

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

для студентов специальности 1-70 04 02
«Теплоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна»

Составители

В.К. Липский, Д.П. Комаровский

Под общей редакцией В.К. Липского

Новополоцк 2006

УДК 532/533 (075.8)

ББК 22.253 я73

М 55

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

И.В. Качанов, д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой «Гидравлики»
Белорусского национального технического университета;

В.В. Колено, канд. техн. наук, доцент кафедры
трубопроводного транспорта и гидравлики

Рекомендован к изданию методической комиссией
инженерно-строительного факультета

М 55 **Механика жидкости и газа:** Учеб.-метод. комплекс для студ. спец. 1-70 045 02
«Теплоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна» / Сост. В.К. Лип-
ский, Д.П. Комаровский; Под общ. ред. В.К. Липского. – Новополоцк: ПГУ,
2006. – 300 с.
ISBN 985-418-409-9

Имеет модульную структуру и состоит из конспекта лекций, методических указа-
ний к выполнению лабораторных работ, примеров и задач для самостоятельного ре-
шения, контрольных вопросов.

Изложены основные вопросы курса «Механика жидкости и газа»: физические
свойства жидкостей, гидростатика, общие законы и уравнения гидродинамики, гидрав-
лические сопротивления и др.

Предназначен для преподавателей и студентов специальности «Теплоснабжение,
вентиляция и охрана воздушного бассейна».

УДК 532/533 (075.8)

ББК 22.253 я73

ISBN 985-418-409-9

© УО «ПГУ», 2006

© Липский В.К., Комаровский Д.П., составление, 2006

МОДУЛЬ 0

ВВЕДЕНИЕ В КУРС «МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА»

Исследование вопросов о движении различных жидкостей, а также о силовом (механическом) воздействии жидкости на те или другие поверхности и на обтекаемые ею твердые тела постепенно привело к созданию обширной науки, которую называли «механикой жидкого тела», или «механикой жидкости», или (если пользоваться греческими словами) «гидромеханикой». Механика жидкости (гидромеханика) разделяется на статику (гидростатику), кинематику и гидродинамику.

В механике жидкости (в гидромеханике) изучаются законы равновесия и движения различных жидкостей; очевидно, что в ней должны рассматриваться также и способы практического приложения этих законов, то есть разрабатываться соответствующие методы гидромеханических расчетов различных конструкций, устройств и т. п.

Механика жидкости (гидромеханика) развивалась за рубежом и в России, а затем и в СССР, по двум направлениям:

- 1) по направлению, свойственному техническим наукам (изучаемым в технических учебных заведениях);
- 2) по математическому направлению (с использованием обширного и относительно сложного математического аппарата, изучаемого главным образом в университетах).

В связи с этим создалось положение, когда в области единой науки механики жидкости стали различать две разные науки (два разных метода исследования): «техническую механику жидкости» («техническую гидромеханику»), называемую часто «гидравликой» и изучаемую в технических учебных заведениях, и «математическую механику жидкости» («математическую гидромеханику»), изучаемую главным образом в университетах.

Различие между этими науками, имеющими один и тот же объект исследования заключается в следующем.

В технической механике жидкости (гидравлике) при решении различных практических задач широко используются те или иные допущения и предположения, упрощающие рассматриваемый вопрос. Достаточно часто гидравлические решения основываются на результатах экспериментов, и потому в технической механике жидкости приводят относительно много различных эмпирических и полуэмпирических формул. При этом стремятся к оценке только главных характеристик изучаемого явления и часто

оперируют теми или иными интегральными и осредненными величинами, которые дают достаточную для технических приложений характеристику рассматриваемых явлений. Например, в технической механике жидкости часто пользуются понятием средней скорости движения жидкости в том или другом поперечном сечении потока. По своему характеру техническая механика близка к известным дисциплинам – строительной механике и сопротивлению материалов, в которых под тем же углом зрения изучаются вопросы механики твердого тела. Следует учитывать, что гидравлика, являясь общетехнической дисциплиной, должна рассматриваться как «*профессиональная физика жидкого тела*», в которой, в частности, даются основы соответствующих гидромеханических расчетов, используемых при проектировании инженерных сооружений, конструкций, а также надлежащих технологических процессов.

В математической механике жидкости, как было отмечено, широко используется относительно сложный математический аппарат, не изучаемый в технических вузах. Этот аппарат прилагается также к несколько упрощенным схемам движения жидкости. Однако в этом методе исследования мы все же не прибегаем к различного рода допущениям и не оперируем различными осредненными величинами в такой мере, как в технической механике жидкости. Решения, получаемые в математической гидромеханике, оказываются более строгими в математическом отношении. По своему характеру математическая механика жидкости сходна с математической теорией упругости (рассматривающей вопросы механики твердого тела), изучаемой в университетах.

Как показал опыт, методы математической механики жидкости часто оказываются столь сложными, что большинство практических задач невозможно решить, следуя этим методам. Этим и объясняется возникновение и развитие технической, прикладной науки – технической механики жидкости, то есть гидравлики, которая стремится дать приближенные ответы на все те вопросы, связанные с движущейся или покоящейся жидкостью, которые ставит перед нами практика.

Можно сказать, что в технической гидромеханике (в гидравлике) приближенно решаются сложные задачи при помощи простых методов. В математической же гидромеханике относительно точно решаются только некоторые простейшие задачи при помощи сложных методов. Следует отметить, что в последнее время мы все чаще сталкиваемся с вопросами, которые приходится решать, сочетая методы технической и математической гидромеханики, причем иногда бывает трудно провести границу между ними.

Необходимо отметить, что техническая механика жидкости (гидравлика), представляющая собой обширную, самостоятельную, сложившуюся техническую науку, включает в себя много различных разделов, касающихся отдельных сторон рассматриваемой проблемы. Разумеется, эти разделы должны излагаться в курсах «Технической механики жидкости» для разных технических специальностей.

Из сказанного выше видно, что термины «гидравлика», «техническая гидромеханика» и «техническая механика жидкости» следует рассматривать как имеющие одинаковое значение (как бы синонимы). Необходимо учитывать, что само слово «гидравлика» произошло от слияния двух греческих слов, из которых первое значит «вода», а второе – «труба», «канал», «струя». Как видно, ранее считали, что гидравлика занимается изучением движения или покоя только воды. Однако в настоящее время термин «гидравлика» (а также «гидромеханика») рассматривается в более широком смысле: объектом изучения в гидравлике является любая жидкость (а не только вода).

КРАТКИЙ ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР РАЗВИТИЯ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ

Первым научным трудом в области гидравлики считается трактат Архимеда (287 – 212 гг. до н.э.) «О плавающих телах», хотя некоторые законы гидравлики были, видимо, известны и ранее, так как задолго до Архимеда строились оросительные каналы и водопроводы.

В древнем Египте, Индии, Китае были построены каналы и водохранилища грандиозных по тем временам размеров. Так, глубина некоторых водохранилищ в Индии достигала 15 м, в Китае около 2500 лет назад был построен Великий канал длиной около 1800 км, который соединял приустьевые участки крупных рек страны. В Риме 2300 лет назад был построен первый водопровод.

На территории нашей страны также были построены многочисленные каналы и сооружения для добычи и транспортирования воды. Земледелие в районах Кавказа и Средней Азии велось с применением орошения. Некоторые из каналов, построенных в низовьях Амударьи около 2000 лет назад, используются и по сей день (естественно, после многократных ремонтов и реконструкций).

Старинные летописи и другие источники содержат много сведений о строительстве в России различных сооружений на реках, о развитии водных путей, о попытках создания механизмов, использующих энергию водного потока, и о многих других конструкциях, осуществление которых было бы невозможно без знания основ гидравлики. Так, еще в X – XI вв. на Руси существовали водопроводы из гончарных и деревянных труб, в 1115 г. был построен наплавной мост через Днепр у Киева. В XIV – XV вв. применялась добыча воды из подземных источников, оборудованных довольно совершенными водопроводными устройствами.

В средние века в России возводились многочисленные плотины на реках. Так, в 1516 г. была построена плотина из камня на р. Неглинке в Москве.

Подъем в развитии гидравлики начался только через 17 веков после Архимеда. В XV – XVI вв. Леонардо да Винчи (1452 – 1519) написал работу «О движении и измерении воды», которая была опубликована лишь через 400 с лишним лет после ее создания. С. Стевин (1548 – 1620) написал книгу «Начала гидростатики», Галилео Галилей (1564 – 1642) в 1612 г. в трактате



Блез Паскаль
(1623 – 1662)

«Рассуждение о телах, пребывающих в воде, и о тех, которые в ней движутся» рассмотрел основные законы плавания и гидростатический парадокс, Е. Торричелли (1608 – 1647) получил формулу скорости истечения невязкой жидкости из резервуаров через отверстия, Б. Паскаль (1623 – 1662) открыл закон о передаче давления в жидкости, прямым следствием чего явилось появление в средние века большого количества простых гидравлических машин (гидравлические прессы, домкраты и т.п.), И. Ньютон (1643 – 1727) в 1686 г. сформулировал гипотезу о внутреннем трении в жидкости.



Исаак Ньютон
(1643 – 1727)

Однако перечисленные разработки и открытия касались только отдельных разделов гидравлики. Формирование гидравлики как науки на прочной теоретической основе стало возможным только после работ академиков Петербургской Академии наук М.В. Ломоносова (1711 – 1765), Д. Бернулли (1700 – 1782) и Э. Эйлера (1707 – 1783).

М.В. Ломоносов в 1760 г. в диссертации «Рассуждение о твердости и жидкости тел» сформулировал открытые им законы сохранения вещества и энергии.

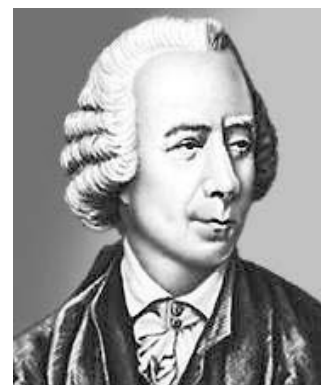
Д. Бернулли (1700 – 1782) – выдающийся физик и математик – родился в Гронингене (Голландия). С 1725 по 1733 г. жил в Петербурге, являлся профессором и членом Петербургской Академии наук. В Петербурге он написал свой знаменитый труд «Гидродинамика», который был впоследствии опубликован (в 1738 г.) в г. Страсбурге. В этом труде он осветил ряд основополагающих гидравлических вопросов и в частности объяснил физический смысл слагаемых, входящих в современное уравнение установившегося движения (идеальной жидкости), носящее его имя.



Даниил Бернулли
(1700 – 1782)

Д. Бернулли в 1738 г. опубликовал выведенное им важнейшее уравнение, названное его именем. Это уравнение служит основой теоретических построений и практических расчетов в области гидравлики.

Л. Эйлер (1707 – 1783) – великий математик, механик и физик – родился в г. Базеле (Швейцария). Жил в Петербурге с 1727 до 1741 г. и с 1766 г. до конца жизни. Был членом Петербургской Академии наук. Умер в Петербурге. Могила его находится в Ленинградском некрополе. Эйлер не только подытожил и обобщил в безупречной математической форме работы предшествующих авторов, но составил известные дифференциальные уравнения движения и относительного равновесия жидкости, носящие его имя, а также опубликовал целый ряд оригинальных решений гидравлических задач, широко используя созданный к тому времени математический аппарат.



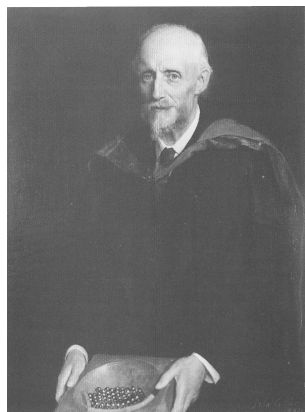
Леонард Эйлер
(1707 – 1783)

Л. Эйлер в 1755 г. вывел системы дифференциальных уравнений равновесия и движения жидкости.

Интересно, что наряду с гениальными теоретическими работами М.В. Ломоносова, Д. Бернулли и Л. Эйлера известны их исследования в области создания гидравлических приборов и устройств. М.В. Ломоносов изобрел универсальный барометр, вискозиметр (прибор для исследования вязкости жидкости), прибор для определения скорости течений в море. М.В. Ломоносов занимался также усовершенствованием гидравлических машин и устройств. Д. Бернулли изобрел водоподъемник, установленный в с. Архангельском под Москвой, и поднимающий воду на высоту 30 м. Л. Эйлер предложил конструкцию турбины, вывел так называемое «турбинное уравнение», создал основополагающие труды в теории корабля.

В 1791 г. в Петербурге А. Колмаков издал книгу «Карманная книжка для вычисления количества воды, протекающей через трубы, отверстия», которая явилась первым справочником по гидравлике.

Первое в России учебное пособие по гидравлике было выпущено в 1836 г. П.П. Мельниковым под названием «Основания практической гидравлики или о движении воды в различных случаях».



Осборн Рейнольдс
(1842 – 1912)

Перечисленные теоретические работы положили начало бурному развитию гидравлики. Велики заслуги ученых Д. Полени (1685 – 1761), который работал в области истечения через отверстия и водосливы; А. Шези (1718 – 1798), изучавшего равномерное движение жидкости; П. Дюбуа (1734 – 1809), занимавшегося движением наносов в реках, сопротивлениями движению воды в руслах; Д. Вентури (1746 – 1822), исследовавшего истечение через отверстия и насадки; Ю. Вейсбаха (1806 – 1871), в основном известного работами в области сопротивлений движению жидкости; А. Базена (1829 – 1897), изучавшего равномерное движение и истечение жидкости через водосливы; О. Рейнольдса (1842 – 1912), внесшего большой вклад в изучение ламинарного и турбулентного режимов движения.



Николай Егорович
Жуковский
(1847 – 1921)

Во второй половине XIX века в России появляются работы, оказавшие большое влияние на последующее развитие гидравлики. И.С. Громека (1851 – 1889) создал основы теории винтовых потоков и потоков с поперечной циркуляцией. Д.И. Менделеев (1834 – 1907) в своей работе «О сопротивлении жидкости и воздухоплавании» в 1880 г. привел важные выводы о наличии двух режимов движения жидкости (ламинарного и турбулентного). Далее Н.П. Петров (1836 – 1920) сформулировал закон внутреннего трения в жидкости. Н.Е. Жуковский (1847 – 1921) создал теорию гидравлического удара в водопроводных трубах, теорию движения наносов в реках и разработал основополагающие предложения в области фильтрации.

Труды академика Н.Н. Павловского (1884 – 1937) в области равномерного и неравномерного движения, фильтрации через земляные плотины и под гидротехническими сооружениями явились большим вкладом в развитие гидравлики и послужили основой, наряду с другими работами учеников и последователей Н.Н. Павловского в СССР, для создания инженерной гидравлики, широко используемой при расчетах в гидротехнике.

ЦЕЛЬ ПРЕПОДАВАНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Дидактическая цель курса заключается в формировании у студентов теоретических и прикладных знаний необходимых для изучения специальных курсов по специальности «Теплоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна», а также для решения многих инженерных задач.

Целью преподавания является подготовка специалиста для производственно-технической, организационно-управленческой, проектно-конструкторской и исследовательской деятельности в области проектирования строительной деятельности и эксплуатации систем теплоснабжения промышленных и гражданских зданий и сооружений.

ЗАДАЧИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Задачами изучения дисциплины являются:

1. Теоретическая подготовка в области гидромеханики, позволяющая будущим инженерам ориентироваться в потоке научно-технической информации и обеспечивающая возможность использования ими гидромеханических методов в будущей специальности.

2. Формирование у студентов научного мышления в частности, правильного понимания границ применимости различных гидромеханических понятий, законов, теорий и умение оценивать степень достоверности результатов, полученных с помощью экспериментальных и математических методов исследования или инженерных расчетов.

3. Усвоение основных гидромеханических явлений и законов, методов гидромеханических исследований применительно к различным задачам будущей специальности.

4. Выработка у студентов приемов и навыков решения конкретных задач из разных областей гидромеханики, помогающих студентам в дальнейшем решать инженерные задачи.

Настоящий учебно-методический комплекс составлен на основе различных учебников, учебных и учебно-методических пособий и предназначен для использования студентами при изучении дисциплины «Механика жидкости и газа» на кафедре трубопроводного транспорта и гидравлики.

Перечни литературных источников, которые были использованы при составлении учебно-методического комплекса, приводятся в конце каждого модуля.

МОДУЛЬ 1

ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТИ

ВВЕДЕНИЕ

Жидкостью называют физическое тело, обладающее двумя особыми свойствами:

1. Она весьма мало изменяет свой объем при изменении давления или температуры.

2. Она обладает текучестью, благодаря чему жидкость не имеет собственной формы и принимает форму того сосуда, в котором она находится.

Жидкости делят на два вида: капельные и газообразные.

Капельные жидкости характеризуются большим сопротивлением сжатию и малым сопротивлением растягивающим и касательным усилиям, обусловленным незначительностью сил сцепления и сил трения между частицами жидкости. К капельным жидкостям относятся вода, нефть, керосин, бензин, ртуть и т.п.

Газообразные жидкости (газы) обладают большой сжимаемостью, не оказывают сопротивления ни растягивающим, ни касательным усилиям и имеют малую вязкость.

В данном курсе рассматриваются только капельные жидкости, однако многие свойства капельных и газообразных жидкостей, а также многие механические законы для них одинаковы.

СХЕМА ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

Тема занятия	Тип занятия	Вид (форма) занятия	Кол-во часов
1. Основные физические свойства жидкости.	Изучение нового материала	Лекция	2
2. Определение вязкости жидкости вискозиметром Энглера.	Углубление и систематизация учебного материала	Лабораторная работа	2
3. Основные физические свойства жидкости.	Углубление и систематизация учебного материала	Практическое занятие	2

1. ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТИ

Плотность. Удельный вес

Плотность характеризует распределение массы ΔM жидкости по объему ΔV (рис. 1.1). В произвольной точке A жидкости плотность определяется:

$$\rho_A = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V},$$

где ΔM – масса, заключенная в объеме ΔV , стягиваемом в точку A .

Плотность однородной жидкости равна отношению массы M жидкости к объему V :

$$\rho = \frac{M}{V}.$$

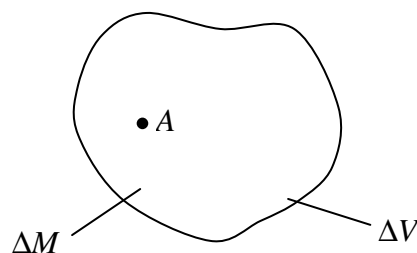


Рис. 1.1. К понятию плотности жидкости

Плотность во всех точках однородной жидкости одинакова.

В общем случае плотность может изменяться от точки к точке в объеме, занятом жидкостью, и в каждой точке объема с течением времени.

В международной системе единиц СИ масса вещества измеряется в кг, объем жидкого тела в м^3 , тогда размерность плотности жидкости в системе единиц СИ – $\text{кг}/\text{м}^3$. В системе единиц СГС плотность жидкости измеряется в $\text{г}/\text{см}^3$.

Плотность капельных жидкостей и газов зависит от температуры и давления. Зависимость величины плотности жидкости и газа при температуре отличной от 20°C определяется по формуле Д.И. Менделеева:

$$\rho_t = \frac{\rho_{20}}{1 + \beta_t(T - T_0)},$$

где ρ_t и ρ_{20} – плотности жидкости (газа) при температурах соответственно T и $T_0 = 20^\circ\text{C}$;

β_t – коэффициент температурного расширения.

В технике часто пользуются величиной удельного веса γ , определяемой весом (силой тяжести) F единицы объема вещества:

$$\gamma = \frac{\Delta F}{\Delta V} = \frac{g \cdot \Delta m}{\Delta V} = \rho \cdot g.$$

Размерность удельного веса в системе СИ – $\text{Н}/\text{м}^3$.

Плотность жидкостей и газов зависит от температуры и давления. Все жидкости, кроме воды, характеризуются уменьшением плотности с ростом температуры. Плотность воды максимальна при $t = 4\text{ }^\circ\text{C}$ и уменьшается как с уменьшением так и с увеличением температуры от этого значения. В этом проявляется одно из аномальных свойств воды.

Сжимаемость

Способность жидкости или газа под действием внешнего давления изменять свой объем и, следовательно, плотность, называется *сжимаемостью*. Сжимаемость жидкости характеризуется *коэффициентом объемного сжатия* (сжимаемости) β_c , $\text{м}^2/\text{Н}$, представляющим относительное изменение объема жидкости V , м^3 , при изменении давления p , Па, на единицу:

$$\beta_c = -\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dp}.$$

Знак минус в формуле указывает, что при увеличении давления объем жидкости уменьшается.

Величина, обратная коэффициенту объемного сжатия – *модуль упругости жидкости*:

$$E_{ж} = \frac{1}{\beta_c}.$$

При относительно невысоких давлениях сжимаемостью жидкостей пренебрегают. При значительных изменениях давления сжимаемость капельных жидкостей следует учитывать.

Вследствие большой сжимаемости газообразных жидкостей их плотность и удельный вес в значительной степени зависят от температуры и давления.

Процессы сжатия и расширения газов подчиняются известным из физики законам Бойля – Мариотта и Гей – Люссака для идеальных газов.

Сжимаемость воды весьма незначительна, при увеличении давления на 9,8 МПа (на 100 атмосфер) объем воды уменьшается на 1/20000 первоначального объема.

Условия работы гидротехнических сооружений позволяют считать воду несжимаемой средой. Но не следует забывать, что такое допущение правомерно лишь в тех случаях, когда изменения давления невелики. Так, сжимаемость воды существенно сказывается на положении уровня водной поверхности Мирового океана. Если бы вода была абсолютно несжимаема, то отметки уровня воды в океанах поднялись бы примерно на 30 м.

