставив значения μ и H в формулу (1), получим

$$j = \left(\frac{Ll}{\mu_0 N^2 S} - 1\right)\frac{NI}{l},$$

откуда сила тока

$$I = \frac{jl}{N\left(\dfrac{Ll}{\mu_0 N^2 S} - 1\right)}.$$

Вычисляя и учитывая, что для диамагнетиков $\chi < 0$, получаем $I = 2{,}09$ А.

Ответ: $I = 2{,}09$ А

2. На железном сердечнике в виде тора со средним диаметром $d = 70$ мм намотана обмотка с общим числом витков $N = 600$. В сердечнике сделана узкая поперечная прорезь шириной $b = 1{,}5$ мм (рис.). При силе тока через обмотку $I = 4$ A магнитная индукция в прорези $B_0 = 1{,}5$ Тл. Пренебрегая рассеянием поля на краях прорези, определите магнитную проницаемость железа для данных условий.

Дано: $d = 70$ мм; $N = 600$; $I = 4$ A; $B_0 = 1{,}5$ Тл; $b = 1{,}5$ мм.

Найти: μ.

Решение. Теорема о циркуляции вектора $\vec{H}$:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \oint_L H_l dl = I, \qquad (1)$$

где I – алгебраическая сумма токов проводимости, охватываемых контуром.

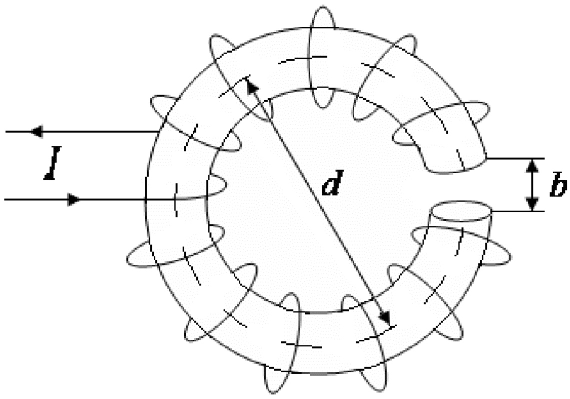


Рис.

Выбрав в качестве контура окружность диаметром d (см. рис., штриховая линия), теорему (1) можно записать в виде

$$H(\pi d - b) + H_0 b = NI,$$

где H и H_0 – соответственно модули вектора $\vec{H}$ в железе и в прорези; N – число витков тороида.

Поскольку рассеяние поля на краях прорези отсутствует, магнитные индукции поля в железе и прорези одинаковы

$$B = B_0. \qquad (2)$$

Учитывая формулу (2) и то, что $B = \mu_0 \mu H$ (μ – магнитная проницаемость железа) и $B_0 = \mu_0 H$ (магнитная проницаемость вакуума равна 1), выражение (1) можем записать в виде

$$\frac{B_0}{\mu_0 \mu}(\pi d - b) + \frac{B_0}{\mu_0} b = NI,$$

откуда магнитная проницаемость железа при рассматриваемых условиях

$$\mu = \frac{(\pi d - b)B_0}{\mu_0 NI - bB_0} = 428.$$

Ответ: $\mu = 428$

3. Тороид с железным ненамагниченным сердечником, длина которого по средней линии $l_1 = 1$ м, имеет воздушный зазор $l_2 = 3{,}14$ мм (рис.). По обмотке проходит ток, после выключения которого остаточная индукция в зазоре составляет $4{,}2$ мТл. Определить напряженность H_1 магнитного поля в сердечнике, а также остаточную намагниченность j сердечника.

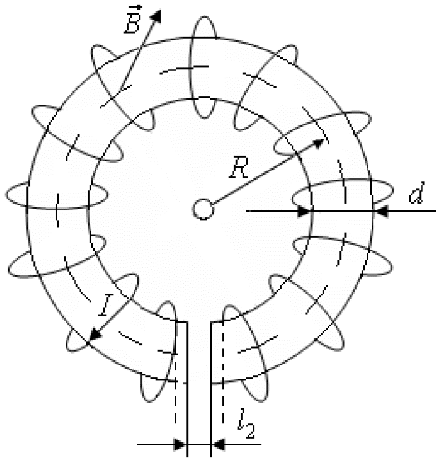


Рис.

Решение. Физическую систему составляют тороид с железным сердечником, по которому проходит ток, и магнитное поле, созданное током проводимости и микротоками железного сердечника.

