Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

О.В.Голубева
С.Г.Ехилевский
Ю.Ф.Пастухов
Д.Ф.Пастухов

КВАДРАТУРЫ ГАУССА. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебно-методическое пособие к лекционным и практическим занятиям
для студентов специальности
1-40 01 01 Программное обеспечение информационных технологий

Новополоцк
ПГУ
2015

УДК 519.6

Одобрено и рекомендовано к изданию
методической комиссией факультета информационных технологий
В качестве учебно-методического пособия

Кафедра технологий программирования

Рецензенты:
А.Ф. Оськин, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры технологий программирования;
Р.П. Богуш, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой вычислительных систем и сетей

Тема: Численное интегрирование

Общие свойства квадратурных формул

Пусть задан некоторый линейный оператор $L(f)$ относительно функции $f(x)$ одной или нескольких переменных. В качестве оператора $L(f)$ может быть определенный интеграл $I(f)=\int\limits_a^b p(x)f(x)dx$ с весовой функцией $\rho(x)$ на отрезке $[a,b]$ или оператор производной $D(f)\equiv\dfrac{df(x)}{dx}$. Для функций нескольких переменных $f(\vec{r},t)$ где: $\vec{r}=\{x_1,...,x_m\}$ радиус – вектор, t время, в качестве $L(f)$ может использоваться линейный оператор математической физики в частных производных, например,

$L(f)=div\left(k(\vec{r})gradf(\vec{r},t)\right)-q(\vec{r})f(\vec{r},t));\text{где}\,k(\vec{r}),c(\vec{\kappa})$

– коэффициенты , характеризующие неоднородность физических свойств среды.

Квадратурная формула $S_n(f)=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i f(x_i)$ всегда линейна относительно узловых значений функции $f(x_i)$ коэффициенты c_i называются весами квадратурной формулы, n - число узлов квадратуры. В общем случае для функции нескольких переменных квадратурная формула также зависит от узловых значений функции, взятой в n точках многомерной области определения $f(\vec{r}):S_n(f)=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i f(\vec{r}_i)$. В приведенных формулах функция $f(\vec{r})$ является скалярной (функционалом).

Рассмотрим задачу: аппроксимируем линейный функционал $L(f)$ квадратурной формулой $S_n(f)$.

$$L(f)=S_n(f)+R(f) \qquad (1)$$

Где: $R(f)$ - невязка последнего уравнения, которая также зависит от рассматриваемой функции f Докажем следующую лемму:

Лемма (общие свойства квадратурных формул). Пусть в формуле(1) квадратурная формула $S_n(f)$ аппроксимирует точно $L(f)$ линейный функционал на координатных функциях:

$\{1,x,...,x^k\}(n\geq k+1-\text{в случае функции одной переменной});$

$\{1,x,y,...,x^k,x^{k-1}y,x^{k-2}y^2,...,y^k\}(n\geq\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}-\text{в случае функции двух переменных})$

Тогда $S_n(f)$ аппроксимирует точно $L(f)$ для любого многочлена одной (двух) переменных степени не выше k .

Доказательство: Любой многочлен $P_k(x)$ степени k единственным образом раскладывается в линейном пространстве координатных функций $\{1,x,...,x^k\}(\{1,x,y,...,x^k,x^{k-1}y,x^{k-2}y^2,...,y^k\}),$

$$P_k(x)=\sum_{i=0}^{k}a_i x^i\left(P_k(x,y)=\sum_{i=0}^{k}\sum_{m=0}^{i}a_{i,m}x^m y^{i-m}\right)$$

Коэффициенты многочлена можно рассматривать как проекции фазового вектора,однозначно определяющего многочлен, в $k+1\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)$ мерном векторном пространстве. Для задания многочлена одной переменной необходимо $k+1$ коэффициентов, для многочлена двух переменных $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ коэффициентов (доказывается индуктивно).

Из формулы(1) выразим $R(f)=L(f)-S_n(f)$ По условию леммы

$$\begin{cases} 0=R(1)=L(1)-S_n(1) \\ 0=R(x)=L(x)-S_n(x) \\ \qquad\qquad \vdots \\ 0=R(x^k)=L(x^k)-S_n(x^k) \end{cases} \qquad (2)$$

для функции одной переменной

$$\begin{cases} 0=R(1)=L(1)-S_n(1) \\ 0=R(x)=L(x)-S_n(x) \\ 0=R(y)=L(y)-S_n(y) \\ \qquad\qquad \vdots \\ 0=R(y^{k-1}x)=L(y^{k-1}x)-S_n(y^{k-1}x) \\ 0=R(y^k)=L(y^k)-S_n(y^k) \end{cases} \qquad (2)$$

для функции двух переменных

В силу линейности $L(f)$ и $S_n(f)$ относительно функции f , их разность $R(f)=L(f)-S_n(f)$ также линейна относительно функции f .Для многочлена имеем (используем формулу (2))

$$R(P_k(x))=L\left(\sum_{i=0}^{k}a_i x^i\right)-S_n\left(\sum_{i=0}^{k}a_i x^i\right)=\sum_{i=0}^{k}a_i\left(L(x^i)-S_n(x^i)\right)=\sum_{i=0}^{k}a_i R(x^i)=0$$

в случае одной переменной.

$$R(P_k(x,y))=L\left(\sum_{i=0}^{k}\sum_{m=0}^{i}a_{i,m}x^m y^{i-m}\right)-S_n\left(\sum_{i=0}^{k}\sum_{m=0}^{i}a_{i,m}x^m y^{i-m}\right)=$$

$$\sum_{i=0}^{k}\sum_{m=0}^{i}a_{i,m}\left(L(x^m y^{i-m})-S_n(x^m y^{i-m})\right)=\sum_{i=0}^{k}\sum_{m=0}^{i}a_{i,m}R(x^m y^{i-m})=0$$

в случае двух переменных.

Что и требовалось.

Замечание. В случае функции нескольких переменных квадратурная формула называется кубатурной и применяется, например, в методе конечных элементов для аппроксимации линейных операторов на плоскости или в пространстве. Произвольная плоская область разбивается на почти равносторонние треугольники (по алгоритму Делоне – российский математик) разной величины, физические свойства $f(x)$ усредняют по площади треугольника, например, по формуле (3).

Для кубатурной формулы функции двух переменных рассмотрим

Пример 1. Пусть E - треугольник на плоскости, $s(T)$ - его площадь, A,B,C, - середины его сторон. Показать, что кубатурная формула

$$S(f)=\frac{1}{3}s(T)\big(f(A)+f(B)+f(C)\big)\approx\int\int\limits_{T}^{A1,B1,C1} f(x)dx \qquad (3)$$

Где $x=(x_1,x_2)$, $dx=dx_1dx_2$ точна для всех многочленов второй степени вида
$a_0+a_1x_1+a_2x_2+a_{11}x_1^{\;2}+a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2$
Решение: Не теряя общности линейным невырожденным преобразованием с отличным от нуля якобианом (и постоянным) произвольный треугольник можно отобразить в треугольник с вершинами(0,0), (0,1), (1,0)[1]. Тогда подынтегральная функция справа в формуле и площадь треугольника $s(T)$ слева умножаются на одно и то же число (модуль якобиана). Поэтому достаточно рассмотреть формулу (3) для указанного прямоугольного треугольника.

На рисунке 1 вершины треугольника $A1(0,1), B1(0,0), C1(1,0)$ и середины сторон $A\left(0,\frac{1}{2}\right), B\left(\frac{1}{2},0\right), C\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

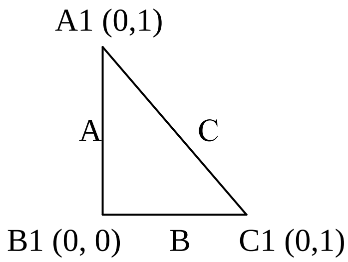

Рис. 1

Для многочлена
$f(x_1,x_2)=a_0+a_1x_1+a_2x_2+a_{11}x_1^{\;2}+a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^{\;2}$ вычислим левую часть формулы(3) в вершинах треугольника A,B,C .Площадь треугольника $A1,B1,C1$ - $s(T)=\frac{1}{2}$ как видно из рисунка.

$$f(A)=f\left(0,\frac{1}{2}\right)=\left(a_0+\frac{a_2}{2}+\frac{a_{22}}{4}\right);\ f(B)=f\left(\frac{1}{2},0\right)=\left(a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_{11}}{4}\right)$$

$$f(C)=f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\left(a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2}+\frac{a_{11}+a_{12}+a_{22}}{4}\right)$$

Тогда левая часть формулы(3)

$$S(f)=\frac{1}{3}s(T)\big(f(A)+f(B)+f(C)\big)=\frac{1}{6}\left(3a_0+a_1+a_2+\frac{a_{11}}{2}+\frac{a_{12}}{4}+\frac{a_{22}}{2}\right)$$

В правой части формулы(3) двойной интеграл возьмем как повторный по внешней переменной $x\big|_0^1$, и внутренней переменной $y\big|_0^{1-x}$:

$$S(f)=\int\int_{T}^{A1,B1,C1} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(a_0+a_1x+a_2y+a_{11}x^2+a_{12}xy+a_{22}y^2\right)dy$$

$$S(f)=\int_0^1\left(a_0y+a_1xy+\frac{a_2y^2}{2}+a_{11}x^2y+\frac{a_{12}xy^2}{2}+\frac{a_{22}y^3}{3}\right)_0^{1-x}dx$$

$$S(f)=\int_0^1 dx\left((a_0+a_1x)(1-x)+\frac{a_2(1-x)^2}{2}+a_{11}x^2(1-x)+\frac{a_{12}x(1-x)^2}{2}+\frac{a_{22}(1-x)^3}{3}\right)$$

$$S(f)=\left(a_0\left(x-\frac{x^2}{2}\right)+a_1\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)-\frac{a_2}{6}(1-x)^3+a_{11}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)+a_{12}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{8}\right)-\frac{a_{22}(1-x)^4}{12}\right)_0^1=$$

$$\frac{a_0}{2}+\frac{a_1}{6}+\frac{a_2}{6}+\frac{a_{11}}{12}+\frac{a_{12}}{24}+\frac{a_{22}}{12}$$

Теперь видно, что левая и правая части формулы (3) равны для многочлена второй степени двух переменных. Что и требовалось.

Интегральные квадратурные формулы

Среди всех квадратурных интегральных формул особое место занимают квадратурные формулы Гаусса. При одном и том же объеме алгебраических преобразований с помощью них можно получить квадратуры точные для многочленов степени $2n-1$, по сравнению другими методами(точные для многочленов степени n).

Квадратурные формулы Гаусса

Рассмотрим задачу: При заданном числе узлов n построить для вычисления интегралов вида $I(f)=\int_a^b p(x)f(x)dx$ с весовой функцией $p(x)$ всюду положительной квадратурную формулу Гаусса $S_n(f)=\sum_{i=1}^{n}c_i f(x_i)$ точную для многочленов максимально высокой степени.

В данной постановке имеется $2n$ неизвестных – весовые коэффициенты $c_i, i=\overline{1,n}$ и узлы квадратуры $x_i, i=\overline{1,n}$. Используя $2n$ условий, можно попытаться построить квадратуру точную для многочленов степени $2n-1$ Построить квадратуру точную для многочленов более высокой степени $2n$ уже невозможно. Например, для многочлена[1] $P_{2n}(x)=(x-x_1)^2(x-x_2)^2\cdots(x-x_n)^2$

$$0=S_n(P_{2n})\neq\int_a^b p(x)P_{2n}(x)dx>0$$

Важную роль при построении квадратурных формул Гаусса имеют многочлены, ортогональные на отрезке $[a,b]$ с весом $p(x)>0$ Эти многочлены получают, например, ортогонализацией системе координатных функций $\{1,x,x^2,\ldots,x^k,\ldots\}$ при скалярном произведении

$$(f,g)=\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx$$

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана система ортогональных многочленов с весом $p(x): 1,\psi_1(x),\psi_2(x),\ldots,\psi_k(x),\ldots$. Тогда многочлен $\psi_k(x)$ степени k ортогонален с весом $p(x)$ произвольному многочлену низшей степени $P_l(x)$ при $l=0,1,2,\ldots,k-1$. Действительно, $P_l(x)$ можно единственным образом представить в виде $P_l(x)=\sum_{i=0}^{l} c_i\psi_i(x)$. И при $k\neq l$

$$(\psi_k,P_l)=\int_a^b p(x)\psi_k(x)\left(\sum_{i=0}^{l} c_i\psi_i(x)\right)dx=\sum_{i=0}^{l} c_i\left(\int_a^b p(x)\psi_k(x)\psi_i(x)dx\right)=0$$

При решении задач используют следующие системы ортогональных многочленов:

1) *Лежандра* $(\omega=[-1,1],\ p(x)\equiv 1)$,
2) *Чебышева первого рода* $\left(\omega=[-1,1],\ p(x)\equiv 1/\sqrt{1-x^2}\right)$,
3) *Лаггера* $(\omega=[0,\infty),\ p(x)\equiv e^{-x})$,
4) *Эрмита* $\left(\omega=(-\infty,\infty),\ p(x)\equiv e^{-x^2}\right)$.

