

УДК 621.37.037

### СВЕРХРАЗРЕШЕНИЕ ИСТОЧНИКОВ ИЗЛУЧЕНИЯ НА ОСНОВЕ МЕТОДА КЕЙПОНА

канд. техн. наук, доц. **В.Ф. ЯНУШКЕВИЧ, А.О. БЕЗДЕЛЬ**  
(Полоцкий государственный университет)

Представлены результаты теоретического анализа сверхразрешения источников излучения с помощью антенных решеток с использованием метода Кейпона. Применены методы цифровой обработки, обеспечивающие эффективные характеристики подавления помех и высокие качества обработки радиолокационных сигналов. Проанализированы функции углового разрешения объектов. Приведены результаты исследований для одного и двух источников излучения. Даны рекомендации по уменьшению вычислительной сложности алгоритмов обработки. Модифицирован метод Кейпона. Результаты исследований могут быть использованы в радиопеленгации и радиолокации.

**Введение.** Одной из важнейших задач радиолокации является измерение угловых координат источника излучения полезного сигнала, которое основано на определении направления прихода электромагнитных волн, излученных или отраженных целью.

Актуальность исследования обусловлена тем, что к современным радиолокационным станциям предъявляют жесткие ограничения по массе, габаритным размерам и энергопотреблению, которые исключают применение мощных передающих устройств и ограничивают размеры полотна антенной решетки.

**Теоретический анализ.** Метод Кейпона был предложен в 1969 году для разрешения спектральных компонент дискретного спектра [1]. Используя аналогию частотного и пространственного спектров, метод был предложен также для оценивания углов прихода сигналов с помощью антенной решетки.

Модель сигналов, принимаемых антенной решеткой из  $N$  элементов, может быть представлена следующим образом:

$$Z = \sum_{k=1}^J a_k S(\varphi_k) + X, \quad (1)$$

где  $J$  – число дискретных источников;  $a_k$ ,  $\varphi_k$  – комплексная амплитуда и угол прихода волны, соответствующей индексу  $k$ ;  $S(\varphi_k)$  –  $N$ -мерный вектор сигналов, принимаемых решеткой от источника с номером  $k$ ;  $X$  –  $N$ -мерный вектор собственного шума элементов антенной решетки;  $Z$  –  $N$ -мерный вектор принятого сигнала.

Модель предполагает, что комплексные амплитуды волн различных источников статистически независимы, то есть

$$\langle a_k a_m^* \rangle = \begin{cases} \sigma_k^2 & (k = m); \\ 0 & (k \neq m). \end{cases} \quad (2)$$

Поскольку источники дискретные, то сигналы в элементах решетки для каждого источника предполагаются коррелированными (коэффициент корреляции равен единице). Это значит, что вектор сигнала  $S(\varphi_k)$  каждого источника является детерминированным и описывает одновременно характер волнового фронта и конфигурацию антенной решетки. Шумы в её элементах предполагаются некоррелированными и равной мощности. Задача ставится следующим образом: необходимо найти весовой вектор  $W$ , который минимизирует среднюю мощность на выходе антенной решетки при условии, что для некоторого угла прихода  $\varphi$  коэффициент передачи решетки фиксирован и равен, например, единице. Математически эту задачу запишем следующим образом:

$$\min_w \langle |W^H Z|^2 \rangle \text{ при условии } W^H S(\varphi) = 1. \quad (3)$$

Это задача на условный экстремум.

Для ее решения мы должны составить функционал Лагранжа в виде

$$\Phi(W) = \langle |W^H Z|^2 \rangle - \chi (W^H S(\varphi) - 1). \quad (4)$$

Здесь  $\chi$  – неопределенный множитель Лагранжа.

Первое слагаемое в (4) запишем так

$$\langle |W^H Z|^2 \rangle = W^H \langle ZZ^H \rangle W = W^H M W, \quad (5)$$

где  $M = \langle ZZ^H \rangle$  – корреляционная матрица сигналов на входе антенной решетки.

Для принятой модели сигналов (1) нетрудно вычислить корреляционную матрицу при условии (2). В результате получим

$$M = \sum_{k=1}^J \sigma_k^2 S(\varphi_k) S^H(\varphi_k) + \sigma^2 E. \quad (6)$$

Здесь  $\sigma^2$  – средняя мощность шума в одном элементе антенной решетки.

С учетом (5) выражение (4) преобразуется к виду

$$\Phi(W) = W^H M W - \chi (W^H S(\varphi) - 1). \quad (7)$$

Градиент этого функционала приравняем к нулю и получим следующее равенство:

$$M W = \lambda S(\varphi). \quad (8)$$

Отсюда находим весовой вектор

$$W = \chi M^{-1} S(\varphi), \quad (9)$$

где  $M^{-1}$  – обратная корреляционная матрица входных сигналов.