Ток, проходящий по обмотке, обусловливает существование внутри тороида магнитного поля, силовые линии которого замкнуты (см. рис.).

Учитывая, что $R >> d$, можем считать величину $\vec{B} = \text{const}$ во всех точках сечения тороида, а так как воздушный зазор в тороиде узкий ($l_2 << l_1$), то рассеянием линий индукции можно пренебречь.

При переходе через границу раздела двух сред нормальная составляющая напряженности магнитного поля H_n изменяется, в то время как нормальная составляющая вектора магнитной индукции B_n остается неизменной, т.е.

$$B_{1n} = B_{2n} = B = \text{const}; \quad H_{1n} \neq H_{2n}.$$

Для определения напряженности воспользуемся теоремой о циркуляции вектора $\vec{H}$, выбрав в качестве контура интегрирования среднюю линию тороида $L = l_1 + l_2$. При этом необходимо принять во внимание, что нормальные по отношению к сечению тороида составляющие напряженности магнитного поля являются тангенциальными по отношению к выбранному контуру обхода.

Таким образом,

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 = \sum_{i=1}^{N} j = jN, \qquad (1)$$

где H_1, H_2 – напряженности полей в сердечнике и в зазоре соответственно; I – сила тока, проходящего по обмотке.

После выключения тока для выбранного контура обхода выражение (1) можно записать в виде $H_1 l_1 + H_2 l_2 = 0$, откуда

$$H_1 = -H_2 \frac{l_2}{l_1}. \tag{2}$$

Напряженность H_2 и индукция магнитного поля B в зазоре связаны соотношением

$$H_2 = \frac{B}{\mu_0 \mu},$$

где μ – магнитная проницаемость (для воздуха $\mu = 1$).

Подставив это выражение в (2), получим, что напряженность магнитного поля в сердечнике

$$H_1 = -\frac{B}{\mu_0} \frac{l_2}{l_1}. \tag{3}$$

Учитывая выражение (3), а также связь между векторами $\vec{H}_1$, $\vec{B}$, $\vec{j}$ $\left(j = \frac{B}{\mu_0} - H \right)$, определяем остаточную намагниченность j сердечника:

$$j = \frac{B}{\mu_0} + \frac{B}{\mu_0} \frac{l_2}{l_1} = \frac{B(l_1 + l_2)}{\mu_0 l_1}.$$

Подставляя числовые значения, получаем

$$H_1 = -10{,}49\ \frac{\text{А}}{\text{м}}, \quad j = 3{,}34 \cdot 10^3\ \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

Ответ: $H_1 = -10{,}49\ \frac{\text{А}}{\text{м}}$, $j = 3{,}34 \cdot 10^3\ \frac{\text{А}}{\text{м}}$.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

1. Электромагнитные колебания

1. Сила тока в колебательном контуре, содержащем катушку индуктивностью $L = 0,2$ Гн и конденсатор, со временем изменяется согласно уравнению $I = -0,2\sin 250\pi t$, А. Пренебрегая сопротивлением контура, определите: период колебаний; электроемкость конденсатора; максимальное значение напряжения на обкладках конденсатора; максимальную энергию магнитного поля; максимальную энергию электрического поля.

Дано: $L = 0,2$ Гн; $I = -0,2\sin 250\pi t$, А; $R = 0$.

Найти: T; C; U_{max}, $W^{М}_{max}$; $W^{Э}_{max}$.

Решение. Сила тока в колебательном контуре согласно условию задачи

$$I = -0,2\sin 250\pi t,\ \text{А},$$

откуда следует, что амплитуда силы тока $I_m = 0,2$ А, а циклическая частота $\omega_0 = 250\pi$ с$^{-1}$. Период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$.

Электроемкость конденсатора найдем из формулы Томсона, определяющей период колебаний в электрическом контуре

$$T = 2\pi\sqrt{LC}, \quad \text{откуда} \quad C = \frac{T^2}{4\pi^2 L}.$$

Максимальное значение напряжения на обкладках конденсатора

$$U_m = \frac{Q_m}{C}, \qquad (1)$$

где Q_m – амплитуда колебаний заряда конденсатора. Заряд Q совершает гармонические колебания (при $R \approx 0$) по закону $Q = Q_m \cos\omega t$ (начальную фазу приняли равной нулю). Тогда сила тока в колебательном контуре

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega_0 Q_m \sin\omega t = -I_m \sin\omega t,$$

где амплитуда колебаний силы тока

$$I_m = \omega_0 Q_m, \quad \text{откуда} \quad Q_m = \frac{I_m}{\omega_0}. \qquad (2)$$

Подставив формулу (2) в выражение (1), найдем максимальное значение напряжения на обкладках конденсатора $U_m = \dfrac{I_m}{\omega_0 C}$.