Вязкость

Вязкость – свойство жидкости оказывать сопротивление относительному сдвигу слоев. Вязкость проявляется в том, что при относительном перемещении слоев жидкости на поверхностях их соприкосновения возникают силы сопротивления сдвигу T , называемые силами внутреннего трения, или силами вязкости (рис. 1.2). Благодаря этим силам медленнее движущийся слой жидкости «тормозит» соседний слой, движущийся быстрее, и наоборот. Силы внутреннего трения появляются вследствие наличия межмолекулярных связей между движущимися слоями.

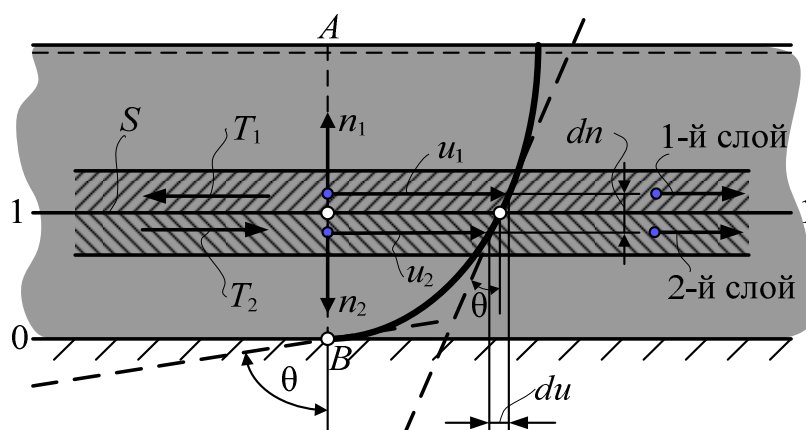


Рис. 1.2. К понятию вязкости жидкости

Наличие сил вязкости в движущейся жидкости подтверждается простым и наглядным опытом. Если в цилиндрическую емкость, заполненную жидкостью опустить вращающийся цилиндр, то вскоре придет в движение (начнет вращаться вокруг своей оси в том же направлении, что и вращающийся цилиндр) и сама емкость с жидкостью. Этот факт свидетельствует о том, что вращательный момент от вращающегося цилиндра был передан через вязкую жидкость самой емкости, заполненной жидкостью.

Вязкость проявляется для большинства жидкостей только при движении. Но у некоторых жидкостей, например нефтепродуктов, смазочных масел при низких температурах, коллоидных растворов и в состоянии покоя имеются силы трения. Такие жидкости называются аномальными (неньютоновскими).

Представим на продольном разрезе потока (рис. 1.2) некоторое живое сечение AB и соответствующую ему эпюру скоростей ABC . Покажем далее два слоя жидкости (заштрихованы на чертеже), из которых первый слой движется со скоростью u_1 , а второй – со скоростью u_2 . Поверхность соприкосновения 1-1 этих жидких слоев имеет площадь S . По этой поверх-

ности (вдоль нее) в вязкой жидкости развиваются парные силы внутреннего трения: T_1 , приложенная к первому слою со стороны второго, и T_2 , приложенная ко второму слою со стороны первого. Очевидно,

$$|T_1| = |T_2|,$$

причем первый слой жидкости, движущийся с большей скоростью, за счет трения по поверхности 1-1 способствует ускорению движения второго слоя; второй же слой, наоборот, благодаря трению тормозит первый слой.

Законы продольного внутреннего трения были установлены Ньютоном в 1686 г. Эти законы можно сформулировать так:

Сила T продольного внутреннего трения в параллельноструйном потоке жидкости, то есть сила трения, возникающая при скольжении отдельных прямолинейных слоев жидкости друг по другу:

- 1) *прямо пропорциональна так называемому градиенту скорости;*
- 2) *прямо пропорциональна площади S поверхности соприкасания данных слоев жидкости;*
- 3) *не зависит от давления;*
- 4) *зависит от физических свойств жидкости (от рода жидкости), а следовательно, и от ее температуры.*

Положения 1, 2 и 3 отличаются от соответствующих законов, относящихся к твердым телам: в случае твердых тел сила трения, как известно, зависит от нормального давления и практически не зависит от скорости движения тела, а также от площади S . Законы Ньютона можно представить в аналитической форме:

$$T = \mu \cdot S \left| \frac{du}{dn} \right|, \quad (1.1)$$

где μ – некоторый коэффициент пропорциональности, называемый, как отмечалось выше, динамическим коэффициентом вязкости или просто коэффициентом вязкости. Величина μ зависит от рода жидкости, а также от ее температуры; чтобы подчеркнуть это обстоятельство, иногда μ называют *коэффициентом молекулярной или физической вязкости*. Численные значения μ для различных жидкостей находятся опытным путем при помощи особых приборов, называемых вискозиметрами;

$\frac{du}{dn}$ – градиент скорости, то есть производная от величины скорости u

по нормали n , проведенной к поверхности 1-1 соприкасания слоев жидко-

сти. Если толщина выделенных на рис. 1.2 слоев жидкости бесконечно мала, то для отмеченных на чертеже величин du и dn можем написать:

$$\frac{du}{dn} = \operatorname{tg} \theta, \quad (1.2)$$

где θ – угол, образованный вертикалью и касательной к кривой ВС эпюры скоростей в точке, лежащей на линии 1-1.

Именно соотношением (1.2) и выражается градиент скорости, входящий в формулу (1.1). Величина $\frac{du}{dn}$ в зависимости от выбранного направления n (см. на рис. 1.2 направления n_1 и n_2) может быть как положительной, так и отрицательной. С тем, чтобы в формуле (1.1) величину T получать всегда положительной, в эту формулу введено абсолютное значение градиента скорости.

Обратим внимание, что при равномерном распределении скоростей по живому сечению, то есть в случае, когда $\frac{du}{dn} = 0$, силы внутреннего трения в вязкой жидкости согласно (1.1) отсутствуют.

Касательные напряжения продольного внутреннего трения для ламинарного режима при прямолинейном движении представляются в соответствии с (1.1) зависимостью:

$$\tau = \frac{T}{S} = \mu \frac{du}{dn} = \mu \operatorname{tg} \theta.$$

Следовательно, динамический коэффициент вязкости равен:

$$\mu = \tau \frac{dn}{du}.$$

Отсюда находим размерность динамического коэффициента вязкости:

$$[\mu] = [\tau] \cdot \left[\frac{dn}{du} \right] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \cdot \frac{\text{м}}{\text{м/с}} = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}$$

В системе СИ динамическая вязкость измеряется в $\text{Па} \cdot \text{с}$. Единицу, равную $0,1 \cdot \text{Па} \cdot \text{с}$, называют пуазом (П) по имени профессора Пуазейля, впервые получившего точные опытные данные о вязкости.

Физический смысл динамического коэффициента вязкости виден из рассмотрения единиц его измерения: в числителе – работа, а в знаменателе – объемный расход:

$$\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^3/\text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3/\text{с}} = \frac{\text{работа}}{\text{объемный расход жидкости}}.$$

Таким образом, динамический коэффициент вязкости представляет собой работу, которую необходимо совершить при относительном течении слоев жидкости для единицы объемного расхода.

В гидравлических расчетах кроме динамической вязкости широко используется кинематическая вязкость, равная отношению динамической вязкости к плотности жидкости:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

Отсюда находим размерность кинематической вязкости:

$$[\nu] = \frac{[\mu]}{[\rho]} = \frac{\text{кг/м} \cdot \text{с}}{\text{кг/м}^3} = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

Название «кинематическая вязкость» отражает тот факт, что в размерность входят только кинематические величины. В системе СИ – м²/с.

Физический смысл кинематического коэффициента вязкости также виден из единиц его измерения:

$$\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг/с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{кг/с}} = \frac{\text{работа}}{\text{массовый расход жидкости}}.$$

Следовательно, кинематический коэффициент вязкости представляет собой работу, которую необходимо совершить при относительном движении слоев жидкости для единиц массового расхода.

Вязкость капельных жидкостей зависит от температуры и уменьшается с увеличением последней. Вязкость газов, наоборот, с увеличением температуры возрастает. Это объясняется различием самой природы вязкости в жидкостях и в газах. В жидкостях молекулы расположены гораздо ближе друг к другу, чем в газах, и вязкость вызывается силами молекулярного сцепления. Эти силы с ростом температуры уменьшаются, поэтому вязкость падает. В газах же вязкость обусловлена главным образом беспорядочным тепловым движением молекул, интенсивность которого увеличивается с температурой.

Вязкость капельных жидкостей зависит также от давления, однако эта зависимость существенно проявляется лишь при относительно больших изменениях давления, порядка нескольких сотен атмосфер. С увеличением давления вязкость большинства жидкостей возрастает, но при давлениях меньше 10 МПа изменением вязкости обычно пренебрегают.

Вязкость газов при обычно встречающихся в технике перепадах давления не зависит от давления. Но если газы подвергаются очень сильному сжатию, их вязкость значительно возрастает.

Вязкость жидкостей измеряют с помощью приборов – *вискозиметров* различных типов.

Поверхностное натяжение (капиллярность)

Известно, что молекулы жидкости, находящиеся на границе с газом, твердым телом или между двумя несмешивающимися жидкостями, находятся под воздействием сил взаимного притяжения. Вследствие этого вся свободная поверхность жидкости находится в состоянии равномерного поверхностного натяжения σ . Под влиянием поверхностного натяжения поверхность жидкости стремится принять форму, соответствующую наименьшей площади. Малые массы жидкости в воздухе стремятся к шарообразной форме, образуя капли.

Влияние поверхностного натяжения необходимо учитывать при изучении потоков с малой глубиной, при захвате окружающего воздуха движущейся жидкостью (аэрация жидкости), в капиллярах и т.д.

В трубках малого диаметра наблюдается подъем или опускание жидкости относительно нормального уровня, а также искривление свободной поверхности. Обратимся к рассмотрению жидкости в капиллярной трубке.

Как видно из рис. 2.3, в районе примыкания поверхности жидкости к стенке трубки можем получить одну из следующих картин:

– если взаимное притяжение двух молекул жидкости велико по сравнению с притяжением молекул жидкости

к частице твердой стенки, то получаем схему рис. 2.3, а (случай «несмачиваемой стенки»);

– если взаимное притяжение двух молекул жидкости мало по сравнению с притяжением молекул жидкости к частице твердой стенки, то получаем схему на рис. 2.3, б (случай «смачиваемой стенки»).

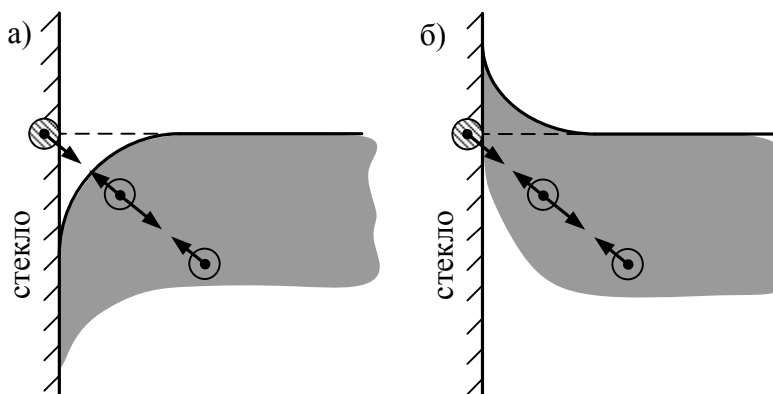


Рис. 2.3. «Несмачиваемая» (а) и «смачиваемая» (б) стенки

Высота подъема смачивающей жидкости (или опускание несмачивающей жидкости) в стеклянной трубке диаметром d определяется по формуле для полусферического мениска:

$$h = \frac{4 \cdot \sigma}{d \cdot \rho \cdot g} = \frac{k}{d},$$

где k имеет следующие значения: для воды $k = 30 \text{ мм}^2$; для ртути $k = -10,1 \text{ мм}^2$; для спирта $k = 11,5 \text{ мм}^2$.

Величина напряжений на границе раздела зависит от температуры жидкости; при увеличении температуры внутренняя энергия молекул возрастает, уменьшается напряжение в пограничном слое жидкости и, следовательно, уменьшаются силы поверхностного натяжения.

Растворимость газов в капельных жидкостях

В реальных жидкостях всегда находится газ в растворенном состоянии. Это может быть воздух, азот, углеводородный газ, углекислота, сероводород и др. Наличие газа растворенного в жидкости может оказывать как благоприятное воздействие (снижается вязкость жидкости, плотность и т.д.), так и неблагоприятные факторы. Так при снижении давления из жидкости выделяется свободный газ, который может стать источником такого нежелательного явления как кавитация.

Количество газа, которое может раствориться в капельной жидкости, зависит от физико-химических свойств самой жидкости и растворяемого в ней газа, а также от температуры и давления. Максимальное количество газа, которое может быть растворено в данной жидкости носит название предельной газонасыщенности для данного газа s_0 . Естественно, что величины предельной газонасыщенности для разных газов будут разными. Другой характеристикой процесса растворения газа в жидкости является давление насыщенных паров $p_{н.п}$, это такое минимальное давление в жидкости, при котором достигается насыщение капельной жидкости газом. Известно, что $p_{н.п}$ зависит от температуры и с увеличением ее повышается. Если давление в жидкости p опустится ниже давления насыщенных паров ($p < p_{н.п}$), то растворенные в жидкости газы начнут из нее выделяться в виде пузырьков.

Кипение и кавитация

Как известно из курса физики, при снижении давления в жидкости или при повышении ее температуры растворенные в воде газы начинают выделяться из отдельных элементарных объемов воды, причем в воде образуются разрывы (газо-воздушные пузыри).

Предположим, что мы имеем некоторый объем воды, сплошность которого не нарушена. Обозначим давление в этой воде через p и температуру через t .

Представим себе далее, что в силу тех или иных причин температура начинает увеличиваться или давление уменьшаться. Очевидно, что в некоторый момент времени можем получить $p < p_{н.п.}$. При таком соотношении в обычных условиях внутри рассматриваемого объема воды возникают пузырьки, заполненные «насыщенными парами» воды, происходит как говорят «холодное кипение» воды. При этом мы получаем двухфазную систему (вода плюс пузырьки пара). Чтобы заставить эти пузырьки захлопнуться необходимо на достаточную величину или повысить давление p или понизить давление $p_{н.п.}$ (за счет снижения температуры).

В случае появления в воде пузырьков пара различают два разных явления: кипение и кавитацию.

Кипением жидкости называется явление, когда пузырьки пара, появившиеся в жидкости всплывают и выходят из жидкости через ее свободную поверхность.

Кавитацией жидкости называется явление, когда пузырьки пара (или паровоздушные пузырьки), появившиеся в движущейся жидкости, не выходят из нее, а захлопываются внутри жидкости.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1 «ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЯЗКОСТИ ЖИДКОСТИ ВИСКОЗИМЕТРОМ ЭНГЛЕРА»

Цель работы:

1. Определить динамическую вязкость исследуемой жидкости с помощью вискозиметра Энглера.
2. Установить зависимость вязкости исследуемой жидкости от температуры.

Краткая теория

Жидкостью называется тело, обладающее свойством текучести, то есть способное сколь угодно сильно изменять свою форму под действием сколь угодно малых сил, но в отличие от газа, весьма мало меняющее свою плотность при изменении давления.

Жидкости с точки зрения механических свойств *подразделяются* на 2 класса:

1. Капельные (малосжимаемые).
2. Газообразные (сжимаемые).

Основные свойства жидкостей, важные при рассмотрении задач механики жидкости: плотность и вязкость.

Плотностью жидкости называют массу жидкости в единице объема:

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad (1)$$

где m – масса жидкости;
 V – объем жидкости.

Вязкостью жидкости называют свойство жидкости оказывать сопротивление сдвигу. И. Ньютон впервые высказал гипотезу о существовании трения в жидкостях. В дальнейшем его гипотеза была подтверждена многочисленными исследованиями. Н.П. Петровым на основании разработанной им теории трения в жидкостях для определения силы трения была предложена формула:

$$T = \pm \mu \cdot S \cdot \frac{dU}{dy}, \quad (2)$$

где S – площадь соприкосновения слоев жидкости;
 μ – динамический коэффициент вязкости;
 $\frac{dU}{dy}$ – относительное изменение скорости, называемое градиентом скорости.

Из формулы (2) следует, что:

$$\tau = \frac{T}{S} = \pm \mu \frac{dU}{dy}, \quad (3)$$

где τ – сила трения, приходящаяся на единицу площади (касательное напряжение).

Величина динамического коэффициента вязкости характеризует сопротивляемость жидкости сдвигу. Так как на существование отношения (3) первое указание имеется у И. Ньютона, поэтому оно и называется законом трения Ньютона.

Наряду с понятием динамической или абсолютной вязкости в гидравлике находит применение понятия *кинематической* вязкости ν :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (4)$$

Вязкость жидкостей в большой степени зависит от температуры. При этом вязкость капельных жидкостей при увеличении температуры уменьшается, а вязкость газов возрастает.

Для опытного определения величины вязкости жидкостей применяют приборы, называемые вискозиметрами. Имеется несколько типов вискозиметров: капиллярные, вискозиметры с двумя коаксиальными цилиндрами (ротационные), вискозиметры, основанные на затухании крутильных колебаний маятников в исследуемой жидкости или цилиндров с исследуемой жидкостью; вискозиметры, в которых вязкость жидкости определяется по скорости падения в ней твердого тела (например, стеклянного или металлического шарика) и т.д.

Широкое распространение для определения вязкости капельных жидкостей получил вискозиметр Энглера (рис. 1).

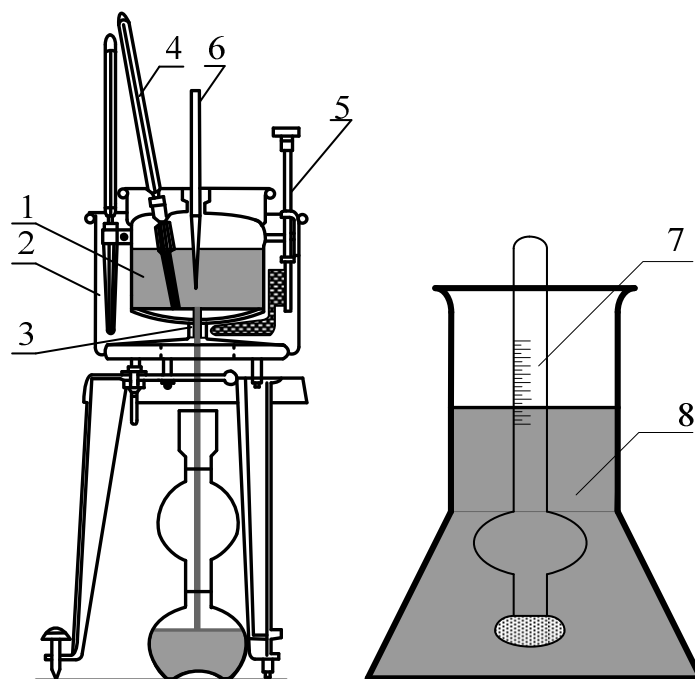


Рис. 1. Вискозиметр Энглера

Описание лабораторной установки

Схема лабораторной установки представлена на рис. 1. Вискозиметр Энглера представляет собой сосуд 1, окруженный водяной ванной 2 с водой определенной температуры, которая нагревается с помощью электронагревателя. Ко дну резервуара припаяны латунная цилиндрическая трубка 3, в которую вставлен платиновый насадок. Размеры насадка, как и всего прибора стандартные. Температуру исследуемой жидкости измеряют термометром 4. Для перемешивания воды в ванне имеется мешалка 5. Стопорный стержень 6 служит для перекрытия отверстия насадка.

За вязкость жидкости по Энглеру принимается отношение времени t истечения 200 см^3 испытуемой жидкости ко времени t_B истечения того же объема воды при температуре $20 \text{ }^\circ\text{C}$.

Таким образом, условная вязкость в градусах Энглера (E), определяется зависимостью:

$${}^0 E = \frac{t}{t_B} \quad (5)$$

Имеется также колба 7, заполненная той же исследуемой жидкостью, что и вискозиметр. В колбе находится прибор для измерения плотности жидкости, называемый ареометром 8. Ареометр представляет собой поплавок, в верхней части которого находится тонкая трубочка с делениями. Эти деления прямо показывают плотность жидкости.

Порядок проведения опыта

1. Снять крышку 10 вискозиметра и убедиться в том, что внутренняя поверхность сосуда 1 и платиновой трубочки 3 чиста.

2. Вставить в отверстие трубочки 3 стержень 7 и в сосуд 1 налить столько исследуемой жидкости, чтобы ее свободная поверхность незначительно перекрыла острие крючков 9, расположенных на внутренней поверхности сосуда 1.

3. Вискозиметр закрыть крышкой 10 и в ее отверстие опустить термометр 5.

4. Включить электронагреватель 4 в сеть и нагреть жидкость до заданной температуры. Периодически мешалкой 6 перемешать воду для равномерного подогрева жидкости.

5. Пока исследуемая жидкость нагревается, определить плотность жидкости в колбе 11 с помощью ареометра.

6. Придерживая крышку вискозиметра, приподнять стержень 7 и одновременно включить секундомер.

Необходимо следить, чтобы вытекающая из насадка жидкость попала на внутреннюю боковую стенку колбы 8. Это исключает возможность появления пены внутри колбы.

7. Когда уровень вытекающей жидкости достигнет деления в колбе, соответствующее 200 см^3 , секундомер остановить. Полученное время t в секундах и есть время вытекания исследуемой жидкости.

8. Весь опыт повторить еще один раз, при другой заданной температуре.

Обработка результатов опыта

1. По результатам измерений используя формулу (5), определить условную вязкость в градусах Энглера.