Теперь весовой вектор (9) следует подставить в требуемое условие (3), и тогда неопределенный множитель  $\chi$  можно найти в виде

$$\chi = [S^H(\varphi) M^{-1} S(\varphi)]^{-1}. \quad (10)$$

Окончательное решение задачи получается, если (10) подставить в (1). В результате весовой вектор, минимизирующий выходную среднюю мощность по критерию Кейпона, будет иметь вид

$$W = \frac{1}{S^H(\varphi) M^{-1} S(\varphi)} M^{-1} S(\varphi). \quad (11)$$

В оптимальном состоянии, когда весовые коэффициенты антенной решетки установлены в соответствии с (11), средняя выходная мощность находится подстановкой (11) в (5). Эта величина является разрешающей функцией, которую мы обозначим  $\eta_1(\varphi)$ .

Таким образом, для метода Кейпона разрешающая функция получается равной

$$\eta_1(\varphi) = \frac{1}{S^H(\varphi) M^{-1} S(\varphi)}. \quad (12)$$

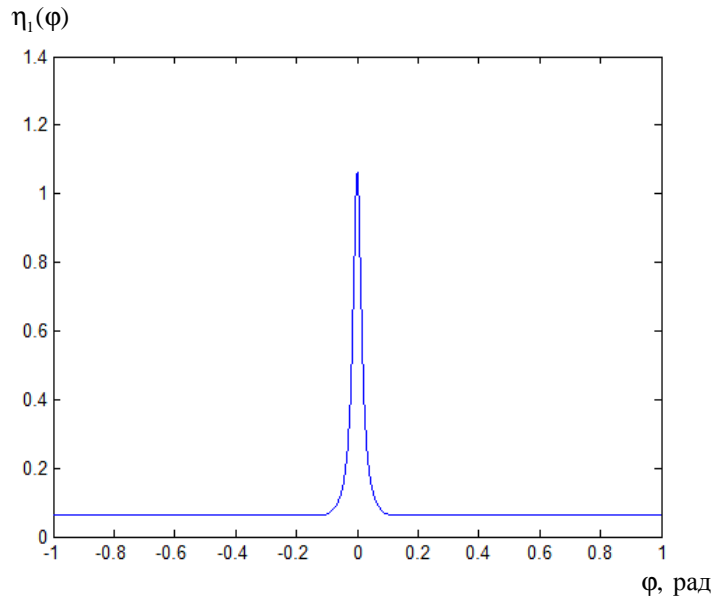
Средняя выходная мощность может быть измерена. Поэтому эта величина представляет интерес с точки зрения углового разрешения источников.

1. Допустим, что в пространстве имеется один источник. Этот пример полезно рассмотреть, хотя в случае одного источника вопрос об угловом разрешении не имеет смысла. В данном случае корреляционная матрица (6) принимает вид

$$M = \sigma_1^2 S(\varphi_1) S^H(\varphi_1) + \sigma^2 E. \quad (13)$$

На рисунке 1 изображена функция (12). Расчеты выполнялись для линейной эквидистантной антенной решетки с числом элементов  $N = 16$  и полуволновым расстоянием между элементами.

Предполагалось, что плоская волна от источника приходит по направлению нормали к антенной решетке, т.е.  $\varphi_1 = 0$ . Средняя мощность полезного сигнала и собственного шума в каждом элементе принимались соответственно  $\sigma_1^2 = 1$ ,  $\sigma^2 = 1$ .

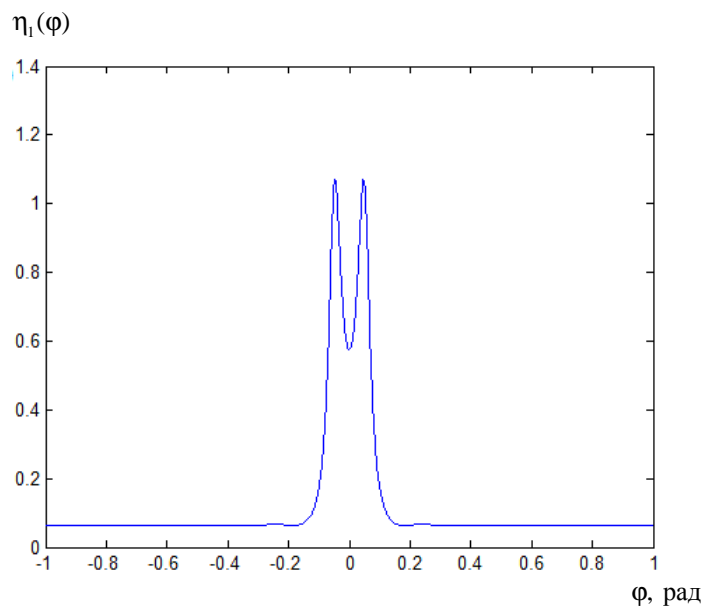
Рис. 1. Средняя мощность на выходе антенной решетки от угла  $\varphi$ 

