

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

ФИЗИКА

В двух частях

Часть 2

*Допущено Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов
технических высших учебных заведений*

Новополоцк
ПГУ
2009

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73
Ф50

АВТОРЫ:

С. А. ВАБИЩЕВИЧ, В. А. ГРУЗДЕВ, Г. А. ДУБЧЁНОК,
В. Г. ЗАЛЕССКИЙ, Г. М. МАКАРЕНКО

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

д-р физ.-мат. наук, проф., зав. каф. физики БГТУ И. И. НАРКЕВИЧ;
канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. физики БНТУ П.Г. КУЖИР

Ф50 **Физика** : учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 2 / С. А. Вабищевич [и др.]. –
Новополоцк : ПГУ, 2009. – 288 с.

ISBN 978-985-418-934-5.

Включает три модуля: «Электростатика. Постоянный ток», «Электромагнетизм», «Волновые процессы и оптические явления». Объединение содержательного материала этих модулей в одну книгу обусловлено рабочей программой дисциплины на один семестр.

Предназначено для студентов технических высших учебных заведений.

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73

ISBN 978-985-418-934-5 (Ч. 2)
ISBN 978-985-418-932-1

© УО «Полоцкий государственный университет», 2009

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
УЧЕБНЫЙ МОДУЛЬ 4. ЭЛЕКТРОСТАТИКА. ПОСТОЯННЫЙ ТОК.....	8
УЧЕБНЫЙ БЛОК 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ЗАРЯДОВ	11
1.1. Краткое содержание теоретического материала	13
1.2. Методические указания к лекционным занятиям	38
1.3. Методические указания к практическим занятиям.....	39
1.4. Примеры решения задач	41
1.5. Задачи для самостоятельного решения	57
УЧЕБНЫЙ БЛОК 2. ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В РАЗЛИЧНЫХ СРЕДАХ	61
2.1. Краткое содержание теоретического материала	62
2.2. Методические указания к лекционным занятиям	73
2.3. Методические указания к практическим занятиям.....	74
2.4. Примеры решения задач	75
2.5. Задачи для самостоятельного решения	84
УЧЕБНЫЙ МОДУЛЬ 5. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ	86
УЧЕБНЫЙ БЛОК 1. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ	89
1.1. Краткое содержание теоретического материала	90
1.2. Методические указания к лекционным занятиям	106
1.3. Методические указания к практическим занятиям.....	107
1.4. Примеры решения задач	109
1.5. Задачи для самостоятельного решения	119
УЧЕБНЫЙ БЛОК 2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ. МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА.....	122
2.1. Краткое содержание теоретического материала	123
2.2. Методические указания к лекционным занятиям	140
2.3. Методические указания к практическим занятиям.....	141
2.4. Примеры решения задач	143
2.5. Задачи для самостоятельного решения	150
УЧЕБНЫЙ БЛОК 3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАКСВЕЛЛА	153
3.1. Краткое содержание теоретического материала	154
3.2. Методические указания к лекционным занятиям	162

3.3. Методические указания к практическим занятиям.....	162
3.4. Примеры решения задач	163
3.5. Задачи для самостоятельного решения	165
УЧЕБНЫЙ МОДУЛЬ 6. ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ И ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ	166
УЧЕБНЫЙ БЛОК 1. ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ	168
1.1. Краткое содержание теоретического материала.....	169
1.2. Методические указания к лекционным занятиям	194
1.3. Методические указания к практическим занятиям.....	194
1.4. Примеры решения задач	195
1.5. Задачи для самостоятельного решения	199
УЧЕБНЫЙ БЛОК 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА	202
2.1. Краткое содержание теоретического материала.....	203
2.2. Методические указания к лекционным занятиям	213
2.3. Методические указания к практическим занятиям.....	213
2.4. Примеры решения задач	216
2.5. Задачи для самостоятельного решения	223
УЧЕБНЫЙ БЛОК 3. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА	225
3.1. Краткое содержание теоретического материала.....	226
3.2. Методические указания к лекционным занятиям	246
3.3. Методические указания к практическим занятиям.....	247
3.4. Примеры решения задач	249
3.5. Задачи для самостоятельного решения	258
УЧЕБНЫЙ БЛОК 4. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА.....	260
4.1. Краткое содержание теоретического материала.....	261
4.2. Методические указания к лекционным занятиям	276
4.3. Методические указания к практическим занятиям.....	277
4.4. Примеры решения задач	278
4.5. Задачи для самостоятельного решения	283
ПРИЛОЖЕНИЕ	285
ЛИТЕРАТУРА	287

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методический комплекс разрабатывался как система взаимосвязанных и взаимодополняющих средств и способов обучения, проектируемых в соответствии с учебной программой и выбранным дидактическим процессом, необходимых и достаточных для реализации требований образовательного стандарта. Предполагается, что УМК по учебной дисциплине «Физика» будет способствовать системному решению следующих **задач**:

- контроль исходного уровня подготовки обучающихся физике;
- выбор необходимых, в том числе обусловленных исходным уровнем подготовки, технологий организации процесса обучения;
- организация перманентного контроля результатов обучения, необходимого для своевременной корректировки процесса обучения (обратная связь) и обеспечения требуемых результатов конечного контроля подготовки студента.

Для реализации педагогической системы в данный УМК заложены следующие **функции**:

- методическое обеспечение курса физики;
- дидактические средства обучения, объединенные конечными целями обучения;
- адаптация содержания курса физики к образовательному стандарту специальности;
- предъявление обучающемуся новых знаний и развитие новых навыков и умений;
- развитие творческой активности и потенциала студента.

Основой УМК является обобщенный для технических специальностей стандарт по курсу физики, как необходимый уровень естественнонаучной подготовки к изучению общеобразовательных и специальных дисциплин.

Для **студентов** УМК предлагает:

- рекомендации по выбору учебников и методических пособий, необходимых для достижения целей обучения при минимизированном бюджете учебного времени;
- рекомендации по самоорганизации и содержанию самостоятельной работы над курсом, как одной из самых эффективных форм обучения новым навыкам и умениям;
- методические материалы для различных форм учебного процесса;
- перечень требований для самооценки и выбора уровней результатов обучения, что необходимо для реализации индивидуальной «траектории» и результатов обучения.

Для преподавателей учебно-методический комплекс будет полезным, во-первых, при адаптации курса физики к учебным программам специальных дисциплин, на чем обычно настаивают выпускающие кафедры; но не удалением «ненужных» разделов и тем, а вариацией уровня изучения тех или иных разделов при сохранении целостности курса физики как естественнонаучной дисциплины. Во-вторых, УМК избавляет от значительной рутинной работы по подготовке материалов контроля. И, в-третьих, позволяет унифицировать оценку знаний, умений и навыков при контроле, проводимом на разных специальностях и различными преподавателями.

Обычно курс физики для технических специальностей изучается в течение двух – трех семестров, поэтому УМК построен по модульно-блочному принципу. Учебный модуль представляет собой единицу курса, единство которой основано на используемой физической модели или на совокупности физических явлений, относимых к единому классу. В свою очередь, учебный модуль состоит из учебных блоков, формируемых на тех же принципах, но с большей детализацией. Как и УМК, каждый модуль и блок представляют содержание в виде завершенного элемента в структуре учебного курса; содержат собственные цели обучения; конкретное технологическое и методическое обеспечение обучения; предусматривают текущий и итоговый контроль наряду с элементами самоконтроля.

Настоящее издание охватывает 3 модуля и содержит учебную программу к этим модулям; перечень рекомендуемой литературы с указанием рекомендуемых разделов; перечень требований к знаниям, умениям и навыкам; краткое содержание теоретического материала; примеры решения типовых задач; задачи для самостоятельного тренинга, некоторые справочные таблицы.

Учебно-методический комплекс разработан коллективом преподавателей кафедры физики Полоцкого государственного университета в составе профессора Г.М. Макаренко, доцентов С.А. Вабищевича и В.Г. Залесского, старшего преподавателя Г.А. Дубченка, под общим руководством профессора В.А. Груздева.

Методические указания для студентов

При изучении курса физики рекомендуется использовать настоящий учебно-методический комплекс следующим образом:

1. По заданной теме необходимо найти соответствующий *модуль* и *блок* учебного материала.
2. Прочитать *краткое содержание* теоретического материала блока, выписать основные (базовые) формулы, к которым относятся формулы-определения и формулы – физические законы.

3. Выучить (запомнить) *базовые формулы*. Методика запоминания может быть различной, поэтому целесообразно пользоваться наиболее эффективной (привычной) для студента.

4. Прочитать раздел «Студент должен знать». Оценить *соответствие* своих знаний требованиям. При необходимости вернуться к «Краткому содержанию» для повторного прочтения либо обратиться к учебнику или учебному пособию.

5. Обратиться к разделу «Вопросы для самоконтроля». Ответить на вопросы. Если возникают затруднения с ответами, вернуться к разделу «Краткое содержание» или к рекомендуемой литературе.

6. После ответов на вопросы для самоконтроля перейти к разделу «Примеры решения задач». Студенты должны изучить приведенные в разделе *примеры решения типовых задач* до полного их понимания.

7. Обратиться к разделу «Студент должен уметь». Проверить соответствие своих умений предъявляемым требованиям. Одним из способов проверки может быть *составление алгоритма* ваших действий для определения (нахождения) требуемых величин по заданным. В случае возникновения затруднений надо обратиться к примерам решения типовых задач или за консультацией к преподавателю.

8. Приступить к *решению задач* из раздела «Задачи для самостоятельного решения». При этом рекомендуется следующий порядок действий:

8.1. Сконцентрируйте заданные величины, переведите их в систему СИ.

8.2. Сделайте необходимый *рисунок*, поясняющий физическую суть задачи.

8.3. Попробуйте записать предварительный ответ, т.е. формулу (уравнение) для искомой величины. Если в этой формуле (уравнении) содержатся неизвестные (не данные в условии) величины, то запишите известные вам формулы для этих неизвестных величин. Полученная система уравнений позволяет найти искомую в задаче величину.

8.4. Получите *решение задачи* в общем виде (без подстановки конкретных значений величин).

8.5. Проверьте полученный ответ *методом анализа размерностей*. После этого можно находить значение искомой величины.

9. После приобретения требуемых знаний и навыков можно приступить к *контрольному тестированию* (по рекомендации преподавателя) успешности обучения в компьютерном классе или выполнению контрольных заданий. Результаты тестирования или выполнения контрольных заданий сформируют *рейтинговую оценку* ваших знаний.

УЧЕБНЫЙ МОДУЛЬ 4

ЭЛЕКТРОСТАТИКА. ПОСТОЯННЫЙ ТОК

Электростатикой называется раздел физики, в котором изучаются взаимодействия заряженных частиц (тел) и свойства электрических полей, создаваемых ими. Основная задача при изучении электростатики состоит в том, чтобы научиться определять характеристики электростатического поля отдельных зарядов и их совокупности в любой точке пространства. К основным характеристикам относятся: энергетические (потенциал, энергия, плотность энергии) и силовая (напряженность поля). Кроме этого, необходимо научиться применять законы механики при движении или равновесии систем заряженных частиц и тел, которые находятся в электростатическом поле. Движение зарядов в электрическом поле связано с работой сил поля, поэтому необходимо уяснить потенциальный характер электрического поля, научиться определять потенциальную энергию зарядов в электрическом поле и изолированных систем зарядов. Направленное (упорядоченное) движение зарядов и закономерности, существующие в различных средах, изучаются в разделе «Постоянный ток». Кроме указанных разделов в модуле предусматривается изучение систем, аккумулирующих заряды и обеспечивающих их движение по внешним электрическим цепям.