При построении квадратур базовой является следующая

Теорема. *Пусть* $x_1,\ldots,x_n$ *нули ортогонального на* $[a,b]$ *многочлена с весом* $p(x)>0$ *многочлена* $\psi_n(x)$ *степени n и* $S_n(f)$ *- интерполяционная квадратура, построенная по этим узлам. Тогда* $S_n(f)$ *будет точна для многочленов степени 2n-1.*

На основании этой теоремы алгоритм построения квадратуры Гаусса состоит из двух действий:

1) Построить ортогональный многочлен $\psi_n(x)$ на ω с весом $p(x)>0$ Вычислить корни $x_i, i=\overline{1,n}$
2) Найти веса $c_i, i=\overline{1,n}$ квадратуры $S_n(f)$ методом неопределенных коэффициентов.

Контрольные вопросы

1) Описать постановку задачи для построения квадратурной формулы Гаусса.
2) Для многочленов какой степени квадратура Гаусса $S_n(f)$ будет точна.
3) Опишите алгоритм ортогонализации на ω с весом $p(x)>0$ системе функций $\{1,x,x^2,\ldots,x^k,\ldots\}$. Постройте многочлен Лежандра $L_2(x)$ методом ортогонализации.
4) Почему ортогональный многочлен $\psi_k(x)$ степени k имеет k неизвестных коэффициентов, какими уравнениями определяются его коэффициенты?
5) Почему ортогональный многочлен $\psi_k(x)$ на ω с весом $p(x)>0$ ортогонален произвольному многочлену степени не выше $k-1$?

6) Привести примеры систем ортогональных полиномов.
7) Сформулировать теорему Гаусса.

Примеры решения задач

Пример 1. Построить квадратурную формулу Гаусса с одним узлом для вычисления интеграла:

$$I(f)=\int_0^1 xf(x)dx$$

Решение: Строим квадратурную формулу с одним узлом $S_1(f)=cf(x)$ Неизвестные величины - вес c и узел x. Для их определения необходимо всего два уравнения, поэтому можно решить задачу методом неопределенных коэффициентов:

1) Для функции $f(x)\equiv 1=x^0$ потребуем равенства интеграла $I(f)$ и квадратуры $S_1(f)$ для всех многочленов степени 0

$$I(1)=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}=cf(x)=c$$

2)Аналогично, для функции $f(x)=x$:

$$I(x)=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}=cf(x)=cx$$

откуда $x=\frac{1}{3c}=\frac{2}{3}$.Найденные величины подставляем в квадратуру.

Ответ: $I(f)=\int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{2}f\left(\frac{2}{3}\right)$, квадратура точна для всех многочленов не выше первой степени.

Пример 2. Доказать, что ортогональный многочлен степени n с весом $p(x)>0$ на отрезке$[a,b]$ имеет ровно n различных корней на этом отрезке.

Решение: Доказательство от противного. Пусть число корней ортогонального многочлена $\psi_n(x)$ равно $r<n$ Обозначим $R_r(x)=\prod_{i=1}^{r}(x-x_i)$

Тогда $\psi_n(x)=P_{n-r}(x)\prod_{i=1}^{r}(x-x_i)$,где многочлен $P_{n-r}(x)$ не имеет корней на$[a,b]$.

Тогда многочлен

$Q_{n+r}(x)=\psi_n(x)R_r(x)=P_{n-r}(x)\prod_{i=1}^{r}(x-x_i)^2$ не меняет знака на $[a,b]$.

Но:

$$\left(R_r(x),\psi_n\right)=\int_a^b p(x)P_{n-r}(x)\prod_{i=1}^{r}(x-x_i)^2dx\neq 0\left(p(x)>0\right)$$

Другими словами, ортогональный многочлен $\psi_n(x)$ не ортогонален произвольному многочлену низшей степени $R_r(x)(r<n)$ на $[a,b]$.Что противоречит свойствам ортогонального многочлена.

Пример 3. Методом ортогонализации построить ортогональный многочлен $\psi_3(x) = x^3 + \cdots$

На промежутке $\omega = [0,\infty)$ с весовой функцией $p(x) = e^{-x}$

Решение: Так как в скалярном произведении ортогональных полиномов $(\psi_n,\psi_m) = \int\limits_a^b p(x)\psi_n(x)\psi_m(x)dx = 0$ каждый из них определен с точностью до постоянного множителя, то положим старший коэффициент при каждом ортогональном полиноме единице.

Возьмем по частям вспомогательный интеграл

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}x^n dx = -\int\limits_0^\infty \frac{de^{-x}}{dx}x^n dx = -e^{-x}x^n \Big|_0^\infty + \int\limits_0^\infty ne^{-x}x^{n-1}dx = n\int\limits_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx = \cdots = n!\int\limits_0^\infty e^{-x}dx =$$

$$-n!e^{-x}\Big|_0^\infty = n!, n \in N \; u \; n = 0$$

Пользуясь ортогональностью многочлена всем ортогональным многочленам низшей степени, получим

$$\psi_0(x) \equiv 1, \psi_1(x) = x + a : (\psi_1,\psi_0) = 0 \Leftrightarrow \int\limits_0^\infty e^{-x}(x+a)dx = 1 + a = 0, a = -1, \psi_1(x) = x - 1$$

$$\psi_2(x) \equiv x^2 + bx + c,$$

$$\psi_2(x): \begin{cases} 0 = (\psi_2,\psi_0) = \int\limits_0^\infty e^{-x}(x^2 + bx + c)dx = 2 + b + c \\ 0 = (\psi_2,\psi_1) = \int\limits_0^\infty e^{-x}(x^2 + bx + c)(x-1)dx = 6 + 2b + c \end{cases}$$

Решая полученную систему $\begin{cases} 2 + b + c = 0 \\ 6 + 2b + c = 0 \end{cases}$, находим

$$b = -4, c = 2, \psi_2(x) = x^2 - 4x + 2$$

Наконец, для многочлена

$$\psi_3(x) \equiv x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3, \quad \psi_3(x): \begin{cases} 0 = (\psi_3,\psi_0) \\ 0 = (\psi_3,\psi_1) \\ 0 = (\psi_3,\psi_2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 0 = \int\limits_0^\infty e^{-x}(x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3)dx = 6 + 2a_1 + a_2 + a_3 \\ 0 = \int\limits_0^\infty e^{-x}(x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3)(x-1)dx = 24 + 6a_1 + 2a_2 + a_3 \\ 0 = \int\limits_0^\infty e^{-x}(x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3)(x^2 - 4x + 2)dx = 120 + 24a_1 + 6a_2 + 2a_3 \end{cases}$$

Здесь каждый нижележащий интеграл вычисляется с учетом всех вышележащих интегралов в системе.

Из последней системы уравнений $\begin{cases} 6+2a_1+a_2+a_3=0 \\ 24+6a_1+2a_2+a_3=0 \\ 120+24a_1+6a_2+2a_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$a_1=-9, a_2=18, a_3=-6,$

$\psi_3(x)=x^3-9x^2+18x-6$.

Ответ:

$\psi_0(x)\equiv 1, \psi_1(x)=x-1,\ \psi_2(x)=x^2-4x+2,\ \psi_3(x)=x^3-9x^2+18x-6$.

Пример 4. Построить квадратуру Гаусса с двумя узлами для вычисления интеграла:

$$I(f)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)f(x)dx$$

Решение: Согласно указанному алгоритму строим ортогональный многочлен второй степени на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ с весом $p(x)=\cos(x)$

$P_0(x)\equiv 1$.

Составим таблицу вспомогательных интегралов

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)xdx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)x^3dx=0$$

в силу нечетности подынтегральной функции и симметрии пределов подстановки $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)dx=sinx\,|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2,$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)x^2dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dsinx}{dx}x^2dx=sinx\,x^2\,|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2x\,sin(x)dx=\frac{\pi^2}{2}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\cos x}{dx}2xdx=$$

$$\frac{\pi^2}{2}+2x\cos x\,|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)dx=\frac{\pi^2}{2}-4$$

$P_1(x) = x + a$:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) P_1(x) P_0(x) dx = 0 \Leftrightarrow 0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)(x+a) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos(x) dx = 2a$$

Откуда $a = 0, P_1(x) = x.$

$P_2(x) = x^2 + bx + c$

$$\begin{cases} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) P_2(x) P_0(x) dx = 0 \Leftrightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\left(x^2 + bx + c\right) dx = 0 \\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) P_2(x) P_1(x) dx = 0 \Leftrightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\left(x^2 + bx + c\right) x dx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\pi^2}{2} - 4\right) + 2c = 0 \\ b\left(\frac{\pi^2}{2} - 4\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow c = -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{2} - 4\right), b = 0$$

Тогда $P_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{2} - 4\right)$.

Легко находим корни ортогонального многочлена

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{2} - 4\right)} = \pm\sqrt{\left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right)}$$

Переходим ко второму действию алгоритма

$$I(f) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) f(x) dx = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = c_1 f\left(-\sqrt{\left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right)}\right) + c_2 f\left(\sqrt{\left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right)}\right)$$

Где весовые коэффициенты c_1, c_2 находим методом неопределенных коэффициентов. Требуем точного равенства $I(f) = S_2(f)$ для всех многочленов нулевой и первой степени

$$f(x) \equiv 1, \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = 2 = c_1 + c_2$$

$$f(x)\equiv x, \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)x dx = 0 = c_1\left(-\sqrt{\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right)}\right)+c_2\left(\sqrt{\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right)}\right)$$

Откуда $c_1 = c_2 = 1$.Запишем

Ответ: $I(f)=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)f(x)dx = f\left(-\sqrt{\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right)}\right)+f\left(\sqrt{\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right)}\right).$

По теореме Гаусса полученная квадратура точна для всех многочленов степени не выше $2n-1=3$

Пример 5. Квадратурная формула

$S_3(f)=\frac{\pi}{3}\left(f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+f(0)+f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ применяется для вычисления интеграла

$I(f)=\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$ Показать, что она точна для всех многочленов пятой степени.

Решение: Пользуясь таблицей, приведенной в параграфе для ортогональных многочленов Чебышева первого рода $\omega=[-1,1],\ p(x)\equiv\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ можем сразу построить многочлен Чебышева первого рода третей степени рекуррентно (так как именно они ортогональны на $[-1,1]$ с указанной весовой функцией):

$T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x), T_0(x)\equiv 1,$

$T_1(x)\equiv x, T_2(x)=2x^2-1, T_3(x)=4x^3-2x-x=4x^3-3x$

Или с точностью до множителя при старшей степени $\psi_3(x)=x^3-\frac{3}{4}x$. Найдем корни $\psi_3(x)$:

$$\psi_3(x)=0 \Leftrightarrow x^3-\frac{3}{4}x = x\left(x^2-\frac{3}{4}\right)=0, x_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}, x_2=0, x_3=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

В соответствии с теоремой Гаусса

$$I(f)=\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = c_1f(x_1)+c_2f(x_2)+c_3f(x_3)=c_1f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+c_2f(0)+c_3f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Неизвестные веса c_1, c_2, c_3 находим методом неопределенных коэффициентов. Потребуем точности квадратурной формулы для всех многочленов степени не выше двух:

$$f(x)\equiv 1, I(f)=\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsin\, x\,|_{-1}^{1} = \pi = c_1+c_2+c_3$$

$$f(x)\equiv x, I(f)=\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=0=\frac{\sqrt{3}}{2}(c_3-c_1)$$

в силу нечетности подынтегральной функции в симметричных подстановках -1 и 1.

$$f(x)\equiv x^2, I(f)=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{-1+1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx+\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{3}{4}(c_3+c_1)$$

В первом интеграле обозначим

$$x=\cos y, dx=-\sin y dy, \sqrt{1-x^2}=\sin y, x\,|_{-1}^{1}\rightarrow y\,|_{\pi}^{0},$$

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=-\int_{\pi}^{0}(\sin y)^2 dy=-\int_{\pi}^{0}\frac{1-\cos 2y}{2}dy=\frac{\pi}{2}+\frac{\sin 2y}{4}\,|_{\pi}^{0}=\frac{\pi}{2}, I(f)=\frac{\pi}{2}.$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} c_1+c_2+c_3=\pi \\ c_3-c_1=0 \\ \frac{3}{4}(c_3+c_1)=\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow c_1=c_3=\frac{\pi}{3}\Rightarrow c_2=\frac{\pi}{3}.$$

Запишем *ответ*:

$$I(f)=\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{3}\left(f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+f(0)+f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

По теореме Гаусса данная квадратура точна для всех многочленов степени $2n-1=5$.