2. Допустим теперь, что в пространстве имеется два источника. Тогда корреляционная матрица принятых сигналов (6) имеет вид

$$M = \sigma_1^2 S(\varphi_1) S^h(\varphi_1) + \sigma_2^2 S(\varphi_2) S^h(\varphi_2) + \sigma^2 E. \quad (14)$$

Предположим, что оба источника имеют одинаковые средние мощности в каждом элементе антенной решетки. Мы также полагаем, что отношение мощности сигнала одного источника к мощности собственного шума в каждом элементе равно единице, т.е.  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2 = 1$ ; углы прихода волн полагаем равными:  $\varphi_1 = \pi/64$ ,  $\varphi_2 = -\pi/64$ .

Как прежде, предположим, что измерение углов прихода волн выполняется с помощью линейной эквидистантной антенной решетки из 16 элементов ( $N=16$ ) и полуволновым межэлементным расстоянием ( $d/\lambda = 0,5$ ). Попробуем применить метод Кейпона (12), который не требует априорного знания числа источников, а опирается только на знание корреляционной матрицы входных сигналов. Результаты приведены на рисунке 2.

Рис. 2. Средняя мощность на выходе антенной решетки в зависимости от угла  $\varphi$  при  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2 = 1$

Метод Кейпона имеет следующие преимущества:

- не требует априорного знания количества источников излучения;
- меньшая вычислительная сложность алгоритма, чем у метода максимального правдоподобия;
- имеет большую разрешающую способность, чем метод максимального правдоподобия;
- меньшее влияние случайных амплитудно-фазовых ошибок.

Однако методу Кейпона присущи и недостатки:

- худшие точностные показатели, чем у метода «теплового шума»;
- данный метод не позволяет оценить количество источников излучения.

Для уменьшения вычислительной сложности данного алгоритма можно воспользоваться симметричностью корреляционной матрицы, представленной на рисунке 3.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	3	1.9763	1.9059	1.7903	1.6324	1.4359	1.2053	0.9463	0.6648	0.3676	0.0617	-0.2457	-0.5472	-0.8358	-1.1046	-1.3473
2	1.9763	3	1.9763	1.9059	1.7903	1.6324	1.4359	1.2053	0.9463	0.6648	0.3676	0.0617	-0.2457	-0.5472	-0.8358	-1.1046
3	1.9059	1.9763	3	1.9763	1.9059	1.7903	1.6324	1.4359	1.2053	0.9463	0.6648	0.3676	0.0617	-0.2457	-0.5472	-0.8358
4	1.7903	1.9059	1.9763	3	1.9763	1.9059	1.7903	1.6324	1.4359	1.2053	0.9463	0.6648	0.3676	0.0617	-0.2457	-0.5472
5	1.6324	1.7903	1.9059	1.9763	3	1.9763	1.9059	1.7903	1.6324	1.4359	1.2053	0.9463	0.6648	0.3676	0.0617	-0.2457
6	1.4359	1.6324	1.7903	1.9059	1.9763	3	1.9763	1.9059	1.7903	1.6324	1.4359	1.2053	0.9463	0.6648	0.3676	0.0617
7	1.2053	1.4359	1.6324	1.7903	1.9059	1.9763	3	1.9763	1.9059	1.7903	1.6324	1.4359	1.2053	0.9463	0.6648	0.3676
8	0.9463	1.2053	1.4359	1.6324	1.7903	1.9059	1.9763	3	1.9763	1.9059	1.7903	1.6324	1.4359	1.2053	0.9463	0.6648
9	0.6648	0.9463	1.2053	1.4359	1.6324	1.7903	1.9059	1.9763	3	1.9763	1.9059	1.7903	1.6324	1.4359	1.2053	0.9463
10	0.3676	0.6648	0.9463	1.2053	1.4359	1.6324	1.7903	1.9059	1.9763	3	1.9763	1.9059	1.7903	1.6324	1.4359	1.2053
11	0.0617	0.3676	0.6648	0.9463	1.2053	1.4359	1.6324	1.7903	1.9059	1.9763	3	1.9763	1.9059	1.7903	1.6324	1.4359
12	-0.2457	0.0617	0.3676	0.6648	0.9463	1.2053	1.4359	1.6324	1.7903	1.9059	1.9763	3	1.9763	1.9059	1.7903	1.6324
13	-0.5472	-0.2457	0.0617	0.3676	0.6648	0.9463	1.2053	1.4359	1.6324	1.7903	1.9059	1.9763	3	1.9763	1.9059	1.7903
14	-0.8358	-0.5472	-0.2457	0.0617	0.3676	0.6648	0.9463	1.2053	1.4359	1.6324	1.7903	1.9059	1.9763	3	1.9763	1.9059
15	-1.1046	-0.8358	-0.5472	-0.2457	0.0617	0.3676	0.6648	0.9463	1.2053	1.4359	1.6324	1.7903	1.9059	1.9763	3	1.9763
16	-1.3473	-1.1046	-0.8358	-0.5472	-0.2457	0.0617	0.3676	0.6648	0.9463	1.2053	1.4359	1.6324	1.7903	1.9059	1.9763	3