В случае незатухающих колебаний полная энергия контура, равная сумме энергий электрического поля конденсатора $\frac{CU^2}{2}$ и магнитного поля катушки $\frac{LI^2}{2}$, остается постоянной. Следовательно,

$$\frac{CU_m^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2},$$

т.е. максимальные энергии электрического и магнитного полей равны.

Таким образом, максимальные значения

$$W_{max}^{Э} = W_{max}^{М} = \frac{LI_m^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2}.$$

Вычисляя, получаем

$$T = 8мс; C = 8{,}11\ мкФ;\ U_m = 31{,}4\ В;\ W_{max}^{Э} = W_{max}^{М} = 4\ мДж.$$

Ответ: $T = 8мс; C = 8{,}11\ мкФ;\ U_m = 31{,}4\ В;\ W_{max}^{Э} = W_{max}^{М} = 4\ мДж$

2. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 100\ пФ$, катушки индуктивностью $L = 0{,}01\ Гн$ и резистора сопротивлением $R = 20\ Ом$. Определите: период затухающих колебаний; через сколько полных колебаний амплитуда тока в контуре уменьшится в e раз.

Дано: $C = 100\ пФ$; $L = 0{,}01\ Гн$; $R = 20\ Ом$.

Найти: T; N_e.

Решение. Период электромагнитных колебаний в контуре

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} = 2\ мкс$$

(учли, что собственная частота контура $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ и коэффициент затухания $\delta = \frac{R}{2L}$). Число полных колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды силы тока в e раз,

$$N_e = \frac{\tau}{T}, \qquad (1)$$

где τ – время релаксации $\left(\tau = \frac{1}{\delta} = \frac{2L}{R}\right)$. Подставив выражение τ в формулу (1), найдем число полных колебаний

$$N_e = \frac{2L}{RT} = 5 .$$

Ответ: $T = 2$ мкс; $N_e = 5$

3. Определите добротность Q колебательного контура, если его собственная частота ω_0 отличается на 5 % от частоты ω свободных затухающих колебаний.

Дано: $\omega_0 = 1{,}05\omega$.

Найти: Q.

Решение. В реальном колебательном контуре (т.е. обладающем сопротивлением) частота ω свободных затухающих электромагнитных колебаний меньше собственной частоты ω_0 колебательного контура (при $R \approx 0$)

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \qquad (1)$$

где δ – коэффициент затухания.

Добротность колебательного контура

$$Q = \frac{\pi}{\theta},$$

где логарифмический декремент затухания $\theta = \delta T$. (T – период затухающих колебаний, $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$).

Учитывая приведенные формулы, найдем коэффициент затухания

$$\delta = \frac{\theta}{T} = \frac{\pi}{QT} = \frac{\pi\omega}{Q \cdot 2\pi} = \frac{\omega}{2Q}. \qquad (1)$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), получаем

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\omega^2}{4Q^2}} \quad \text{или} \quad \omega_0 = \omega\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}},$$

откуда добротность колебательного контура

$$Q = \frac{1}{2\sqrt{\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2 - 1}} = 1{,}56.$$

Ответ: $Q = 1{,}56$

4. Цепь переменного тока состоит из последовательно включенных катушки индуктивности L, конденсатора емкостью C и резистора сопротивлением R (рис.). Амплитудное значение суммарного напряжения на катушке и конденсаторе $U_{LC} = 100$ В, амплитудное значение напряжения на резисторе $U_R = 160$ В. Определите сдвиг фаз между током и внешним напряжением.

Дано: $U_{LC} = 100$ В; $U_R = 160$ В.

Найти: φ.

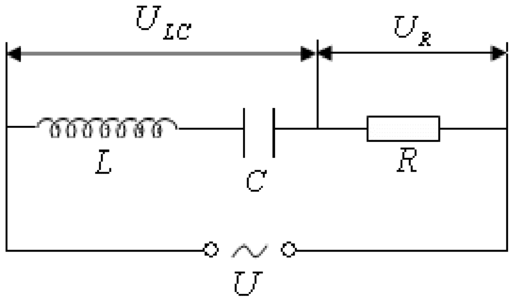


Рис.