Пример 6. Построить квадратурную формулу с двумя узлами для вычисления интегралов

$$I(f)=\int_{0}^{\infty}e^{-x}f(x)dx=c_1f(x_1)+c_2f(x_2)$$

Решение: Замечаем, что весовая функция в данном случае равна $p(x)\equiv e^{-x}$ на области $\omega=[0,\infty)$ что соответствует ортогональным полиномам Эрмита. Согласно примеру 4, для многочлена второй степени с двумя корнями на интервале $[0,\infty)$ $\psi_2(x)=x^2-4x+2$.

Находим корни квадратного трехчлена

$$\psi_2(x)=x^2-4x+2=0\Leftrightarrow(x-2)^2=2, x_1=2-\sqrt{2}, x_2=2+\sqrt{2}$$

Тогда

$$I(f)=\int_{0}^{\infty}e^{-x}f(s)dx=c_1f(2-\sqrt{2})+c_2f(2+\sqrt{2})$$

Переходим к определению весовых коэффициентов (методом н.к.) c_1, c_2:

Для $f(x)\equiv 1: I(f)=\int_{0}^{\infty}e^{-x}dx=1=c_1+c_2$.

Для $f(x) \equiv x : I(f) = \int\limits_0^\infty e^{-x} x dx = 1 = \left(2-\sqrt{2}\right)c_1 + \left(2+\sqrt{2}\right)c_2$

Решаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ \left(2-\sqrt{2}\right)c_1 + \left(2+\sqrt{2}\right)c_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow c_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}, c_2 = \frac{-1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

Запишем *ответ*:

$$I(f) = \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x) dx = \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right) f(2-\sqrt{2}) + \left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right) f(2+\sqrt{2})$$

По теореме Гаусса квадратурная формула точна для всех многочленов степени не выше 3.

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Построить квадратурную формулу Гаусса с одним узлом для вычисления интеграла:

$$I(f) = \int\limits_0^1 e^x f(x) dx$$

.

Ответ: $S_1(f) = (e-1) f\left(\frac{1}{e-1}\right)$

*2.*Построить квадратуру Гаусса с двумя узлами для вычисления интеграла:

$$I(f) = \int\limits_{-1}^1 x^2 f(x) dx$$

Ответ: $S_2(f) = \frac{1}{3}\left(f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right)$

3. Построить квадратурную формулу Гаусса с тремя узлами для вычисления интеграла

$$I(f) = \int\limits_{-1}^1 f(x) dx .$$

Ответ: $S_3(f) = \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$

4.Построить квадратурную формулу Гаусса с одним узлом для вычисления интеграла

$$a) I(f) = \int\limits_0^1 x^2 f(x) dx \qquad b) I(f) = \int\limits_0^1 |x| f(x) dx$$

5.Построить квадратурную формулу Гаусса с двумя узлами для вычисления интеграла

$$I(f) = \int\limits_0^1 p(x) f(x) dx$$

$a)\ p(x) = x,\ b)\ p(x) = \sin(\pi x),\ \ c)\, p(x) = e^{x},$

$d)\, p(x) = \cos\left(x - \frac{1}{2}\right),\ e)\, p(x) = 1 - x,\ f\,)\, p(x) = e^{-x}$

6. Квадратурная формула

$$S_3(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{6}\left(f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + 4f(0) + f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right)$$

применяется для вычисления интеграла $I(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) f(x)dx$.

Показать, что она точна для всех многочленов пятой степени.

7.Методом ортогонализации построить ортогональный многочлен $\psi_3(x) = x^3 + \cdots$

a) На промежутке $\omega = (-\infty, \infty)$ с весовой функцией $p(x) = e^{-x^2}$

   Ответ: $\psi_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x$

b) На промежутке $\omega = [-1,1]$ с весовой функцией $p(x) = \sqrt{1 - x^2}$

   Ответ: $\psi_3(x) = x^3 - \frac{1}{2}x$

8. Пусть P – прямоугольник на плоскости. $s(P)$ его площадь, A, B, C, D - середины его сторон, E - точка пересечения диагоналей. Показать, что кубатурная формула

$$S(f) = \frac{1}{6}s(P)\big(f(A) + f(B) + f(C) + f(D) + 2f(E)\big) \approx \int \int\limits_{P}^{A,B,C,D,E} f(x)dx$$

Где $x = (x_1, x_2),\ dx = dx_1 dx_2$ точна для всех многочленов третей степени вида

$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + b_{11}x_1^3 + b_{12}x_1^2x_2 + b_{21}x_1x_2^2 + b_{22}x_2^3$

Используемая литература:

1) Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В.Численные методы в задачах и упражнениях. – М.:БИНОМ, Лаборатория знаний, 2010.
2) Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.:1989 – 450 с.

Тема: Интегральные уравнения

Обозначим интегральный оператор

$$G_b y(x) = \int_a^b K(x,s)y(s)ds \qquad (1)$$

где: известная функция $K(x,s)$, определенная на прямоугольнике $[a,b]\times[a,b]$, называется ядром интегрального оператора. Функция $y(x)$, определенная на отрезке $[a,b]$ неизвестна. В общем случае верхний предел интегрального оператора - число b, может быть переменным. Типичными интегральными уравнениями являются уравнения Фредгольма и Вольтерры первого и второго рода.
Интегральные уравнение первого рода и второго рода определяется соответственно как

$G_b y(x) = f(x)$

$y(x) - \lambda G_b y(x) = f(x)$

Для уравнения Фредгольма верхний предел постоянное число. Интегральное уравнение с переменным верхним пределом $b = x$ носит название Вольтерры.

$G_x y(x) = f(x)$

$y(x) - \lambda G_x y(x) = f(x)$

Параметр λ ,входящий в уравнение, может быть задан либо подлежать определению в зависимости от постановки задачи.

Существование, единственность уравнения Фредгольма второго рода и условия применимости метода простой итерации для численного решения уравнения

Пусть R метрическое пространство. Отображение A пространства R в себя называется сжимающим (или короче сжатием), если существует число $\alpha < 1$, что для любых элементов $x, y \in R$ выполняется условие[2]:

$$\rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x,y)$$

Тогда n - кратное отображение A, примененное к элементам x, y - образы $A^n x, A^n y \in R$ находятся на расстоянии

$$\rho(A^n x, A^n y) \le \alpha\rho(A^{n-1}x, A^{n-1}y) \le \alpha^2\rho(A^{n-2}x, A^{n-2}y) \le \cdots \le \alpha^n\rho(A^0 x, A^0 y) \equiv \alpha^n\rho(x,y)$$

При значениях $\alpha < 1$ отображение A будет непрерывным. Другими словами, для последовательности элементов $x_n \to x; x, x_n \in R : Ax_n \to Ax.$ Действительно, из условия $\rho(x_n, x) \to 0$ следует условие $\rho(Ax_n, Ax) \le \alpha\rho(x_n, x) \to 0, при\ \ n \to \infty$

Сжимающие отображения используют для исследования устойчивости разностных схем [1,2]

Теорема 1. (принцип сжимающих отображений) А.Н.Колмогоров.
Всякое сжимающее отображение, определенное в полном метрическом пространстве R имеет одну и только одну неподвижную точку $(Ax = x)$.
Доказательство. Пусть x_0 произвольная точка из R. Обозначим
$x_1 = Ax_0, x_2 = Ax_1, x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0.$
Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ - фундаментальна. Считаем для определенности $m > n$:

$$\rho(x_m, x_n) \le \rho(x_m, x_{m-1}) + \rho(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + \rho(x_{n+1}, x_n) \le (\alpha^{m-1} + \alpha^{m-1} + \cdots + \alpha^n)\rho(x_1, x_0) =$$

$$\alpha^n(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{m-n-1})\rho(x_1, x_0) \le \alpha^n(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{m-n-1} + \cdots)\rho(x_1, x_0) = \frac{\alpha^n \rho(x_1, x_0)}{1-\alpha}$$

Поскольку число $\frac{\rho(x_1, x_0)}{1-\alpha}$ определяется сжимающим отображением A и начальной точкой x_0, то оно фиксировано, но $\frac{\alpha^n \rho(x_1, x_0)}{1-\alpha} \to 0, n \to \infty$.
Т.е.

$$\forall \varepsilon = \frac{\alpha^N \rho(x_1, x_0)}{1-\alpha} > 0 \ \exists N(\varepsilon) = 1 + \left[\log_\alpha \left(\frac{\varepsilon(1-\alpha)}{\rho(x_1, x_0)} \right) \right], \forall n, m > N(\varepsilon) : \rho(x_m, x_n) < \varepsilon (0 < \alpha < 1)$$

Что и означает по определению фундаментальность последовательности $\{x_n\}$.
Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. В силу непрерывности оператора A оператор предельного перехода можно перенести от аргумента функции к самой функции
$Ax = A(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = x$
Т.е. точка $x = Ax$ является неподвижной. Докажем ее единственность от противного.
Пусть $x = Ax$ и $y = Ay$:
$\rho(x, y) = \rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y) < \rho(x, y)(\alpha < 1)$

Но положительное число $\rho(x, y)$ не может быть меньше себя. Противоречие можно устранить $\Leftrightarrow \rho(x, y) = 0$ Действительно $0 \le \alpha \cdot 0 = 0$. Теорема доказана.
Используем теорему А.Н.Колмогорова для получения условий сходимости интегрального уравнения Фредгольма 2 рода.

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x) \qquad (2)$$

В численных методах используют два основных вида нормированных функциональных пространств:
1) Пространство функций $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ с нормой $\|f - g\|_C = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$
2) Пространство функций L_2 интегрируемых с квадратом на отрезке $[a, b]$ и нормой

$$\| f - g\|_{L_2} = \left(\int_a^b \left(f(x) - g(x) \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Справедлива следующая

Лемма 1. (А.Н.Колмогоров). Пусть $y_1(x), y_2(x), f(x) \in C[a,b], K(x,s) \in C([a,b]\times[a,b])$.

. И выполнено условие

$$|\lambda| < \left((b-a) \max_{(x,s)\in([a,b]\times[a,b])} |K(x,s)| \right)^{-1}$$

Тогда оператор $G_b y(x)$ (формула (1)) сжимающий и последовательность сжимающих отображений

$$y_{k+1}(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) y_k(s) ds = f(x) \qquad (3)$$

сходится к некоторой функции $y^*(x) \in C[a,b]$ решению уравнения (2). Это решение единственно.

Доказательство. Рассмотрим начальную непрерывную функцию $y_0(x) \in C[a,b]$, тогда последовательность функций, используя условие леммы,

$$y_{k+1}(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) y_k(s) ds + f(x) \quad ,k = 0,1,\ldots$$

также непрерывны $y_{k+1}(x) \in C[a,b], k = 0,1,\ldots$. Для двух разных последовательностей $y_{k+1}^1(x)$, $y_{k+1}^2(x)$

$$\left\| y_{k+1}^2 - y_{k+1}^1 \right\|_C = \max_{x\in[a,b]} \left| y_{k+1}^2(x) - y_{k+1}^1(x) \right| \le |\lambda| \max_{x\in[a,b]} \int_a^b |K(x,s)|\,|y_k^2(x) - y_k^1(x)|\, ds \le$$

$$|\lambda|(b-a) \max_{(x,s)\in([a,b]\times[a,b])} |K(x,s)| \max_{x\in[a,b]} \left| y_k^2(x) - y_k^1(x) \right| = |\lambda|(b-a)\|K\|_C \left\| y_k^2 - y_k^1 \right\|_C$$

Отображение $G_b y(x) = \int_a^b K(x,s) y(s) ds$ будет сжимающим, если

$$\left\| y_{k+1}^2 - y_{k+1}^1 \right\|_C \le \alpha \left\| y_k^2 - y_k^1 \right\|_C, \alpha = |\lambda|(b-a)\|K\|_C < 1$$

Т.е. при $|\lambda| < \dfrac{1}{(b-a)\|K\|_C}$.Обозначим $\lim\limits_{k\to\infty} y_{k+1}(x) = y^*(x) \in C[a,b]$ (в силу полноты пространства $C[a,b]$ - последовательность непрерывных функций $y_{k+1}(x) \in C[a,b]$ сходится к элементу $y^*(x) \in C[a,b]$ данного пространства. По теореме 1 Колмогорова $y^*(x)$ неподвижная точка отображения(3) существует, единственна и удовлетворяет уравнению:

$$y^*(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) y^*(s) ds + f(x)$$

откуда и следует утверждение леммы.