Модуль содержит два учебных блока:

1. Электрическое поле зарядов.
2. Законы постоянного тока. Электрический ток в различных средах.

В первом блоке рассматриваются закон сохранения электрического заряда, понятия «точечный и распределенный заряды», «взаимодействие заряженных тел», закон Кулона; понятия «электрическое поле», «напряженность», «линии напряженности», «электрическое поле системы точечных зарядов», «принцип суперпозиции электрических полей», «электрическое поле распределенных зарядов», теорема Остроградского – Гаусса и ее применение; работа электрического поля при перемещении зарядов, понятия «потенциал», «разность потенциалов», «напряжение», «емкость», «системы конденсаторов»; связь между разностью потенциалов и напряженностью.

Рассматриваются проводники в электрическом поле, электрический диполь и диэлектрики в электрическом поле, механизм поляризации диэлектриков; сегнетоэлектрики, пьезоэлектрический эффект и его использование в технике, энергия и плотность энергии электрического поля.

Во втором блоке рассматриваются законы Ома для постоянного электрического тока, классическая электронная теория электропроводности металлов, закон Джоуля – Ленца в интегральной и дифференциальной форме, эквивалентность электрических цепей, правила Кирхгофа и их применение для расчета разветвленных электрических цепей, электропроводность неметаллических сред.

Учебно-методическая структура модуля

Учебный модуль 4. Электростатика. Постоянный ток	
Учебный блок 1. Электрическое поле зарядов»	Учебный блок 2. Законы постоянного тока. Электрическое поле в различных средах
– элементарные заряды; закон сохранения зарядов; – кулоновская сила взаимодействия зарядов; – параметры электрического поля точечных зарядов; – напряженность, электростатическая индукция, потенциал; – принцип суперпозиции электрических полей; – распределенные заряды; – поле распределенных зарядов; теорема Остроградского – Гаусса; – электрическая емкость тел; – движение зарядов в электрическом поле; – электрический диполь; – поляризация молекул вещества; – проводники в электрическом поле; электростатическая защита; – диэлектрики в электрическом поле; – сегнетоэлектрики; электростатический гистерезис; – пьезоэлектрический эффект; – энергия электрического поля; – плотность энергии электрического поля	– условия возбуждения электрического тока; – электронная теория проводимости; – принцип непрерывности; – законы Ома для участка цепи и полной цепи; эквивалентные цепи; – закон Джоуля – Ленца; – электропроводность полупроводников; – электропроводность газов, газовые разряды; – электрический ток в вакууме; – правила Кирхгофа для расчета сложных электрических цепей постоянного тока

Методическая программа модуля

Тема занятия	Цель занятия	Вид занятия	Часы
1. Элементарные заряды, закон сохранения зарядов, способы зарядки тел. Взаимодействие точечных зарядов (кулоновская сила). Параметры электрического поля, физический смысл параметров	Обобщение и углубление остаточных знаний	лекция, самост.	2
2. Принцип суперпозиции электрических полей, нахождение результирующих характеристик поля системы точечных зарядов. Распределенные заряды, поле распределенных зарядов, к которым неприменима теорема Остроградского – Гаусса	Углубление знаний	лекция	2
3. Расчет параметров поля точечных зарядов, систем зарядов (без применения теоремы Остроградского – Гаусса) методом точечных зарядов	Формирование новых навыков	практ. занятие	3
4. Теорема Остроградского – Гаусса, методика ее использования для расчета поля распределенных зарядов	Формирование новых знаний	лекция	2
5. Расчет поля распределенных зарядов (объемных, линейных, поверхностных)	Формирование новых навыков	практ. занятие	3
6. Вещество в электрическом поле (проводники, диэлектрики, сегнето- и пьезоэлектрики)	Формирование новых знаний	лекция	1
7. Емкость тел, конденсаторы, системы конденсаторов	Углубление знаний	лекция	1
8. Движение зарядов в электрических полях	Углубление навыков	практ. занятие	1
9. Системы конденсаторов. Энергия электрического поля	Углубление навыков	практ. занятие	1
10. Моделирование поля в электростатических системах	Формирование новых навыков	лабор. занятие	4
11. Электронная теория электропроводности. Электропроводность полупроводников и газов	Формирование новых знаний	лекция	2
12. Законы Ома для цепей постоянного тока в интегральной и дифференциальной формах. Эквивалентность электрических цепей	Углубление знаний и формирование новых знаний	лекция, самост.	1
13. Расчет электрических цепей с применением законов Ома и Джоуля – Ленца	Формирование новых навыков	практ. занятие	2
14. Правила Кирхгофа для расчета сложных электрических цепей постоянного тока	Формирование новых знаний	лекция	1
15. Расчет сложных электрических цепей с использованием правил Кирхгофа	Формирование новых навыков	практ. занятие	2
16. Исследование цепей постоянного тока	Формирование новых навыков	лабор. занятие	4

УЧЕБНЫЙ БЛОК 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ЗАРЯДОВ

В этом учебном блоке основное внимание уделяется расчету параметров электрического поля точечных и распределенных зарядов.

Показано, что электростатическое поле имеет потенциальный характер, т.е. может изменять энергию зарядов, перемещающихся в поле, на основе принципа эквивалентности работы и энергии.

Рассматриваются методы расчета параметров электростатического поля на основе принципа суперпозиции полей (метод точечных зарядов) и теорема Остроградского – Гаусса, записанная в интегральной форме.

Рассматриваются особенности и закономерности состояния диэлектриков и проводников во внешнем электрическом поле; раскрывается физический смысл диэлектрической проницаемости вещества.

При изучении данного блока студенты должны

иметь представление:

- об элементарных зарядах;
- о зарядовой структуре атомов;
- о сути закона сохранения заряда в природе;
- о векторных величинах;
- о видах механической энергии и эквивалентности работы и энергии;
- о потенциальном поле сил;
- о возможности представления взаимодействия тел действием одного тела на другое на основе третьего закона Ньютона;

обладать навыками:

- сложения и вычитания векторов, вычисления скалярного и векторного их произведения;
- дифференцирования и интегрирования простейших функций;
- применения элементов дифференциального и интегрального исчисления.

Учебная программа блока

Содержание блока	Форма подготовки	Литература
Элементарные заряды. Закон сохранения заряда. Заряды в телах, способы заряда тел	лекция, самост.	[6] – [8], [10]
Взаимодействие зарядов, кулоновская сила, поле сил	лекция, самост.	[6] – [8], [10]
Силовая (напряженность) и энергетическая (потенциал) характеристики поля точечных зарядов. Индукция электрического поля. Графическое изображение поля. Принцип суперпозиции электрических полей	лекция, самост.	[6] – [8], [10]

Содержание блока	Форма подготовки	Литература
Распределенные заряды (линейные, поверхностные, объемные). Расчет характеристик поля распределенных зарядов методом точечных зарядов	лекция	[7]
Теорема Остроградского – Гаусса. Методика применения теоремы для расчета характеристик поля распределенных зарядов. Следствия: возможность сведения распределенных зарядов к точечным	лекция	[6], [7], [10]
Движение зарядов в электрическом поле, работа по перемещению зарядов в электрическом поле	лекция	[7], [10]
Электрическая емкость тела и системы тел. Конденсаторы	лекция	[6], [7], [10]
Электрический диполь в веществе. Проводники в электрическом поле	лекция, самост.	[7], [10]
Диэлектрики в электрическом поле. Поляризация диэлектриков. Поле внутри однородного диэлектрика	лекция	[6], [7], [10]
Сегнетоэлектрики. Пьезоэлектрический эффект	лекция	[7], [10]
Энергия электрического поля. Плотность энергии	лекция, самост.	[6], [7], [10]

Цель обучения

Студент должен знать	Студент должен уметь
– характеристики электрического поля – напряженность, потенциал, индукция и связь между ними; – методику расчета характеристик поля распределенных зарядов, метод точечных зарядов и принцип суперпозиции полей; – теорему Остроградского – Гаусса, методику ее применения для расчета напряженности поля распределенных зарядов; – понятие электроемкости тел; – понятие поляризованности вещества; – физический смысл диэлектрической проницаемости вещества, векторы поляризации, диэлектрической восприимчивости; – особенности сегнето- и пьезоэлектриков; – закономерности, определяющие энергию и плотность энергии электрического поля	– определять характеристики поля точечных зарядов; – рассчитывать характеристики поля распределенных зарядов; – определять работу и изменение энергии зарядов при их перемещении в электрическом поле; – определять потенциальную энергию системы зарядов; – определять характеристики электрического поля в средах с неоднородной диэлектрической проницаемостью; – определять величины вектора поляризации в веществе, диэлектрической восприимчивости; – находить энергию и плотность энергии электрического поля

1.1. Краткое содержание теоретического материала

Характеристики электростатического поля

Наименьшей частицей вещества является атом, который, в целом, является нейтральной частицей. Однако каждый атом содержит два различных типа элементарных зарядов (отрицательные – электроны и положительные – протоны) в равном количестве. Если равенство разноименных элементарных зарядов в атоме, молекуле и теле нарушается, то возникают новые объекты (ионы, заряженное тело), которые обладают новыми (дополнительными) свойствами – способностью создавать вокруг себя *электрическое поле* и взаимодействовать с другими заряженными частицами или телами.

Положительный или отрицательный (избыточный) заряд тела может быть обнаружен, если к этому телу поднести другое заряженное тело. Опыт показывает, что тела, обладающие избыточными зарядами одного знака, отталкиваются друг от друга. Тела, обладающие избыточными зарядами разных знаков, притягиваются друг к другу. Впервые количественное значение силы взаимодействия заряженных тел было получено Кулоном для точечных зарядов. При этом под *точечным зарядом* понимают заряженное тело, размеры которого малы по сравнению с расстояниями до других заряженных тел.