2. Переход от вязкости в градусах Энглера к кинематическому коэффициенту вязкости производится по эмпирическим формулам, одной из которых является формула Убеллоде:

$$\nu = \left(0,0731 \cdot {}^0E - \frac{0,0631}{{}^0E} \right), \text{ см}^2/\text{с}$$

где 0E – вязкость в градусах Энглера.

3. При определении динамического коэффициента вязкости использовать выражение (4), из которого:

$$\mu = \nu \cdot \rho, \text{ Па} \cdot \text{с}$$

где ν – кинематический коэффициент вязкости, $\text{м}^2/\text{с}$;

ρ – плотность исследуемой жидкости, $\text{кг}/\text{м}^3$.

4. Заполнить табл. 3, используя данные табл. 1 и табл. 2.

Таблица 1

Единицы измерения вязкости

Величина	Единица		
	СИ	СГС	МКГСС
Кинематическая вязкость	$\text{м}^2/\text{с}$	$\text{см}^2/\text{с}$ (Ст) – Стокс	$\text{м}^2/\text{с}$
Динамическая вязкость	$\text{Па} \cdot \text{с}$	П (Пуаз)	$\text{кгс} \cdot \text{с} / \text{м}^2$

Таблица 2

Связь между единицами динамической вязкости

Единица	Па · с	П	кгс · с/м ²
Па · с	1	10	9,81 ⁻¹
П	10 ⁻¹	1	98,1 ⁻¹

Таблица 3

Экспериментальные данные и обработка результатов

№ опыта	Температура жидкости	Время истечения 200 см ³ , с		Вязкость исследуемой жидкости				
		Воды	Исследуемой жидкости	Условная ⁰ E	Кинематическая	Динамическая		
						СИ	СГС	МКГСС
1		52						
2		52						

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Пример. Уксусная кислота в капиллярной трубке поднимается на высоту 30 мм. На какую высоту поднимется эфир в капиллярной трубке, диаметр которой вдвое больше?

Решение. Высота поднятия уксусной кислоты в капилляре с диаметром d_1 :

$$h_1 = \frac{4 \cdot \sigma_1}{d_1 \cdot \rho_1 \cdot g},$$

а эфира в капилляре с диаметром d_2 :

$$h_2 = \frac{4 \cdot \sigma_2}{d_2 \cdot \rho_2 \cdot g},$$

где σ_1 и σ_2 – коэффициенты поверхностного натяжения соответственно уксусной кислоты и эфира;

ρ_1 и ρ_2 – плотности уксусной кислоты и эфира.

Отсюда:

$$h_2 = \frac{\sigma_2 \cdot \rho_1 \cdot d_1}{\sigma_1 \cdot \rho_2 \cdot d_2} \cdot h_1 = \frac{\sigma_2 \cdot \rho_1}{2\sigma_1 \cdot \rho_2} \cdot h_1;$$

$$h_2 = \frac{0,017 \cdot 1050}{2 \cdot 0,028 \cdot 710} \cdot 30 \approx 13,5 \text{ мм.}$$

Задача 1. Определить удельный вес жидкости, если известна ее плотность $\rho = 910 \text{ кг/м}^3$, ускорение свободного падения $g = 9,81 \text{ м/с}^2$.

Ответ: $\gamma = 8,93 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^3$.

Задача 2. Стальной барабан подвергается гидравлическому испытанию созданием избыточного давления 1,96 МПа. Определить какое количество воды дополнительно необходимо подать насосом в барабан, если его геометрическая емкость равна 10 м^3 . Деформацией барабана пренебречь, коэффициент сжимаемости воды принять равным $1/2,3 \cdot 10^3 \text{ МПа}$.

Ответ: $\Delta V = 8,52 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение жидкости.
2. Дайте определение капельной и газообразных жидкостей.
3. Дайте определение удельного веса жидкости.
4. Чем характеризуется сжимаемость жидкостей и газов?
5. В чем отличие сжимаемости жидкостей и газов?
6. Дайте определение вязкости жидкости.
7. Что вызывает вязкость жидкости при ее движении по трубам?
8. Сформулируйте гипотезу Ньютона.
9. Каков физический смысл динамического коэффициента вязкости?
10. Каков физический смысл кинематического коэффициента вязкости?
11. Как изменяется вязкость капельных жидкостей при изменении их температуры?
12. Как изменяется вязкость газов при изменении их температуры?
13. Как изменяется вязкость капельных жидкостей при изменении их давления?

14. Как изменяется вязкость газов при изменении их давления?
15. Какими приборами определяют вязкость капельных жидкостей?
16. Как изменяется коэффициент поверхностного натяжения жидкостей с изменением температуры?
17. Что такое давление насыщенных паров? Как оно зависит от температуры?
18. Что такое кавитация?

ЛИТЕРАТУРА

1. Альтшуль А.Д., Кисилев П.Г. Гидравлика и аэродинамика. – М.: Стройиздат, 1975. – 323 с.
2. Штеренлихт Д.В. Гидравлика: Учебник для вузов. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 640 с.
3. Примеры расчетов по гидравлике: Учеб. пособие для вузов. / Под ред. А.Д. Альтшуля. – М.: Стройиздат, 1977. – 256 с.
4. Чугаев Р.Р. Гидравлика. – Л.: Энергия, 1982. – 600 с.
5. Ботук Б.О. Гидравлика. – М.: Высш. шк., 1962. – 450 с.
6. Медведев В.Ф. Гидравлика и гидравлические машины: Учеб. пособие. – Мн.: Выш. шк., 1998. – 311 с.
7. Калицун В.И., Кедров В.С., Ласков Ю.М. Гидравлика, водоснабжение и канализация: Учеб. пособие для вузов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Стройиздат, 2000. – 397 с.

МОДУЛЬ 2

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЖИДКОСТИ

СХЕМА ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

Тема занятия	Тип занятия	Вид (форма) занятия	Кол-во часов
1. Классификация сил, действующих в жидкости	Изучение нового материала	Лекция	2
2. Свойства напряжений поверхностных сил, действующих в жидкости	Изучение нового материала	Лекция	2
3. Уравнение движения жидкости в напряжениях	Изучение нового материала	Лекция	2

1. КЛАССИФИКАЦИЯ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ В ЖИДКОСТИ

Поскольку жидкость обладает свойством текучести и легко деформируется под действием минимальных сил, то в жидкости не могут действовать сосредоточенные силы, а возможно существование лишь сил распределенных по объему (массе) или по поверхности. В связи с этим действующие на жидкости распределенные силы являются по отношению к жидкости внешними. По характеру действия силы можно разделить на две категории: массовые силы и поверхностные.

Массовые силы. Силы, действующие на каждую частицу жидкости с массой $\Delta M = \rho \Delta V$, то есть силы, распределенные по массе, называются *массовыми (объемными)*. К ним относятся: сила тяжести, силы инерции (кориолисова сила инерции, переносная сила инерции). К массовым силам относятся также гравитационные силы, подчиняющиеся закону всемирного тяготения Ньютона (силы притяжения Луны и Солнца при рассмотрении водных масс морей и океанов Земли).

Массовые силы характеризуются *плотностью распределения* F_A или *напряжением массовых сил*. Если ΔV – элементарный объем,

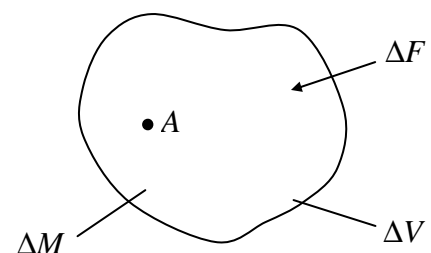


Рис. 2.1. К понятию массовых сил

содержащий точку A (рис. 2.1), и ΔF – массовая сила, действующая на массу $\Delta M = \rho \Delta V$ жидкости в этом объеме, то в данной точке A плотность распределения массовой силы при стягивании объема ΔV к точке A :

$$F_A = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\rho \Delta V}. \quad (2.1)$$

Таким образом, плотность массовой силы представляет собой массовую силу, отнесенную к единице массы. Ее составляющие по осям координат будут соответственно F_x , F_y , F_z . Плотность массовых сил имеет размерность ускорения (м/с^2).

Определим вектор напряжения массовых сил в наиболее важном частном случае действия силы тяжести.

Вес элементарной частицы:

$$\Delta P = \rho \cdot \Delta V \cdot g.$$

При выборе направления оси Z вверх массовая сила:

$$\Delta F = -k \cdot \Delta P,$$

где k – орт оси Z .

На основании (2.1) получаем:

$$F_A = -k \cdot \frac{\Delta P}{\rho \cdot \Delta V} = -k \cdot \frac{\rho \cdot \Delta V \cdot g}{\rho \cdot \Delta V} = -k \cdot g \quad \text{или} \quad F_x = 0; F_y = 0; F_z = -g.$$

Поверхностные силы. Силы, действующие на каждый элемент $\Delta \omega$ поверхностей, ограничивающих жидкость, и на каждый элемент поверхностей, проведенных произвольно внутри жидкости, называются *поверхностными*. Поверхностные силы делятся на две группы: *нормальные* к поверхности силы и *касательные* к поверхности. К нормальным поверхностным силам относится *сила давления* ΔP , к касательным поверхностным силам относится *сила трения* ΔT .

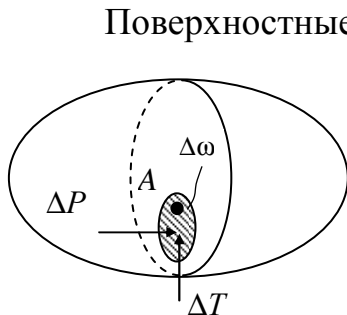


Рис. 2.2. К понятию поверхностных сил

Поверхностные силы, аналогично массовым силам, характеризуются

плотностью распределения поверхностных сил или напряжением поверхностных сил. Различают нормальное напряжение в точке и касательное напряжение в точке.

Рассмотрим объем жидкости, выделим в объеме элементарную поверхность площадью $\Delta \omega$ и наметим точку A (рис. 2.2). Пусть на выделенную поверхность действует нормальная сила ΔP и касательная сила ΔT . Тогда, плотность распреде-

ления нормальных сил определится как $p_A = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta\omega}$ – называется *нормальным напряжением* в точке A . Плотность распределения касательных сил $\tau_A = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta\omega}$ – называется *касательным напряжением* в точке A .

Массовые и поверхностные силы могут быть внешними и внутренними. Внешние силы действуют на рассматриваемую массу и поверхность жидкости извне и приложены соответственно к каждой частице жидкости, составляющей массу, и к каждому элементу поверхности, ограничивающей жидкость. Внутренние силы представляют собой силы взаимодействия частиц жидкости. Они являются парными, их сумма в данном объеме жидкости всегда равна нулю.

Массовые силы, действующие в жидкости, влияют на гидродинамические реакции, возникающие на теле, через напряжения поверхностных сил.

2. СВОЙСТВА НАПРЯЖЕНИЙ ПОВЕРХНОСТНЫХ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ В ЖИДКОСТИ

Для исследования напряжений поверхностных сил в жидкости установим связь между напряжением, действующим на произвольно ориентированную площадку и три другие взаимно перпендикулярные площадки, проходящие через данную точку.

Выделим в движущейся жидкости элементарную жидкую частицу в форме тетраэдра (рис. 2.3). Вместо поверхностных сил на гранях тетраэдра изобразим векторы напряжений, направленные произвольным образом к соответствующим граням. Ускорение центра тяжести частицы обозначим $\frac{d\bar{v}}{dt}$, напряжение массовых сил \bar{F} .

Запишем уравнение движения этой частицы в векторной форме, используя принцип Даламбера.

$$\rho\Delta V \cdot \frac{d\bar{v}}{dt} = \rho\Delta V \cdot \bar{F} + \bar{p}_n\Delta S_n - \bar{p}_x\Delta S_x - \bar{p}_y\Delta S_y - \bar{p}_z\Delta S_z,$$

где $\Delta S_x, \Delta S_y, \Delta S_z$ – площади граней тетраэдра;

$\bar{p}_n, \bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_z$ – векторы напряжений поверхностных сил в центре площадок, обозначения которых соответствуют направлениям нормалей к ним, знак минус перед последними членами означает, что нормали к соответствующим площадкам направлены противоположно осям координат.

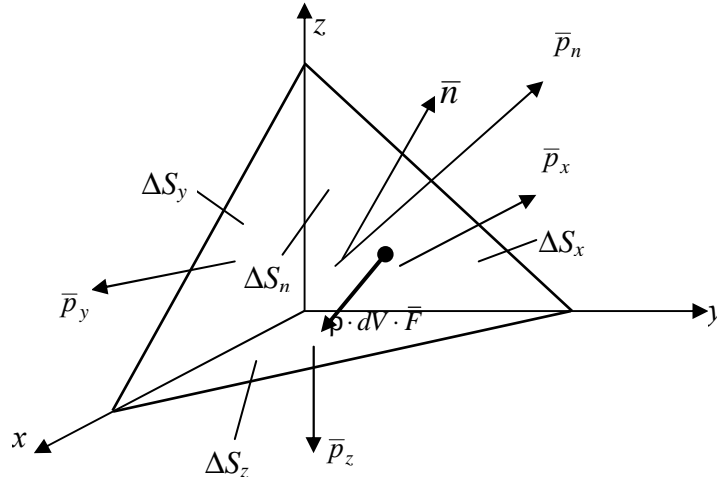


Рис. 2.3. Схема к выводу первого свойства напряжений поверхностных сил

Из аналитической геометрии известно, что:

$$\frac{\Delta S_x}{\Delta S_n} = \cos(n, x); \quad \frac{\Delta S_y}{\Delta S_n} = \cos(n, y); \quad \frac{\Delta S_z}{\Delta S_n} = \cos(n, z):$$

Разделим обе части полученного уравнения на ΔS_n :

$$\rho \frac{\Delta V}{\Delta S_n} \cdot \left(\frac{d\bar{v}}{dt} - \bar{F} \right) = \bar{p}_n - \bar{p}_x \cos(n, x) - \bar{p}_y \cos(n, y) - \bar{p}_z \cos(n, z)$$

Чтобы получить связь между напряжениями в точке, устремим объем тетраэдра к нулю, стягивая его в точку к началу координат.

Очевидно, что $\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta S_n} = 0$, с учетом чего связь между напряжениями запишется в виде:

$$\bar{p}_n = \bar{p}_x \cos(n, x) + \bar{p}_y \cos(n, y) + \bar{p}_z \cos(n, z). \quad (2.2)$$

Проектируя \bar{p}_n на оси координат получим:

$$\left. \begin{aligned} p_{nx} &= p_{xx} \cos(\widehat{n, x}) + p_{yx} \cos(\widehat{n, y}) + p_{zx} \cos(\widehat{n, z}) \\ p_{ny} &= p_{xy} \cos(\widehat{n, x}) + p_{yy} \cos(\widehat{n, y}) + p_{zy} \cos(\widehat{n, z}) \\ p_{nz} &= p_{xz} \cos(\widehat{n, x}) + p_{yz} \cos(\widehat{n, y}) + p_{zz} \cos(\widehat{n, z}) \end{aligned} \right\}$$

Первый индекс при проекциях напряжений в этих соотношениях соответствует площадке, в которой действует данное напряжение, а второй – оси, на которую оно проецируется. Скалярные величины p_{xx} , p_{yy} , p_{zz} представляют нормальные напряжения, все остальные (p_{xy} , p_{xz} , ...) – касательные напряжения, действующие в определенных площадках.

В дальнейшем касательные напряжения будем обозначать буквой τ :

$$p_{xy} = \tau_{xy}; \quad p_{xz} = \tau_{xz}; \quad \dots$$

Учитывая это, запишем:

$$\left. \begin{aligned} p_{nx} &= p_{xx} \cos(\widehat{n, x}) + \tau_{yx} \cos(\widehat{n, y}) + \tau_{zx} \cos(\widehat{n, z}) \\ p_{ny} &= \tau_{xy} \cos(\widehat{n, x}) + p_{yy} \cos(\widehat{n, y}) + \tau_{zy} \cos(\widehat{n, z}) \\ p_{nz} &= \tau_{xz} \cos(\widehat{n, x}) + \tau_{yz} \cos(\widehat{n, y}) + p_{zz} \cos(\widehat{n, z}) \end{aligned} \right\}$$

Первое свойство: напряжения поверхностных сил, действующих по произвольной площадке в данной точке жидкости, зависят от девяти скалярных величин: трех нормальных напряжений (p_{xx} , p_{yy} , p_{zz}) и шести касательных (τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} , τ_{yx} , τ_{zx} , τ_{zy}).

Такие величины в математике и механике носят название *тензора*, таким образом первое свойство напряжений поверхностных сил состоит в том, что эти напряжения образуют *тензор напряжений*.

$$\begin{vmatrix} p_{xx}, \tau_{yx}, \tau_{zx} \\ \tau_{xy}, p_{yy}, \tau_{zy} \\ \tau_{xz}, \tau_{yz}, p_{zz} \end{vmatrix} - \text{тензор напряжений.}$$

На рис. 2.4 показаны нормальные и касательные напряжения, действующие на три взаимно перпендикулярные грани параллелепипеда, выделенные в жидкости.

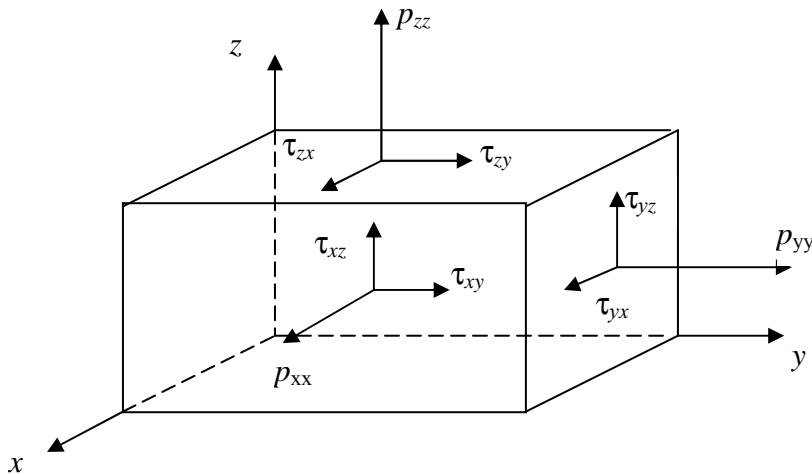


Рис. 2.4. Схема действия нормальных и касательных напряжений

Применяя теорему моментов, взятых относительно начала координат для напряжений, действующие на грани параллелепипеда, можно доказать свойство взаимности касательных напряжений, в соответствии с которым:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{xz} = \tau_{zx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

Из этого следует, что вследствие взаимности число независимых величин сокращается до шести.

Возникновение в жидкости касательных напряжений $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ вызвано одновременным влиянием двух факторов: движение жидкости и ее вязкости.

Если жидкость неподвижна, то касательные напряжения в ней отсутствуют, что характерно как для вязких, так и для невязких жидкостей.

В покоящейся жидкости:

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0,$$

т.е. действуют только нормальные напряжения p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} .

Соответствующие векторы напряжений:

$$\bar{p}_n = \bar{n} \bar{p}_{nn}; \bar{p}_x = \bar{i} \bar{p}_{xx}; \bar{p}_y = \bar{j} \bar{p}_{yy}; \bar{p}_z = \bar{k} \bar{p}_{zz}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение 2.2, получим:

$$\bar{n} p_{nx} = \bar{i} p_{xx} \cos(n, x) + \bar{j} p_{yy} \cos(n, y) + \bar{k} p_{zz} \cos(n, z).$$

Известно, что:

$$\bar{n} = \bar{i} \cos(n, x) + \bar{j} \cos(n, y) + \bar{k} \cos(n, z).$$

Подставляя предыдущее выражение в левую часть:

$$p_{nn} \left[\bar{i} \cos(n, x) + \bar{j} \cos(n, y) + \bar{k} \cos(n, z) \right] = \bar{i} p_{xx} \cos(n, x) + \bar{j} p_{yy} \cos(n, y) + \bar{k} p_{zz} \cos(n, z).$$

Сравнивая в этом выражении коэффициенты при одинаковых ортах, найдем:

$$p_{nn} = p_{xx}; p_{nn} = p_{yy}; p_{nn} = p_{zz}$$

или

$$p_{nn} = p_{yy} = p_{xx} = p_{zz}.$$

Эти равенства позволяют сформулировать теорему о свойстве нормальных напряжений:

Второе свойство: если в жидкости отсутствуют касательные напряжения, то нормальные напряжения в данной точке не зависят от ориентации площадки.

Рассмотрим одно из основных свойств жидкости, связанное с нормальными напряжениями.

Как видно из рис. 2.4, p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} направлены в сторону внешней нормали, то есть нормальные напряжения – растягивающие, которым приписывается знак «+». Твердое тело одинаково воспринимает растягивающие и сжимающие напряжения, не меняя свое состояние. В нем при этом не образуется разрывов сплошности.

Третье свойство: капельная жидкость способна воспринимать произвольные сжимающие усилия (отрицательное нормальное напряжение) без разрыва сплошности. Однако жидкость практически терпит разрыв

при растяжении, то есть в ней могут проявляться лишь нормальные сжимающиеся усилия.

Назовем давлением p в жидкости при отсутствии касательных напряжений величину нормального напряжения, взятую с обратным знаком, тогда, в соответствии с только что доказанной теоремой

$$p = -p_{nn} = -p_{yy} = -p_{xx} = -p_{zz},$$

отсюда следует, что величина давления не зависит от ориентации площадки.

3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В НАПРЯЖЕНИЯХ

Получим общее уравнение движения жидкости, устанавливающая связь между внешними и внутренними силами, действующими на нее.