Лемма 2. Пусть $y(x) \in L_2[a,b], |\lambda| < \|K\|_{L_2}^{-\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b |K(x,s)|^2 dxds \right)^{-\frac{1}{2}}$.

$K(x,s) \in L_2([a,b]\times[a,b])$ Начальная функция $y_0(x)$ и неоднородная часть интегрального уравнения (2) $f(x), y_0(x) \in L_2[a,b]$. Тогда последовательность функций

$$y_{k+1}(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) y_k(s) ds + f(x) \quad, k = 0,1,\dots$$

Сходятся по норме $\| \ \|_{L_2}$ к функции $y^*(x) \in L_2[a,b]$ решению уравнения (2).

Доказательство. Рассмотрим метод простой итерации

$$y_{k+1}(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) y_k(s) ds + f(x) \quad, k = 0,1,\dots$$

Используем общие свойства нормы:

1) $\|g+q\|_{L_2} \le \|g\|_{L_2} + \|q\|_{L_2} \quad \forall g,q \in L_2[a,b]$

(неравенство треугольника для функционала нормы)

2) $(g,q) = \int_a^b g(s)q(s)ds \le (g,g)^{\frac{1}{2}}(q,q)^{\frac{1}{2}}$

неравенство Коши - Буняковского с нормой функции $q(x)$

$$\|q\|_{L_2} = (q,q)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b q(s)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

то функция $y_{k+1}(x)$ имеет норму в $L_2[a,b]$ т.е. $y_{k+1}(x) \in L_2[a,b]$:

$$\|y_{k+1}\|_{L_2} \le |\lambda| \|K\|_{L_2} \|y_k\|_{L_2} + \|f\|_{L_2} \ (k = 0,1,\dots)$$

(По условию леммы 2 числа $\|K\|_{L_2}, \|y_0\|_{L_2}, \|f\|_{L_2}$ существуют)

Рассмотрим две функциональных последовательности $y_{k+1}^1(x), y_{k+1}^1(x) \in L_2[a,b]$:

$$y_{k+1}^1(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) y_k^1(s) ds + f(x), k = 0,1,\dots$$

$$y_{k+1}^2(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) y_k^2(s) ds + f(x), k = 0,1,\dots$$

$$\left| y_{k+1}^2(x) - y_{k+1}^1(x) \right| = |\lambda| \left| \int_a^b K(x,s)\left(y_k^2(s) - y_k^1(s)\right) ds \right| \le |\lambda| \left| \int_a^b |K(x,s)| \left|\left(y_k^2(s) - y_k^1(s)\right)\right| ds \right|$$

$$\left\| y_{k+1}^2 - y_{k+1}^1 \right\|_{L_2}^2 = \int_a^b \left(y_{k+1}^2(x) - y_{k+1}^1(x) \right)^2 dx \le \int_a^b dx |\lambda|^2 \left(\int_a^b K(x,s)\left(y_k^2(s) - y_k^1(s)\right) ds \right)^2 \le$$

(Используя неравенство Коши – Буняковского, продолжим преобразование)

$$|\lambda|^2\int_a^b dx\left(\int_a^b K(x,s)^2 ds\right)^1\left(\int_a^b \left(y_k^2(s)-y_k^1(s)\right)^2 ds\right)^1 = |\lambda|^2\int_a^b K(x,s)^2 dsdx\int_a^b \left(y_k^2(s)-y_k^1(s)\right)^2 ds =$$

$$= |\lambda|^2\|K\|_{L_2}^2\left\|y_k^2-y_k^1\right\|_{L_2}^2$$

Короче, $\left\|y_{k+1}^2-y_{k+1}^1\right\|_{L_2} \le |\lambda|\|K\|_{L_2}\left\|y_k^2-y_k^1\right\|_{L_2}$

Отображение $G_b y(x)=\int_a^b K(x,s)y(s)ds$ будет сжимающим в $L_2[a,b] \Leftrightarrow$

$$\left\|y_{k+1}^2-y_{k+1}^1\right\|_{L_2} \le |\lambda|\|K\|_{L_2}\left\|y_k^2-y_k^1\right\|_{L_2} = \alpha\left\|y_k^2-y_k^1\right\|_{L_2} < \left\|y_k^2-y_k^1\right\|_{L_2} \text{ (при } \alpha=|\lambda|\|K\|_{L_2}<1)$$

Что возможно при $|\lambda| < \dfrac{1}{\|K\|_{L_2}} = \left(\int_a^b\int_a^b |K(x,s)|^2 dsdx\right)^{-\frac{1}{2}}$

Что и требовалось доказать.

Замечание (соотношение для λ – области сходимости интегральных уравнений в пространствах $C[a,b], L_2[a,b]$). Поскольку

$$\|K\|_{L_2}^2 = \int_a^b\int_a^b |K(x,s)|^2 dsdx \le (b-a)^2 \max_{(x,s)\in[a,b]\times[a,b]}|K(x,s)| = (b-a)^2\|K\|_C^2$$

$$\|K\|_{L_2} \le (b-a)\|K\|_C \Leftrightarrow \left|\lambda_{L_2}\right| \equiv \frac{1}{\|K\|_{L_2}} \ge \frac{1}{(b-a)\|K\|_C} \equiv |\lambda_C|$$

Другими словами, λ_{L_2} область сходимости в пространстве $L_2[a,b]$ не уже λ_C области сходимости в пространстве функций $C[a,b]$ для интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Рассмотрим распространенные численные методы решения интегральных уравнений.

1.**Метод замены интеграла**.

Заменим в формуле(2) интеграл приближенной квадратурной формулой $\int_a^b K(x,s)y(s)ds = \sum_{j=1}^n c_j K(x_i,s_j)y(s_j)$ где c_j веса заданной квадратурной формулы. Тогда

$$y(x_i)-\lambda\sum_{j=1}^n c_j K(x_i,s_j)y(s_j) = f(x_i),\ i,j=\overline{1,n}$$

Получаем неоднородную систему n линейных уравнений для n неизвестных узловых значений функции $y(x_i)$. Данная система имеет единственное решение,

$$\Leftrightarrow \det(A_{i,j}) = \det(\delta_{i,j} - \lambda c_j K(x_i, s_j)) \neq 0, \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

Пример 1.Найти приближенное решение интегрального уравнения методом замены интеграла квадратурной формулой Симпсона и оценить его погрешность.

$$y(x) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}\int_0^{\text{`}} xsy(s)ds$$

Решение: Запишем квадратурную формулу Симпсона по трем узлам отрезка $[a,b] - a, \left(\frac{a+b}{2}\right), b : S_3(y) = \left(\frac{b-a}{6}\right)\left(y(a) + 4y\left(\frac{a+b}{2}\right) + y(b)\right), a = 0, b = 1,$

для трех узлов $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 1$ получим 3 уравнения

$$x_1 = 0; y(0) = \frac{5}{6}0 + \frac{1}{2}0\int_0^1 sy(s)ds = 0$$

$$x_2 = \frac{1}{2}; y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int_0^1 sy(s)ds = \frac{5}{12} + \frac{1}{4}\frac{(1-0)}{6}\left(0y(0) + 4\frac{1}{2}y\left(\frac{1}{2}\right) + y(1)\right) = \frac{5}{12} + \frac{1}{24}\left(2y\left(\frac{1}{2}\right) + y(1)\right)$$

$$x_3 = 1; y(1) = \frac{5}{6}1 + \frac{1}{2}1\int_0^1 sy(s)ds = \frac{5}{6} + \frac{1}{2}\frac{1}{6}\left(0y(0) + 4\frac{1}{2}y\left(\frac{1}{2}\right) + y(1)\right) = \frac{5}{6} + \frac{1}{12}\left(2y\left(\frac{1}{2}\right) + y(1)\right)$$

Решаем последнюю линейную систему двух уравнений

$$\begin{cases} y(1) = \frac{5}{6} + \frac{1}{6}y\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{y(1)}{12} \\ y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{12} + \frac{1}{12}y\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{y(1)}{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24y\left(\frac{1}{2}\right) = 10 + 2y\left(\frac{1}{2}\right) + y(1) \\ 12y(1) = 10 + 2y\left(\frac{1}{2}\right) + y(1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 22y\left(\frac{1}{2}\right) = 10 + y(1) \\ 11y(1) = 10 + 2y\left(\frac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 242y\left(\frac{1}{2}\right) = 110 + 11y(1) \\ 11y(1) = 10 + 2y\left(\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 120 = 240y\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Так как $y(0) = 0, y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, y(1) = 1$ то $y(x) = x$. Проверим, что $y(x)$ является точным решением исходного уравнения:

$$x = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}x\int_0^1 s^2 ds = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}x\left(\frac{s^3}{3}\right)_0^1 = \frac{5}{6}x + \frac{x}{6} = x$$

Ответ: $y(x) = x$ является точным решением уравнения

$$y(x)=\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}\int_0 xsy(s)ds$$

Т.е. погрешность равна нулю.

Пример 2.Найти приближенное решение интегрального уравнения методом замены интеграла квадратурной формулой Симпсона и оценить его погрешность.

$$y(x)=e^{-x}+\frac{1}{2}\int_0^1 xe^s y(s)ds$$

для трех узлов $x_1=0, x_2=\frac{1}{2}, x_3=1$ получим 3 уравнения

$$x_1=0; y(0)=1+\frac{1}{2}0\int_0^1 e^s y(s)ds=1$$

$$x_2=\frac{1}{2}; y\left(\frac{1}{2}\right)=e^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\int_0^1 e^s y(s)ds=e^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\frac{1}{6}\left(e^0 y(0)+4e^{\frac{1}{2}}y\left(\frac{1}{2}\right)+e^1 y(1)\right)=$$

$$e^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{24}+\frac{1}{6}e^{\frac{1}{2}}y\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{e^1 y(1)}{24}$$

$$x_3=1, y(1)=e^{-1}+\frac{1}{2}1\int_0^1 e^s y(s)ds=e^{-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{6}\left(e^0 y(0)+4e^{\frac{1}{2}}y\left(\frac{1}{2}\right)+e^1 y(1)\right)=e^{-1}+\frac{1}{12}+\frac{1}{3}e^{\frac{1}{2}}y\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{e^1 y(1)}{12}$$

Решаем численно систему двух линейных уравнений, например, на MATCAD

$$\begin{cases} y\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{6}e^{\frac{1}{2}}\right)-\frac{e^1}{24}y(1)=e^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{24} \\ -\frac{1}{3}e^{\frac{1}{2}}y\left(\frac{1}{2}\right)+y(1)\left(1-\frac{e^1}{12}\right)=e^{-1}+\frac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(0)=1.0 \\ y\left(\frac{1}{2}\right)=1.108 \\ y(1)=1.371 \end{cases}$$

Проверим, что $y(x)=x+e^{-x}$ является точным решением исходного уравнения

$$x+e^{-x}=e^{-x}+\frac{1}{2}x\int_0^1 e^s(s+e^{-s})ds \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}x\int_0^1(e^s s+1)ds=\frac{1}{2}x2=x$$

В узлах

$$x_1=0: y(0)=1.0; x_2=\frac{1}{2}: y\left(\frac{1}{2}\right)=0.5+\exp(-0.5)=1.107; x_3=1.0: y(1)=1.0+\exp(-1.0)=1.368$$

Сравнивая точное решение и приближенное, получим, что погрешность (норма Чебышева разности точного и приближенного решений) равна

$$\|y_{ex}-y\|_C=\max_{x\in[0,1]}|y_{ex}(x)-y(x)|=0.003$$

Ответ: $y(0)=1.0; y\left(\frac{1}{2}\right)=1.108; y(1)=1.371; \|y_{ex}-y\|_C=0.003.$