Рассмотрим два точечных заряда q_1 и q_2 , положение которых в пространстве определяется радиус-векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ (рис. 1.1). Пусть $\vec{F}_{12}$ – сила, с которой заряд q_2 действует на заряд q_1 , а $\vec{F}_{21}$ – сила, действующая на заряд q_2 со стороны заряда q_1 . Измерения, проведенные Кулоном, Ампером и другими исследователями, показали, что сила взаимодействия точечных зарядов пропорциональна величине этих зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена вдоль прямой, соединяющей заряды. Этот закон называют **законом Кулона**. Математически он может быть записан в виде

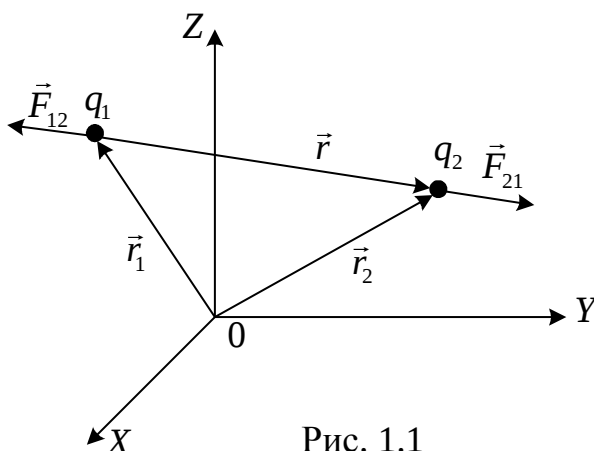


Рис. 1.1

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}, \quad (1)$$
где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц. В системе СИ $k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$.

В электродинамике (в частности, электростатике) коэффициент k принято выражать через *электрическую постоянную* ϵ_0

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0},$$

где $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$ – электрическая постоянная.

Соотношение (1) справедливо для зарядов q_1 и q_2 любых знаков.

Если имеется N точечных зарядов q_i (где $i = 1, 2, 3, \dots, N$), то сила, с которой заряд q_i действует на некоторый точечный заряд q , не зависит от присутствия других зарядов:

$$\vec{F}_i = \frac{q_i q}{4\pi\epsilon_0 r_i^3} \vec{r}_i,$$

где $\vec{r}_i$ – вектор, соединяющий заряд q_i с зарядом q в выбранной системе координат; r_i – его модуль.

Если учитывается среда, в которой находятся точечные заряды, то последняя формула принимает вид

$$\vec{F}_i = \frac{q_i q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r_i^3} \vec{r}_i,$$

где ϵ – диэлектрическая проницаемость среды.

Очевидно, что результирующая сила $\vec{F}$, с которой система точечных зарядов q_i действует на заряд q , равна векторной сумме сил $\vec{F}_i$, действующих на этот заряд со стороны каждого из зарядов системы:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad (2)$$

В этом суть *принципа суперпозиции* полей.

Силовые взаимодействия между разделенными в пространстве телами могут передаваться только при наличии некоторой «среды», окружающей эти тела, последовательно от одной части этой «среды» к другой и с конечной скоростью. Такой «средой» является особый вид материи – *электрическое поле*. Оно является неизменным спутником каждого электрического заряда. Судить о существовании электрического поля в данной точке пространства можно только по наличию силы, с которой поле действует на помещенный в эту точку электрический заряд.

Поместим точечный заряд q в начало системы координат и рассмотрим силы, действующие на заряды q_i (где $i = 1, 2, 3, \dots$), которые поочередно будем помещать в некоторую точку с координатами x, y, z (рис. 1.2).

Из (1) следует, что при изменении величины заряда q_i сила $\vec{F}_i = \frac{q_i q}{4\pi\epsilon_0 r_i^3} \vec{r}_i$

также меняется. Однако отношение $\frac{\vec{F}_i}{q_i} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$ не зависит от величины

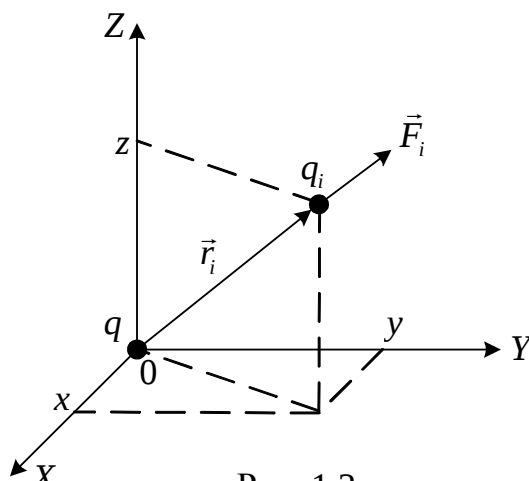


Рис. 1.2

заряда q_i и определяется лишь зарядом q и радиус-вектором $\vec{r}$, проведенным в данную точку пространства. Поэтому можно сделать вывод, что отношение $\frac{\vec{F}_i}{q_i}$ характеризует электрическое поле заряда q , которое существует в точке с координатами x, y, z , безотносительно к заряду q_i .

Вектор, равный отношению силы $\vec{F}$, с которой заряд q действует на точечный положительный заряд q_0 (так называемый *пробный заряд*), помещенный в некоторую точку пространства, к величине этого заряда,

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}, \quad (3)$$

называют *напряженностью электрического поля*, создаваемого зарядом q в данной точке. С другой стороны, если напряженность электрического поля в данной точке известна, то сила, действующая на помещенный в эту точку произвольный заряд q , определяется по формуле

$$\vec{F} = q\vec{E}. \quad (4)$$

Используя понятие электрического поля, можно сказать, что заряд q создает электрическое поле напряженностью $\vec{E}$, и на заряд q_i , находящийся в этом поле, действует сила $\vec{F} = q_i \vec{E}$. Это удобно, так как формула (4) справедлива для электрических полей, создаваемых любой системой зарядов.

Из соотношений (3) и (4) следует, что напряженность электрического поля точечного заряда q на расстоянии r от него

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}; \quad E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (5)$$

Если система N зарядов q_i (где $i = 1, 2, 3, \dots, N$) любого знака действует на пробный заряд q_0 , помещенный в некоторую точку пространства, то согласно (2) результирующая сила будет равна векторной сумме сил, действующих на этот заряд со стороны каждого из зарядов системы. Разделив обе части соотношения (2) на q_0 , получим

$$\frac{\vec{F}}{q_0} = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{F}_i}{q_0}.$$

Поскольку отношение $\frac{\vec{F}_i}{q}$ – это напряженность электрического поля $\vec{E}_i$, создаваемого зарядом q_i в точке, где расположен заряд q_0 , то напряженность электрического поля $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$ системы точечных зарядов в данной точке

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i,$$

т.е. векторы напряженности электрического поля (как и векторы сил) подчиняются принципу суперпозиции.

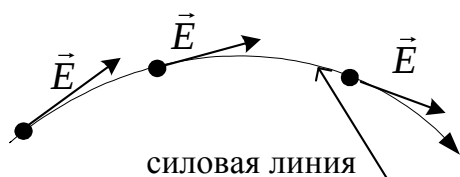


Рис. 1.3

Для описания электрического поля нужно задать векторы напряженности в каждой точке поля. Это можно сделать аналитически, в виде зависимостей напряженности поля от координат. Для наглядности такую зависимость можно представить и графически с помощью *силовых линий* (рис. 1.3). *Силовой*

линией называют такую линию, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора напряженности поля в этой точке. Силовым линиям приписывают определенное направление, отмечая его на чертеже стрелкой в направлении вектора напряженности. При этом силовые линии нигде не пересекаются. В противном случае в точках пересечения вектор напряженности поля имел бы одновременно разные направления. Из определения силовых линий следует, что они начинаются только на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных (или «уходят» в бесконечность от положительного заряда, или «приходят» из бесконечности к отрицательному заряду). Если напряженность электрического поля $\vec{E}$ во всех точках одинакова, то такое поле называют *однородным*.

Рассмотрим электрическое поле, созданное положительным точечным зарядом q . В любой точке этого поля на пробный заряд q_0 действует сила

$$\vec{F} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}.$$

Вычислим работу сил электрического поля при перемещении заряда q_0 из точки 1 в точку 2 (рис. 1.4) по произвольной траектории. Эта работа

$$A_{1-2} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = \int_1^2 \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} d\vec{l} = \int_1^2 \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \alpha dl,$$

где α – угол между направлением радиус-вектора $\vec{r}$ и бесконечно малым перемещением $d\vec{l}$. Из рис. 1.4 видно, что произведение $dl \cos \alpha$ равно величине приращения $dr = |d\vec{r}|$ радиус-вектора $\vec{r}$ в данной точке траектории.

Следовательно,

$$A_{1-2} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r_2}. \quad (6)$$

Таким образом, работа сил электрического поля по перемещению точечного заряда в поле другого точечного заряда не зависит от формы траектории, а определяется лишь начальным и конечным положениями зарядов. Такие силовые поля называются *потенциальными*. Это означает, что для электрического поля можно ввести понятие потенциальной энергии одного заряда в силовом поле другого.

Поскольку работа консервативной силы равна убыли потенциальной энергии, то

$$A_{1-2} = \Pi_1 - \Pi_2.$$

Сравнив это выражение с (6), можем записать

$$\Pi_1 = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \text{const}; \quad \Pi_2 = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \text{const}.$$

Если нулевой уровень потенциальной энергии выбрать на бесконечности, то $\text{const} = 0$, и потенциальная энергия заряда q_0 , находящегося на расстоянии r от заряда q ,

$$\Pi = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

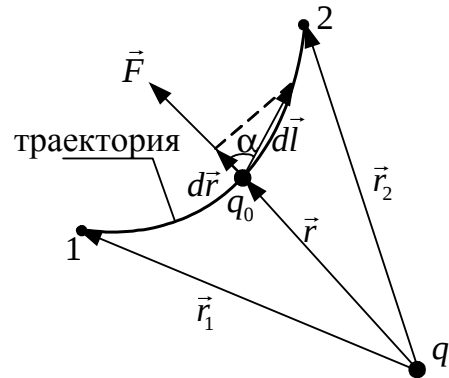


Рис. 1.4

Отношение $\frac{\Pi}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ не зависит от значения q_0 , а определяется лишь зарядом q и расстоянием r от него до данной точки пространства. Поэтому отношение $\frac{\Pi}{q_0}$ наряду с напряженностью является характеристикой поля. Скалярная величина, равная отношению потенциальной энергии заряда q_0 в электрическом поле заряда q к величине заряда q_0 ,

$$\varphi = \frac{\Pi}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (7)$$

называется *потенциалом* электрического поля заряда q в данной точке. Потенциал является электрической характеристикой поля в данной точке.

Если поле создается системой N точечных зарядов q_i , то потенциал поля системы зарядов в данной точке равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности, т.е.

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i.$$

Это соотношение также выражает суть *принципа суперпозиции полей*.