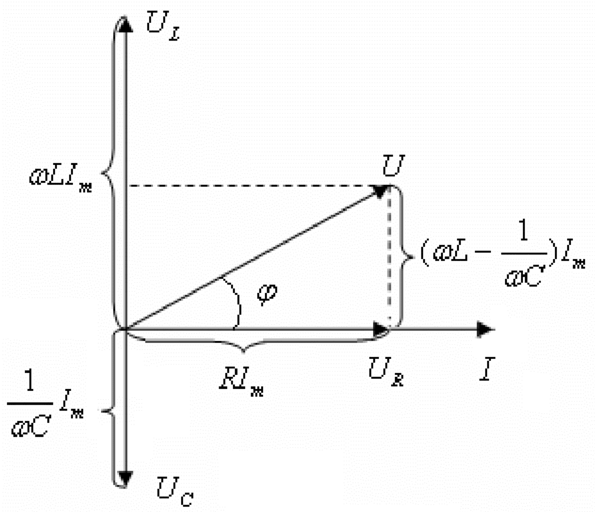


Рис.

Решение. В приведенной на рис. цепи возникает переменный ток, который вызовет на всех элементах цепи падение напряжений. На рис. приведена векторная диаграмма амплитуд падений напряжений на резисторе (U_R), катушке (U_L) и конденсаторе (U_C).

Амплитуда U_m приложенного напряжения равна векторной сумме амплитуд этих падений напряжений.

Разность фаз между током и внешним напряжением определим с помощью векторной диаграммы

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}. \qquad (1)$$

Реактивные (ωL и $\dfrac{1}{\omega C}$) и активное (R) сопротивления найдем из выражений для амплитуд напряжений на соответствующих элементах цепи.

Амплитудные значения напряжения на резисторе $U_R = RI_m$, на катушке индуктивности $U_L = \omega L I_m$, на конденсаторе $U_C = \dfrac{1}{\omega C} I_m$, где I_m – амплитуда силы тока. Из приведенных выражений находим

$$R = \frac{U_R}{I_m};\ \omega L = \frac{U_L}{I_m};\ \frac{1}{\omega C} = \frac{U_C}{I_m}. \qquad (2)$$

Подставив выражения (2) в формулу (1), найдем

$$\lg\varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R}. \qquad (3)$$

Учитывая, что $U_{LC} = U_L - U_C$ (см. векторную диаграмму, рис.), выражение (3) можно записать в виде

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{U_{LC}}{U_R}, \quad \text{откуда} \quad \varphi = \mathrm{arctg}\frac{U_{LC}}{U_R} = 32°.$$

Ответ: $\varphi = 32°$

5. В цепь переменного тока частотой ω резистор сопротивлением R и катушка индуктивностью L один раз включены последовательно, другой – параллельно. Определите для обоих случаев полное сопротивление цепи Z.

Дано: R; L; ω.

Найти: Z.

Решение

Последовательное включение *R* и *L* (рис.)

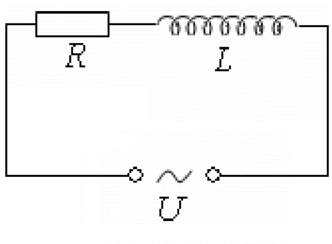


Рис.

На рис. приведена векторная диаграмма амплитудных значений падений напряжений на резисторе (U_R) и катушке (U_L), причем исходной для построения векторной диаграммы выбирается ось токов.

Амплитуда U_m приложенного напряжения равна векторной сумме амплитуд падений напряжений U_R и U_L.

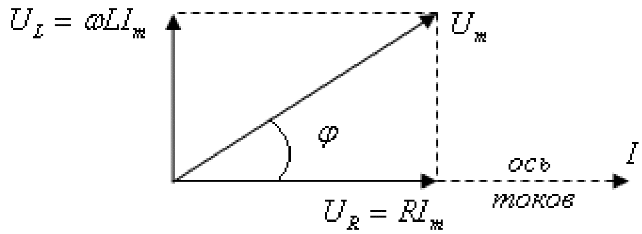


Рис.

Из прямоугольного треугольника имеем

$$U_m{}^2 = U_R{}^2 + U_L{}^2.$$

Учитывая, что $U_m = ZI_m$; $U_R = RI_m$; $U_L = \omega LI_m$, получаем

$$Z^2 = R^2 + (\omega L)^2,$$

откуда

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}.$$

В данном случае $\varphi > 0$, т.е. ток отстает по фазе от внешнего напряжения.