Пример 3. Найти в точках $x = 0, \frac{1}{2}, 1$ приближенное решение интегрального уравнения

$$y(x) = e^{-x} + \int_0^x e^{-(x-s)} y(s)ds$$

Методом замены интеграла составной квадратурной формулы трапеций.
Решение: Обратим внимание на переменный верхний предел в уравнении, т.е. решаем интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода.
Квадратурная формула трапеций для двух узлов

$$x_1 = a, x_2 = b, S_2(y) = \left(\frac{b-a}{2}\right)\left(y(a) + y(b)\right)$$

Применим данную квадратуру к двум отрезкам $\left[0, \frac{1}{2}\right]\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ по отдельности

$$x = 0; y(0) = e^{-0} + e^{-0}\int_0^0 e^s y(s)ds = 1$$

$$x = \frac{1}{2}; y\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^s y(s)ds = e^{-\frac{1}{2}} + \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{4}\left(y(0)e^0 + y\left(\frac{1}{2}\right)e^{\frac{1}{2}}\right) = e^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{5}{4} + \frac{y\left(\frac{1}{2}\right)}{4}e^{\frac{1}{2}}\right)$$

для отрезка $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

$$x = 1; y(1) = e^{-1} + e^{-1}\int_0^1 e^s y(s)ds = e^{-1} + \frac{e^{-1}}{4}\left(y(0)e^0 + 2y\left(\frac{1}{2}\right)e^{\frac{1}{2}} + y(1)e^1\right) = e^{-1}\left(\frac{5}{4} + \frac{y\left(\frac{1}{2}\right)}{2}e^{\frac{1}{2}} + \frac{y(1)}{4}e\right)$$

для отрезков $\left[0, \frac{1}{2}\right]\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ вместе. Решаем численно систему двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} y\left(\frac{1}{2}\right)e^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{4} + \frac{y\left(\frac{1}{2}\right)}{4}e^{\frac{1}{2}} \\ y(1)e = \frac{5}{4} + \frac{y\left(\frac{1}{2}\right)}{2}e^{\frac{1}{2}} + \frac{y(1)}{4}e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{4}e^{\frac{1}{2}}} = 1.011 \\ y(1) = \dfrac{\left(\frac{5}{4} + \frac{y\left(\frac{1}{2}\right)}{2}e^{\frac{1}{2}}\right)}{\frac{3}{4}e} = 1.022 \end{cases}$$

Полученные значения $y(0)=1; y\left(\frac{1}{2}\right)=1.011; y(1)=1.022$ наводят на мысль, что $y(x)\equiv 1$.

Проверим это:

$$1=e^{-x}+e^{-x}\int_0^x e^s ds=\left[e^{-x}+e^{-x}\left(e^{-s}\right)\right]_0^x=1$$

Ответ: $y(0)=1; y\left(\frac{1}{2}\right)=1.011; y(1)=1.022$. Точное решение $y(x)\equiv 1$.

2.**Метод замены ядра.**

Определение. Ядро $K(x,s)$ интегрального уравнения (2) называется вырожденным, если каждое его слагаемое допускает разделение переменных:

$$K(x,s)=\sum_{i=1}^m A_i(x)B_i(s)$$

где: $A_i(x), i=\overline{1,m}, B_i(s), i=\overline{1,m}$ системы линейно независимых функций на $[a,b]$

Пусть ядро $K(x,s)$ вырождено, тогда уравнение (2) можно записать в виде:

$$y(x)-\lambda\sum_{i=1}^m A_i(x)\int_a^b B_i(s)y(s)ds=f(x) \qquad (4)$$

Решение последнего уравнения удобно представить в виде

$$y(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^m D_i A_i(x) \qquad (5)$$

Коэффициенты $D_i, i=\overline{1,m}$ подлежат определению. Подставим (5) в (4):

$$f(x)+\lambda\sum_{i=1}^m A_i(x)D_i-\lambda\sum_{i=1}^m A_i(x)\int_a^b B_i(s)\left(f(s)+\lambda\sum_{j=1}^m A_j(s)D_j\right)=f(x)$$

Вычитая из обеих частей последнего уравнения $f(x)$,сокращая на λ, группируя слагаемые, содержащие $A_i(x)$:

$$\sum_{i=1}^m A_i(x)\left\{D_i-\lambda\sum_{j=1}^m D_j\left(\int_a^b B_i(s)A_j(s)ds\right)-\int_a^b B_i(s)f(s)ds\right\}=0 \qquad (6)$$

В силу линейной независимости системы функций $A_i(x), i=\overline{1,m}$ уравнение (6) возможно тогда и только тогда, если все коэффициенты при $A_i(x)$ равны нулю:

$$D_i-\lambda\sum_{j=1}^m D_j\left(\int_a^b B_i(s)A_j(s)ds\right)-\int_a^b B_i(s)f(s)ds,\ i=\overline{1,m} \qquad (7)$$

Другими словами $D_i-\lambda\sum_{j=1}^m D_j a_{ij}=f_i, i=\overline{1,m}$ (8)

Где: $a_{i,j}=\int_a^b B_i(s)A_j(s)ds;\quad f_i=\int_a^b B_i(s)f(s)ds,\ i=\overline{1,m}$

Линейная система из m линейных уравнений разрешима$\Leftrightarrow$, если $det\left(\delta_{i,j}-\lambda a_{i,j}\right)\neq 0;\ i,j=\overline{1,m}$

В случае, если $det\left(\delta_{i,j}-\lambda a_{i,j}\right)=0\Leftrightarrow det\left(\lambda A-I\right)=0\Leftrightarrow det\left(A-\frac{I}{\lambda}\right)=0$

Число λ является характеристическим уравнения ядра. В этом случае, решая однородную систему уравнений (7) и выбирая линейно независимые решения, можно найти собственные функции ядра в явном виде, соответствующие собственному числу λ.

Пример 4. Найти приближенное решение интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$y(x) = -\frac{x}{6} - \frac{1}{2} + \int_0^1 (1+2xs)y(s)ds$$

Решение: В данном примере

$$f(x) = -\frac{x}{6} - \frac{1}{2},\ K(x,s) = 1+2xs,\ A_1(x) \equiv 1,\ A_2(x) = 2x,\ B_1(s) \equiv 1, B_2(s) = s, \lambda = 1.$$

По формулам (8) вычисляем коэффициенты уравнения (7):

$$a_{11} = \int_0^1 A_1(s)B_1(s)ds = \int_0^1 1ds = 1$$

$$a_{12} = \int_0^1 A_2(s)B_1(s)ds = \int_0^1 2sds = s^2 |_0^1 = 1$$

$$a_{21} = \int_0^1 A_1(s)B_2(s)ds = \int_0^1 sds = \frac{s^2}{2} |_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$a_{22} = \int_0^1 A_2(s)B_2(s)ds = \int_0^1 2s^2ds = \frac{2s^3}{3} |_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$f_1 = \int_0^1 B_1(s)f(s)ds = \int_0^1 \left(-\frac{s}{6} - \frac{1}{2}\right)ds = -\left(\frac{s^2}{12} + \frac{s}{2}\right)_0^1 = -\frac{7}{12}$$

$$f_2 = \int_0^1 B_2(s)f(s)ds = \int_0^1 \left(-\frac{s}{6} - \frac{1}{2}\right)sds = -\left(\frac{s^3}{18} + \frac{s^2}{4}\right)_0^1 = -\frac{1}{18} - \frac{1}{4} = -\frac{11}{36}$$

Запишем систему уравнений (7):

$$\begin{cases} D_1 - \lambda(D_1a_{11} + D_2a_{12}) = f_1 \\ D_2 - \lambda(D_1a_{21} + D_2a_{22}) = f_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D_1 - (D_1 + D_2) = -\dfrac{7}{12} \\ D_2 - \left(\dfrac{D_1}{2} + \dfrac{2}{3}D_2\right) = -\dfrac{11}{36} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D_2 = \dfrac{7}{12} \\ \dfrac{D_1}{2} = \dfrac{D_2}{3} + \dfrac{11}{36} = \dfrac{7}{36} + \dfrac{11}{36} = \dfrac{1}{2}, D_1 = 1 \end{cases}$$

Тогда $y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{m} A_i(x)D_i = -\frac{x}{6} - \frac{1}{2} + 1(D_1 + 2xD_2) = -\frac{x}{6} - \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{7*2x}{12}\right) = x + \frac{1}{2}$

Проверим, что $y(x) = x + \frac{1}{2}$ является точным решением данного уравнения:

$$x + \frac{1}{2} = -\frac{x}{6} - \frac{1}{2} + \int_0^1 (1+2xs)\left(s + \frac{1}{2}\right)ds = -\frac{x}{6} - \frac{1}{2} + \int_0^1 \left(s + \frac{1}{2} + 2xs^2 + xs\right)ds =$$

$$-\frac{x}{6} - \frac{1}{2} + \left(\frac{s^2}{2} + \frac{s}{2} + \frac{2}{3}xs^3 + \frac{xs^2}{2}\right)_0^1 = -\frac{x}{6} - \frac{1}{2} + 1 + \frac{2}{3}x + \frac{x}{2} = x + \frac{1}{2}$$

Ответ: $y(x) = x + \frac{1}{2}$ точное решение.

Проекционные методы

1.Метод наименьших квадратов

Разложим приближенное решение интегрального уравнения (2) по системе линейно независимых функций $\varphi_i(x), i = \overline{1,n}$

$$\overline{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x) \qquad (1.1)$$

Обозначим невязку уравнения (2)

$$r(x) = \overline{y}(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\overline{y}(s)ds - f(x) \qquad (1.2)$$

Потребуем, чтобы норма невязки $r(x)$ в пространстве функций в $L_2[a,b]: \|r\|_{L_2}$ была минимальной. Подставим $\overline{y}(x)$ из (1.1) в (1.2), $r(x)$ будет зависеть от n варьируемых коэффициентов.

$$r(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(s) ds - f(x)$$

$$\|r\|_{L_2}^2 (C_1,...,C_n) = \int_a^b r^2(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(s) ds - f(x) \right)^2 dx$$

Необходимое условие минимума функции n переменных:

$$\frac{\partial \|r\|_{L_2}^2 (C_1,...,C_n)}{\partial C_i} = 0 \Leftrightarrow 2\|r\|_{L_2} \frac{\partial \|r\|_{L_2} (C_1,...,C_n)}{\partial C_i} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \|r\|_{L_2} (C_1,...,C_n)}{\partial C_i} = 0$$

$(\textit{так как } \|r\|_{L_2} > 0 \textit{ для непрерывных функций } r(x) \textit{ не равных тождественно нулю})$

$\left(\|r\|_{L2}^2 - \textit{удобнее дифференцировать, чем} \|r\|_{L_2}\right)$

$$2\int_a^b \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(s) ds - f(x) \right) \times \left(\varphi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi_i(s)ds \right) ds = 0, i = \overline{1,n}$$

В первом множителе заменили индекс суммирования $i \to j$

Относительно неизвестных коэффициентов c_j получаем неоднородную систему n линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \left\{ \int_a^b \left(\varphi_j(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi_j(s)ds \right) \times \left(\varphi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi_i(s)ds \right) \right\} dx =$$

$$\int_a^b \left(\varphi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi_i(s)ds \right) f(x)dx$$

Таким образом, матричный вид системы $Ac = \vec{f}$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} c_j = f_i, i = \overline{1,n} \qquad (1.3)$$

где: $a_{i,j}$ симметрическая матрица.

$$a_{i,j} = \int_a^b \left(\varphi_j(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) \varphi_j(s) ds \right) \left(\varphi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) \varphi_i(s) ds \right) dx$$

$$f_i = \int_a^b \left(\varphi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) \varphi_i(s) \right) f(x) dx, \ i = \overline{1,n} \qquad (1.4)$$

Пример 5. Найти приближенное решение интегрального уравнения

$$y(x) = x + \int_{-1}^{1} xsy(s) ds$$

методом наименьших квадратов, используя в качестве первой системы функций $\varphi_1(x) = 1, \varphi_2(x) = x$.