Выделим в движущейся жидкости поверхностью S произвольный жидкий объем V (рис. 2.5), а внутри него элементарную жидкую частицу с массой $\rho \cdot dV$ и поверхностью dS . К этой частице приложены массовые силы с напряжением \bar{F} и поверхностные силы с напряжением \bar{p}_n .

Запишем уравнение движения этой частицы, обозначая ускорение ее центра тяжести $d\bar{v}/dt$:

$$\rho \cdot dV \frac{d\bar{v}}{dt} = \rho \cdot dV \cdot \bar{F} + \bar{p}_n \cdot dS$$

Просуммируем левую и правую часть уравнения. Суммирование первых двух членов сводится к интегрированию по объему, а третьего члена – по площади.

Согласно третьему закону Ньютона, поверхностные силы по всем внутренним площадкам взаимно уничтожатся, и останутся только поверхностные силы по площади S , ограничивающей объем V .

$$\int_V \frac{d\bar{v}}{dt} \rho \cdot dV = \int_V \bar{F} \rho \cdot dV + \int_S \bar{p}_n \cdot dS.$$

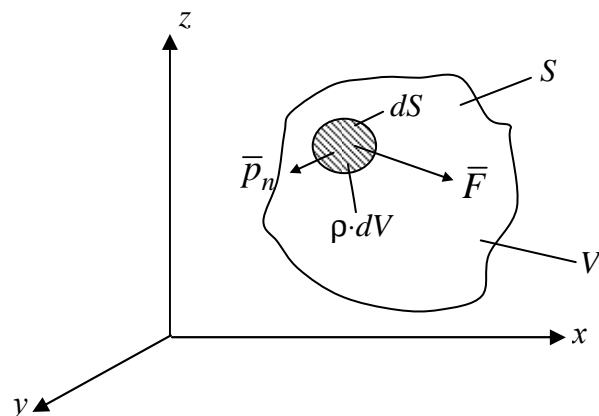


Рис. 2.5. Схема к выводу уравнения движения жидкости в напряжениях

Преобразуем третий член уравнения, используя для этого ранее полученную зависимость:

$$\bar{p}_n = \bar{p}_x \cos(n, x) + \bar{p}_y \cos(n, y) + \bar{p}_z \cos(n, z)$$

и получим:

$$\oint \bar{p}_n dS = \oint \left[\bar{p}_x \cos(n, x) + \bar{p}_y \cos(n, y) + \bar{p}_z \cos(n, z) \right] \cdot dS$$

Применим к правой части этого равенства известное преобразование Гаусса – Остроградского, устанавливающего связь между объемным и поверхностным интегралами:

$$\oint_S \left[p_x \cos(n, x) + p_y \cos(n, y) + p_z \cos(n, z) \right] \cdot dS = \int_V \left(\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z} \right) \cdot dV.$$

Подставляя правую часть в уравнение, получим:

$$\int_V \frac{d\bar{v}}{dt} \rho \cdot dV = \int_V \bar{F} \rho \cdot dV + \int_V \left(\frac{\partial \bar{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}_z}{\partial z} \right) \cdot dV.$$

Все члены в этом уравнении интегрируются по объему. Это уравнение является *уравнением движения жидкого объема в интегральной форме*. Левая часть представляет *главный вектор сил инерции*, первый член правой части – *главный вектор массовых сил*, а второй – *главный вектор поверхностных сил*.

Получим дифференциальную форму уравнения движения, более удобную для изучения движения жидкости. Объединим все члены уравнения под знаком интеграла, перенося силу инерции в правую часть.

$$\int_V \left[-\frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{F} + \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial \bar{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}_z}{\partial z} \right) \right] \cdot \rho \cdot dV = 0.$$

Интеграл равен нулю, когда подинтегральная функция равна нулю:

$$-\frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{F} + \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial \bar{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}_z}{\partial z} \right) = 0.$$

В итоге получим дифференциальное уравнение движения жидкости в напряжениях:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial \bar{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}_z}{\partial z} \right), \quad (2.3)$$

которое связывает ускорение с напряжениями массовых и поверхностных сил в данной точке потока и справедливо как для вязкой, так и невязкой жидкости.

Проектируя векторное уравнение на оси координат, будем иметь:

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = F_x + \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \\ \frac{dv_y}{dt} = F_y + \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \\ \frac{dv_z}{dt} = F_z + \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right) \end{cases}$$

Эта система уравнений служит для разработки гидростатики и гидродинамики вязкой и невязкой жидкости.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие силы называются массовыми? Приведите примеры.
2. Что Вы понимаете под напряжением поверхностных сил?
3. Чему равно напряжение силы тяжести?
4. Какие силы называются поверхностными? Приведите примеры.
5. Какими напряжениями характеризуются поверхностные силы?
6. Сформулируйте первое свойство напряжений поверхностных сил.
7. Сформулируйте второе свойство напряжений поверхностных сил.
8. Сформулируйте третье свойство напряжений поверхностных сил.
9. В каких случаях в жидкости не действуют касательные напряжения?
10. Что такое давление?
11. Выведите уравнение движения жидкости в напряжениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Альтшуль А.Д., Кисилев П.Г. Гидравлика и аэродинамика. – М.: Стройиздат, 1975. – 323 с.
2. Штеренлихт Д.В. Гидравлика: Учебник для вузов. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 640 с.
3. Повх И.Л. Техническая гидродинамика. – Л.: Машиностроение, 1969. – 524 с.
4. Чугаев Р.Р. Гидравлика. – Л.: Энергия, 1982. – 600 с.

МОДУЛЬ 3

ГИДРОСТАТИКА ЖИДКОСТИ

ВВЕДЕНИЕ

Гидростатика – раздел гидромеханики, изучающий равновесие жидкости. Различают абсолютное равновесие жидкости, когда из массовых сил действует только сила тяжести, и относительное равновесие, когда на жидкость, кроме сил тяжести, действуют инерционные силы. В этом случае объем жидкости может двигаться не деформируясь, то есть как абсолютно твердое тело, в то время как движение частиц жидкости друг относительно друга отсутствует.

Здесь мы рассмотрим только гидростатику несжимаемой жидкости.

СХЕМА ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

Тема занятия	Тип занятия	Вид (форма) занятия	Кол-во часов
1. Дифференциальное уравнение равновесия жидкости (уравнение Эйлера). Поверхности равного давления.	Изучение нового материала	Лекция	2
2. Основное уравнение гидростатики. Геометрическая и физическая интерпретация основного уравнения гидростатики.	Изучение нового материала	Лекция	2
3. Закон Паскаля и его практическое приложение. Графическое изображение давления. Абсолютное и манометрическое давление. Приборы для измерения давления. Давление жидкости на плоские стенки. Давление жидкости на цилиндрические стенки. Закон Архимеда.	Изучение нового материала	Лекция	2
4. Приборы для измерения давлений. Измерение давления с помощью ртутного дифманометра.	Углубление и систематизация учебного материала	Лабораторная работа	2
5. Давление в покоящейся жидкости. Силы давления покоящейся жидкости на плоские стенки. Силы давления покоящейся жидкости на криволинейные стенки.	Углубление и систематизация учебного материала	Практическое занятие	4

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ ЖИДКОСТИ (УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА)

Связь между массовыми силами и давлениями в жидкости, устанавливается уравнениями гидростатики, для получения которых необходимо в дифференциальном уравнении движения жидкости в напряжениях (2.3) приравнять нулю производную по времени:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial \bar{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}_z}{\partial z} \right).$$

В покоящейся жидкости касательные напряжения равны нулю и выполняется условие:

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

Пологая $\frac{d\bar{v}}{dt} = 0$ и приравнявая равенство нулю касательных напряжений уравнение гидростатики можно записать:

$$\bar{F} - \frac{1}{\rho} \cdot \left(\bar{i} \frac{\partial p_x}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial p_y}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial p_z}{\partial z} \right) = 0,$$

знак минус появился при переходе от напряжений к давлению.

Используя понятие градиента скалярной функции p , это уравнение можно представить в виде соотношения:

$$\rho \cdot \bar{F} = \text{grad } p,$$

представляющее уравнение равновесия жидкости в векторной форме (уравнение Эйлера). Оно справедливо как для абсолютного, так и для относительного равновесия жидкости.

Из уравнения Эйлера следует, что векторное поле напряжений массовых сил \bar{F} при равновесии не может быть произвольным. Уравнения равновесия налагают некоторые ограничения на характер массовых сил, способных создать равновесие жидкости. Для этого применим к нему дифференциальную операцию rot , считая $\rho = \text{const}$,

$$\text{rot } \rho \cdot \bar{F} = \rho \cdot \text{rot } \bar{F} = \text{rot } (\text{grad } p).$$

Как известно вихрь потенциального течения равен нулю, то есть:

$$\text{rot } (\text{grad } p) = 0.$$

Тогда $\text{rot } (\bar{F}) = 0$.

Из векторного анализа известно, что в этом случае \bar{F} есть потенциальный вектор, то есть поле напряжений массовых сил в этом случае обладает потенциалом U :

$$\bar{F} = \text{grad } U.$$

Таким образом, *равновесие несжимаемой жидкости возможно только в случае действия на нее потенциальных массовых сил.*

Запишем уравнение Эйлера, где массовую силу выразим через проекции на координатные оси и умножим каждое слагаемое соответственно на dx , dy , dz :

$$\frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial p_x}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial p_y}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial p_z}{\partial z} \cdot dz \right) = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz.$$

В этом уравнении выражение в скобках представляет собой полный дифференциал давления dp . Следовательно:

$$dp = \rho \cdot (F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz). \quad (3.1)$$

2. ПОВЕРХНОСТИ РАВНОГО ДАВЛЕНИЯ

Поверхностью равного давления называется поверхность, давление во всех точках которой одинаково, $p = \text{const}$ следовательно дифференциальное уравнение поверхности равного давления имеет вид:

$$dp = 0. \quad (3.2)$$

Чтобы получить уравнение поверхности равного давления для жидкости, находящейся в равновесии, подставим условие (3.2) в дифференциальное уравнение равновесия жидкости (3.1). Так как плотность не может быть равна нулю:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0. \quad (3.3)$$

Для конкретных случаев уравнение поверхности равного давления можно получить путем интегрирования этого уравнения с учетом действующих массовых сил.

1. Жидкость находится в покое в резервуаре (рис. 3.1). Массовой силой, действующей на частицы жидкости, в данном случае является только сила тяжести F_m . Проекция единичной результирующей массовых сил на координатные оси $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F_z = -g$. Подставляя эти значения в урав-

нение (3.3), получаем дифференциальное уравнение поверхности равного давления в покоящейся жидкости:

$$-g \cdot dz = 0. \quad (3.4)$$

В результате интегрирования дифференциального уравнения (3.4) получаем:

$$g \cdot z = \text{const}.$$

Это уравнение горизонтальной плоскости, отстоящей на расстоянии z от начала координат. Следовательно, в покоящейся жидкости любая горизонтальная плоскость является поверхностью равного давления.

2. Жидкость находится в равновесии в сосуде, движущемся горизонтально с постоянным ускорением a (рис. 3.2).

Массовыми силами, действующими на частички жидкости являются силы инерции $F_u = m \cdot a$ (направлены в сторону, противоположную направлению ускорения) и сила тяжести F_m . Проекции единичной результирующей массовых сил на координатные оси $F_x = -a$, $F_y = 0$, $F_z = -g$. Подставляя эти значения в уравнение (3.3), получаем дифференциальное уравнение поверхности равного давления в жидкости, движущейся равноускоренно:

$$-a \cdot dx - g \cdot dz = 0.$$

В результате интегрирования получаем:

$$a \cdot x + g \cdot z = \text{const}.$$

Это уравнение наклонной плоскости. Угол наклона плоскости $\beta = \arctg(a/g)$. Следовательно, в жидкости, движущейся равноускоренно, любая наклонная под углом β плоскость является поверхностью равного давления.

3. Жидкость находится в равновесии в цилиндрическом сосуде, вращающемся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω (рис. 3.3). В этом случае массовыми силами, действующими на частички жидкости, являются центробежная сила инерции $F_u = m\omega^2 r$ (направлена к центру вращения) и сила тяжести. Проекции единичной результирующей массовых сил на координатные оси $F_x = \omega^2 x$, $F_y = \omega^2 y$, $F_z = -g$. Подставляя

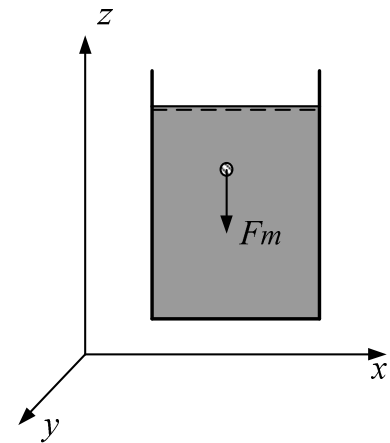


Рис. 3.1. Схема равновесия жидкости находящейся в покое в цилиндрическом сосуде

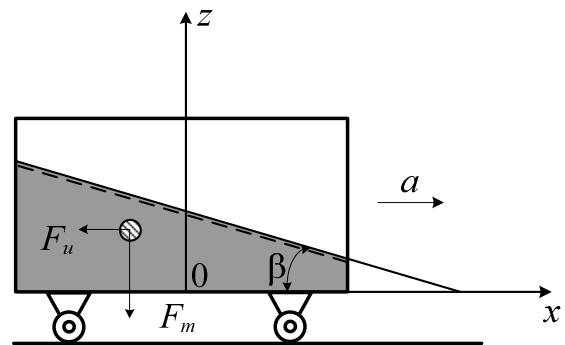


Рис. 3.2. Схема равновесия жидкости в горизонтальном сосуде, движущемся с постоянным ускорением

эти значения в уравнение (3.3), получаем дифференциальное уравнение поверхности равного давления в жидкости:

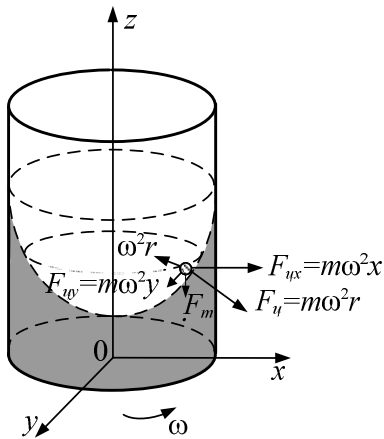


Рис. 3.3 Схема равновесия жидкости в цилиндрическом сосуде, вращающемся вокруг оси Oz с постоянной скоростью ω

$$\omega^2 \cdot x \cdot dx + \omega^2 \cdot y \cdot dy - g \cdot dz = 0.$$

В результате интегрирования получаем:

$$\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - g \cdot z = \text{const}.$$

Так как $x^2 + y^2 = r^2$, то:

$$\frac{\omega^2 r^2}{2} - g \cdot z = \text{const}.$$

Это уравнение параболоида вращения вокруг вертикальной оси. Следовательно, в жидкости, вращающейся с постоянной угловой скоростью, поверхности равного давления представляют семейство параболоидов вращения.

3. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ГИДРОСТАТИКИ

Рассмотрим жидкость, покоящуюся в сосуде, неподвижном относительно Земли (рис.3.4).

Для рассматриваемого случая действующей на жидкость массовой силой является только сила тяжести.

Направив ось OZ вертикально вверх, получим $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F_z = -g$, а подставив полученные величины в уравнение (3.1), получим:

$$dp = -\rho \cdot g \cdot dz,$$

что можно переписать в виде:

$$dz + \frac{dp}{\rho \cdot g} = 0. \quad (3.5)$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (3.5), получаем:

$$z + \frac{p}{\rho \cdot g} = C, \quad (3.6)$$

где C – постоянная интегрирования.

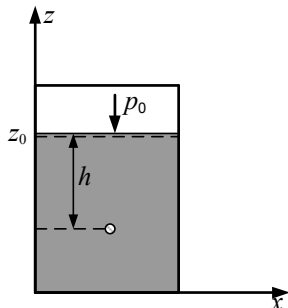


Рис. 3.4. Схема к выводу основного уравнения гидростатики

Значение постоянной интегрирования C определяется из известных граничных условий: $p = p_0$ при $z = z_0$. Подставляя эти условия в уравнение (3.6), имеем:

$$C = z_0 + \frac{p_0}{\rho \cdot g}. \quad (3.7)$$

Подставляя выражение (3.7) в (3.6) получаем:

$$z + \frac{p}{\rho \cdot g} = z_0 + \frac{p_0}{\rho \cdot g}, \quad (3.8)$$

или с учетом $z_0 - z = h$:

$$p = p_0 + \rho g h. \quad (3.9)$$

Уравнение (3.8) называется *основным уравнением гидростатики*. Уравнение (3.9) представляет вторую форму основного уравнения гидростатики.

Основное уравнение гидростатики является математическим выражением закона распределения гидростатического давления в жидкости: гидростатическое давление в некоторой точке, погруженной на глубину h относительно свободной поверхности, равно сумме внешнего давления p_0 , действующего на свободную поверхность жидкости, и давления столба жидкости высотой, равной глубине погружения рассматриваемой точки h , с площадью основания, равной единице.

4. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ ГИДРОСТАТИКИ

Ордината z рассматриваемой точки жидкости отсчитывается от произвольной горизонтальной плоскости XOY , принятой в качестве координатной. В гидравлике эту плоскость называют *плоскостью сравнения*, а отсчитанную от нее координату z точки – *геометрической высотой точки* или *геометрическим напором* в данной точке жидкости.

Величина $p/\rho g$ имеет линейную размерность и представляет собой геометрическую высоту, на которую поднимется жидкость под действием давления p . Указанную высоту можно измерить, если подсоединить к сосуду трубку, из которой полностью удален воздух. Жидкость в трубке поднимется на высоту $p/\rho g$. Если трубка открыта и давление на свободной поверхности равно атмосферному, то жидкость в трубке поднимется на высоту $p_{изб}/\rho g$, соответствующую избыточному давлению (рис. 3.5).

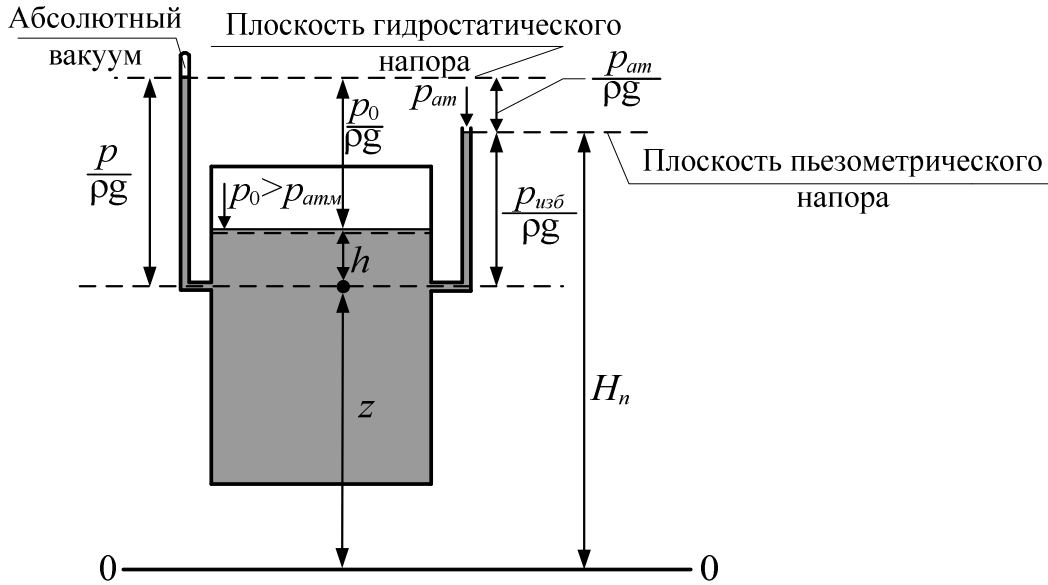


Рис. 3.5. Графическая иллюстрация напоров жидкости в сосуде при $p_0 > p_{atm}$

Высота $p/\rho g$ соответствует давлению p . Высота $p_{изб}/\rho g$ называется *пьезометрической высотой*. Высота, соответствующая давлению $p_{вак}$, называется *вакуумметрической высотой*. Эта высота может быть измерена с помощью простейшего вакуумметра (рис. 3.6).

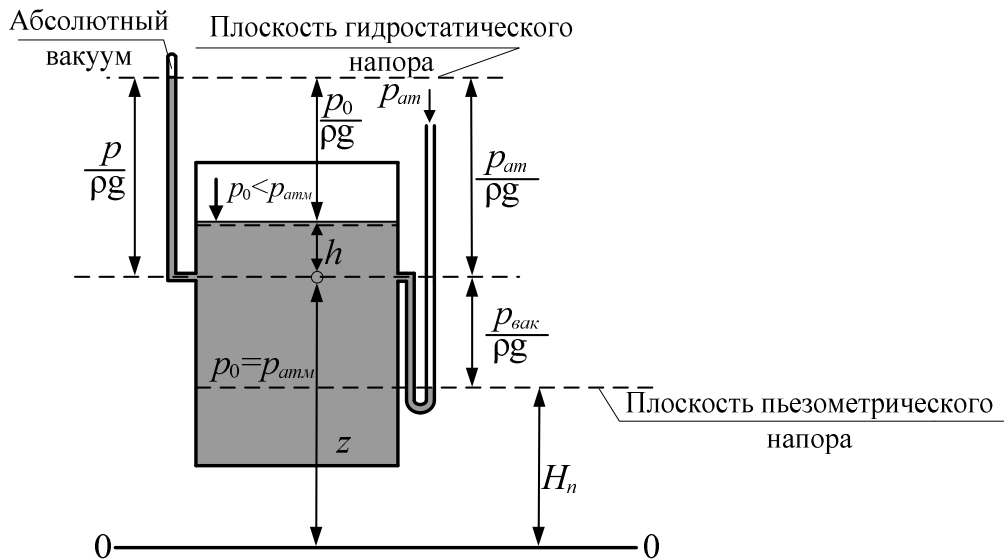


Рис. 3.6. Графическая иллюстрация напоров жидкости в сосуде при $p_0 < p_{atm}$

Сумму высот $z + p/\rho g$ называют *гидростатическим напором H* . Пьезометрический напор H_n меньше гидростатического напора на высоту, соответствующую атмосферному давлению, $p_{атм}/\rho g$.