Соотношения (5) и (7) справедливы для вакуума и воздуха. Однако заряды могут находиться и взаимодействовать в других средах, которые, как будет показано далее, влияют на силу взаимодействия. Это влияние учитывается введением в формулы (5) и (7) множителя $\frac{1}{\epsilon}$, где ϵ – *диэлектрическая проницаемость среды*. С учетом ϵ в общем случае можно записать

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}; \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}. \quad (8)$$

Соотношения (8) характеризуют электрическое поле в некоторой среде. При решении ряда задач удобно использовать характеристику электрического поля, которая не зависит от диэлектрических свойств среды. Такую характеристику поля называют *индукцией электрического поля* (*электрическим смещением*)

$$\vec{D} = \epsilon\epsilon_0 \vec{E}. \quad (9)$$

Сравнив выражение для модуля напряженности электрического поля (первое соотношение в (8) и выражение модуля индукции электрического

поля точечного заряда, видим, что модель индукции магнитного поля не зависит от диэлектрических свойств среды:

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}.$$

Используя (7), выражение для работы (6) можно переписать в виде

$$A_{1-2} = q_0(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (10)$$

Поскольку потенциал точечного заряда убывает обратно пропорционально расстоянию от него до рассматриваемой точки поля, на бесконечно большом расстоянии от заряда потенциал создаваемого им поля равен нулю: $\varphi_\infty = 0$. Поэтому работа сил поля A_∞ по перемещению единичного положительного заряда из данной точки в бесконечность численно равна потенциалу в этой точке,

$$\varphi_\infty = \frac{A_\infty}{q}.$$

Часто за нулевое значение потенциала принимают не его значение в бесконечности, а значение в некоторой точке пространства, как это делается для потенциальной энергии в механике (например, потенциальная энергия тела в поле сил тяжести $\Pi = mgh$). Это удобно при решении задач, поскольку при определении распределения потенциала в пространстве или расчете работы электростатического поля (см. формулу (10) требуется знать разность потенциалов.

Наряду с силовыми линиями для визуального отображения электрического поля можно использовать понятие потенциала. Объединяя в электрическом поле точки с одинаковым потенциалом, можно получить поверхности, называемые поверхностями равного потенциала, или *эквипотенциальными поверхностями* (рис. 1.5).

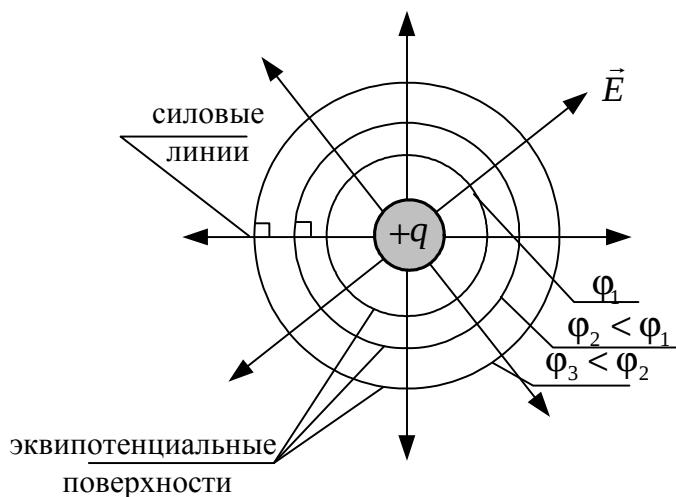


Рис. 1.5

Пусть имеется однородное электрическое поле с напряженностью $\vec{E}$. Поместим в точку 1 заряд q и перенесем его в точку 2 вдоль вектора $\Delta \vec{l}$

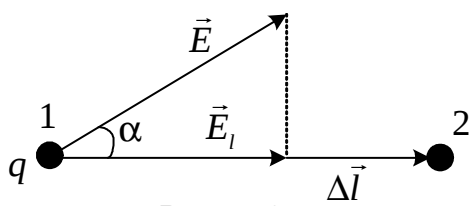


Рис. 1.6

(рис. 1.6). Работу сил электрического поля при этом перемещении можно выразить:

а) через напряженность поля

$$A_{1-2} = q\vec{E}\Delta\vec{l} = qE\Delta l \cos \alpha = qE_l\Delta l,$$

где Δl – модуль вектора перемещения; E_l –

проекция вектора $\vec{E}$ на направление вектора перемещения;

б) через разность потенциалов точек 1 и 2

$$A_{1-2} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = -q(\varphi_2 - \varphi_1) = -q\Delta\varphi.$$

Приравнявая оба выражения для работы, получаем

$$E_l = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}. \quad (11)$$

В общем случае неоднородного поля точки 1 и 2 нужно выбирать достаточно близко друг от друга (бесконечно близко), чтобы напряженность поля при перемещении заряда на $\Delta\vec{l}$ можно было считать постоянной.

Переходя к пределу при $\Delta\vec{l} \rightarrow 0$, из равенства (11) получим

$$E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l} \quad \text{или} \quad \vec{E} = -\text{grad}\varphi. \quad (12)$$

Производная $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$ характеризует изменение потенциала в направлении l , поэтому в векторной записи выражения (12) напряженность поля $\vec{E}$ определяется градиентом (вектором) потенциала φ .

Силовые линии поля всегда перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям и направлены от поверхности с большим потенциалом φ_1 к поверхности с потенциалом $\varphi_2 < \varphi_1$ (см. рис. 1.5).

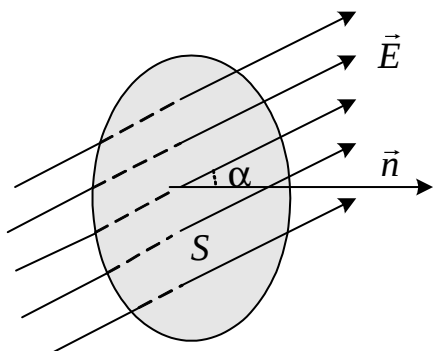


Рис. 1.7

Рассмотрим плоскую поверхность S , которую пронизывают силовые линии однородного электрического поля напряженностью $\vec{E}$, составляющие угол α с нормалью $\vec{n}$ к поверхности (рис. 1.7).

Величину $N_E = ES \cos \alpha = E_n S$ (где $E_n = E \cos \alpha$ – проекция вектора $\vec{E}$ на направление нормали) называют *поток вектора напряженности* электрического поля через поверхность S .

Если поле неоднородно и поверхность S , через которую рассчитывают поток, не является плоскостью, то эту поверхность нужно разбить на бесконечно малые элементы dS и каждый элемент считать плоским, а поле, его пронизывающее, – однородным. Элементарный поток через такую площадку

$$dN_E = E dS \cos \alpha = \vec{E} d\vec{S} = E_n dS .$$

Полный поток N_E через всю поверхность S рассчитывается по формуле

$$N_E = \int_S E_n dS ,$$

где E_n – перпендикулярная к dS компонента вектора $\vec{E}$.

Из определения потока видно, что он может быть положительным (если направление вектора $\vec{E}$ составляет острый угол с нормалью $\vec{n}$ и $d\vec{S} = \vec{n}dS$), отрицательным (если направление вектора $\vec{E}$ составляет тупой угол с нормалью) и равным нулю (если вектор $\vec{E}$ перпендикулярен к нормали).

Определим поток напряженности электрического поля неподвижного точечного заряда $q > 0$ (рис. 1.8). Окружим заряд воображаемой поверхностью (сферой радиуса R с центром в точке расположения заряда). Площадь поверхности сферы $S = 4\pi R^2$. Так как векторы напряженности электрического поля во всех точках на поверхности S направлены по радиусу (т.е. по нормали к поверхности сферы) и одинаковы по величине, то поток вектора напряженности электрического поля точечного заряда q через поверхность S

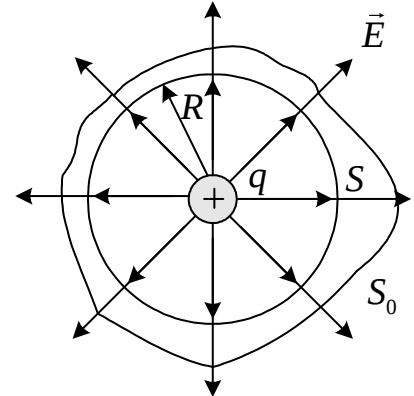


Рис. 1.8

$$N_E = E_n S = E_n 4\pi R^2 .$$

Поскольку в точках на поверхности сферы

$$E_n = E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^2} , \text{ то } N_E = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0} .$$

Данный результат справедлив для любой воображаемой замкнутой поверхности S_0 (см. рис. 1.8) и для произвольного расположения заряда (или зарядов) внутри этой поверхности. В этом суть **теоремы Остроградского – Гаусса**: поток вектора напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов,

заклученных внутри этой поверхности (ее называют «гауссовой»), деленной на $\epsilon\epsilon_0$, т.е.

$$N_E = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i,$$

или в общем случае

$$\oint_S E_n dS = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0}, \quad (13)$$

где q – алгебраическая сумма зарядов, охватываемых произвольной замкнутой поверхностью; E_n – компонента вектора $\vec{E}$, перпендикулярная к поверхности dS .

Рассмотрим некоторые примеры применения теоремы Остроградского – Гаусса, которые полезны для освоения методики решения задач электростатики.

Введем понятия объемной (ρ), поверхностной (σ), и линейной (τ) плотностей заряда.

Если заряд распределен по объему, то используется *объемная плотность заряда* ρ – заряд, находящийся в единице объема,

$$\rho = \frac{dq}{dV}.$$

Если заряд располагается по поверхности тела, то распределение заряда можно характеризовать с помощью *поверхностной плотности заряда* σ , которая определяется как величина заряда, приходящаяся на единицу площади поверхности тела, несущего заряд,

$$\sigma = \frac{dq}{dS}.$$

Если заряд распределен вдоль некоторой линии (нить, тонкий стержень и т.п.), то его распределение описывается *линейной плотностью заряда* τ – заряд, приходящийся на единицу длины линейного заряда,

$$\tau = \frac{dq}{dl}.$$

В случаях равномерного распределения заряда q по объему тела V , на его поверхности S или вдоль одного из линейных размеров тела l (если заряженное тело – нить или цилиндр) плотности заряда рассчитываются по формулам

$$\rho = \frac{q}{V}; \quad \sigma = \frac{q}{S} \quad \text{и} \quad \tau = \frac{q}{l} \quad \text{соответственно.}$$

Пример 1. Вычислим напряженность электрического поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной плоскостью. Пусть для определенности поверхностная плотность заряда $\sigma > 0$. Из соображений симметрии заряда относительно любой точки пространства следует, что векторы напряженности поля в любой точке направлены перпендикулярно к плоскости. Также очевидно, что в симметрично расположенных относительно плоскости точках поля векторы напряженности одинаковы по величине и противоположны по направлению.

Представим мысленно (вообразим) цилиндрическую поверхность с образующими, перпендикулярными к заряженной плоскости, и параллельными плоскости основаниями цилиндра площадью S (рис. 1.9). Для такой воображаемой (*гауссовой*) поверхности легко определить поток (записать значение интеграла через суммарную площадь цилиндрической поверхности $\oint_S E_n dS$). В силу симметрии модули

$E_1 = E_2 = E$, а векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ перпендикулярны к основаниям цилиндра.

Поскольку векторы напряженности поля параллельны боковой поверхности, то поток вектора напряженности через всю воображаемую поверхность S_0 цилиндра равен потоку через его основания:

$$\oint_S E_n dS = N_E = E_1 S + E_2 S = 2ES.$$

С другой стороны, по теореме Остроградского – Гаусса $N_E = \frac{q}{\epsilon \epsilon_0}$,

где q – заряд, заключенный внутри поверхности цилиндра, $q = \sigma S$. Следова-

тельно, $E = \frac{\sigma}{2\epsilon \epsilon_0}$.