Решение: Приближенное решение уравнения разложим по системе базисных функций

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x) = c_1 + c_2 x$$

Невязка уравнения $r(x) = c_1 + c_2 x - x - \int_{-1}^{1} (xs)(c_1 + c_2 s) ds$

Так как неизвестных коэффициентов всего два, проще повторить весь алгоритм сначала, не вычисляя коэффициенты $a_{i,j}$, f_i по формулам (1.4).

$$\|r\|_{L_2}^2 = \int_{-1}^{1} \left(c_1 + c_2 x - x - \int_{-1}^{1} (xs)(c_1 + c_2 s) ds \right)^2 dx$$

$$\frac{\partial \|r\|_{L_2}^2}{\partial c_1} = 0 \Leftrightarrow 0 = \int_{-1}^{1} \left(c_1 + c_2 x - x - \int_{-1}^{1} (xs)(c_1 + c_2 s) ds \right) \left(1 - \int_{-1}^{1} (xs) ds \right) dx$$

$$\frac{\partial \|r\|_{L_2}^2}{\partial c_2} = 0 \Leftrightarrow 0 = \int_{-1}^{1} \left(c_1 + c_2 x - x - \int_{-1}^{1} (xs)(c_1 + c_2 s) ds \right) \left(x - \int_{-1}^{1} (xs) s ds \right) dx$$

Так как $\int_{-1}^{1} (xs) ds = \left(\frac{xs^2}{2} \right)_{-1}^{1} = 0$.

$$\int_{-1}^{1} (xs) s ds = \left(\frac{xs^3}{3} \right)_{-1}^{1} = \frac{2}{3} x$$

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1} \left(c_1 + c_2 x - x - \left(c_1 0 + c_2 \frac{2}{3} x \right) \right) (1) dx = 0 \\ \int_{-1}^{1} \left(c_1 + c_2 x - x - \left(c_1 0 + c_2 \frac{2}{3} x \right) \right) \left(x - \frac{2}{3} x \right) dx = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[c_1 x + c_2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{3}\right) - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{1} = 0 \\ \left[\frac{c_1}{3}\left(\frac{x^2}{2}\right) + c_2\left(\frac{1}{9}\frac{x^3}{3}\right) - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2c_1 = 0 \\ \frac{2}{27}c_2 - \frac{2}{9} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow c_1 = 0, c_2 = 3$$

$\overline{y}(x) = 3x$ проверим, что данное решение является точным:

$$3x = x + \int_{-1}^{1} (xs) 3s ds = x + \left[xs^3 \right]_{-1}^{1} = 3x$$

Ответ: $\overline{y}(x) = 3x$

2.Метод Петрова – Галеркина

Пусть имеются две системы линейно – независимых функций $\varphi_i(x), \psi_i(x), i = \overline{1,n}, x \in [a,b], \varphi_i(x), \psi_i(x) \in L_2[a,b].$ Разложим приближенное решение интегрального уравнения (2) $\overline{y}(x)$ по первой системе функций

$$\overline{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) c_i + f(x) \qquad (2.1)$$

Данное разложение подставим в уравнение(2)

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) c_i + f(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(s) c_i + f(s) \right) ds = f(x) \qquad (2.2)$$

Запишем невязку уравнения (2.2)

$$r(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) c_i - \lambda \int_a^b K(x,s) \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(s) c_i + f(s) \right) ds \qquad (2.3)$$

Потребуем ортогональности невязки $r(x)$ всем функциям второй координатной системы (в этом заключается идея методов Галеркина) $\psi_i(x), i = \overline{1,n}$. Все функции каждой системы построены так, что их норма убывает при увеличении индекса функции. Ортогональность невязки $r(x)$ к каждой из функции $\psi_i(x), i = \overline{1,n}$ обеспечивает также малость ее нормы, поскольку невязка разложима по функциям $\psi_j(x)_{j=n+1}^{\infty}$ ортогонального пространства к функциям $\psi_i(x), i = \overline{1,n}$, а норма каждой

$\|\psi_j\| < \|\psi_n\|, j \geq n+1$. При достаточно быстром законе уменьшения нормы

$$\|\psi_n\| \to 0 \; при \, n \to \infty, \; обозначим \; r_{n+1}(x) = \sum_{j=n+1}^{\infty} \psi_j(x) \langle \psi_j(x), r(x) \rangle$$

Справедлива теорема Стеклова для функции $r(x) \in L_2[a,b]$:

$$\|r\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle \psi_j(x), r(x) \right\rangle^2 ; \|r_{n+1}\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} \left\langle \psi_j(x), r(x) \right\rangle^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

Следуя методу Галеркина:

$$\left\langle \psi_j(x), r(x) \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \int_a^b \psi_j(x) r(x) dx = 0,\ j = \overline{1,n} \qquad (2.4)$$

$$\int_a^b \psi_j(x) \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) c_i - \lambda \int_a^b K(x,s) \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(s) c_i + f(s) \right) ds \right) dx = 0$$

Поменяем порядок интегрирования и суммирования местами, получим систему из n линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \left(\int_a^b \psi_j(x) \varphi_i(x) dx - \lambda \int_a^b \int_a^b K(x,s) \varphi_i(s) \psi_j(x) ds dx \right) = \lambda \int_a^b \psi_j(x) dx \int_a^b K(x,s) f(s) ds,\ j = \overline{1,n}$$

(2.5)

Запишем (2.5)в матричном виде

$$Ac = \vec{f} \Leftrightarrow a_{j,i} = \int_a^b \psi_j(x) \varphi_i(x) dx - \lambda \int_a^b \int_a^b K(x,s) \varphi_i(s) \psi_j(x) ds dx$$

$$f_j = \lambda \int_a^b \psi_j(x) dx \int_a^b K(x,s) f(s) ds, \qquad j = \overline{1,n},\ i = \overline{1,n} \qquad (2.6)$$

Мнемоническое правило для запоминания (в формулах (2.6)первый индекс в матрице $a_{j,i}$ соответствует индексу первой системы координатных функций, соответственно, второй индекс – второй системе).

Пример 6. Найти приближенное решение интегрального уравнения методом Петрова – Галеркина

$$y(x) = 1 + \int_{-1}^{1} (xs + x^2) y(s) ds$$

Используя в качестве первой системы функций $\psi_1 = 1, \psi_2 = x.$ $\varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = x^2$, в качестве второй системы

Решение: Перепишем уравнение в стандартном виде (2), откуда

$$y(x) - \int_{-1}^{1} (xs + x^2) y(s) ds = 1, K(x,s) = xs + x^2, \lambda = 1, f(x) = 1$$

По формулам(2.6)

$$a_{1,1} = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x dx - 1 \cdot \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(xs + x^2 \right) s \cdot 1 ds dx = \left[\frac{x^2}{2} - \int_{-1}^{1} \left[\frac{xs^3}{3} + \frac{x^2 s^2}{2} \right]_{-1}^{1} dx \right]_{-1}^{1} = \left[\frac{x^2}{2} - \int_{-1}^{1} \frac{2x}{3} dx \right]_{-1}^{1} = \left[-\frac{x^2}{3} \right]_{-1}^{1} = 0$$

$$a_{1,2}=\int_{-1}^{1}1\cdot x^2dx-\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(xs+x^2\right)s^2\cdot 1dsdx=\left[\frac{x^3}{3}-\int_{-1}^{1}\left[\frac{xs^4}{4}+\frac{x^2s^3}{3}\right]_{-1}^{1}dx\right]_{-1}^{1}=\left[\frac{x^3}{3}-\int_{-1}^{1}\frac{2x^2}{3}dx\right]_{-1}^{1}=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{2x^3}{9}\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{9}$$

$$a_{2,1}=\int_{-1}^{1}x\cdot xdx-\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(xs+x^2\right)xsdsdx=\left[\frac{x^3}{3}-\int_{-1}^{1}\left[\frac{x^2s^3}{3}+\frac{x^3s^2}{2}\right]_{-1}^{1}dx\right]_{-1}^{1}=\left[\frac{x^3}{3}-\int_{-1}^{1}\frac{2x^2}{3}dx\right]_{-1}^{1}=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{2x^3}{9}\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{9}$$

$$a_{2,2}=\int_{-1}^{1}x\cdot x^2dx-\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(xs+x^2\right)s^2xdsdx=\left[\frac{x^4}{4}-\int_{-1}^{1}\left[\frac{x^2s^4}{4}+\frac{x^3s^3}{3}\right]_{-1}^{1}dx\right]_{-1}^{1}=\left[\int_{-1}^{1}\frac{2x^3}{3}dx\right]_{-1}^{1}=\left[\frac{x^4}{6}\right]_{-1}^{1}=0$$

$$f_1=\int_{-1}^{1}1dx\int_{-1}^{1}(xs+x^2)\cdot 1ds=\int_{-1}^{1}\left[\frac{xs^2}{2}+x^2s\right]_{-1}^{1}dx=\int_{-1}^{1}2x^2dx=\frac{4}{3}$$

$$f_2=\int_{-1}^{1}xdx\int_{-1}^{1}(xs+x^2)\cdot 1ds=\int_{-1}^{1}\left[\frac{x^2s^2}{2}+x^3s\right]_{-1}^{1}dx=\int_{-1}^{1}2x^3dx=0$$

Составляем неоднородную систему из 2 линейных уравнений

$$\begin{cases}a_{1,1}c_1+a_{1,2}c_2=f_1\\ a_{2,1}c_1+a_{2,2}c_2=f_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0c_1+\dfrac{2}{9}c_2=\dfrac{4}{3}\\ \dfrac{10}{9}c_1+0c_2=0\end{cases}\Leftrightarrow c_1=0, c_2=6$$

$$y(x)=f(x)+c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)=1+6x^2$$

Проверим, что данное решение является точным

$$y(x)=1+\int_{-1}^{1}(xs+x^2)(1+6s^2)ds=1+\int_{-1}^{1}(xs+x^2+6xs^3+6x^2s^2)ds=$$

$$1+\left[\frac{xs^2}{2}+x^2s+\frac{3}{2}xs^4+2x^2s^3\right]_{-1}^{1}=1+2x^2+4x^2=1+6x^2$$

Ответ: решение $y(x)=1+6x^2$ является точным.

3.Метод Бубнова – Галеркина

Данный метод является частным случаем метода Петрова – Галеркина, если обе системы функций совпадают

$$\varphi_i(x)=\psi_i(x), i=\overline{1,n}$$

Формулы коэффициентов линейной системы уравнений (2.6) переходят в

$$Ac=\vec{f}\Leftrightarrow a_{j,i}=\int_a^b\varphi_j(x)\varphi_i(x)dx-\lambda\int_a^b\int_a^b K(x,s)\varphi_i(s)\varphi_j(x)dsdx$$

$$f_j = \lambda \int_a^b \varphi_j(x)dx \int_a^b K(x,s)\, f(s)ds, \qquad j = \overline{1,n};\quad i = \overline{1,n} \qquad (3.1)$$

Пример 7. Найти методом Бубнова – Галеркина приближенное решение интегрального уравнения

$$y(x) = 1 + \int_{-1}^{1} \left(xs + x^2\right) y(s)ds$$

Используя в качестве системы функций $\varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = x^2$

Решение:

В данном примере $K(x,s) = xs + x^2, \lambda = 1, f(x) = 1$

Составляем элементы матрицы A

$$a_{1,1} = \int_{-1}^{1} x^2dx - \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(xs + x^2\right)sxdsdx = \left[\frac{x^3}{3} - \int_{-1}^{1}\left[\frac{x^2s^3}{3} + \frac{x^3s^2}{2}\right]_{-1}^{1} dx\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} - \left[\int_{-1}^{1}\frac{2x^2}{3}dx\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} - \left[\frac{2x^3}{9}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{9}$$

$$a_{1,2} = \int_{-1}^{1} x^3dx - \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(xs + x^2\right)s^2xdsdx = \left[\frac{x^4}{4} - \int_{-1}^{1}\left[\frac{x^2s^4}{4} + \frac{x^3s^3}{3}\right]_{-1}^{1} dx\right]_{-1}^{1} = -\left[\int_{-1}^{1}\frac{2x^3}{3}dx\right]_{-1}^{1} = -\left[\frac{x^4}{6}\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$a_{2,1} = \int_{-1}^{1} x^3dx - \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(xs + x^2\right)sx^2dsdx = \left[\frac{x^4}{4} - \int_{-1}^{1}\left[\frac{x^3s^3}{3} + \frac{x^4s^2}{2}\right]_{-1}^{1} dx\right]_{-1}^{1} = -\left[\int_{-1}^{1}\frac{2x^3}{3}dx\right]_{-1}^{1} = -\left[\frac{x^4}{6}\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$a_{2,2} = \int_{-1}^{1} x^4dx - \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(xs + x^2\right)s^2x^2dsdx = \left[\frac{x^5}{5} - \int_{-1}^{1}\left[\frac{x^3s^4}{4} + \frac{x^4s^3}{3}\right]_{-1}^{1} dx\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5} - \left[\int_{-1}^{1}\frac{2x^4}{3}dx\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5} - \left[\frac{2x^5}{15}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{15}$$

$$f_1 = \int_{-1}^{1} xdx \int_{-1}^{1}\left(xs + x^2\right)ds = \int_{-1}^{1}\left[\frac{x^2s^2}{2} + x^3s\right]_{-1}^{1} dx = \int_{-1}^{1} 2x^3dx = \left[\frac{x^4}{2}\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$f_2 = \int_{-1}^{1} x^2dx \int_{-1}^{1}\left(xs + x^2\right)ds = \int_{-1}^{1}\left[\frac{x^3s^2}{2} + x^4s\right]_{-1}^{1} dx = \int_{-1}^{1} 2x^4dx = \left[\frac{2x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{5}$$

Получаем систему двух линейных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2}{9}c_1 + 0c_2 = 0 \\ 0c_1 + \dfrac{2}{15}c_2 = \dfrac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 6 \end{cases}$$

$$y(x) = 1 + 6x^2$$

Ответ: Решение $y(x) = 1 + 6x^2$ является точным.