Отложив от плоскости сравнения по вертикали отрезки $z + p/\rho g$ для различных точек покоящейся жидкости, обнаружим, что геометрическое место концов таких отрезков будет представлять собой горизонтальную плоскость, расположенную на расстоянии $z + p/\rho g$ от плоскости сравнения. Такая плоскость называется *плоскостью гидростатического напора*, а если откладывать отрезки $z + p_{изб}/\rho g$, – то *плоскостью пьезометрического напора*.

5. ЗАКОН ПАСКАЛЯ И ЕГО ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ. ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ

Применив основное уравнение гидростатики к двум точкам покоящейся жидкости $z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g}$, изменим давление в первой точке на Δp_1 , не нарушая равновесия жидкости (рис 3.7). Тогда во второй точке давление должно измениться на некоторую величину Δp_2 . Из основного уравнения гидростатики следует, что:

$$z_1 + \frac{p_1 + \Delta p_1}{\rho \cdot g} = z_2 + \frac{p_2 + \Delta p_2}{\rho \cdot g},$$

или $\Delta p_1 = \Delta p_2$

т.е. изменение давления в любой точке покоящейся жидкости передается в остальные ее точки без изменений. Это положение называется *законом Паскаля*.

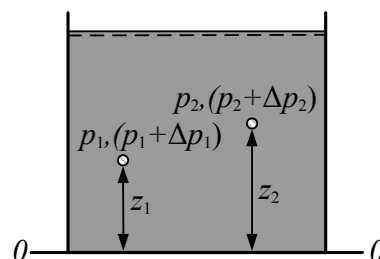


Рис. 3.7. Схема к выводу закона Паскаля

На этом законе основан принцип работы гидравлических машин. Рассмотрим одну из них.

Гидравлический пресс – это машина, которая используется для получения больших усилий при прессовании, штамповке, испытании материалов и т.п. Она состоит из двух сообщающихся цилиндров с поршнями малого d и большего D диаметров (рис. 3.8.). Первый соединен с рычагом, дающим дополнительный выигрыш в силе. Если к рычагу приложена сила P_0 , то на малый поршень передается сила:

$$P_1 = P_0 \cdot \frac{a}{b}.$$

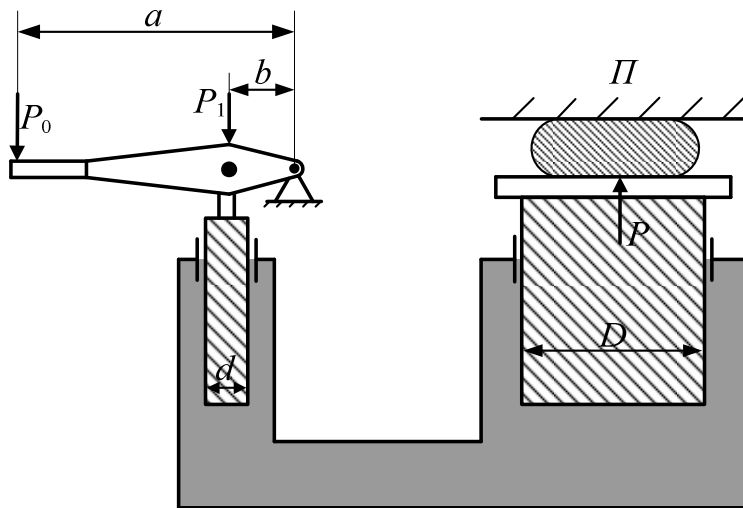


Рис. 3.8. Гидравлический пресс

Следовательно, в жидкости под поршнем давление увеличивается на величину

$$\Delta p = \frac{P_1}{\omega} = \frac{P_0 \frac{a}{b}}{\omega},$$

где ω – площадь поперечного сечения малого поршня.

Изменение давления передается во все точки занятого жидкостью

пространства, а значит, и под большой поршень. Пренебрегая практически незначительной поправкой на разность высотных положений нижней поверхности поршней, получаем силу давления на большой поршень:

$$P = \Delta p \cdot \Omega = P_0 \frac{a}{b} \cdot \frac{\Omega}{\omega},$$

где Ω – площадь поперечного сечения большого поршня.

Отношение Ω/ω называют *передаточным числом*. Очевидно, для цилиндров $\Omega/\omega = (D/d)^2$.

Учитывая потери энергии на трение в движущихся частях введем КПД η , получаем расчетную формулу:

$$P = P_0 \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{D}{d}\right)^2 \cdot \eta.$$

Обычно $\eta = 0,80 - 0,85$. В современных гидравлических прессах развиваются усилия до 700 000 кН.

Графическое изображение давления. Графическое изображение изменения гидростатического давления вдоль плоской стенки в зависимости от глубины называется диаграммой распределения давления, или *эюрой давления*.

Как следует из основного уравнения гидростатики, давление вдоль какой-либо вертикальной стенки изменяется по линейному закону

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h.$$

Если манометрическое давление в точке на глубине h_1 (рис. 3.9.) равно $p_{m1} = \rho \cdot g \cdot h_1$, а в точке на глубине h_2 равно $p_{m2} = \rho \cdot g \cdot h_2$, то:

$$\frac{p_{m1}}{p_{m2}} = \frac{h_1}{h_2}.$$

Поскольку давление жидкости всегда направлено по внутренней нормали к площадке действия, отложив в соответствующих точках перпендикуляры, изображающие в масштабе манометрическое давление, и соединив их концы, можно получить эпюру манометрического давления на данную стенку.

В качестве двух исходных точек для построения линейной графической зависимости удобнее взять точку O на свободной поверхности, где манометрическое давление равно нулю, и точку A на дне, где манометрическое давление $p_{MA} = \rho \cdot g \cdot h$.

Эпюра полного гидростатического давления изобразится трапецией (рис. 3.9), так как в каждой точке вдоль стенки абсолютное давление больше манометрического на величину p_0 . Эпюра давления строится со стороны жидкости и штрихуется по направлению действия давления. Каждый отрезок эпюры гидростатического давления в масштабе изображает направление давления в данной точке и его значение, например отрезок CB изображает манометрическое давление в точке B , а отрезок DB – полное гидростатическое давление в той же точке.

На рис. 3.10 представлена эпюра манометрического давления на стенку, наклоненную к горизонту под углом α . Ординаты эпюры давления всегда перпендикулярны площадке действия.

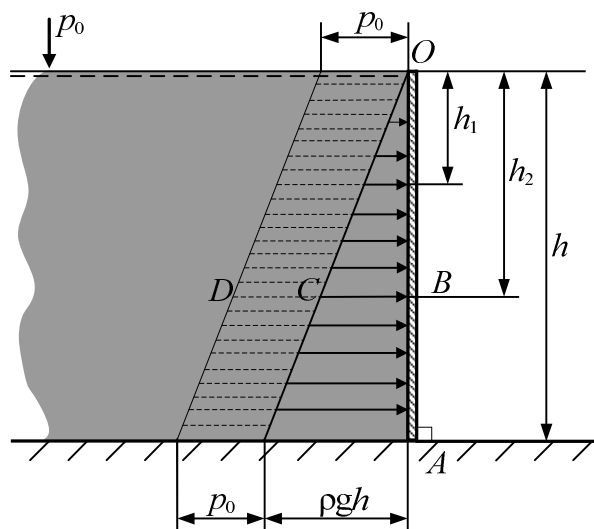


Рис. 3.9. Эпюра гидростатического давления на плоскую вертикальную стенку

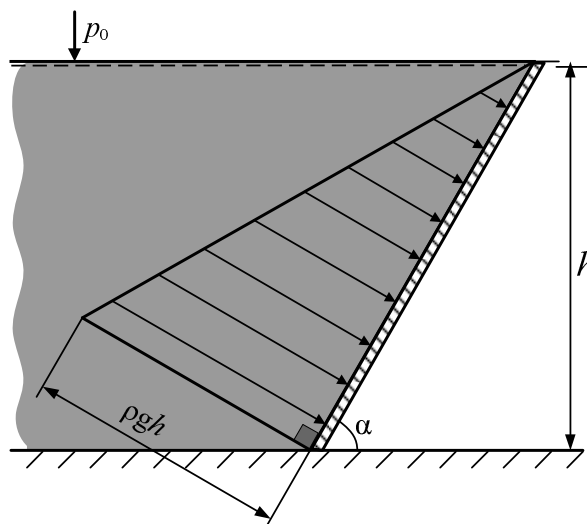


Рис. 3.10. Эпюра гидростатического давления на плоскую стенку, наклоненную под углом α к горизонту

6. АБСОЛЮТНОЕ И МАНОМЕТРИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ. ВАКУУМ. ПРИБОРЫ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ

Применив основное уравнение гидростатики для двух точек, одна из которых расположена на свободной поверхности, получим:

$$z + \frac{p}{\rho \cdot g} = z_0 + \frac{p_0}{\rho \cdot g}$$

или

$$p = p_0 + g \cdot \rho \cdot (z_0 - z),$$

где p_0 – давление на свободной поверхности;

$z_0 - z = h$ – глубина погружения точки A (см. рис. 3.4).

Отсюда следует, что давление в жидкости увеличивается с глубиной погружения, а формула *абсолютного гидростатического давления* в точке покоящейся жидкости имеет вид:

$$p_{абс} = p_0 + \rho \cdot g \cdot h. \quad (3.10)$$

Часто давление на свободной поверхности воды равно атмосферному давлению $p_0 = p_{атм}$, в этом случае абсолютное давление определяется как:

$$p_{абс} = p_{атм} + \rho \cdot g \cdot h, \quad (3.10^*)$$

а $\rho \cdot g \cdot h$ называют *избыточным давлением* и обозначают $p_{изб}$.

Избыточное давление определяется как разность абсолютного и атмосферного давлений:

$$p_{изб} = p_{абс} - p_{атм} = p_0 + \rho \cdot g \cdot h - p_{атм},$$

при $p_0 = p_{атм}$:

$$p_{изб} = \rho \cdot g \cdot h$$

Абсолютное гидростатическое давление может быть меньше атмосферного, но всегда больше нуля. Избыточное давление может быть и больше, и меньше нуля.

Положительное избыточное давление называют *манометрическим давлением* $p_{ман}$:

$$p_{ман} = p_{абс} - p_{атм}, (p_{абс} > p_{атм}).$$

Манометрическое давление показывает, на сколько абсолютное давление превышает атмосферное.

Отрицательное избыточное давление называют *вакуумметрическим давлением* $p_{вак}$:

$$p_{вак} = p_{атм} - p_{абс}, (p_{абс} < p_{атм}).$$

Вакуумметрическое давление показывает насколько абсолютное давление ниже атмосферного.

Практически наибольший вакуум в жидкости ограничен значением давления насыщенного пара жидкости при данной температуре.

Проиллюстрируем графически взаимосвязь между абсолютным, манометрическим и вакуумметрическим давлениями (рис. 3.11).

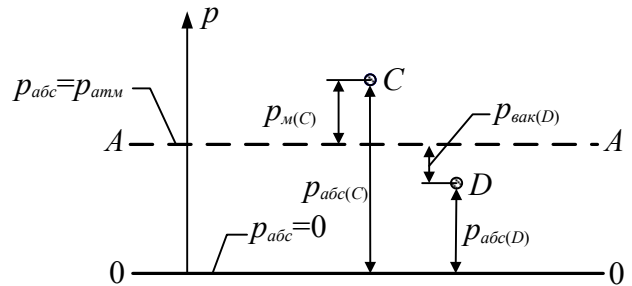


Рис. 3.11. Графическая иллюстрация давления

Представим плоскость, во всех точках которой абсолютное давление $p_{abc} = 0$ (линия 0-0 на рис. 3.11). Выше этой плоскости

на расстоянии, соответствующем атмосферному давлению, расположена плоскость, во всех точках которой $p_{abc} = p_{atm}$ (линия A-A). Таким образом, линия 0-0 является базой для отсчета абсолютного давления, а линия A-A – базой для отсчета манометрического давления и вакуума.

Если в точке C в жидкости абсолютное давление $p_{abc(C)}$ больше атмосферного, то расстояние от точки C до линии A-A будет равно манометрическому давлению $p_{m(C)}$ в точке C. Если в точке D в жидкости абсолютное давление $p_{abc(D)}$ меньше атмосферного, то расстояние от точки D до линии A-A будет соответствовать вакуумметрическому давлению $p_{(vak)D}$ в точке D.

Приборы для измерения гидростатического давления можно подразделить на две группы: *жидкостные* и *механические*. В основе жидкостных приборов для измерения давления лежит принцип сообщающихся сосудов.

Простейшим жидкостным прибором для измерения давления является пьезометр. Пьезометр представляет собой прозрачную трубку диаметром не менее 5 мм (для избежания капиллярности). Один ее конец присоединен к сосуду, в котором измеряется давление, а другой конец открыт. Схема установки пьезометра показана на рис. 3.12, а.

Абсолютное давление в сосуде в точке C присоединения пьезометра в соответствии с формулой (3.10^{*}) составляет:

$$p_C = p_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_n, \quad (3.11)$$

где h_n – высота подъема жидкости в пьезометре (пьезометрическая высота).

Из уравнения (3.11) находим, что:

$$h_n = \frac{p_{abc} - p_{atm}}{\rho g} = \frac{p_m}{\rho g}.$$

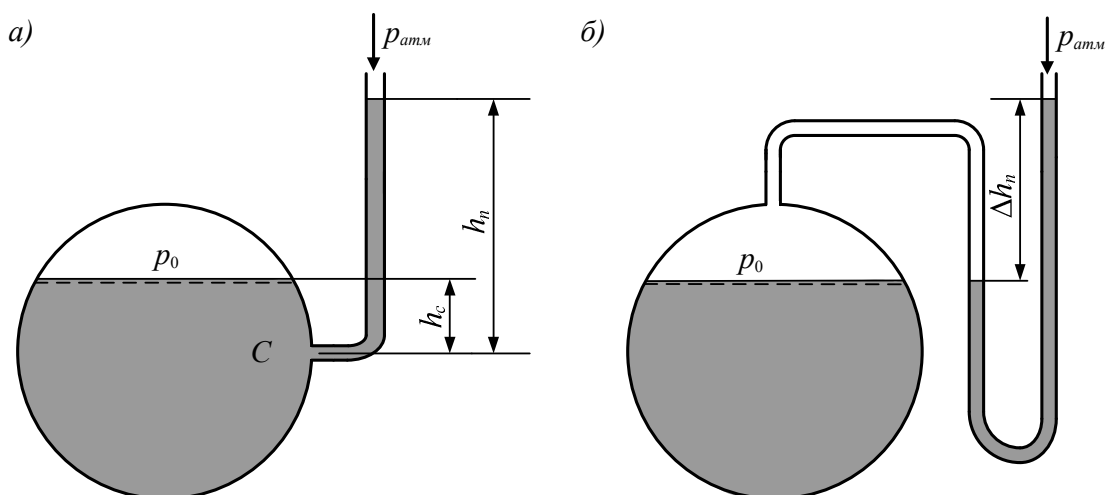


Рис. 3.12. Схема установки пьезометров: а – для измерения давления в точке присоединения; б – для измерения давления в сосуде над свободной поверхностью

Таким образом, высота подъема жидкости в пьезометре определяется избыточным (манометрическим) давлением в точке C . Измерив высоту подъема жидкости в пьезометре, можно определить избыточное давление в точке его присоединения.

С помощью пьезометра можно определить давление p_0 в сосуде над свободной поверхностью. Давление в точке C :

$$p_C = p_0 + \rho \cdot g \cdot h_c, \quad (3.12)$$

где h_c – глубина погружения точки C относительно уровня жидкости в сосуде.

Из уравнений (3.11) и (3.12) находим:

$$p_0 = p_{atm} + \rho g (h_n - h_c) = p_{atm} + \rho g \Delta h_n.$$

В этом случае для удобства определения разности $h_n - h_c$ схема установки пьезометра может быть такой, как на рис. 3.12, б.

Пьезометр является очень чувствительным и точным прибором, однако он удобен только для измерения небольших давлений; при больших давлениях трубка пьезометра получается, чрезмерно длинной, что осложняет измерения. В этих случаях применяют так называемые жидкостные манометры, в которых давление уравнивается не той же жидкостью, что и жидкость, находящаяся в сосуде, как это имеет место в пьезометре, а жидкостью большего удельного веса; обычно такой жидкостью является ртуть. Так как удельный вес ртути больше удельного веса воды в 13,6 раза, то при измерении одних и тех же давлений трубка ртутного манометра оказывается значительно короче пьезометрической трубки и сам прибор получается более компактным.

Ртутный манометр (рис. 3.13) представляет собой обычно U-образную стеклянную трубку, изогнутое колено которой заполняется ртутью. Под действием давления p в сосуде уровень ртути в левом колене манометра понижается, а в правом – повышается. При этом гидростатическое давление в точке A , взятой на поверхности ртути в левом колене, по аналогии с предыдущим, определяется следующим образом:

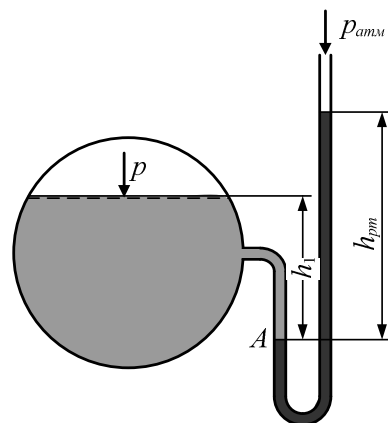


Рис. 3.13. Ртутный манометр

$$p_A = p + \rho_{ж} g h_1 = p_{атм} + \rho_{рт} \cdot g \cdot h_{рт},$$

где $\rho_{ж}$ и $\rho_{рт}$ – плотности соответственно жидкости в сосуде и ртути.

Отсюда:

$$p = p_{атм} + \rho_{рт} g h_{рт} - \rho_{ж} g h_1.$$

В тех случаях, когда необходимо измерить не давление в сосуде, а разность давлений в двух сосудах или же в двух точках жидкости в одном и том же сосуде, применяют *дифференциальные манометры*. Дифференциальный манометр, присоединенный к двум сосудам A и B , представлен на рис. 3.14. Здесь для давления p на уровне поверхности ртути в левом колене имеем:

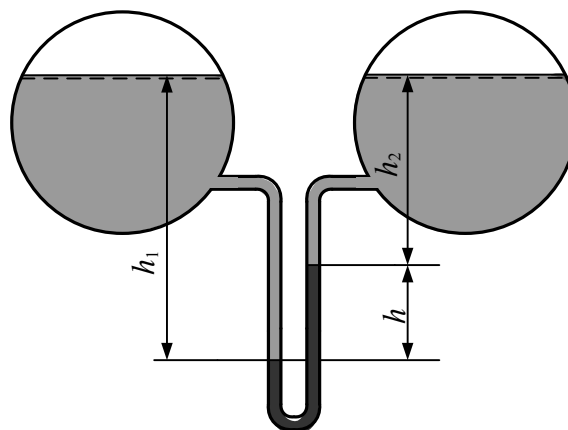


Рис. 3.14. Дифференциальный манометр

$$p = p_A + \rho_{ж} g h_1 = p_B + \rho_{ж} g h_2 + \rho_{рт} g h,$$

откуда:

$$p_A - p_B = \rho_{ж} g (h_2 - h_1) + \rho_{рт} g h,$$

или, так как $h_2 - h_1 = -h$,

$$p_A - p_B = (\rho_{рт} - \rho_{ж}) g h$$

Таким образом, разность давлений определяется разностью уровней в двух коленах дифференциального манометра.

Для повышения точности измерений, а также при измерении незначительных давлений применяются *микроманометры*.

Микроманометр состоит из резервуара A , присоединяемого к сосуду, в котором измеряется давление, и манометрической трубки B , угол наклона α к горизонту которой можно менять. Одна из конструкций микроманометра, так называемый наклонный микроманометр, изображена на рис. 3.15.

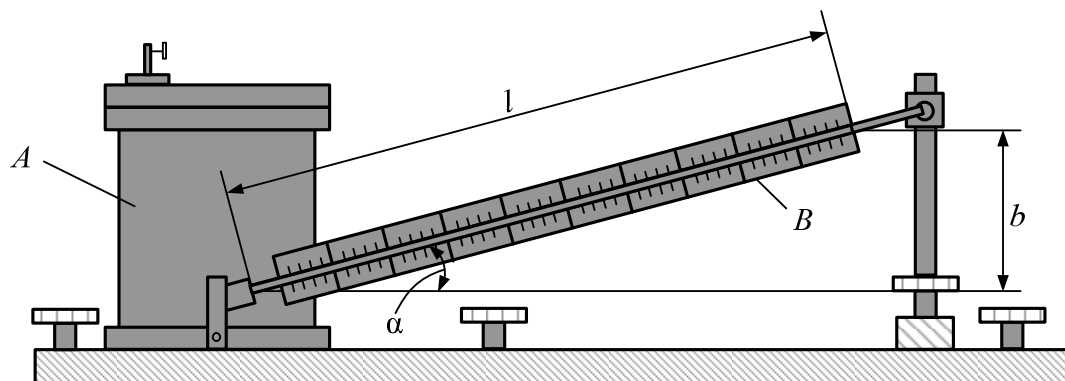


Рис. 3.15. Микроманометр

Давление у основания трубки, измеряемое микроманометром, определяется выражением:

$$p = \rho g l \sin \alpha$$

Микроманометр обладает большей чувствительностью, так как он позволяет вместо малой высоты h отсчитывать длину l тем большую, чем меньше угол α .