Рис. 3. Пример корреляционной матрицы

При вычислении корреляционной матрицы размерности  $N$  необходимо вычислить  $N^2$  элементов, при использовании же симметричности нам необходимо  $2N - 1$  вычислений.

Также можно использовать симметричность корреляционной матрицы при вычислении обратной корреляционной матрицы, которая также симметрична (рис. 4). Ее симметричность можно использовать при вычислении разрешающей функции для метода Кейпона, что позволит уменьшить количество вычислений в 2 раза.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0.8549	-0.1400	-0.1315	-0.1200	-0.1056	-0.0887	-0.0697	-0.0491	-0.0273	-0.0049	0.0177	0.0398	0.0610	0.0808	0.0986	0.1141
2	-0.1400	0.8626	-0.1316	-0.1227	-0.1109	-0.0964	-0.0797	-0.0610	-0.0410	-0.0199	0.0016	0.0230	0.0439	0.0638	0.0822	0.0986
3	-0.1315	-0.1316	0.8714	-0.1225	-0.1135	-0.1018	-0.0877	-0.0716	-0.0537	-0.0346	-0.0146	0.0057	0.0258	0.0454	0.0638	0.0808
4	-0.1200	-0.1227	-0.1225	0.8807	-0.1134	-0.1048	-0.0937	-0.0804	-0.0651	-0.0484	-0.0305	-0.0118	0.0071	0.0258	0.0439	0.0610
5	-0.1056	-0.1109	-0.1135	-0.1134	0.8893	-0.1053	-0.0974	-0.0873	-0.0750	-0.0610	-0.0456	-0.0291	-0.0118	0.0057	0.0230	0.0398
6	-0.0887	-0.0964	-0.1018	-0.1048	-0.1053	0.8967	-0.0989	-0.0921	-0.0832	-0.0722	-0.0596	-0.0456	-0.0305	-0.0146	0.0016	0.0177
7	-0.0697	-0.0797	-0.0877	-0.0937	-0.0974	-0.0989	0.9020	-0.0948	-0.0893	-0.0818	-0.0722	-0.0610	-0.0484	-0.0346	-0.0199	-0.0049
8	-0.0491	-0.0610	-0.0716	-0.0804	-0.0873	-0.0921	-0.0948	0.9048	-0.0934	-0.0893	-0.0832	-0.0750	-0.0651	-0.0537	-0.0410	-0.0273
9	-0.0273	-0.0410	-0.0537	-0.0651	-0.0750	-0.0832	-0.0893	-0.0934	0.9048	-0.0948	-0.0921	-0.0873	-0.0804	-0.0716	-0.0610	-0.0491
10	-0.0049	-0.0199	-0.0346	-0.0484	-0.0610	-0.0722	-0.0818	-0.0893	-0.0948	0.9020	-0.0989	-0.0974	-0.0937	-0.0877	-0.0797	-0.0697
11	0.0177	0.0016	-0.0146	-0.0305	-0.0456	-0.0596	-0.0722	-0.0832	-0.0921	-0.0989	0.8967	-0.1053	-0.1048	-0.1018	-0.0964	-0.0887
12	0.0398	0.0230	0.0057	-0.0118	-0.0291	-0.0456	-0.0610	-0.0750	-0.0873	-0.0974	-0.1053	0.8893	-0.1134	-0.1135	-0.1109	-0.1056
13	0.0610	0.0439	0.0258	0.0071	-0.0118	-0.0305	-0.0484	-0.0651	-0.0804	-0.0937	-0.1048	-0.1134	0.8807	-0.1225	-0.1227	-0.1200
14	0.0808	0.0638	0.0454	0.0258	0.0057	-0.0146	-0.0346	-0.0537	-0.0716	-0.0877	-0.1018	-0.1135	-0.1225	0.8714	-0.1316	-0.1315
15	0.0986	0.0822	0.0638	0.0439	0.0230	0.0016	-0.0199	-0.0410	-0.0610	-0.0797	-0.0964	-0.1109	-0.1227	-0.1316	0.8626	-0.1400
16	0.1141	0.0986	0.0808	0.0610	0.0398	0.0177	-0.0049	-0.0273	-0.0491	-0.0697	-0.0887	-0.1056	-0.1200	-0.1315	-0.1400	0.8549