4.Метод коллокации

Будем искать приближенное решение $z(x)$ интегрального уравнения

$$y(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds = f(x) \qquad (4.1)$$

в виде $z(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x), где \{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n}$ известная система линейно – независимых функций. Неизвестные коэффициенты найдем из условия равенства нулю невязки уравнения (4.1) в заданных точках отрезка $[a,b]$
точках коллокации.

Пример 8.Найти приближение решение интегрального уравнения

$$y(x)=1+\frac{4}{3}x+\int_{-1}^{1}\left(xs^2-x\right)y(s)ds$$

С точками коллокации -1,0,1, используя в качестве координатной системы функций три первых полинома Лежандра.

Решение: Полиномы Лежандра ортогональны друг другу на отрезке $[-1,1]$ с весовой функцией $\rho(x)\equiv 1$. Находим полиномы ортогонализацией.

$P_1(x)\equiv 1; P_2(x)=x+a;$

$$\int_{-1}^{1}P_1(x)P_2(x)=0 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1}(x+a)dx=0=\left[\frac{x^2}{2}+ax\right]_{-1}^{1}=2a=0, a=0$$

$P_2(x)=x;\ P_3(x)=x^2+bx+c$

$$\begin{cases}\int_{-1}^{1}P_1(x)P_3(x)=0=\int_{-1}^{1}\left(x^2+bx+c\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx\right]_{-1}^{1}=2\left(\frac{1}{3}+c\right)\\ \int_{-1}^{1}P_2(x)P_3(x)=0=\int_{-1}^{1}x\left(x^2+bx+c\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{bx^3}{3}+\frac{cx^2}{2}\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{3}b\end{cases}$$

Откуда $b=0, c=-\frac{1}{3}, P_3(x)=x^2-\frac{1}{3}$

$\varphi_1(x)\equiv 1, \varphi_2(x)=x, \varphi_3(x)=x^2-\frac{1}{3}$

Запишем решение в виде

$$z(x)=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+c_3\varphi_3(x)=c_1+c_2x+c_3\left(x^2-\frac{1}{3}\right)$$

В точках коллокации приравниваем нулю невязку исходного уравнения

$$r(0)=0 \Leftrightarrow c_1+c_2 0+c_3\left(0^2-\frac{1}{3}\right)=1+\frac{4}{3}0+\int_{-1}^{1}\left(0s^2-0\right)\left(c_1+c_2x+c_3\left(s^2-\frac{1}{3}\right)\right)ds=1 \Leftrightarrow c_1-\frac{c_3}{3}=1$$

$$r(-1)=0 \Leftrightarrow c_1-c_2+c_3\left(1-\frac{1}{3}\right)=c_1-c_2+c_3\left(1-\frac{1}{3}\right)=1-\frac{4}{3}+\int_{-1}^{1}\left(-s^2+1\right)\left(c_1+c_2s+c_3\left(s^2-\frac{1}{3}\right)\right)ds=$$

$$= -\frac{1}{3} + \int_{-1}^{1} c_1\left(-s^2+1\right) + c_2 s\left(-s^2+1\right) + c_3\left(s^2 - \frac{1}{3}\right)\left(-s^2+1\right)ds =$$

$$-\frac{1}{3} + \left[c_1\left(s - \frac{s^3}{3}\right) + c_2\left(\frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{4}\right) + c_3\left(-\frac{s^5}{5} + \frac{4}{9}s^3 - \frac{s}{3}\right)\right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}c_1 - \frac{8}{45}c_3$$

$$r(1) = 0 \Leftrightarrow c_1 + c_2 + c_3\left(1 - \frac{1}{3}\right) = c_1 + c_2 + c_3\frac{2}{3} = 1 + \frac{4}{3} + \int_{-1}^{1}\left(s^2 - 1\right)\left(c_1 + c_2 s + c_3\left(s^2 - \frac{1}{3}\right)\right)ds =$$

$$\frac{7}{3} + \int_{-1}^{1} c_1\left(s^2-1\right) + c_2 s\left(s^2-1\right) + c_3\left(s^2 - \frac{1}{3}\right)\left(s^2-1\right)ds =$$

$$\frac{7}{3} + \left[c_1\left(-s + \frac{s^3}{3}\right) + c_2\left(-\frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{4}\right) + c_3\left(\frac{s^5}{5} - \frac{4}{9}s^3 + \frac{s}{3}\right)\right]_{-1}^{1} = \frac{7}{3} - \frac{4}{3}c_1 + \frac{8}{45}c_3$$

$$\begin{cases} c_1 - \dfrac{c_3}{3} = 1 \\ -c_1 - 3c_2 + \dfrac{38}{15}c_3 = -1 \\ 7c_1 + 3c_2 + \dfrac{22}{15}c_3 = 7 \end{cases}$$

Откуда, решение системы уравнений единственно: $c_1 = 1, c_2 = c_3 = 0$

$z(x) \equiv 1$

Проверим, будет ли данное решение точным

$$r(x) = 1 - 1 - \frac{4}{3}x - \int_{-1}^{1}\left(xs^2 - x\right)ds = -\frac{4}{3}x + \left[-\frac{xs^3}{3} + xs\right]_{-1}^{1} = -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}x + 2x = 0$$

Ответ: Решение $z(x) \equiv 1$ является точным.

Контрольные вопросы

1) Дать определения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерры первого и второго рода.
2) Нормы функций в пространствах $C[a,b], L_2[a,b]$
3) Сформулировать теорему о неподвижной точке в метрических пространствах
4) Указать λ область сходимости простого итерационного процесса решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода в пространствах $C[a,b], L_2[a,b]$
5) Описать алгоритм решение интегральных уравнений методом замены интеграла.
6) Описать алгоритм решение интегральных уравнений методом замены ядра.
7) Описать алгоритм решение интегральных уравнений методом наименьших квадратов.
8) Описать алгоритм решение интегральных уравнений методом Петрова – Галеркина, Бубнова – Галеркина.

9) Описать алгоритм решение интегральных уравнений методом коллокаций.

10)Описать сущность проекционных методов.
11) Дать определение собственным числам и собственным числам интегрального уравнения.

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1)Найти приближенное решение интегрального уравнения методом замены интеграла квадратурной формулой Симпсона и оценить его погрешность.

$$y(x)+\frac{1}{2}\int_0^1 x\left(e^{xs}-1\right)y(s)ds=e^x-x$$

Ответ: $y_1=1, y_2=0.9999, y_3=0.9996$ Абсолютная погрешность не превышает 0,0004.

2)Найти в точках $x=0,\frac{1}{2},1$ приближенное решение интегрального уравнения

$$y(x)=e^x+\int_0^x e^{(x-s)}y(s)ds$$

Методом замены интеграла составной квадратурной формулы трапеций.
Ответ: Точное решение $y(x)=e^{2x}$.
3)Найти приближенное решение интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$y(x)+\int_0^1 x\left(e^{xs}-1\right)y(s)ds=e^x-x$$

С помощью замены ядра вырожденным ядром $H(x,s)=x^2s+\frac{x^3s^2}{2}+\frac{x^4s^3}{6}$,
являющимся суммой первых трех членов разложения $K(x,s)$ в ряд Тейлора.
Ответ: $z(x)=e^x-x+D_1x^2+D_2x^3+D_3x^4$
$D_1=-0.5010; D_2=-0.1671; D_3=-0.0422$
Точное решение $y(x)\equiv 1$
4)Найти методом Бубнова – Галеркина приближенное решение интегрального уравнения

$$y(x)=1+\int_0^1\left(xs+x^2\right)y(s)ds$$

Используя в качестве координатных функций три первых многочлена Лежандра.
Ответ: $z(x)=y(x)=1+6x^2$ точное решение.
5) Найти методом Бубнова – Галеркина два младших характеристических числа и соответствующие им собственные функции однородного интегрального уравнения

$$y(x)=\lambda\int_0^1 K(x,s)y(s)ds$$

С вырожденным ядром $K(x,s)=\cos^2 x\cos 2s+\cos 3x\cos^3 s$

Ответ: $\lambda_1=\frac{4}{\pi}, y_1(x)=c_1\cos^2 x, \lambda_2=\frac{8}{\pi}, y_2(x)=c_2\cos 3x$

Рассмотренные в теме интегральные уравнения условия задач взяты из задачника Бахвалов Н.С[3], но решения задач и доказательства некоторых лекционных утверждений принадлежат авторскому коллективу.

Используемая литература

3) Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях. – М.:БИНОМ, Лаборатория знаний, 2010.
4) Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.:1989 – 450 с.
5) Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – 6-е изд. – М.:БИНОМ. Лаборатория знаний,2008.

Приложение к теме “Интегральные уравнения”

Используем для численного решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$y(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds+f(x) \qquad (1)$$

Применим метод простой итерации для функциональной последовательности

$$y_{k+1}(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)y_k(s)ds+f(x), k=0,1,... \quad (2)$$

В качестве $y_0(s)$ можно взять, например, $f(s)$. Как выяснилось в параграфе “Интегральные уравнения”, область сходимости по параметру λ шире в пространстве $L_2[a,b]$, чем в пространстве $C[a,b]$. Заменим в (2) интеграл составной квадратурной формулой Симпсона (необходимо взять четное число интервалов разбиения $n=2m$ отрезка $[a,b]$ - получим $N=n+1=2m+1$ узлов разбиения:

$$x_i, i=\overline{0,2m}, \quad x_0=a, x_N=b, h=\frac{b-a}{2k}=\frac{b-a}{n}$$

$$I(y_k)=\int_a^b K(x,s)y_k(s)ds=S_{N+1}=\frac{h}{3}\left(\begin{array}{l} y_k(a)K(x_j,a)+y_k(b)K(x_j,b)+4\sum_{i=1}^{k}y_k(s_{2i-1})K(x_j,s_{2i-1})+ \\ +2\sum_{i=1}^{k-1}y_k(s_{2i})K(x_j,s_{2i}) \end{array}\right)$$

$$s_l=a+h*l, l=\overline{0,2k}; \; x_j=a+h*j, j=\overline{0,2k}$$

Окончательно, получим итерационную последовательность

$$y_{k+1}(x_j)=\lambda\frac{h}{3}\begin{pmatrix} y_k(a)K(x_j,a)+y_k(b)K(x_j,b)+4\sum_{i=1}^{k}y_k(s_{2i-1})K(x_j,s_{2i-1})+ \\ +2\sum_{i=1}^{k-1}y_k(s_{2i})K(x_j,s_{2i}) \end{pmatrix}+f(x)$$

(3)

$s_l=a+h*l,\ l=\overline{0,2k};\ x_j=a+h*j,\ j=\overline{0,2k}$

Именно формула (3) реализована в следующей программе. В качестве начальной функции можно взять $y_0(x_j)$. Программа написана на языке С++ с двойной точностью. Целочисленные параметры: $n1$ число интервалов разбиения($2m$) отрезка $[a,b]$, $n2$ - число итераций(k) ,n- частота распечатки данных на экране(всего распечатанных строк $n3=\left[\frac{n1}{n}\right]+1$, удобно выбрать $n1=10n$).