Результат свидетельствует о том, что величина напряженности поля бесконечной заряженной плоскости на любых расстояниях от нее одинакова.

Для отрицательно заряженной плоскости результат будет таким же, лишь направления векторов напряженности $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ изменятся на противоположные.

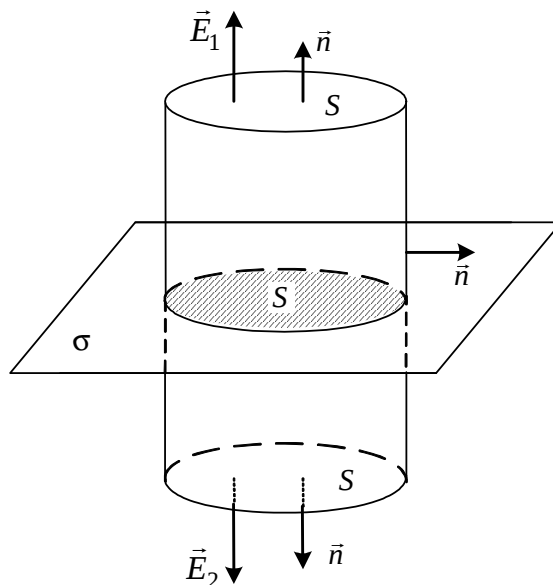


Рис. 1.9

Пример 2. Вычислим напряженность электрического поля, создаваемого равномерно заряженной сферой радиусом R . Поле, создаваемое сферической поверхностью, заряженной равномерно, является центрально-симметричным, т.е. в любой точке векторы напряженности поля направлены вдоль радиусов сферы.

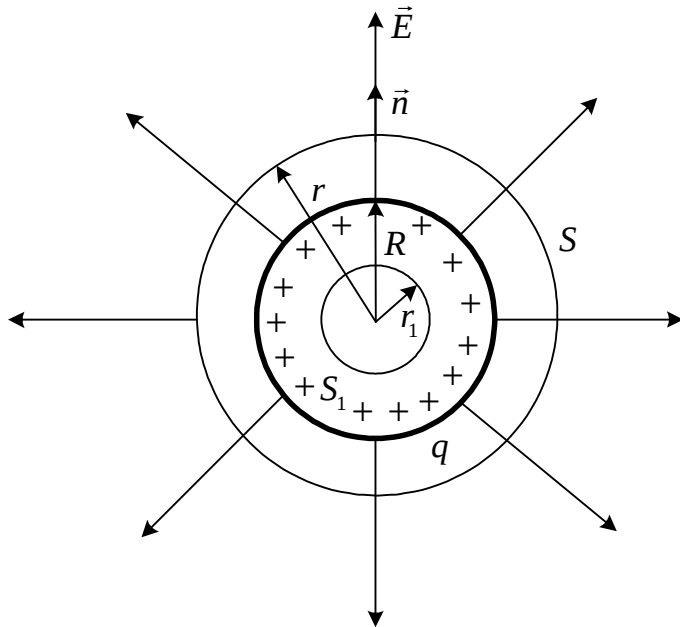


Рис. 1.10

Поэтому в качестве гауссовой поверхности удобно выбрать воображаемую сферическую поверхность, concentricкую с заряженной сферической поверхностью, радиусом $r > R$ (рис. 1.10). Во всех точках поверхности величина проекции вектора напряженности $\vec{E}$ на нормаль одинакова. Поэтому суммарный поток вектора напряженности поля через выбранную поверхность S ($r > R$)

$$N_{E(r>R)} = E 4\pi r^2.$$

С другой стороны, весь заряд сферы находится внутри этой поверхности. Поэтому

$$\oint_S E_n dS = N_{E(r>R)} = \frac{q}{\epsilon \epsilon_0}.$$

Следовательно, $E_{(r>R)} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}$, т.е. электрическое поле вне заряженной сферы (для области $r > R$) тождественно полю точечного заряда, равного всему заряду заряженной сферы, помещенного в центр сферы.

Выберем также concentricкую с заряженной сферой S_1 , расположенную внутри ($r_1 < R$). Поверхность S_1 радиусом $r_1 < R$ не содержит зарядов.

Поэтому внутри заряженной сферы

$$E_{(r_1<R)} = 0.$$

Для отрицательно заряженной сферы формулы остаются справедливыми, только векторы напряженности будут направлены в противоположные стороны (к центру сферы).

Поскольку поле, создаваемое точечным зарядом, такое же, как поле вне заряженной сферы, то потенциал сферы при условии, что $r > R$, может быть вычислен по формуле для точечного заряда

$$\Phi_{(r>R)} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}.$$

Это выражение можно получить, если воспользоваться соотношением $E = -\frac{d\Phi}{dr}$ и проинтегрировать $\Phi_{(r>R)} = -\int_r^{\infty} E_{(r>R)}(r) dr$. Верхний предел интегрирования « ∞ » обусловлен выбором потенциала в бесконечности равным нулю.

Внутри сферы поле отсутствует, поэтому потенциал во всех точках внутри сферы одинаков и равен потенциалу на ее поверхности:

$$\Phi_{(r_1<R)} = \Phi_{(r_1=R)} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R}.$$

Пример 3. Вычислим напряженность электрического поля, создаваемого шаром радиусом R , равномерно заряженным по объему, с плотностью заряда ρ и диэлектрической проницаемостью ϵ .

Поле, создаваемое таким шаром, является центрально симметричным. Вне шара для поля получится такой же результат, что и для поля вне сферы (см. пример 2).

Найдем напряженность поля внутри шара. Вообразим концентрическую с поверхностью шара сферическую поверхность радиусом $r < R$ (рис. 1.11). Поток вектора напряженности поля через поверхность этой сферы

$$N_{E(r<R)} = E_r 4\pi r^2.$$

С другой стороны, по теореме Остроградского – Гаусса

$$N_{E(r<R)} = \frac{q_r}{\epsilon_0\epsilon},$$

где $q_r = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$ – заряд, заключенный в сфере радиусом r .

$$\text{Следовательно, } E_{(r<R)} = \frac{\rho r}{3\epsilon\epsilon_0}.$$

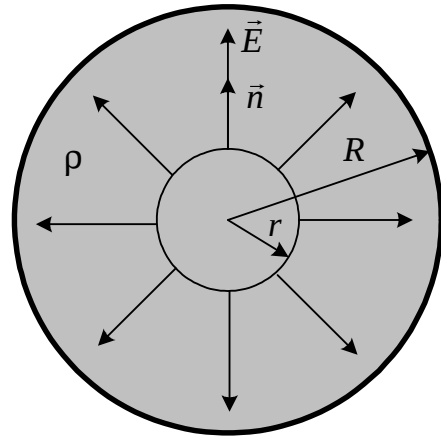


Рис. 1.11

Таким образом, внутри равномерно заряженного шара напряженность поля растет линейно с увеличением расстояния от его центра.

Иногда распределенный заряд образует систему, к которой применять теорему Остроградского – Гаусса нецелесообразно из-за математических сложностей. В этом случае используется **метод точечных зарядов**. Распределенный заряд (заряженное тело) разбивается на бесконечно малые элементы с зарядом dq , которые можно считать точечными зарядами. Затем определяется $d\vec{E}(r)$ в заданной точке поля и на основе принципа суперпозиции полей векторным сложением (интегрированием) определяется $\vec{E}$:

$$\vec{E} = \int d\vec{E}(r),$$

при этом удобно вводить систему координат, определять $dE(x)$, $dE(y)$, $dE(z)$, определять E_x , E_y , E_z и, наконец, векторным сложением – $\vec{E}$.

Алгебраическим сложением (интегрированием) определяется потенциал

$$\varphi = \int d\varphi.$$

Для демонстрации метода рассмотрим пример. Определим напряженность поля и потенциал в точке A , расположенной в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ в центре заряженного полукольца радиусом R , с линейной плотностью заряда τ .

Выделим малый элемент линейного заряда dl . Он несет малый заряд dq , который будем считать точечным. Этот заряд дает в точке A напряженность поля $d\vec{E}$, модуль которой

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{dq}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{\tau dl}{R^2}.$$

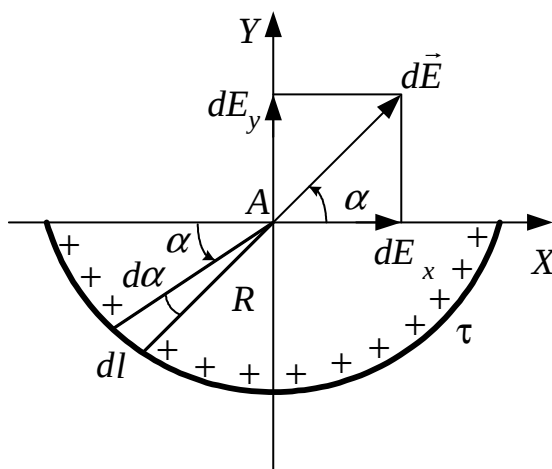


Рис. 1.12

Введем угол α (рис. 1.12) и угол $d\alpha$, образованный двумя радиусами, опирающимися на концы dl . Так как dl – часть дуги, то запишем

$$dl = R d\alpha.$$

Разложим $d\vec{E}$ на проекции dE_y и dE_x .

Тогда

$$d\vec{E} = dE_x \vec{i} + dE_y \vec{j},$$

где $dE_y = dE \sin \alpha$; $dE_x = dE \cos \alpha$.

Интегрируя dE_y и dE_x , получим

$$E_y = \int dE_y = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{\tau dl}{R^2} \sin \alpha = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0\epsilon R} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0\epsilon R} (-\cos \alpha) \Big|_0^\pi =$$

$$= -\frac{\tau}{4\pi\epsilon_0\epsilon R} (\cos \pi - \cos 0) = \frac{2\tau}{4\pi\epsilon_0\epsilon R} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon R}$$

$$E_x = \int dE_x = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{\tau dl}{R^2} \cos \alpha = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^\pi \cos \alpha d\alpha = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 R} \sin \alpha \Big|_0^\pi = 0.$$

Следовательно, в точке A напряженность поля $\vec{E}$ направлена вдоль оси y и равна $\vec{E} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0 R} \vec{j}$.

Каждый заряд dq создает в точке A потенциал $d\varphi$, который как для точечного заряда можно рассчитать по формуле

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{\tau dl}{R}.$$

Тогда потенциал, который создает в точке A заряженное полукольцо, определим интегрированием

$$\varphi = \int d\varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int \frac{dl}{R} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_0^{\pi R} \frac{dl}{R} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_0^\pi d\alpha = \frac{\tau}{4\epsilon_0\epsilon}.$$

Потенциал, создаваемый полукольцом в точке A , совпадающей с центром этой окружности, определяется формулой

$$\varphi = \frac{\tau}{4\epsilon_0\epsilon} \quad \text{или} \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R},$$

поскольку заряд полукольца определяется формулой $q = \tau\pi R$.

В электростатике в частности, и физике вообще, особое значение имеет электрическое поле, созданное системой, состоящей из двух одинаковых по величине, но разноименных точечных зарядов, расположенных на некотором расстоянии l друг от друга, которая называется *электрическим диполем* (рис. 1.13). Отрезок прямой l , соединяющей оба заряда, называют *плечом* (осью) *диполя*.