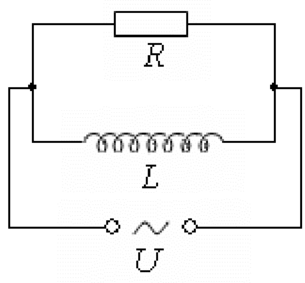


Рис.

Параллельное включение *R* и *L* (рис.)

На рис. приведена векторная диаграмма параллельной цепи. Она строится аналогично векторной диаграмме последовательной цепи (см. рис.), только исходной для построения выбирается

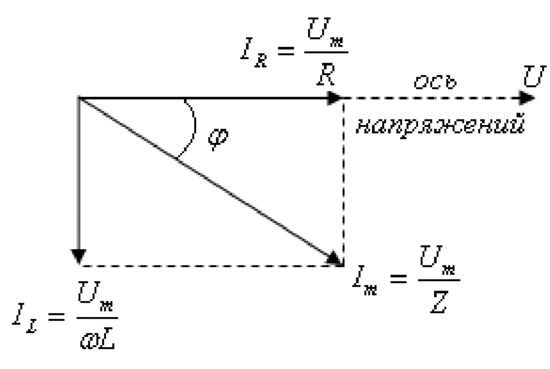


Рис.

ось напряжений. Из прямоугольного треугольника имеем

$$I_m = \sqrt{I_R{}^2 + I_L{}^2}\,.$$

Учитывая, что при параллельном соединении $U_m = U_R = U_L$ и амплитуды силы токов

$$I_m = \frac{U_m}{Z};\ I_R = \frac{U_R}{R};\ I_L = \frac{U_L}{\omega L},$$

получаем

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}}\,,$$

откуда полное сопротивление цепи при параллельном включении резистора и катушки

$$Z = \frac{R\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\,.$$

В данном случае $\varphi < 0$, т.е. ток опережает по фазе внешнее напряжение.

Ответ: 1) $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$; 2) $Z = \dfrac{R\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$

6. В цепи переменного тока (рис.) с частотой $\nu = 50$ Гц амплитуда силы тока внешней (неразветвленной) цепи равна нулю. Определите индуктивность L катушки, если электроемкость C конденсатора равна 10 мкФ.

Дано: $\nu = 50$ Гц; $I_m = 0$; $C = 10$ мкФ.

Найти: L.

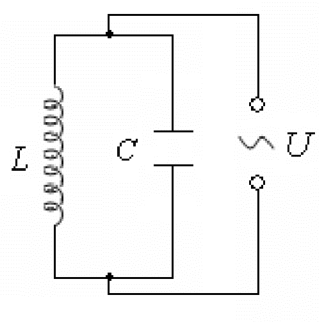


Рис.

Решение. В рассматриваемой параллельной цепи переменного тока, содержащей электроемкость C и индуктивность L, наблюдается резонанс токов. Амплитуда силы тока во внешней (неразветвленной) цепи

$$I_m = |I_C - I_L| = 0\,, \qquad (1)$$

где I_C и I_L – соответственно амплитудные значения силы тока в обеих ветвях (содержащих C и L). Знак «минус» в формуле (1) показывает, что токи в обеих ветвях противоположны по знаку.

Из формулы (1) следует, что

$$I_C = I_L. \tag{2}$$

Поскольку имеем параллельную цепь, то амплитудные значения внешнего напряжения и напряжений на конденсаторе и катушке равны:

$$U_C = U_L = U_m.$$

Учитывая эту формулу, выражение (2) можем записать как

$$\frac{U_m}{R_C} = \frac{U_m}{R_L},$$

откуда следует, что емкостное реактивное $\left(R_C = \frac{1}{\omega C}\right)$ и индуктивное реактивное ($R_L = \omega L$) сопротивления равны, т.е.

$$\frac{1}{\omega C} = \omega L. \tag{3}$$

Так как $\omega = 2\pi\nu$, то из формулы (3) найдем индуктивность

$$L = \frac{1}{4\pi^2\nu^2 C} = 1{,}05 \text{ Гн}.$$

Ответ: $L = 1{,}05$ Гн

7. В колебательном контуре, содержащем конденсатор емкостью $C = 5$ нФ и катушку индуктивностью $L = 10$ мкГн и активным сопротивлением $R = 0{,}2$ Ом, поддерживаются незатухающие гармонические колебания. Определите амплитудное значение напряжения U_{Cm} на конденсаторе, если средняя мощность, потребляемая колебательным контуром, составляет 5 мВт.