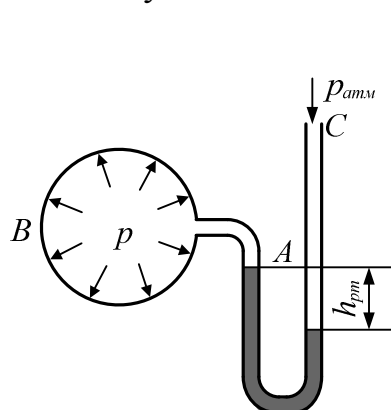


Рис. 3.16. Вакуумметр

Для измерения давления меньше атмосферного (в сосуде имеется вакуум) служат приборы, называемые *вакуумметрами*. Однако вакуумметры обычно измеряют не непосредственно давление, а вакуум, то есть недостаток давления до атмосферного. Принципиально они ничем не отличаются от ртутных манометров и представляют собой заполненную ртутью изогнутую трубку (рис. 3.16), один конец которой A соединяется с сосудом B , где измеряется давление p , а другой конец C открыт. Пусть, например, измеряется давление газа в сосуде B , в этом случае получаем:

$$p_{атм} = p + \rho_{рт} g h_{рт}, \quad p = p_{атм} - \rho_{рт} g h_{рт}.$$

Высоту

$$h_{рт} = \frac{p_{атм} - p}{\rho_{рт} g},$$

соответствующую вакууму в сосуде называют *вакуумметрической высотой* и обозначают $h_{вак}$.

Когда необходимо измерять большие давления, применяют приборы второго типа – механические. Наибольшим распространением пользуется на практике *пружинный манометр* (рис. 3.17, а). Он состоит из полой тонкостенной изогнутой латунной трубки (пружины) *A*, один конец которой запаян и соединен при помощи цепи *B* с зубчатым механизмом *C*; второй конец трубки – открытый – сообщается с сосудом, в котором замеряется давление. Через этот конец в трубку *A* поступает жидкость. Под действием давления пружина частично распрямляется и посредством зубчатого механизма приводит в движение стрелку, по отклонению которой судят о величине давления. Такие манометры обычно снабжаются градуированной шкалой, показывающей давление в атмосферах, а иногда оборудуются и самописцами.

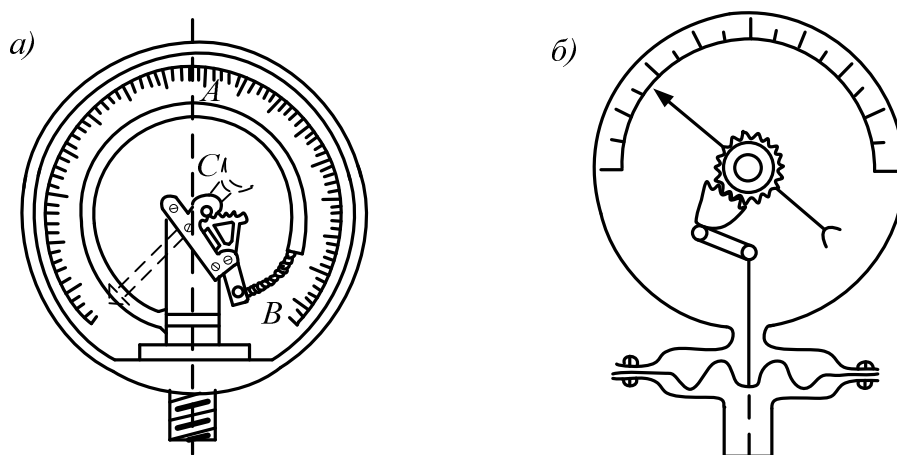


Рис. 3.17. Пружинный (а) и мембранный (б) манометры

Кроме того, существуют так называемые *мембранные манометры* (рис. 3.17, б), в которых жидкость воздействует на тонкую металлическую (или из прорезиненной материи) пластинку – мембрану. Получающаяся при этом деформация мембраны посредством системы рычагов передается стрелке, указывающей величину давления.

7. ДАВЛЕНИЕ ЖИДКОСТИ НА ПЛОСКИЕ СТЕНКИ

Рассмотрим жидкость, покоящуюся относительно Земли. Выберем в жидкости горизонтальную площадку ω . Все точки этой площадки находятся на одинаковой глубине и испытывают одинаковое давление со стороны покоящейся жидкости. Если свободная поверхность жидкости открыта в

атмосферу ($p_0 = p_{am}$), то сила избыточного давления на площадку ω определяется по формуле:

$$P_{изб} = \rho \cdot g \cdot h \cdot \omega,$$

то есть численно равна весу жидкости, заключенной в вертикальной призме основанием ω и высотой h .

Сила $P_{изб}$ направлена со стороны жидкости перпендикулярно стенке. Линия действия силы пересекает площадку ω в центре тяжести, так как давление распределено по площадке равномерно.

При равенстве давлений на свободную поверхность жидкости в сосудах p_0 (рис. 3.18), плотностей ρ , площадей основания ω и глубин h независимо от формы сосуда сила давления на горизонтальное дно будет одной и той же (*гидростатический парадокс*).

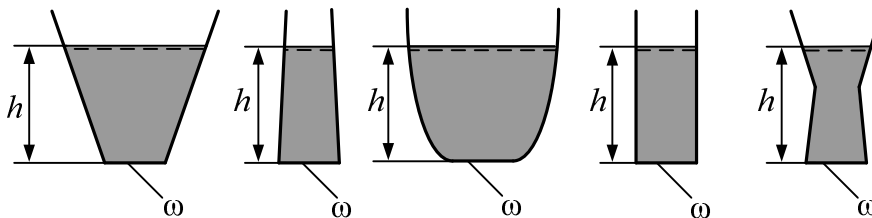


Рис. 3.18. Гидравлический парадокс

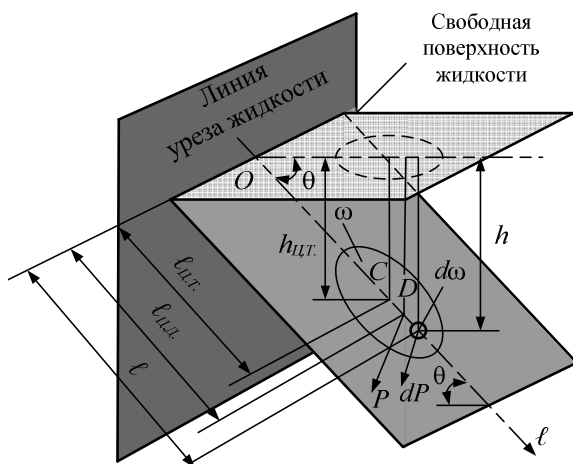


Рис. 3.19. Схема к определению силы давления на плоскую наклонную стенку

Рассмотрим плоскую стенку с площадью смоченной части ω , наклоненную к горизонту под углом θ (рис. 3.19). Гидростатическое давление жидкости не остается постоянным в пределах смоченной части стенки. Разбив площадь ω на элементарные площадки $d\omega$ и считая в пределах $d\omega$ давление p неизменным, выразим значение силы давления dP на элементарную площадку как $dP = p d\omega$. Вектор dP направлен со стороны жидкости по нормали к площадке. Суммар-

ное воздействие жидкости сведется к равнодействующей силе P , значение которой определяется по соотношению:

$$P_{абс} = \int_{\omega} (p_0 + \rho \cdot g \cdot h) \cdot d\omega = p_0 \cdot \omega + \int_{\omega} \rho \cdot g \cdot h \cdot d\omega \quad (3.13)$$

Так как расстояние l , измеряемое по стенке от линии уреза воды (от оси OY) до элементарной площадки $d\omega$, равно $l = h/\sin\theta$, то при $\rho \cdot g = \text{const}$ получим:

$$\int_{\omega} \rho \cdot g \cdot h \cdot d\omega = \rho \cdot g \cdot \sin\theta \int_{\omega} l \cdot d\omega$$

Интеграл $\int_{\omega} l \cdot d\omega$ представляет собой статический момент площади ω относительно оси OY , то есть в данном случае относительно линии уреза жидкости. Статический момент равен произведению площади ω на плечо $l_{ц.м.}$ момента:

$$\int_{\omega} h \cdot d\omega = \sin\theta \int_{\omega} l \cdot d\omega = \sin\theta \cdot l_{ц.м.} \cdot \omega = h_{ц.м.} \cdot \omega.$$

Выражение (3.13) примет вид:

$$P_{abc} = (p_0 + \rho \cdot g \cdot h_{ц.м.}) \cdot \omega.$$

Сила давления покоящейся жидкости на плоскую наклонную стенку равна произведению площади ω на давление жидкости в центре тяжести смоченной части стенки. Сила направлена со стороны жидкости по нормали к стенке.

При $p_0 = p_{am}$ сила избыточного давления равна:

$$P_{изб} = \rho \cdot g \cdot h_{ц.м.} \cdot \omega.$$

Далее силу избыточного давления (при $p_0 = p_{am}$) будем обозначать P (без индекса).

Линия действия силы P пересекает площадку в точке D (рис. 3.19), которая называется *центром давления*.

Центр давления не совпадает с центром тяжести площади ω , поэтому необходимо определять координаты центра давления.

Сила $P_0 = p_0\omega$, связанная с действием в каждой точке смоченной площади ω одного и того же давления p_0 , приложена в центре тяжести смоченной площади (точке C). Сила P приложена в другой точке, не совпадающей с точкой C .

Если необходимо найти точку приложения суммарной силы P_{abc} , то ее определяют по правилу сложения сил.

Обычно для расчетов гидротехнических сооружений представляет интерес сила избыточного давления P (при $p_0 = p_{am}$) и координаты точки ее приложения.

Пусть рассматриваемая площадь ω имеет ось симметрии (линия Ol на рис. 3.19). Тогда центр давления D будет расположен на оси симметрии и для определения его положения достаточно найти расстояние от линии уреза жидкости до точки D , то есть $l_{y,d}$.

Воспользуемся теоремой моментов: момент равнодействующей относительно произвольной оси силы равен сумме моментов составляющих сил относительно той же оси. За ось моментов в данном случае примем линию уреза жидкости, то есть ось OY . Тогда

$$P \cdot l_{y,d} = \int_{\omega} l \cdot dP. \quad (3.14)$$

Помня, что

$$P = \rho \cdot g \cdot h_{y,m} \cdot \omega; \quad dP = \rho \cdot g \cdot h \cdot d\omega = \rho \cdot g \cdot \sin \theta \cdot l \cdot d\omega,$$

подставим эти значения в (3.14):

$$\rho \cdot g \cdot h_{y,m} \cdot \omega \cdot l_{y,d} = \rho \cdot g \cdot \sin \theta \int_{\omega} l^2 d\omega = \rho \cdot g \cdot \sin \theta \cdot J_y, \quad (3.15)$$

где J_y – момент инерции смоченной площади ω относительно оси, совпадающей с линией уреза жидкости (оси OY).

Из (3.15) имеем:

$$l_{y,d} = \sin \theta \cdot J_y / \omega \cdot h_{y,m} = J_y / \omega \cdot l_{y,m}. \quad (3.16)$$

Перенесем ось момента инерции в центр тяжести площади. Моменты инерции относительно параллельных осей связаны между собой соотношением:

$$J_y = J_0 + \omega \cdot l_{y,m}^2,$$

где J_0 – момент инерции смоченной площади относительно оси, проходящей параллельно линии уреза жидкости через центр тяжести C этой площади.

Подставив значение J_y в (3.16), получим:

$$l_{y,d} = l_{y,m} + J_0 / \omega \cdot l_{y,m}$$

или

$$l_{y,d} = l_{y,m} + J_0 / S,$$

где $S = \omega \cdot l_{y,m}$ – статический момент смоченной площади относительно линии уреза жидкости.

Центр давления силы избыточного давления на плоскую наклонную площадку расположен ниже центра тяжести смоченной площади, считая по оси симметрии (по наклону) стенки, на $J_0 / (\omega \cdot l_{y,m})$.

8. ДАВЛЕНИЕ ЖИДКОСТИ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ СТЕНКИ

Рассмотрим (рис. 3.20) некоторую ограниченную часть твердой цилиндрической поверхности, которую назовем цилиндрической стенкой. Пусть рассматриваемая стенка находится под односторонним воздействием покоящейся жидкости, которое сводится к тому, что в каждой точке на стенку действует давление жидкости. Разобьем стенку на элементарные площадки. В силу малости площадок будем считать их плоскими и выразим элементарную силу давления на них в общем виде $dP = pd\omega$. Силы dP уже не будут направлены параллельно друг другу, их линии действия могут не пересекаться в одной точке, и их сумма может не сводиться к одной равнодействующей.

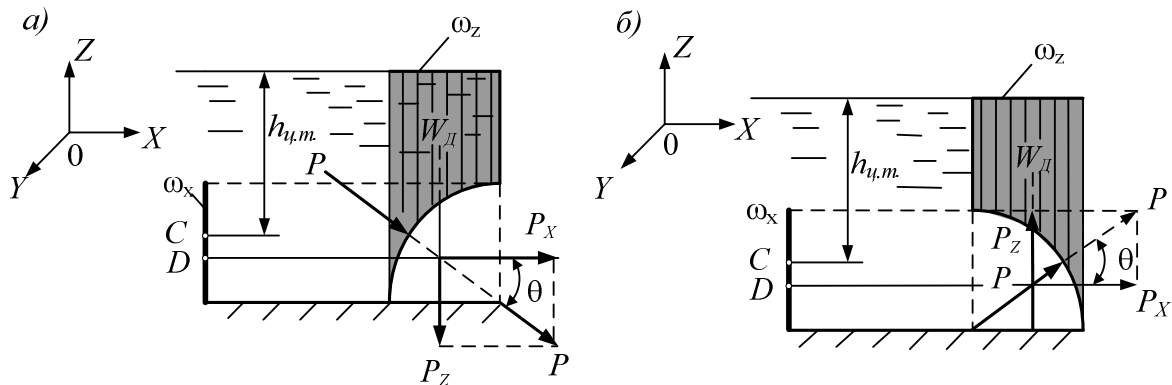


Рис. 3.20. Схема к определению силы давления жидкости на цилиндрическую стенку

Для шаровой или круговой цилиндрической стенки элементарные силы давления, будучи нормальными к элементарным площадкам на этих поверхностях, направлены по радиусам и, следовательно, пересекутся в центре сферы или в центре круга (поперечного сечения цилиндра).

Определение сил давления на цилиндрические и шаровые поверхности имеет большое значение, так как в гидротехнических сооружениях обычно применяются конструкции с такими поверхностями (секторные, сегментные, вальцовые и шаровые затворы, водонапорные баки и т.п.).

Рассмотрим цилиндрические стенки, находящиеся под односторонним воздействием покоящейся жидкости. Определим силу избыточного давления. При этом условимся одну из осей координат направлять вдоль образующей цилиндрической поверхности.

Цилиндрическая поверхность с горизонтальной образующей. Направим ось OY параллельно образующей (рис. 3.20), а ось OZ – вертикально вверх.

Значение силы давления на цилиндрическую поверхность в данном случае определяется следующим образом:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2}, \quad (3.17)$$

где P_x и P_z – горизонтальная и вертикальная составляющие силы давления.

Выделим на цилиндрической поверхности элементарную площадку $d\omega$, на которую действует направленная по нормали элементарная сила $dP = \rho g h d\omega$. Найдем горизонтальную dP_x и вертикальную dP_z составляющие силы dP :

$$dP_x = dP \cdot \cos(\widehat{dP, OX}) = \rho \cdot g \cdot h \cdot d\omega \cdot \cos(\widehat{dP, OX}),$$

$$dP_z = dP \cdot \cos(\widehat{dP, OZ}) = \rho \cdot g \cdot h \cdot d\omega \cdot \cos(\widehat{dP, OZ}).$$

Учитывая, что

$$d\omega \cdot \cos(\widehat{dP, OX}) = d\omega_x$$

и

$$d\omega \cdot \cos(\widehat{dP, OZ}) = d\omega_z,$$

имеем

$$dP_x = \rho \cdot g \cdot h \cdot d\omega_x$$

$$dP_z = \rho \cdot g \cdot h \cdot d\omega_z,$$

где $d\omega_x$ – проекция элементарной площадки $d\omega$ на плоскость, перпендикулярную оси OX ;

$d\omega_z$ – проекция элементарной площадки $d\omega$ на плоскость, перпендикулярную оси OZ .

Проинтегрировав, получим для горизонтальной составляющей силы P :

$$P_x = \rho \cdot g \cdot h'_{y.m} \omega_x, \quad (3.18)$$

где ω_x – проекция всей цилиндрической поверхности на плоскость, нормальную к оси OX ;

$h'_{y.m}$ – глубина центра тяжести проекции ω_x под пьезометрической плоскостью.

Для вертикальной составляющей получим:

$$P_z = \rho \cdot g \cdot \int_{\omega_z} z \cdot d\omega_z.$$

Интеграл $\int_{\omega_z} z \cdot d\omega_z$ представляет собой объем призмы, ограниченной снизу цилиндрической поверхностью, а сверху – ее проекцией ω_z на пьезометрическую плоскость. Направляющие этой призмы – вертикальные прямые. Полученное таким образом тело называется *телом давления*. *Тело давления* – это объемная фигура, ограниченная снизу цилиндрической поверхностью, по бокам вертикальными плоскостями, проходящими через крайние точки цилиндрической поверхности, и сверху горизонтальной плоскостью, совпадающей с пьезометрической.

Вертикальная составляющая P_z численно равна весу жидкости в объеме тела давления:

$$P_z = \rho \cdot g \cdot \int_{\omega_z} z \cdot d\omega_z = \rho \cdot g \cdot W_\partial, \quad (3.19)$$

где $W_\partial = \int_{\omega_z} z \cdot d\omega_z$ – объем тела давления.

На рис. 3.20 тело давления заштриховано вертикальными линиями.

Горизонтальная составляющая P_x проходит через центр давления проекции ω_x , а вертикальная составляющая P_z проходит через центр тяжести тела давления.

Направление вертикальной составляющей P_z для схемы, изображенной на рис. 3.20, *а* – вниз, а на рис. 3.20, *б* – вверх.

Направление линии действия силы P определяется направляющими косинусами:

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{P, OX}) &= P_x / P; \\ \cos(\widehat{P, OZ}) &= P_z / P. \end{aligned} \quad (3.20)$$

9. ЗАКОН АРХИМЕДА

Рассмотрим полностью погруженное в жидкость твердое тело, объем которого W_m , а форма такова, что любая прямая пересекает поверхность этого тела только в двух точках (рис. 3.21). Для определения силы P давления жидкости на тело воспользуемся результатами предыдущего пункта.

Горизонтальные составляющие силы P_x и P_y взаимно уравновешиваются. Вертикальная составляющая силы давления P_z равна весу жидкости в объеме тела.

Общие сведения

Гидростатическое давление представляет собой напряжение сжатия в точке, расположенной внутри покоящейся жидкости (рис. 1).

Если ΔP – сила, действующая на площадку $\Delta\omega$ на произвольно выбранной плоскости, проходящей через заданную точку в покоящейся жидкости, то $\frac{\Delta P}{\Delta\omega}$ – си-

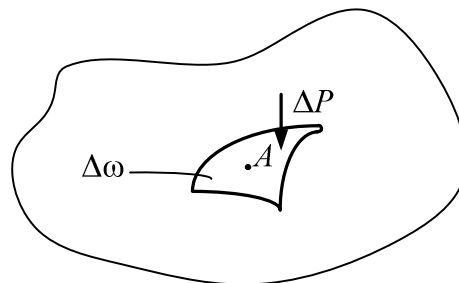


Рис. 1. К понятию давления

ла, приходящаяся на единицу площади, то есть напряжение. Так как при равновесии жидкости сила ΔP может быть только сжимающей силой, то это напряжение пред-

ставляет собой среднее для данной площадки напряжения сжатия. Для получения значения напряжения в точке надо определить предел отношения

$\frac{\Delta P}{\Delta\omega}$ при $\Delta\omega \rightarrow 0$:

$$p = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta\omega}. \quad (1)$$

Записанное выражение является определением гидростатического давления. Фактическое гидростатическое давление, действующее в точке называется, обычно, *абсолютным давлением*:

$$P_{абс} = P_0 + \gamma h, \quad (2)$$

где P_0 – давление на свободной поверхности жидкости;

γ – удельный вес жидкости, $\gamma = \rho \cdot g$;

h – глубина погружения точки под уровень свободной поверхности.

Выражение (2) называется основным законом гидростатики.

Если $P_0 = P_{атм}$ (атмосферное давление), то уравнение (2) принимает вид:

$$P_{абс} = P_{атм} + \gamma h. \quad (3)$$

Разность между абсолютным и атмосферным давлениями называется *избыточным давлением*

$$P_{изб} = P_{абс} - P_{атм} = \gamma h. \quad (4)$$

Избыточное давление, как разность $P_{абс} - P_{атм}$ может быть и больше и меньше нуля. Если избыточное давление больше нуля ($P_{абс} > P_{атм}$), то оно называется *манометрическим давлением*:

$$P_{ман} = P_{абс} - P_{атм}, \quad (5)$$

Если избыточное давление меньше нуля ($P_{абс} < P_{атм}$), то оно называется *вакуумметрическим давлением*:

$$P_{вак} = -P_{изб} = P_{атм} - P_{абс} \quad (6)$$

Таким образом, манометрическое давление показывает, насколько абсолютное давление больше атмосферного, а вакуумметрическое давление – насколько атмосферное давление больше абсолютного.

Для измерения давления используют различные единицы измерения, представленные в табл. 1.