Основной характеристикой диполя является его *электрический* или *дипольный момент* – вектор, численно равный произведению $q\vec{l}$ и направленный от отрицательного заряда к положительному: $\vec{p} = q\vec{l}$.

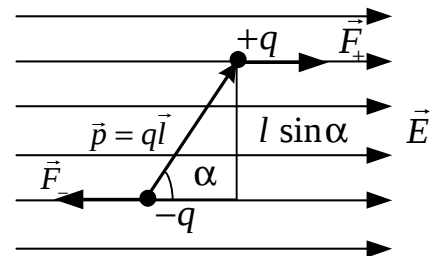


Рис.1.13

Если диполь поместить в однородное электрическое поле напряженностью $\vec{E}$, то на его заряды действуют силы $\vec{F}_+$ и $\vec{F}_-$ (см. рис. 1.13). Эти силы создают вращающий момент пары сил $\vec{M}$. Модуль M определяется выражением $M = qEl \sin \alpha$, где α – угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{E}$. В однородном поле момент пары сил стремится повернуть диполь так, чтобы векторы $\vec{p}$ и $\vec{E}$ оказались параллельны.

Электрическое поле в веществе

Все вещества по воздействию на их состояние внешнего электрического поля можно разделить на *проводники*, *полупроводники* и *диэлектрики*.

В общем случае к проводникам относят вещества, в которых имеются «свободные» заряды, т.е. заряды, способные под действием электрического поля перемещаться в пределах вещества.

К проводникам относятся металлы в твердом и жидком состояниях, водные растворы солей, кислот и щелочей, плазма и ряд других веществ.

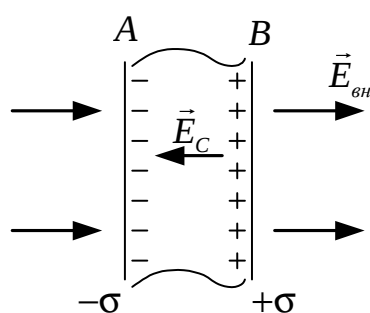


Рис. 1.14

Рассмотрим воздействие внешнего электрического поля на проводники на примере металлов, структура которых включает кристаллическую решетку, образованную ионами атомов металла, и «свободные» электроны, которые слабо связаны с ионами и могут под воздействием электрического поля перемещаться в объеме кристаллической решетки. Если металлический образец поместить во внешнее электрическое поле (рис. 1.14), «свободные» электроны сме-

щаются к поверхности A , создавая отрицательный избыточный заряд у этой поверхности с плотностью $-\sigma$. У поверхности B остается не скомпенсированный электронами положительный заряд ионов кристаллической решетки $+\sigma$. Таким образом в объеме металла происходит разделение зарядов. Это явление получило название *электростатической индукции*. Разделение зарядов создает собственное электрическое поле с $\vec{E}_C$, которое компенсирует внешнее поле с напряженностью $\vec{E}_{\text{вн}}$.

Так как в каждом объеме металла количество «свободных» электронов обычно равно числу ионов в кристаллической решетке, практически для любых реальных внешних полей создаваемые ими поверхностные заряды $\pm\sigma$ оказываются достаточными, чтобы полностью скомпенсировать внешнее поле. Поэтому *напряженность поля внутри металлов всегда равна нулю*, т.е. выполняется условие

$$E_{\text{м}} = E_{\text{вн}} - E_C = 0.$$

Если (в общем случае) вектор $\vec{E}_{\text{вн}}$ не перпендикулярен к поверхности металла, то его можно разложить на параллельную поверхности металла и перпендикулярную к ней компоненты. Ясно, что перемещение «свободных» электронов в металле будет в этом случае происходить и вдоль поверхности до полной компенсации компоненты вектора $\vec{E}_{\text{вн}}$, параллельной поверхности металла. Исходя из этого можно сделать два вывода:

- вектор напряженности $\vec{E}_{\text{вн}}$ вблизи металлического образца всегда перпендикулярен к его поверхности;
- поверхность металла всегда эквипотенциальна.

Рассмотрим металлический образец, внутри которого имеется полость, помещенный во внешнее электрическое поле (рис. 1.15).

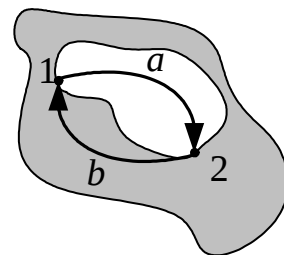


Рис. 1.15

Вычислим работу сил электрического поля, совершаемую ими при перемещении некоторого точечного заряда q по замкнутой траектории $1 - a - 2 - b - 1$, часть которой проходит через полость, а часть – через проводник.

Поскольку электрическое поле потенциальное, $A_{1-a-2-b-1} = 0$. С другой стороны, $A_{1-a-2-b-1} = A_{1-a-2} + A_{2-b-1}$. Так как поле в металле отсутствует, $A_{2-b-1} = 0$. Следовательно, $A_{1-a-2} = 0$. Таким образом, независимо от траектории перемещения заряда внутри полости работа сил поля равна нулю. Это может быть только в случае, если поле внутри полости отсутствует. Поэтому полый проводник экранирует внутреннюю полость от электрического поля всех внешних зарядов. На этом свойстве основана *электростатическая защита*: для того чтобы оградить чувствительные электрические приборы от воздействия внешних электрических полей, их заключают в замкнутые металлические оболочки.

Теперь представим себе, что вблизи проводника расположен точечный заряд. Рассмотрим ситуацию в наиболее простом варианте: определим силу взаимодействия большой проводящей пластины с точечным зарядом q , расположенным вблизи ее поверхности. Для этого изобразим поле двух разноименных точечных зарядов $\pm q$ с помощью силовых линий и эквипотенциальных поверхностей (рис. 1.16).

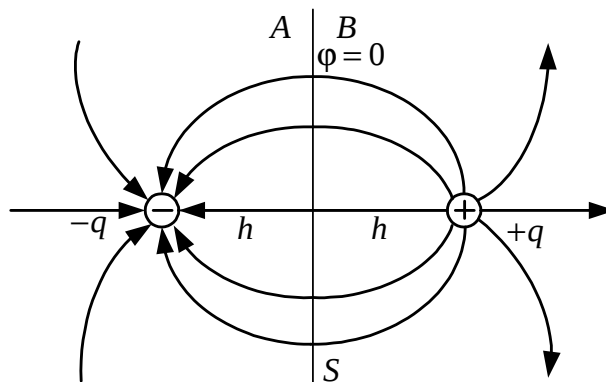


Рис. 1.16

Плоская эквипотенциальная поверхность S (см. рис. 1.16), разделяющая все пространство на области A и B , имеет потенциал, равный нулю, причем силовые линии перпендикулярны к поверхности S . Если поверхность S заменить металлической пластиной, имеющей потенциал, равный нулю, то конфигурация силовых линий и эквипотенциалей в области B не изменится. Это означает, что взаимодействие заряда $(+q)$ с металлической пластиной эквивалентно взаимодействию $(+q)$ с зеркальным отображением этого заряда относительно поверхности S , т.е. с зарядом $(-q)$, расположенным на таком же расстоянии h от поверхности металла S , что и заряд $(+q)$:

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2h)^2}.$$

Диэлектриками называют вещества, которые при обычных условиях практически не имеют свободных зарядов в своем объеме. Поэтому эффект разделения зарядов, подобный проявляющемуся в металлах, в них отсутствует. Однако в диэлектриках все-таки возникает собственное электрическое поле, обусловленное действием на них внешнего электрического поля.

Различают три типа диэлектриков:

1. *Диэлектрики с неполярными молекулами*, симметричные молекулы которых в отсутствии внешнего поля имеют нулевой дипольный момент (например N_2 , H_2 , O_2 , CO_2).

2. *Диэлектрики с полярными молекулами*, молекулы которых вследствие асимметрии имеют ненулевой дипольный момент (например, H_2O , NH_3 , SO_2 , CO). Однако в отсутствие внешнего поля диэлектрик, как некоторый объем вещества, остается настолько слабополяризованным, что не создает заметного электрического поля ни в собственном объеме, ни вне его.

3. *Ионные диэлектрики* (например, KCl , $NaCl$). Ионные кристаллы представляют собой пространственные решетки с правильным чередованием ионов разных знаков.

Внесение диэлектрика во внешнее электрическое поле приводит к возникновению отличного от нуля результирующего электрического момента диэлектрика и собственного электрического поля. Этот процесс называется *поляризацией* диэлектрика.

Соответственно трем видам диэлектриков различают три вида поляризации диэлектрика:

1. *Электронная (или деформационная) поляризация* диэлектрика с неполярными молекулами обусловлена деформацией электронных оболочек атомов, вследствие чего возникает *индуцированный* (наведенный) дипольный момент атомов или молекул диэлектрика (рис. 1.17, а).

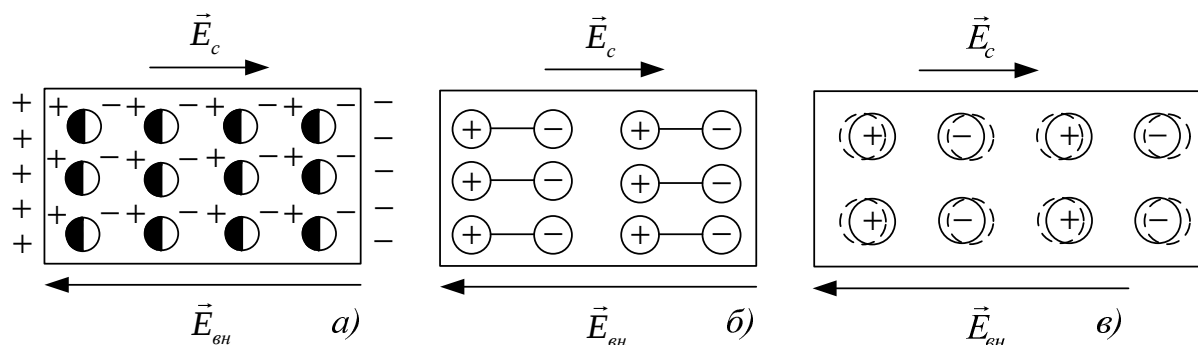


Рис. 1.17

2. *Ориентационная (или дипольная) поляризация* диэлектрика с полярными молекулами обусловлена ориентацией имеющихся дипольных моментов молекул под действием внешнего поля, причем эта ориентация тем сильнее, чем больше напряженность внешнего электрического поля (см. рис. 1.17, б).

3. *Ионная поляризация* диэлектрика с ионными кристаллическими решетками обусловлена смещением подрешетки положительных ионов и отрицательных ионов в соответствии с напряженностью внешнего поля, вследствие чего возникает дипольный момент (см. рис. 1.17, в).

Во внешнем электрическом поле диэлектрик объемом V поляризуется, т.е. приобретает дипольный момент $\vec{p}_V = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$, где $\vec{p}_i$ – дипольный момент одной молекулы.