Дано: $C = 5$ нФ; $L = 10$ мкГн; $R = 0{,}2$ Ом; $\langle P \rangle = 5$ мВт.

Найти: U_{Cm}.

Решение. Средняя мощность, потребляемая контуром,

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} R I_m^2, \tag{1}$$

где $I_m = U_{Cm}\omega C$ – амплитуда силы тока.

Так как в контуре поддерживаются незатухающие колебания, $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Подставив эти выражения в формулу (1), получаем

$$\langle P \rangle = \frac{RU_{Cm}\omega^2 C^2}{2} = \frac{RU_{Cm}C}{2L},$$

откуда найдем амплитудное значение напряжения на конденсаторе

$$U_{Cm} = \sqrt{\frac{2L < P >}{RC}} = 10\ В.$$

Ответ: $U_{Cm} = 10\ В$

2. Электромагнитные волны

1. Определите, во сколько раз изменится длина ультразвуковой волны при переходе ее из меди в сталь, если скорости распространения ультразвука в меди и стали соответственно равны $\upsilon_1 = 3{,}6$ км/с и $\upsilon_2 = 5{,}5$ км/с.

Дано: $\upsilon_1 = 3{,}6$ км/с, $\upsilon_2 = 5{,}5$ км/с.

Найти: $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

Решение. При распространении волн частота колебаний не изменяется при переходе из одной среды в другую (она зависит только от свойств источника волн), т.е. $\nu_1 = \nu_2 = \nu$.

Связь длины λ волны с частотой ν

$$\lambda = \frac{\upsilon}{\nu}, \tag{1}$$

где υ – скорость волны.

Искомое отношение, согласно (1),

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = 1{,}53 \text{ (увеличится в 1,53 раза).}$$

Ответ: 1,53

2. Плоская электромагнитная волна распространяется в вакууме в соответствии с уравнениями

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{K}\vec{r} + \varphi_0);$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 \cos(\omega t - \vec{K}\vec{r} + \varphi_0),$$

где $\vec{E}_0 = \{30;\ \ 30;\ \ 0\}$ мВ/м, вектор $\vec{B}$ параллелен некоторому вектору $\vec{a} = \{-1;\ \ 1;\ \ 0\}$, $\omega = 3 \cdot 10^7$ с$^{-1}$.

Найти: 1) направление распространения волны; 2) волновое число 3) максимальное значение плотности энергии волны в произвольной точке.

Решение. 1. Векторы $\vec{E}$, $\vec{B}$ и $\vec{k}$ составляют правовинтовую тройку. Это значит, что вектор $\vec{k}$ сонаправлен векторному произведению $\left[\vec{E},\vec{B}\right]$ или

$\left[\vec{E}_0, \vec{a}\right]$. Воспользовавшись этим свойством, определим направление вектора $\vec{k}$, которое совпадает с направлением распространения электромагнитной волны

$$\left[\vec{E}_0, \vec{a}\right] = \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ E_{xo} & E_{yo} & 0 \\ a_x & a_y & 0 \end{bmatrix} = \vec{e}_z (E_{xo} a_y - E_{yo} a_x) = \vec{e}_z (30 + 30) \ мВ/м = 60 \vec{e}_z \ мВ/м.$$

Следовательно, волна распространяется в направлении $+OZ$.

2. Волновое число находим по формуле $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} = \frac{3 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8} \ м^{-1} = 0{,}1 \ м^{-1}.$$

3. Максимальное значение плотности энергии электромагнитного поля в любой точке пространства получим по формуле (15.3) при условии $E^2 = E_0^2$ и $B^2 = B_0^2$. Тогда

$$\omega_{max} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} + \frac{B_0^2}{2\mu_0} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} + \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} + \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} = \varepsilon_0 E_0^2 = \varepsilon_0 (E_{ox}^2 + E_{oy}^2).$$

Произведем вычисления

$$\omega_{max} = 8{,}85 \cdot 10^{-12} (30^2 + 30^2) \cdot 10^{-6} \ Дж/м^3 = 1{,}6 \cdot 10^{-14} \ Дж/м^3.$$

Ответ: $\omega_{max} = 1{,}6 \cdot 10^{-14} \ Дж/м^3$