В программе сравниваются две нормы невязки $y_{k+1}(x)-y(x)$ (в пространствах $C[a,b]$ *и* $L_2[a,b]$), если точное решение $y(x)$ интегрального уравнение (1) известно.

$$\|y_{k+1}-y\|_C=\max_{x\in[a,b]}|y_{k+1}(x)-y(x)|$$

$$\|y_{k+1}-y\|_{L_2}=\left(\int_a^b(y_{k+1}(x)-y(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Кроме того, для вычисления нормы $\|y_{k+1}-y\|_{L_2}$, т.е. при вычислении интеграла используется формула Симпсона.

В качестве теста для программы рассмотрим пример 2

$$y(x)=e^{-x}+\frac{1}{2}\int_0^1 xe^s y(s)ds$$

с точным решением $y(x)=x+e^{-x},\lambda=\frac{1}{2},K(x,s)=xe^{-x},f(x)=e^{-x}$

Для данного примера

$\|K(x,s)\|_C=\max_{x,s\in[0,1]}|xe^s|=e,|\lambda_C|=\frac{1}{(b-a)\|K\|_C}=\frac{1}{e}<\frac{1}{2}.$

$\|K(x,s)\|_{L_2}=\left(\int_a^b dx\int_a^b K(x,s)^2ds\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_0^1 x^2dx\int_0^1 e^{2s}ds\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{3}\frac{1}{2}[e^{2s}]_0^1\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{6}(e^2-1)\right)^{\frac{1}{2}}$

$|\lambda_{L_2}|=(\|K(x,s)\|_{L_2})^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{6}(e^2-1)\right)^{-\frac{1}{2}}=0{,}96907>\frac{1}{2}$

Т.е. этого достаточно для сходимости итерации и единственности решения в пространстве функций $L_2[0,1]$ Из того, что не выполнены достаточные условия сходимости итерации к точному решению в пространстве $C[a,b]$ не следует отсутствие этой сходимости. После основного тела программы, в конце, вынесены функции, написанные с двойной точностью, $k(x,s)$ -ядро интегрального уравнения, $f(x)$ - неоднородная часть уравнения, $ff(x)$ - точное решение.

```
#include < stdio.h >
# include < math.h >
double k(double x, double s);
double f(double x);
double ff(double x);
const int n1 = 1000;
const int n2 = 50;
const int n = 100;
const int n3 = int(ouble(n1) / double(n)) + 1;
int main()
  {
int i, j, ii, j1, j2, j3, j4;
double yy[n1+1], y1[n1+1], y2[n1+1], delta[n1+1], delta1[n1+1];
double a, b, h, norma, xx, xj, yadro, x, s, c, lambda, cc, bac;
printf("n1 = %d, n2 = %d, n3 = %d \ n", n1, n2.n3);
a = 0.0;
b = 1.0;
h = (b - a) / double(n1);
xx = 0.0, xj = 0.0;
yadro = 0.0;
c = 0.0;
lambda = 0.5;
norma = 0.0;
printf("n3 = %d \ n", n3);
for(j = 0; j <= n1; j++)
{
y1[j] = f(a + h * double(j));
yy[j] = ff(a + h * double(j));
}
// итерации по переменной ii соответствует переменной k
for(ii = 0; ii <= n2; ii++)
{
for(i = 0; i <= n1; i++)
// внешняя переменная i соответствует переменнной x
{
xx = a + double(i) * h;
c = 0.0;
for(j = 0; j <= 0; j <= n1; j++)
// внутренняя переменная j соответствует переменной s
{
```

```
xj = a + double( j) * h;
// yadro k(x, s)
yadro = k(xx, xj);
// формула Симпсона
// =======================
if ( j − 2 * int(double( j) / 2.0) == 1 & & j >= 1 & & j <= n1 − 1)
c = c + 4.0 * yadro * y1[ j];
else if ( j − 2 * int(double( j) / 2.0) == 0 & & j >= 1 & & j <= n1 − 1
c = c + 2.0 * yadro * y1[ j];
else
c = c + y1[ j] * yadro;
}
y2[i] = (h * lambda * c) / 3.0 + f (xx);
}
// ================
for( j1 = 0; j1 <= n1; j1 + +)
{
// переприсвоение вектора
y1[ j1] = y2[ j1];
}
}
for( j2 = 0; j2 <= n1; j2 + +)
{
x = a + double( j2) * h;
// разность между точным и численным решениями
delta[ j2] = y2[ j2] − yy[ j2];
}
for(i = 0;i <= n1;i + +)
{
x = a + double(i) * h;

if (i − n * int(double(i) / double(n)) == 0)
printf ("i = %d , x = %lf , axact = %.16lf , res = %.16lf , delta = %.16lf \n", i, x, yy[i], y2[i], delta[i]);
}
// ==================
//норма в C[a,b]
for( j3 = 0; j3 <= n1; j3 + +)
{
if ((delta[ j3] >= 0.0 & &(delta[ j3] > norma || delta[ j3] > −norma)) || (delta[ j3] < 0.0
& &(delta[ j3] < norma || delta[ j3] < −norma)))
norma = delta[l3];
}
if (norma < 0.0)
norma = −norma;
```

```
else
norma = norma;
printf ("norma(C[a,b]) = %.16lf \n",(norma));
printf ("h = %lf ,h*h*h*h*h = %lf \n",h,h*h*h*h);
//====================
// норма в L_2[a,b]
cc = 0.0;
for( j4 = 0; j4 <= n1; j4++)
{
x = a + double( j4)*h;
bac = (y2[ j4] - yy[ j4])*(y2[ j4] - yy[ j4]);
if ( j4 - 2*int(double( j4)/2.0) == 1&& j4 >= 1&& j4 <= n1 - 1)
{
cc = cc + 4.0*bac;
}
else if ( j4 - 2*int(double( j4)/2.0) == 0&& j4 >= 1&& j4 <= n1 - 1)
{
cc = cc + 2.0*bac;
}
else
{
cc = cc + bac;
}
cc = (cc*h)/3.0;
}
cc = sqrt(cc);
printf ("norma(L2[a,b] = %.16lf \n",cc);
// ==================
}
double k(double x, double s)
{
return x*exp(s);
}
double ff (double x)
{
return x + exp(-x);
}
double f (double x)
{
return exp(-x);
}
// программа завершена
```

Кроме всего нас будет интересовать скорость сходимости итерационной формулы (3) и порядок ее сходимости. Результаты норм невязки сведем в таблицу

Таблица 1 ($n1=100, n2=10, n=10$):

$n2(k)$	$\left\|y_{k+1}-x-e^{-x}\right\|_C$	$\left\|y_{k+1}-x-e^{-x}\right\|_{L_2}$
10	0,00049	0,000028
11	0,0024	0,000014
12	0,00012	0,0000070
13	0,000061	0,0000035
14	0,00003	0,0000018
15	0,000015	0,00000088
16	0,0000076	0,00000044
17	0,0000038	0,00000022
18	0,0000019	0,00000011
19	0,00000095	0,000000055
20	0,00000048	0,000000028

Из которой, во – первых, видно что приближенное решение сходится к точному в обоих пространствах, во–вторых, при увеличении k на единицу норма невязки уменьшается в 2 раза, что означает линейную скорость сходимости (теорема о неподвижной точке гарантирует скорость сходимости не хуже линейной $p \geq 1$). В - третьих, сходимость по норме в L_2 лучше, чем по норме в $C[a,b]$, так как сходимость в пространстве L_2 обеспечена достаточными условиями. Невыполнение достаточных условий для теоремы о неподвижной точке в $C[a,b]$ не запрещает сходиться схеме равномерно.

Обозначим неотрицательное число (норму невязки схемы)

$$\Delta_{\|\cdot\|}(k,h) = \left\|y_k(x) - y(x)\right\|$$

Функционал $\Delta_{\|\cdot\|}(k,h)$ зависит от трех параметров – порядка итерации k шага разностной схемы h и вида нормы $\|.\|$ (если норма фиксирована, то ее можно не считать параметром). Все свойства невязки можно определить через символ $\Delta_{\|\cdot\|}(k,h)$ все характеристики разностной схемы

1) Скорость сходимости разностной схемы p по ЖБК [1]

$\exists$ положительные числа C, p и натуральное число N, такие что $\forall k > N$

$$\left(\max_p \frac{\Delta_{\|\cdot\|}(k+1,h)}{\Delta_{\|\cdot\|}{}^p(k,h)} \leq C < \infty\right) \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\Delta_{\|\cdot\|}(k+1,h)}{\Delta_{\|\cdot\|}{}^p(k,h)} = C < \infty$$

2) Порядок сходимости разностной схемы p по Бахвалову Н.С.[2]

$\exists$ положительные числа C, p, h_0, такие что $\forall h < h_0$

$$\left(\max_p \frac{\Delta_{\|\cdot\|}(k,h)}{h^p} \leq C < \infty\right) \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\Delta_{\|\cdot\|}(k,h)}{h^p} = C < \infty$$

3) Порядок сходимости разностной схемы p (по Самарскому А.А.[3])

$\exists$ положительное число p и $\exists l > 1$, такие что верно:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_{\|\cdot\|}(k,h)}{\Delta_{\|\cdot\|}{}^{p}(k,h/l)} = l^{p} (\forall l > 1)$$

Отметим что 1) есть предел по направлению $k \to \infty$, а 2) и 3) пределы по направлению $h \to 0$. Для данного примера скорость сходимости $p = 1$ можно взять $C = 3$. Найдем порядок сходимости в двух пространствах, используя определение 3) ($l = 2$), дополнив таблицу значениями

$$\Delta_C\left(10,\frac{1}{200}\right) = 0{,}00049; \Delta_{L_2}\left(10,\frac{1}{200}\right) = 0{,}000020;$$

$$\Delta_C\left(10,\frac{1}{400}\right) = 0{,}00049; \Delta_{L_2}\left(10,\frac{1}{400}\right) = 0{,}000014;$$

Кроме того, из таблицы $\Delta_C\left(10,\frac{1}{100}\right) = 0{,}00049; \Delta_{L_2}\left(10,\frac{1}{100}\right) = 0{,}000028;$

Получим – $\dfrac{\Delta_C\left(10,\frac{1}{100}\right)}{\Delta_C\left(10,\frac{1}{200}\right)} = \dfrac{\Delta_C\left(10,\frac{1}{200}\right)}{\Delta_C\left(10,\frac{1}{400}\right)} = 2^0 = 1(з = 0)$ в пространстве $C[a,b]$

$\dfrac{\Delta_{L_2}\left(10,\frac{1}{100}\right)}{\Delta_{L_2}\left(10,\frac{1}{100}\right)} = \dfrac{28}{20} = 1.4 \approx 2^{\frac{1}{2}}, \dfrac{\Delta_C\left(10,\frac{1}{200}\right)}{\Delta_C\left(10,\frac{1}{400}\right)} = \dfrac{20}{14} = 1.43 \approx 2^{\frac{1}{2}}, p = \dfrac{1}{2}$; в пространстве $L_2[a,b]$. Можно объяснить последнюю оценку. Формула Симпсона на интервале длиной 2h дает абсолютную погрешность $o(h^3)$. Тогда погрешность составной формулы для $\left(h = \dfrac{1}{n1}\right)$ интервалов имеет порядок $\dfrac{n1}{2}o(h^3) = \dfrac{1}{2}o(h^2)$. Составная формула используется для $n1$ точек, максимальная ошибка увеличится в $n1$ раз: $\dfrac{1}{2h}o(h^2) = \dfrac{1}{2}o(h)$. Число итераций $n2 = k = (n1)^{\frac{1}{2}}$.

Конечная максимальная ошибка $(n1)^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2}o(h) = \dfrac{h^{-\frac{1}{2}}}{2}o(h) \sim o(h^{\frac{1}{2}})$, т.е. порядок сходимости $p = \dfrac{1}{2}$ (по определению 2)). Порядок сходимости можно увеличить, если в формуле 3) пользоваться не квадратурной формулой Симпсона по 3 узлам, а по 4 или 5 узлам.

Наконец, приведем рекорд (на границе машинной точности 10^{-16})

($n1 = 1000, n2 = 50, n = 100$)

$$\Delta_C\left(50,\frac{1}{1000}\right) = 429*10^{-16}; \Delta_{L_2}\left(50,\frac{1}{1000}\right) = 8*10^{-16}$$

1)Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – 6-е изд. – М.:БИНОМ. Лаборатория знаний.
2)Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях: учебное пособие. – М.:БИНОМ. Лаборатория знаний,2010. – 240 с.
3) Самарский А.А., Вабишевич П.Н. Численные методы обратных задач математической физики. – М.:Издательство ЛКИ, 2014.- 480 с.