Для количественного описания поляризации диэлектрика используется векторная величина – *поляризованность*, которая определяется как дипольный момент единицы объема диэлектрика:

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}_V}{V} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{p}_i}{V}.$$

В случае изотропного диэлектрика поляризованность (для большинства диэлектриков, за исключением сегнетоэлектриков) линейно зависит от напряженности внешнего поля:

$$\vec{P} = \chi_E \epsilon_0 \vec{E},$$

где χ_E – диэлектрическая восприимчивость вещества, характеризующая свойства диэлектрика (положительная безразмерная величина).

Поместим пластину из однородного диэлектрика во внешнее электрическое поле, созданное двумя бесконечными параллельными разноименно заряженными плоскостями (рис. 1.18).

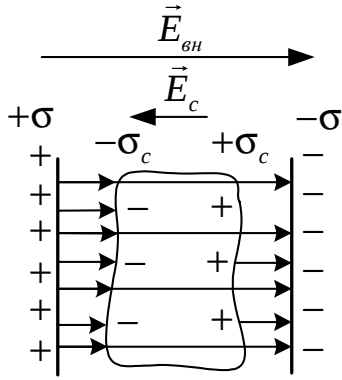


Рис. 1.18

Вследствие поляризации на поверхности диэлектрика появляются нескомпенсированные заряды, которые называются *связанными* (в отличие от *свободных* зарядов, которые создают внешнее поле).

Поле $\vec{E}_c$ внутри диэлектрика, создаваемое связанными зарядами, направлено против внешнего поля $\vec{E}_{вн}$, создаваемого свободными зарядами σ . Модуль напряженности результирующего поля внутри диэлектрика определяется разностью

$$E = E_{вн} - E_c.$$

В нашем примере напряженность поля, создаваемого двумя бесконечно заряженными плоскостями с поверхностной плотностью зарядов σ_c , можно определить как

$$E_c = \frac{\sigma_c}{\epsilon_0},$$

поэтому

$$E = E_{вн} - \frac{\sigma_c}{\epsilon_0}.$$

Полный дипольный момент p_V диэлектрической пластинки толщиной d и площадью S определяется поляризованностью P :

$$p_V = PV = PSd.$$

С другой стороны, дипольный момент этой пластинки определим через полный заряд, обусловленный связанными зарядами на поверхности диэлектрика,

$$p_V = \sigma_c Sd.$$

Сравнивая два последних выражения, получаем $\sigma_c = P$, откуда

$$E = E_{вн} - \frac{\sigma_c}{\epsilon_0} = E_{вн} - \frac{P}{\epsilon_0} = E_{вн} - \frac{\chi_E \epsilon_0 E}{\epsilon_0} = E_{вн} - \chi_E E.$$

Напряженность результирующего поля внутри диэлектрика

$$E = \frac{E_{вн}}{1 + \chi_E} = \frac{E_{вн}}{\epsilon}.$$

Безразмерная величина $\epsilon = 1 + \chi_E = \frac{E_{вн}}{E}$ называется *диэлектрической проницаемостью среды*.

Она характеризует способность диэлектриков поляризовываться в электрическом поле и показывает, во сколько раз напряженность внешнего поля ослабляется в диэлектрике.

Воспользуемся выражением для вектора электрического смещения и учтем связь диэлектрической проницаемости ϵ и диэлектрической восприимчивости χ_E :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_E) \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (14)$$

Из выражения следует, что вектор электрического смещения характеризует электростатическое поле, создаваемое свободными зарядами, но при таком их распределении в пространстве, какое имеется при наличии диэлектрика.

Аналогично линиям напряженности можно ввести линию электрического смещения и определить поток вектора $\vec{D}$ через произвольную замкнутую поверхность:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_S D_n dS,$$

где D_n – проекция вектора $\vec{D}$ на нормаль $\vec{n}$ к площади dS .

Для вектора $\vec{D}$ можно также сформулировать **теорему Остроградского – Гаусса** для *электростатического поля в диэлектрике*: поток вектора электрического смещения в диэлектрике через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных зарядов, заключенных внутри этой поверхности:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_S D_n dS = \sum_{i=1}^n q_i,$$

или для непрерывного распределения заряда в пространстве с объемной плотностью ρ

$$\oint_S D_n dS = \int_V \rho dV.$$

Существует группа кристаллических диэлектриков (сегнетоэлектрики), отличающихся тем, что в них спонтанно формируются микрообласти (домены), в которых все дипольные моменты молекул

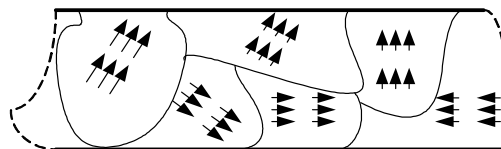


Рис. 1.19

ориентированы в одном направлении (рис. 1.19). Домены, как и молекулы, обладают дипольными моментами, массами, но с гораздо большими, в срав-

нении с молекулами, величинами. Вследствие этого сегнетоэлектрики обладают особыми свойствами:

- величина диэлектрической проницаемости ϵ нелинейно зависит от напряженности внешнего поля $E_{вн}$;
- значение вектора поляризации $\vec{P}$ зависит не только от $E_{вн}$ в данный момент времени, но и от значения $E_{вн}$ в предыдущий момент, что обуславливает наличие петли *гистерезиса* зависимости $P(E_{вн})$ (рис. 1.20). Петля гистерезиса характеризуется остаточной поляризованностью диэлектрика $\pm P_{ост}$ в отсутствии внешнего поля и коэрцитивной силой $\pm E_k$ – величиной, численно равной напряженности внешнего электрического поля, необходимой для устранения остаточной поляризованности, т.е. при которой поляризованность сегнетоэлектрика становится равной нулю;
- величина диэлектрической проницаемости ϵ может достигать очень больших величин (до 10^4) (сравните – диэлектрическая проницаемость керосина $\epsilon = 2$, воды – $\epsilon = 81$);
- существует критическая температура T_k (*точка Кюри*), при достижении которой исчезают упомянутые свойства сегнетоэлектрика, поскольку из-за высокой тепловой энергии молекул домены разрушаются.

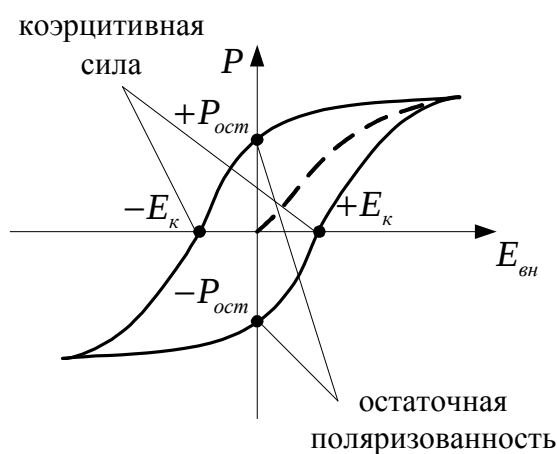


Рис. 1.20

Электрическая поляризация диэлектрика возможна также при сжатии и растяжении некоторого типа диэлектриков, которые называют *пьезоэлектриками*. Возникновение поверхностных электрических зарядов на кристалле (например, кварца) при его деформации называется *прямым пьезоэлектрическим эффектом*. Различают также *обратный пьезоэф-*

фект, когда в кристалле, помещенном во внешнее электрическое поле, возникают механические деформации.

Причиной обратного пьезоэлектрического эффекта является деформация электронных оболочек и относительное смещение атомов и ионов кристалла при наложении внешнего электрического поля, что приводит к макроскопической деформации пьезоэлектрика.

Электроемкость. Конденсаторы

Сообщенный проводнику заряд распределяется по его поверхности так, что напряженность поля внутри проводника равна нулю. При этом проводник приобретает некоторый потенциал ϕ . Если проводнику сообщить дополнительный заряд, то он также перераспределится по его поверхности, и потенциал проводника изменится. Опыт показывает, что потенциал проводника пропорционален находящемуся на нем заряду:

$$q = C\phi, \quad (15)$$

где коэффициент пропорциональности C назван *электроемкостью*.

Сообщение телу заряда возможно перемещением его свободных зарядов на другое тело или на это тело от другого под действием *электрической силы*. При этом другое тело приобретает такой же по величине заряд (нескомпенсированный), что и первое тело, но противоположного знака. Таким образом, *электроемкость* (или коротко – *емкость*) создается всегда двумя телами (проводниками). Такая система называется *конденсатором*. Электроемкость конденсатора

$$C = \frac{q}{\Delta\phi} = \frac{q}{U}, \quad (16)$$

где q – заряд конденсатора (одного из образующих его тел), $\Delta\phi$ – разность потенциалов между телами, U – напряжение на конденсаторе.

Электроемкость плоского конденсатора, образованного двумя плоскими металлическими пластинами с площадью S и расстоянием между ними d , рассчитывается по формуле

$$C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}, \quad (17)$$

где величина $\epsilon\epsilon_0$ характеризует диэлектрические свойства среды между пластинами (внутренней среды конденсатора).

Емкость цилиндрического конденсатора, который представляет собой два коаксиальных цилиндра длиной l и радиусами r_1 и r_2 ,

$$C_{\text{ц}} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Емкость сферического конденсатора, представляющего собой две концентрические сферы с радиусами r_1 и r_2 ,

$$C_{\text{с}} = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

Конденсаторы могут быть соединены в группы последовательно (рис. 1.21, а) и параллельно (см. рис. 1.21, б). Такие группы могут быть заменены одним (*эквивалентным*) конденсатором с электроемкостью $C_э$, равной электроемкости группы ($C_{1...N}$).