Таблица 1

Единицы измерения давления

Единица	атм	мм вод. ст.	Па	мм рт. ст.
1 мм рт. ст	$1,32 \cdot 10^{-3}$	13,6	$1,33 \cdot 10^2$	1
1 атм	1	$1,03 \cdot 10^4$	$1,01 \cdot 10^5$	$7,6 \cdot 10^2$
1 Па	$9,87 \cdot 10^{-6}$	0,102	1	$7,50 \cdot 10^{-3}$
1 кгс/см ²	0,968	10^4	$9,81 \cdot 10^4$	$7,36 \cdot 10^2$

В зависимости от необходимости измерения атмосферного, абсолютного, манометрического или вакуумметрического давления существуют несколько видов приборов для измерения давления.

Приборы, предназначенные для измерения атмосферного давления, называются *барометрами*, для измерения манометрического давления – *манометрами*, для измерения вакуума – *вакуумметрами*. Приборы, позволяющие измерять избыточное давление и вакуум, называются *мановакуумметрами*. В некоторых случаях бывает достаточно знать разницу давлений в двух различных точках. Измерение разницы давления может быть выполнено с помощью дифференциального манометра.

По принципу действия все приборы можно разделить на *жидкостные, механические, грузопоршневые, электрические* и *комбинированные*.

К жидкостным относятся приборы, в которых измеряемое давление уравнивается давлением столба жидкости, высота которого служит мерой давления: например, ртутные барометры, дифференциальные манометры, пьезометры с наклонной шкалой и т.д.

В пружинных приборах действию измеряемого давления подвергается упругий элемент (трубка, мембрана, сильфон). Под воздействием давления возникает деформация упругого элемента, величина которого служит мерой давления.

Действие электрических приборов основано на изменении под действием давления омического или емкостного сопротивления элементов или на использовании пьезометрического эффекта.

В грузопоршневых приборах гидростатическое давление, действующее на поршень, уравнивается приложенной к нему внешней силой (обычно грузом).

Жидкостные манометры – пьезометры применяются для измерения избыточного давления и представляют собой (рис. 2) стеклянную, установленную строго вертикально трубку 1 с открытым в атмосферу верхним концом. Нижний конец трубки соединяется с местом измерения давления. Под действием давления жидкость поднимается на высоту h , измеряемого по линейной шкале. Избыточное давление в точке A равно:

$$p_{изб} = \gamma \cdot (h + h_1),$$

где h_1 – глубина точки A по отношению нулю шкалы прибора.

Для измерения малых давлений могут применяться микроманометры с наклонной шкалой (рис. 3). По шкале наклонного микроманометра вместо малой высоты h отсчитывается большая величина l , причем

$$h = l \cdot \sin \alpha,$$

где α – угол наклона шкалы.

Угол наклона манометрической трубки может изменяться, при этом уменьшению угла наклона соответствует увеличение чувствительности прибора.

Наиболее широкое распространение в технике получили пружинные манометры. Устройство манометра показано на рис. 4. Основной деталью прибора является полая трубка 1, имеющая в сечении овальную форму и согнутая по дуге окружности так, чтобы большая ось овала была перпендикулярна плоскости трубки. Открытый конец трубчатой пружины 1 вставлен в держатель 2, который укреплен в корпусе манометра и выполнен как одно целое со штуцером 9.

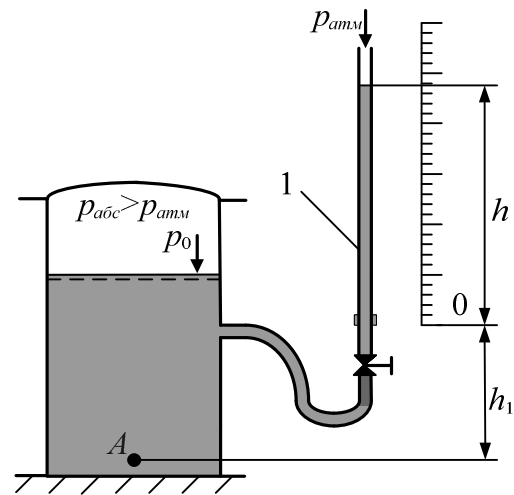


Рис. 2. Пьезометр

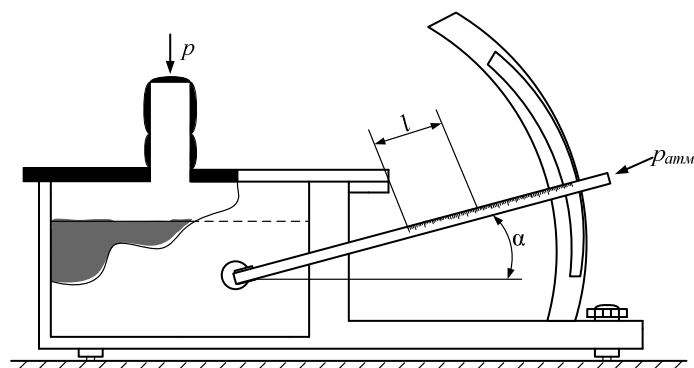


Рис. 3. Микроманометр

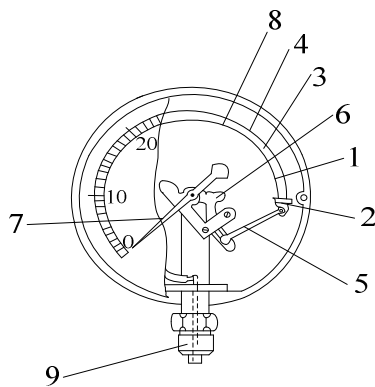


Рис. 4. Пружинный манометр

Передающий механизм состоит из зубчатого сектора 6. С одной стороны сектор 6 связан через поводок 5 со свободным концом трубчатой пружины, с другой стороны с указательной стрелкой 7, передвигающейся по шкале 8. Подобные приборы могут измерять как избыточное, так и вакуумметрическое давление.

Вакуумметрическое давление может быть измерено с помощью прибора, изображенного на рис. 5. В резервуаре 1 абсолютное давление меньше атмосферного:

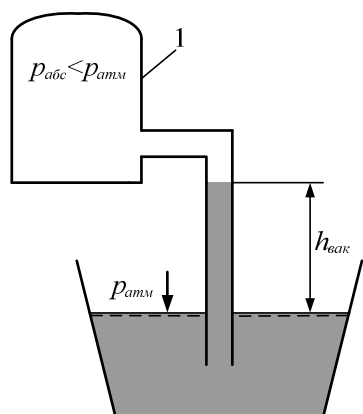


Рис. 5. Вакуумметр

$$P_{абс} < P_{атм}.$$

На основании уравнения (6) имеем:

$$-P_{изб} = P_{вак} = \gamma h_{вак},$$

здесь $h_{вак}$ называется вакуумметрической высотой:

$$h_{вак} = -\frac{P_{изб}}{\gamma} = -\left(\frac{P_{абс}}{\gamma} - \frac{P_{атм}}{\gamma}\right) = \frac{P_{атм} - P_{абс}}{\gamma}.$$

В тех случаях, когда необходимо измерить не давление в сосуде, а разность давлений в двух сосудах или же в двух точках жидкости в одном и

том же сосуде, применяют *дифференциальные манометры*. Дифференциальный манометр, присоединенный к двум сосудам A и B, представлен на рис. 6. Здесь для давления p на уровне поверхности ртути в левом колене имеем:

$$p = p_A + \rho_{жс} g h_1 = p_B + \rho_{жс} g h_2 + \rho_{рт} g h,$$

откуда:

$$p_A - p_B = \rho_{жс} g (h_2 - h_1) + \rho_{рт} g h,$$

или, так как $h_2 - h_1 = -h$:

$$p_A - p_B = (\rho_{рт} - \rho_{жс}) g h$$

Таким образом, разность давлений определяется разностью уровней в двух коленах дифференциального манометра.

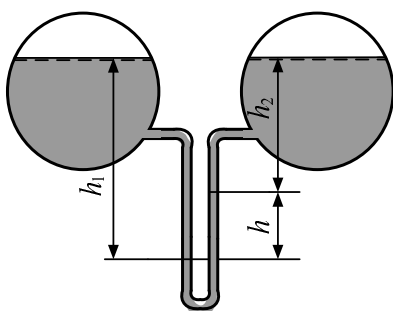


Рис. 6. Дифференциальный манометр

Описание опытной установки

Опытная установка (рис. 7) состоит из двух резервуаров (А, Б), заполненных воздухом, ручного насоса и дифференциального ртутного манометра, предназначенного для измерения перепада давлений. Дифференциальный ртутный манометр (рис. 8) состоит из верхней 1 и нижней 2 колодок, сообщающихся между собой стеклянными трубками. Вверху трубки входят два штуцера 3, винченные в ртутноуловители 4, а внизу – штуцера 5, винченные в нижнюю колодку.

В нижней колодке стеклянные трубки сообщаются каналом, который с правой стороны закрыт конусным клапаном 6. Отверстие, закрытое клапаном 6, служит для наполнения дифманометра ртутью. В верхней колодке стеклянные трубки сообщаются уравнительным каналом и запираются вентилем 7, называемым регулятором уровня. Жидкость под давлением подводится к трубке через рабочие вентили 8 и каналы верхней колодки.

В верхней колодке имеются так же каналы, перекрытые вентилями 9 (продувочными), для удаления воздуха в атмосферу из соединительных трубок и манометра. Между стеклянными трубками расположена шкала 10, градуированная в миллиметрах. По шкале перемещаются два визира 11, служащие для точного отсчета показаний прибора.

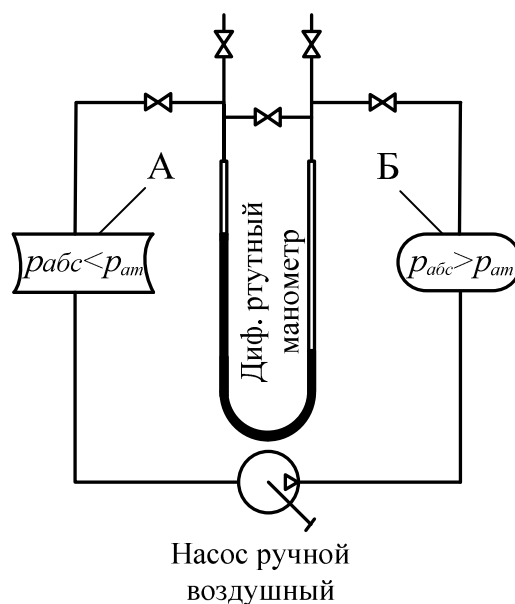


Рис. 7. Схема установки

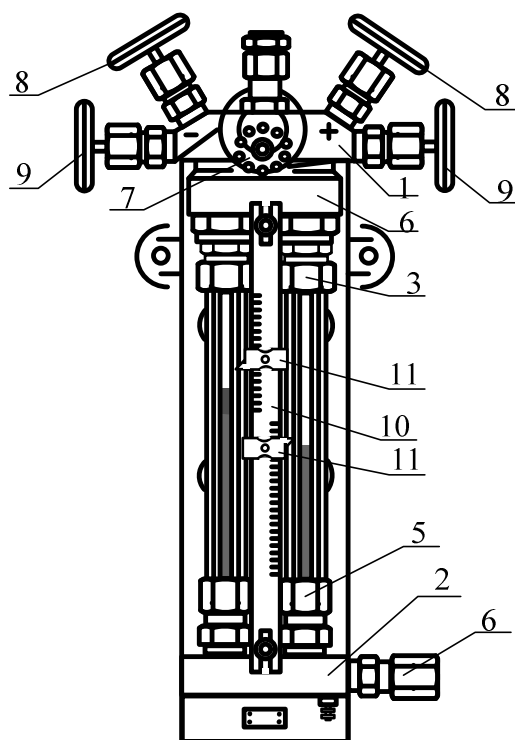


Рис. 8. Дифференциальный ртутный манометр

Отсчет показаний прибора производится путем определения разности высот уровней ртути, для чего с помощью визиров измеряется расстояние от нулевого давления шкалы до уровней ртути в каждой из трубок, и полученные результаты складываются.

Порядок проведения работы

Первый этап

а. Открыв продувочные 9 и рабочие 8 вентили дифференциального манометра выравниваем давление в резервуарах А и Б, сравнив его с атмосферным.

б. Закрываем вентили 7, 8, 9.

в. При помощи ручного насоса создаем разность давлений в резервуарах А и Б, делая 15 оборотов маховика насоса.

В левом резервуаре А создается давление $P_{абс(А)} < P_{ат}$, в правом Б – $P_{абс(Б)} > P_{ат}$.

г. Открываем рабочие вентили 8. Разность давлений в коленах дифманометра, отсчитываемая с помощью визиров 11, показывает нам разность давлений:

$$\Delta p_1 = P_{абс(Б)} - P_{абс(А)} = P_{изб(Б)} - P_{изб(А)} = \Delta h(\gamma_{рт} - \gamma_в),$$

где Δh_1 – разность уровней в коленах дифманометра;

$\gamma_{рт}$ – удельный вес ртути, $\gamma_{рт} = \rho_{рт} \cdot g$ ($\rho_{рт} = 13600 \text{ кг/м}^3$);

$\gamma_в$ – удельный вес воды, $\gamma_в = \rho_в \cdot g$ ($\rho_в = 1000 \text{ кг/м}^3$).

Второй этап

а. Для измерения манометрического давления в правом резервуаре Б, закрываем левый рабочий вентиль 8 и открываем левый продувочный вентиль 9.

б. Разность уровней в коленах дифманометра Δh_2 отсчитываем опять с помощью визиров 11:

$$\Delta p_2 = P_{абс(Б)} - P_{ат} = \Delta h_2(\gamma_{рт} - \gamma_в).$$

в. Разность между Δp_1 и Δp_2 дает величину вакуумметрического давления в левом резервуаре.

Третий этап

а. Закрываем левый продувочный вентиль 9 и снова открываем левый рабочий вентиль 8. Устанавливается первоначальная разность уровней.

б. Закрываем правый рабочий вентиль 8 и открываем продувочный 9. Устанавливается разность уровней Δh_3 , которая покажет нам величину вакуумметрического давления в левом резервуаре:

$$P_{\text{вак}} = P_{\text{атм}} - P_{\text{абс}}(A) = \Delta h_3 (\gamma_{\text{рт}} - \gamma_{\text{в}})$$

в. Разность $\Delta h_1 - \Delta h_3 = \Delta h_2$ дает нам представление о манометрическом давлении в правом резервуаре.

г. Весь опыт повторить, начиная с первого этапа, делая 10 оборотов маховика насоса.

Результаты поместить в табл. 2.

Таблица 2

Экспериментальные данные и обработка результатов

Номера опытов	Разность уровней			Определение давления в СИ			Давления $p, p_{\text{ман}}, p_{\text{вак}}$											
	Δh_1	Δh_2	Δh_3	Разность абсолютных давлений	Манометрическое давление	Вакуумметрическое давление	кгс/см ²			мм вод. ст			мм рт. ст					
1																		
2																		

Таблица 3

Размерность давления

Единицы давления в системах			
СИ	СГС	МКГСС	Внесистемные единицы давления
Паскаль ($Па$)	Дина на квадратный сантиметр (дин/см ²)	кгс/м ²	физическая (нормальная) атмосфера (атм); техническая атмосфера (ат); миллиметр ртутного столба (мм рт. ст.)

Связь между единицами давления

Единица	Па	дин/см ²	кгс/м ²	кгс/см ²	атм	мм рт. ст
1 Па	1	10	0,102	$1,02 \cdot 10^{-5}$	$9,87 \cdot 10^{-6}$	$7,5 \cdot 10^{-3}$
1 дин/см ²	0,1	1	$1,02 \cdot 10^{-2}$	$1,02 \cdot 10^{-6}$	$9,87 \cdot 10^{-7}$	$7,5 \cdot 10^{-4}$
1 кгс/м ²	9,81	98,1	1	10^{-4}	$9,68 \cdot 10^{-5}$	$7,36 \cdot 10^{-2}$
1 кгс/см ²	$9,81 \cdot 10^4$	$9,81 \cdot 10^5$	10^4	1	0,968	$7,36 \cdot 10^2$
1 атм	$1,01 \cdot 10^5$	$1,01 \cdot 10^6$	$1,03 \cdot 10^4$	1,03	1	$7,5 \cdot 10^2$
1 мм рт.ст.	$1,33 \cdot 10^2$	$1,33 \cdot 10^3$	13,6	$1,36 \cdot 10^{-3}$	$1,32 \cdot 10^{-3}$	1

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Указания к решению задач. При решении задач по гидростатике прежде всего нужно хорошо усвоить и не смешивать такие понятия, как давление p и сила давления P .

При решении задач на определение давления в той или иной точке неподвижной жидкости следует пользоваться основным уравнением гидростатики (3.8) либо его второй формой (3.9). Нужно иметь в виду, что второй член в правой части уравнения (3.9) может быть как положительным, так и отрицательным. Очевидно, что при увеличении глубины давление возрастает, а при подъеме – уменьшается.

Необходимо твердо различать давления абсолютное, избыточное и вакуум и обязательно знать связь между давлением, удельным весом и высотой, соответствующей этому давлению.

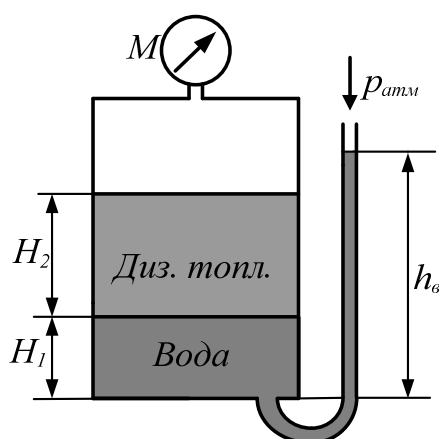


Рис. 3.22. К примеру 1

Пример 1. В резервуаре с дизельным топливом ($\rho_d = 870 \text{ кг/м}^3$) (рис. 3.22) уровень осевшей в отстойнике воды ($\rho_v = 1000 \text{ кг/м}^3$) $H_1 = 150 \text{ мм}$. Показатели водяного пьезометра $h_v = 500 \text{ мм}$. Определить уровень топлива H_2 , если давление в резервуаре по манометру равно $p_m = 0,0005 \text{ МПа}$.

Решение: Эту задачу будем решать в абсолютных давлениях. Так, абсолютное давление на дно резервуара со стороны пьезометра $p_{абс(n)}$ определится как:

$$p_{абс(n)} = p_{атм} + \rho_v g h_v.$$

Абсолютное давление на дно резервуара со стороны резервуара $p_{абс(p)}$ определится как:

$$p_{a\bar{b}c(p)} = (p_m + p_{am}) + \rho_\delta g H_2 + \rho_\epsilon g H_1.$$

Здесь следует учесть то, что манометр M показывает избыточное манометрическое давление. Решая задачу в абсолютных давлениях необходимо к показанию манометра прибавить значение атмосферного давления.

Составляя уравнение равновесия относительно дна резервуара, получим:

$$P_{абс(n)} = P_{абс(p)}$$

или

$$p_{атм} + \rho_в g h_в = (p_m + p_{атм}) + \rho_д g H_2 + \rho_в g H_1.$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{\rho_в g h_в - p_m - \rho_в g H_1}{\rho_д \cdot g} = \\ &= \frac{10^3 \cdot 9,81 \cdot 0,5 - 0,0005 \cdot 10^6 - 10^3 \cdot 9,81 \cdot 0,15}{870 \cdot 9,81} = 0,34 \text{ м.} \end{aligned}$$

Пример 2. Определить абсолютное и избыточное гидростатическое давление в точке A (рис. 3.23), расположенной в воде на глубине $h_A = 2,5$ м, и пьезометрическую высоту для точки A , если абсолютное гидростатическое давление на поверхности $p_0 = 147,2$ кПа.

Решение: Согласно основного уравнения гидростатики абсолютное гидростатическое давление в точке A определится:

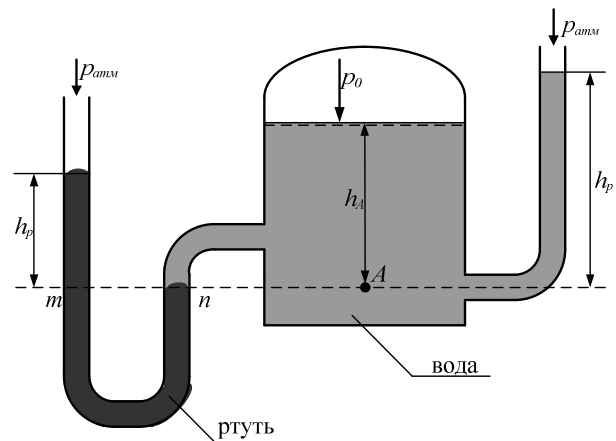


Рис. 3.23. К примеру 2

$$P_{абс(A)} = p_0 + \rho_в \cdot g \cdot h_A = 147,2 + \frac{1000 \cdot 9,81 \cdot 2,5}{1000} = 171,7 \text{ кПа.}$$

Избыточное давление в точке A равно:

$$P_{изб(A)} = P_{абс(A)} - p_{атм} = 171,7 - 98,1 = 73,6 \text{ кПа.}$$

Пьезометрическая высота для точки A равна:

$$h_p = \frac{P_{изб(A)}}{\rho_в \cdot g} = \frac{73,6 \text{ кН/м}^2}{1 \text{ т/м}^3 \cdot 9,8 \text{ м/с}^2} = 7,5 \text{ м.}$$

Определить эти же величины U-образным манометром, заполненным ртутью. По поверхности раздела *m-n* ртути и воды давления со стороны резервуара и открытого конца манометра будут одинаковы:

$$p_0 + \rho_w \cdot g \cdot h_A = p_{атм} + \rho_{рт} \cdot g \cdot h_{рт}.$$

Следовательно, избыточное давление в точке *A* уравновешивается весом столба ртути высотой $h_{рт}$ над поверхностью раздела *m-n*

$$\rho_{рт} \cdot g \cdot h_{рт} = p_0 + \rho_w \cdot g \cdot h_A - p_{атм} = 147,2 + 1 \cdot 9,81 \cdot 2,5 - 98,1 = 73,6 \text{ кН/м}^2.$$

Находим высоту ртутного столба $h_{рт}$:

$$h_{рт} = \frac{p_{изб}}{\rho_{рт} \cdot g} = \frac{73,6}{13,6 \cdot 9,81} = 0,55 \text{ м},$$

где $\rho_{рт} = 13,6 \text{ т/м}^3$ – плотность ртути.