Рис. 4. Пример обратной корреляционной матрицы

Также для увеличения быстродействия можно предложить модификацию метода Кейпона, в которой антенная решетка разделяется на две подрешетки. Корреляционная матрица размерностью  $N$  разделяется на две размерностью  $N/2$ , что позволяет уменьшить количество элементов корреляционной матрицы до  $N^2/2$  и количество вычислений в 2 раза. Однако применение данной модификации приводит к незначительному ухудшению разрешающей способности, тем не менее данный метод обладает лучшей разрешающей способностью, чем оригинальный метод Кейпона примерно с такой же вычислительной сложностью, что можно увидеть из рисунка 5.

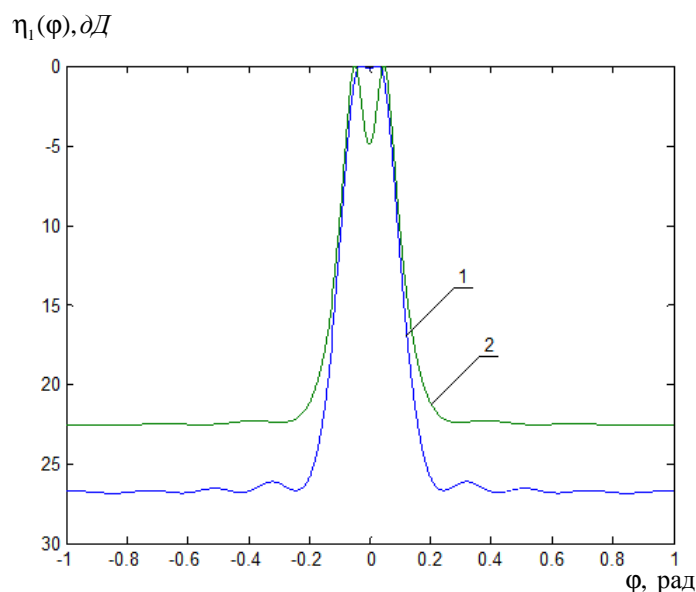


Рис. 5. Зависимости  $\eta_1(\varphi) = \psi(\varphi)$  для оригинального (кривая 1) и модифицированного (кривая 2) метода Кейпона

**Заключение.** Проведен анализ метода Кейпона для получения сверхразрешения. Разработаны рекомендации, основанные на симметричности матриц, позволяющие уменьшить вычислительную сложность алгоритмов, что позволяет упростить цифровую реализацию данных алгоритмов. Представлена модификация для метода Кейпона, позволяющая уменьшить вычислительную сложность данного алгоритма. Результаты исследований могут быть использованы в радиопеленгации и радиолокации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кейпон, Дж. Пространственно-временной спектральный анализ с высоким разрешением / Дж. Кейпон // ТИИЭР. – 1969. – Т. 57, № 8. – С. 59 – 69.
2. Ермолаев, В.Т. Оценивание параметров сигналов, принимаемых антенной решеткой / В.Т. Ермолаев, А.Г. Флакман, А.А. Анурын // Изв. вузов. Радиофизика. – 1996. – Т. 39, № 9. – С. 1144 – 1160.

Поступила 05.09.2013

#### SUPERRESOLUTION OF LIGHT SOURCES ON THE BASIS OF KEYPON'S METHOD

V. YANUSHKEVICH, A. BEZDEL

*The results of theoretical analysis of superresolution of light sources using antenna arrays with the help of Keypon's method have been presented. Digital techniques to ensure effective noise reduction features and high-quality processing of radar signals have been applied. The function of the angular resolution of authorization objects is analyzed. The results of studies for one or two light sources are given. Recommendations are given to reduce the computational complexity of algorithms. The Keypon's method has been modified. The results of the research can be used in radio position finding and radiolocation.*