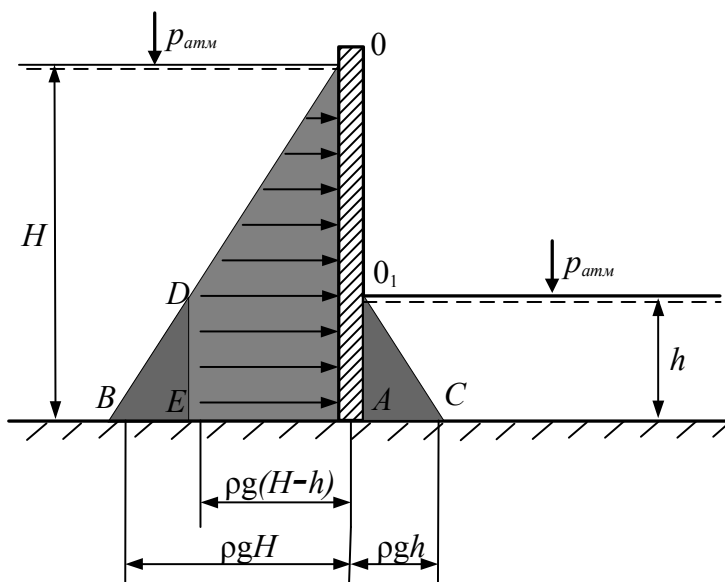


Рис. 3.24. К примеру 3

Пример 3. Построить эпюру манометрического давления на затвор *OA*, если глубина воды перед затвором $H = 2$ м, а за затвором $h = 1$ м (рис. 3.24).

Решение: эпюра гидростатического давления слева изображается треугольником *OAB* с основанием:

$$AB = \rho \cdot g \cdot H = 9,81 \cdot 1 \cdot 2 = 19,62 \text{ кПа}$$

справа – треугольником *O₁AC* с основанием:

$$AC = \rho \cdot g \cdot h = 9,81 \cdot 1 \cdot 1 = 9,81 \text{ кПа}.$$

Часть гидростатического давления на затвор слева уравновешивается направленным в противоположную сторону давлением справа.

Результирующая эпюра изображается трапецией *OAED* с основаниями $OA = H$, $DE = h$ и высотой $AE = \rho g (H - h) = 9,81 \text{ кПа}$.

Пример 4. Найти начальное подъемное усилие *T*, если сила тяги действует нормально к плоскости прямоугольного затвора шириной $b = 4$ м (рис. 3.25). Глубина воды перед затвором $h_1 = 3$ м, за ним $h_2 = 1,2$ м. Рас-

стояние от шарнира до уреза воды $a = 0,8$ м. Угол наклона затвора к горизонту $\alpha = 60^\circ$, масса затвора 2 т. Трением в шарнире пренебречь.

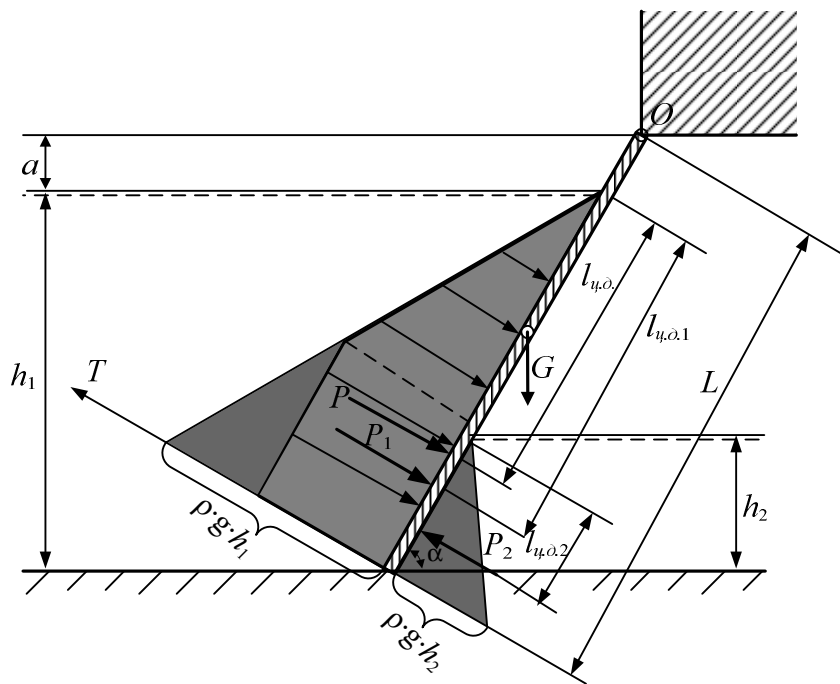


Рис. 3.25. К примеру 4

Решение: силы манометрического давления на плоский затвор, действующие слева и справа, определяются по формуле:

$$P = \rho \cdot g \cdot h_{y.m} \cdot \omega.$$

Сила давления слева:

$$P_1 = g \cdot \rho_s \frac{h_1}{2} \cdot \frac{h_1}{\sin \alpha} \cdot b = 9,81 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{0,866} \cdot 4 = 203,8 \text{ кН.}$$

Сила давления справа:

$$P_2 = g \cdot \rho_s \frac{h_2}{2} \cdot \frac{h_2}{\sin \alpha} \cdot b = 9,81 \cdot 1 \cdot \frac{1,2}{2} \cdot \frac{1,2}{0,866} \cdot 4 = 32,7 \text{ кН.}$$

Равнодействующая равна разности параллельных и направленных в противоположные стороны сил давления:

$$P = P_1 - P_2 = 203,8 - 32,7 = 171,1 \text{ кН.}$$

Расстояние от свободной поверхности до центра давления левой силы определяется по формуле:

$$l_{y,d} = l_{y,m} + \frac{J_0}{\omega \cdot l_{y,m}}.$$

Определим необходимые величины:

Слева от затвора:

– расстояние до центра тяжести:

$$l_{ц.м.1} = \frac{h_1}{2 \cdot \sin \alpha} = \frac{3}{2 \cdot 0,866} = 1,73 \text{ м};$$

– момент инерции:

$$J_0^1 = \frac{b \cdot \left(\frac{h_1}{\sin \alpha}\right)^3}{12} = \frac{4 \cdot \left(\frac{3}{0,866}\right)^3}{12} = 13,85 \text{ м}^4;$$

– площадь смоченной стенки:

$$\omega_1 = \frac{h_1}{\sin \alpha} \cdot b = \frac{3}{0,866} \cdot 4 = 13,85 \text{ м}^2;$$

– расстояние до центра давления:

$$l_{ц.д.1} = l_{ц.м.1} + \frac{J_0^1}{\omega_1 \cdot l_{ц.м.1}} = 1,73 + \frac{13,85}{13,85 \cdot 1,73} = 2,31 \text{ м}.$$

Справа от затвора:

– расстояние до центра тяжести:

$$l_{ц.м.2} = \frac{h_2}{2 \cdot \sin \alpha} = \frac{1,2}{2 \cdot 0,866} = 0,69 \text{ м};$$

– момент инерции:

$$J_0^2 = \frac{b \cdot \left(\frac{h_2}{\sin \alpha}\right)^3}{12} = \frac{4 \cdot \left(\frac{1,2}{0,866}\right)^3}{12} = 0,69 \text{ м}^4;$$

– площадь смоченной стенки:

$$\omega_2 = \frac{h_2}{\sin \alpha} \cdot b = \frac{1,2}{0,866} \cdot 4 = 5,54 \text{ м}^2;$$

– расстояние до центра давления:

$$l_{ц.д.2} = l_{ц.м.2} + \frac{J_0^2}{\omega_2 \cdot l_{ц.м.2}} = 0,69 + \frac{0,69}{5,54 \cdot 0,69} = 0,92 \text{ м}.$$

Воспользуемся теоремой механики о моменте равнодействующей и составим уравнение моментов относительно линии уреза:

$$P \cdot l_{ц.д.} = P_1 \cdot l_{ц.д.1} - P_2 \left(l_{ц.д.2} + \frac{h_1 - h_2}{\sin \alpha} \right).$$

Отсюда после подстановки числовых значений координата равнодействующей равна $l_{ц.д.} = 2,18$ м.

Кроме сил давления, на затвор действуют сила тяжести, приложенная в его центре тяжести; архимедова (выталкивающая) сила, действие которой в начальный момент не учитывается; реакции шарнира.

Составив уравнение моментов всех действующих сил относительно шарнира O , можно, не определяя реакции в шарнире, вычислить искомое начальное подъемное усилие T :

$$T \cdot L - P \left(l_{ц.д.} + \frac{a}{\sin \alpha} \right) - G \frac{L}{2} \cdot \cos \alpha = 0.$$

Здесь $L = \frac{a + h_1}{\sin \alpha} = \frac{0,8 + 3}{0,866} = 4,39$ м;

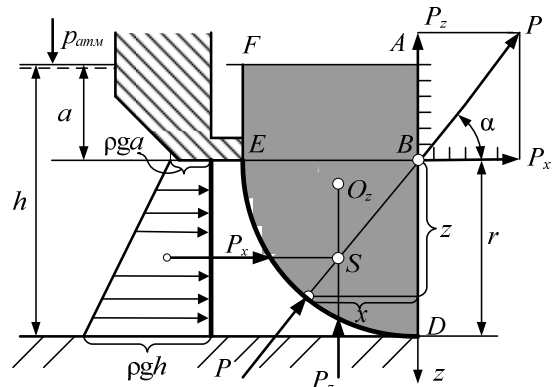
$$G = 2 \cdot 9,81 = 19,62 \text{ кН.}$$

Подставив числовые значения, получим:

$$T = 126 \text{ кН.}$$

Пример 5. Определить силу давления воды на затвор и положение центра давления, если глубина воды перед затвором $h = 3$ м, радиус затвора $r = 2$ м, ширина пролета $b = 6$ м.

Решение. Определяем горизонтальную составляющую силы давления на затвор:



$$P_x = g \cdot \rho \left(h - \frac{r}{2} \right) r \cdot b =$$

$$= 9,81 \cdot 1 \cdot \left(3 - \frac{2}{2} \right) \cdot 2 \cdot 6 = 235,4 \text{ кН.}$$

Объем тела давления в данном случае равен объему тела с сечением $ABDEF$:

$$W_\partial = \frac{\pi \cdot r^2}{4} \cdot b + r(h - r) \cdot b = \frac{3,14 \cdot 2^2}{4} \cdot 6 + 2 \cdot (3 - 2) \cdot 6 = 30,84 \text{ м}^3.$$

Следовательно, вертикальная составляющая силы давления на затвор определится как:

$$P_z = \rho \cdot g \cdot W_\partial = 1 \cdot 9,81 \cdot 30,84 = 302,5 \text{ кН}$$

и направлена вверх.

Равнодействующая P вычисляется по формуле (3.17):

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2} = \sqrt{235,4^2 + 302,5^2} = 383,2 \text{ кН.}$$

Эпюра давления на вертикальную проекцию цилиндрической поверхности представляет собой трапецию с основаниями $\rho g a$ и $\rho g h$. Горизонтальная составляющая P_x проходит через центр тяжести трапеции на расстоянии от свободной поверхности:

$$l_{ц.д} = l_{ц.м} + \frac{J_0}{l_{ц.м} \cdot \omega} = h - \frac{r}{2} + \frac{b \cdot r^3}{12 \cdot \left(h - \frac{r}{2}\right) \cdot b \cdot r} = 2,17 \text{ м.}$$

Вертикальная составляющая P_z проходит через центр тяжести фигуры $ABDEF$.

Равнодействующая P наклонена к горизонту под углом α , функции которого равны:

$$\cos \alpha = \frac{P_x}{P} = 0,614, \quad \sin \alpha = \frac{P_z}{P} = 0,790.$$

Точка, в которой линия действия силы P пересекается с криволинейной поверхностью, называется центром давления. Поскольку эта линия, нормальная к поверхности, всегда проходит по радиусу через центр кривизны B , а угол наклона ее к горизонту известен из (3.20), координаты центра давления можно вычислить по формулам:

$$x = r \cdot \sin \alpha, \quad z = r \cdot \cos \alpha.$$

Тогда получим:

$$x = 2 \cdot 0,614 = 1,228 \text{ м,} \quad z = 2 \cdot 0,790 = 1,580 \text{ м.}$$

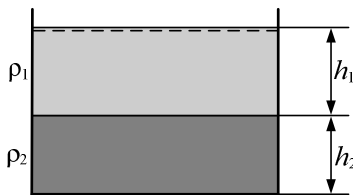


Рис. 3.27. К задаче 1

Задача 1. Определить манометрическое давление на дно сосуда, наполненного двумя жидкостями (рис. 3.27). Слой воды $h_2 = 0,5$ м, слой керосина ($\rho = 760 \text{ кг/м}^3$) $h_1 = 0,7$ м.

Ответ: $p_m = 10\,124 \text{ Па.}$

Задача 2. Определить манометрическое давление в точке A трубопровода, если высота столба ртути по пьезометру $h_p = 0,25$ м. Центр трубопровода расположен на $h = 0,4$ м ниже линии раздела между водой и ртутью (рис. 3.28, a).

Ответ: $p_{mA} = 37\,278 \text{ Па.}$

Задача 3. Определить, на какой высоте h установится уровень ртути в пьезометре, если при манометрическом давлении в трубе, заполненной водой, $p_{MA} = 39\,240$ Па и показания $h_p = 0,25$ м система находится в равновесии (рис. 3.28, б).

Ответ: $h = 0,6$ м.

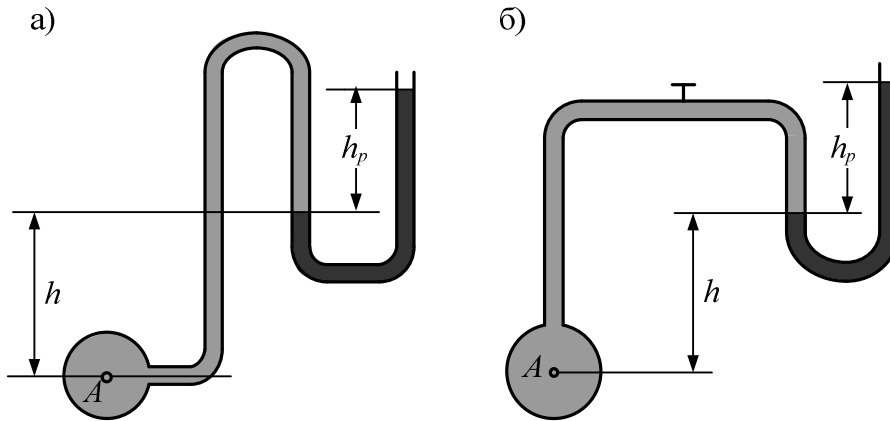


Рис. 3.28. К задаче 2 и 3

Задача 4. Определить силы давления на дно $P_{\text{дн}}$ и стенки сосуда P_1 и P_2 , наполненного водой (рис. 3.29). Ширина сосуда по дну $b = 5$ м, по верху $B = 7,31$ м, длина боковой стенки $l = 3$ м. Давление на свободной поверхности атмосферное. Глубина воды в сосуде $h = 2$ м.

Ответ: $P_{\text{дн}} = 294,3$ кН, $P_1 = 113,1$ кН; $P_2 = 680$ кН.

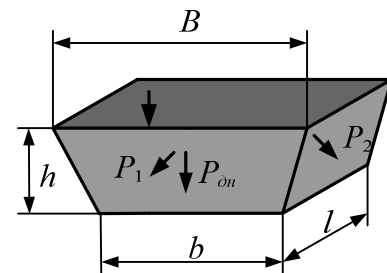


Рис. 3.29. К задаче 4

Задача 5. Определить, на каком расстоянии x от дна надо расположить ось вращения плоского прямоугольного затвора шириной $b = 1$ м, чтобы при увеличении глубины в верхнем бьефе h_1 он открывался автоматически (рис. 3.30). Затвор закрыт при $h_1 = 2$ м и глубине в нижнем бьефе $h_2 = 0,9$ м.

Ответ: $x = 0,76$ м.

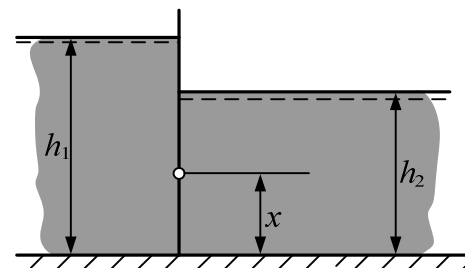


Рис. 3.30. К задаче 5

Задача 6. Определить тяговые усилия T_1 и T_2 для круглых плоских затворов диаметром $d = 1,2$ м (рис. 3.31). Глубина погружения верхней кромки затворов $a = 0,8$ м.

Ответ: $T_1 = 6,93$ кН, $T_2 = 8,58$ кН.

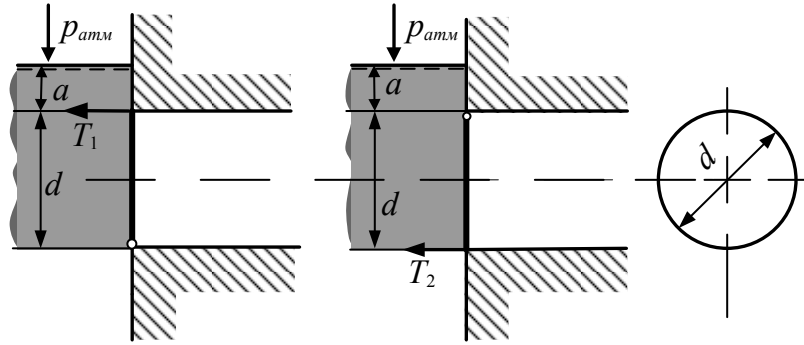


Рис. 3.31. К задаче 6

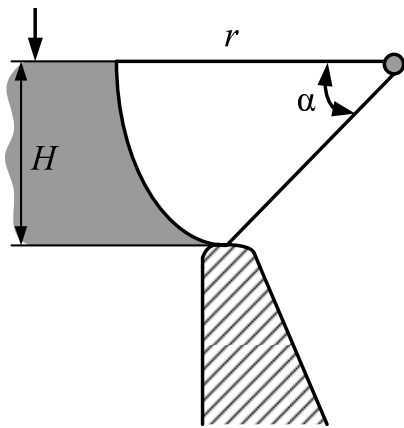


Рис. 3.32. К задаче 7

Задача 7. На гребне водосливной части плотины установлен сегментный затвор (рис. 3.32), поддерживающий напор $H = 3,03$ м. Радиус затвора $r = 3,5$ м, угол $\alpha = 60^\circ$. Ширина пролета $b = 10$ м. Определить силу давления на затвор P и координаты центра давления x и z .

Ответ: $P = 582$ кН, $x = 2,71$ м, $z = 2,22$ м.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что изучает гидростатика?
2. Какое равновесие называют абсолютным?
3. Какое равновесие называют относительным?
4. Укажите, при каких условиях из дифференциального уравнения движения в напряжениях можно получить уравнение гидростатики.
5. Запишите уравнение Эйлера.
6. Что называется поверхностью равного давления? Запишите дифференциальное уравнение поверхности равного давления.
7. Для случая покоящейся жидкости получите уравнение равного давления.
8. Для случая движущейся жидкости с постоянным ускорением получите уравнение равного давления.
9. Для случая вращающейся жидкости вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью получите уравнение равного давления.
10. Запишите основное уравнение гидростатики.

11. Что такое пьезометрическая высота?
12. Что такое вакуумметрическая высота?
13. Что называют гидростатическим напором?
14. Дайте формулировку закона Паскаля.
15. По какому закону изменяется давление с увеличением глубины погружения жидкости?
16. Что называется эпюрой давления?
17. Какое давление называется абсолютным?
18. Какое давление называется манометрическим?
19. Какое давление называется вакуумметрическим?
20. Покажите взаимосвязь между абсолютным, манометрическим и вакуумметрическим давлениями.
21. Каким прибором можно измерить разность давлений?
22. Как определить силу давления и точку ее приложения на плоскую наклонную стенку?
23. Как найти силу давления жидкости на цилиндрическую стенку?
24. Сформулируйте закон Архимеда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Альтшуль А.Д., Кисилев П.Г. Гидравлика и аэродинамика.– М.: Стройиздат, 1975. – 323 с.
2. Штеренлихт Д.В. Гидравлика: Учебник для вузов. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 640 с.
3. Примеры расчетов по гидравлике. Учеб. пособие для вузов. / Под ред. А.Д. Альтшуля. – М.: Стройиздат, 1977. – 256 с.
4. Чугаев Р.Р. Гидравлика. – Л.: Энергия, 1982. – 600 с.
5. Ботук Б.О. Гидравлика. – М.: Высш. шк., 1962. – 450 с.
6. Медведев В.Ф. Гидравлика и гидравлические машины: Учеб. пособие. – Мн.: Выш. шк., 1998. – 311 с.
7. Рабинович Е.З. Гидравлика. – М.: Физматгиз, 1963. – 408 с.