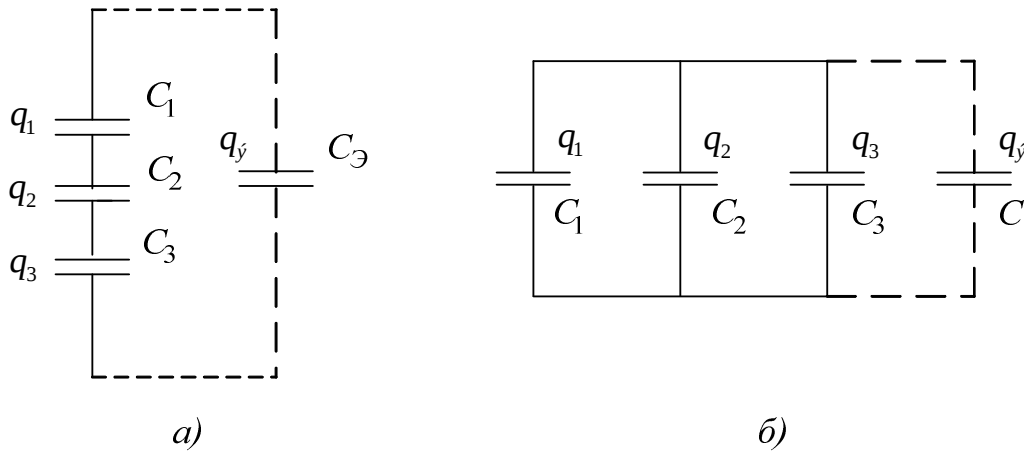


Рис. 1.21

При последовательном соединении конденсаторов условия эквивалентности

$$\begin{aligned} q_1 &= q_2 = q_3 = \dots = q_э = q; \\ U_1 + U_2 + U_3 + \dots &= U_э. \end{aligned} \quad (18)$$

С учетом (15) последнее уравнение системы (18) можно записать в виде

$$\frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3} + \dots = \frac{q}{C_э}.$$

Отсюда следует, что емкость конденсатора, эквивалентного группе конденсаторов, соединенных последовательно, определяется выражением

$$\frac{1}{C_э} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}. \quad (19)$$

При параллельном соединении группы конденсаторов условие эквивалентности

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 + q_3 + \dots &= q_э \\ U_1 = U_2 = U_3 \dots &= U_э = U \end{aligned} \quad (20)$$

С учетом (15) первое уравнение системы (20) можно записать в виде

$$C_1 U + C_2 U + C_3 U + \dots = C_э U.$$

Отсюда следует, что емкость конденсатора, эквивалентного группе конденсаторов, соединенных параллельно, определяется выражением

$$C_{\Sigma} = \sum_{i=1}^N C_i. \quad (21)$$

Зарядка конденсатора заключается в перемещении «свободных» зарядов с одной пластины на другую, причем каждая порция заряда dq перемещается при различной разности потенциалов между пластинами $\Delta\phi$, сформированной ранее перемещенным зарядом q . На перемещение зарядов затрачивается работа

$$dA = dq\Delta\phi,$$

которая согласно закону сохранения энергии и эквивалентности работы и энергии равна приращению энергии электрического поля в конденсаторе

$$\Pi = \int dA = \int_0^q \Delta\phi dq = \int_0^q \frac{q}{C} dq = \frac{q^2}{2C}. \quad (22)$$

Учитывая, что $q = CU$ и $\Delta\phi = U = Ed$, где E – напряженность электрического поля в конденсаторе, выражение (22) можно привести к виду

$$\Pi = \frac{CU^2}{2}; \quad \Pi = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d} \frac{E^2 d^2}{2} = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2 V}{2},$$

где $V = Sd$ – объем, занимаемый электрическим полем (объем конденсатора).

Плотность энергии можно определить отношениями

$$w_e = \frac{\Pi}{V} = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2}.$$

Хотя выражение для w_e получено для однородного поля конденсатора, оно справедливо и для неоднородного поля, так как w_e в неоднородном поле определяется для бесконечно малого объема dV , где поле можно считать однородным:

$$w_e = \frac{d\Pi}{dV}.$$

Энергию неоднородного электрического поля Π_e , заключенного в некотором объеме V , можно найти, интегрируя функцию плотности энергии w_e по объему, что в общем виде можно представить выражением

$$\Pi_e = \int_V w_e dV.$$

1.2. Методические указания к лекционным занятиям

Вопросы лекции	Форма изучения	Литература	Вопросы для самоконтроля
Элементарные заряды. Закон сохранения заряда. Закон Взаимодействия зарядов. Закон Кулона.	самост.	[6], п. 2.5 [7], п. 11.1 [8], п. 18.1 [10], п. 77	1. Какие частицы являются носителями элементарного отрицательного, положительного зарядов?
Напряженность и потенциал электростатического поля. Индукция электростатического поля. Графическое изображение полей. Принцип суперпозиции электрических полей.	самост. лекция	[6], п. 2.6 [7], п. 11.2 [10], п. 78 [6], пп. 2.7 – 2.10 [7], п. 11.3 [10], пп. 79, 80	2. Чем подтверждается факт существования электростатического поля в какой-либо области пространства? 3. Сформулируйте закон Кулона. В каких случаях этот закон можно применить?
Распределенные заряды: линейные, поверхностные, объемные. Расчет поля распределенных зарядов методом точечных зарядов. Теорема Остроградского – Гаусса. Применение теоремы для расчета поля распределенных зарядов. Электрический диполь.	лекция	[7], п. 11.5 [8], п. 18.2 [6], п. 2.12; [7], п. 11.6; [10], п. 81 [7], п. 11.4; [10], пп. 88, 89	4. Что называется напряженностью поля? Чему равна напряженность поля точечного заряда? 5. Что называется потенциалом поля? Как рассчитать потенциал поля точечного заряда?
Диэлектрики в электрическом поле. Поляризация диэлектриков. Поле внутри однородного диэлектрика.	лекция	[7], п. 12.1 – 12.2 [10], пп. 87 – 89 [8], п. 18.3 [7], п. 12.3 [10], п. 91	6. Как рассчитывается работа по перемещению электрического заряда в поле? Какие поля называют потенциальными? 7. Какая связь существует между напряженностью поля и разностью потенциалов?
Сегнетоэлектрики. Пьезоэлектрический эффект. Проводники в электрическом поле.	лекция	[6], пп. 2.19 – 2.20 [7], пп. 12.1 – 12.2 [10], пп. 87 – 89	8. Что называется потоком вектора напряженности электрического поля? Сформулируйте теорему Остроградского – Гаусса.
Электроемкость тел. Конденсаторы. Соединения конденсаторов. Энергия электрического поля. Объемная плотность энергии.	самост. лекция самост. лекция самост. лекция самост. лекция	[7], п. 12.2 [8], п. 18.4 [10], пп. 88, 89 [6], пп. 2.11 – 2.18 [7], пп. 12.5 – 12.6 [10], пп. 93, 94 [6], п. 2.25; [7], п. 12.7; [10], п. 95	9. Как применить теорему Гаусса к расчету напряженности поля заряженной нити, плоскости, сферы? 10. Что такое поляризация диэлектрика? Какая существует связь между диэлектрической проницаемостью и диэлектрической восприимчивостью? 11. Какими свойствами обладают сегнетоэлектрики? Сущность пьезоэлектрического эффекта. 12. Что такое электроемкость проводника, от чего она зависит? 13. Как рассчитываются емкости плоского, сферического и цилиндрического конденсаторов? 14. Сформулируйте правила расчета емкости эквивалентного конденсатора при последовательном и параллельном соединении конденсаторов. 15. Как рассчитывается энергия поля заряженного конденсатора? 16. Как рассчитывается объемная плотность энергии поля?

1.3. Методические указания к практическим занятиям

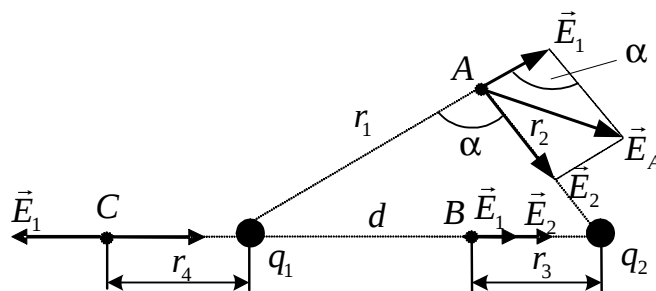
Тема занятия	Задачи	Рекомендации	Задачи из сборников
Характеристики электростатического поля	Взаимодействие точечных и распределенных зарядов	1. Силу, действующую на заряд, можно рассчитать либо с помощью закона Кулона, либо по формуле $\vec{F} = q\vec{E}$, либо $\vec{F} = -grad\P$ (если известна функция потенциальной энергии $\Pi = \Pi(x, y, z)$). 2. При решении задач на нахождение напряженности поля, если задано распределение зарядов, создающих это поле, могут встретиться следующие случаи: 1) поле образовано точечными зарядами. Тогда используют формулы (5) и принцип суперпозиции электрических полей; 2) поле создано зарядами, которые не являются точечными, но распределены равномерно по сферическим, цилиндрическим или плоским поверхностям. Тогда применяют формулы напряженностей, выведенные с помощью теоремы Остроградского – Гаусса; 3) если заряженное тело не является ни сферой, ни плоскостью, ни цилиндром, то для определения напряженностей необходимо тело разбить на бесконечно малые элементы, найти по формуле (5) напряженность $d\vec{E}$ поля, созданную в данной точке каждым элементом, а затем проинтегрировать по всему телу. При этом надо учитывать направления складываемых векторов. Для этого выбирают оси координат X, Y, Z, затем интегрируют проекции dE_x, dE_y, dE_z всех элементарных векторов $d\vec{E}$ на эти оси и получают проекции искомого вектора. Модуль вектора $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$.	[1], №№ 9.1, 9.2 [12], №№ 13.1–13.22 [11], №№ 3.2–3.4
	Расчет напряженности поля точечных и распределенных зарядов Потенциал. Работа. Энергия	При определении напряженности поля тел с равномерно распределенными зарядами иногда удобно определить ось симметрии заряженного тела. И если точка, в которой требуется определить напряженность поля, лежит на оси симметрии, то это позволяет исключить интегрирование по одной из координат, поскольку вектор напряженности направлен вдоль оси симметрии. В случае переменной в этом случае удобно использовать угол, а в качестве пределов интегрирования выбирать те углы, под которыми из данной точки мы видим заряженное тело, отсчитывая углы при этом в одном направлении (например, по часовой стрелке). Для вычисления потенциала поля, созданного одним или несколькими точечными зарядами, используют формулу (7), а также принцип суперпозиции полей (потенциал результирующего поля равен алгебраической сумме потенциалов полей, созданных точечными зарядами). Физический смысл имеет не сам потенциал, а разность потенциалов, которая численно равна отношению работы поля по перемещению заряда q к величине этого заряда.	[12], №№ 14.1–14.10 [11], №№ 3.12–3.22 [1], № 9.3

Тема занятия	Задачи	Рекомендации	Задачи из сборников
Характеристики электростатического поля	Потенциал. Работа. Энергия	В основе метода определения разности потенциалов лежит зависимость, связывающая разность потенциалов с напряженностью поля. При определении работы необходимо различать работу, совершаемую электростатическим полем, и работу, совершаемую против сил электростатического поля A', причем $A' = -A$. При решении задач электростатики в большинстве случаев для определения работы удобно пользоваться выражением $A = P_1 - P_2$ или $A = q(\phi_1 - \phi_2)$, где P_1 и P_2 – потенциальные энергии системы зарядов или заряженного тела. При определении потенциальной энергии системы точечных зарядов P необходимо про- суммировать потенциальные энергии всех пар взаимодействующих зарядов $P_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$, т.е. $P = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1, i \neq j}^N P_{ij}$.	[12], №№ 141–1410 [11], №№ 312–322 [1], № 9.3
	Расчет поля в диэлектриках	При расчете поля в диэлектриках выполняются следующие правила: 1. Вектор электрической индукции $\vec{D}$ для однородного поля остается без изменения во всех точках поля как внутри, так и вне диэлектрика. 2. Напряженность поля в диэлектрике $\vec{E}$ по сравнению с полем вне диэлектрика уменьшается в ϵ раз.	
Емкость	Конденсаторы. Системы конденсаторов. Энергия электрического поля	Систему конденсаторов можно заменить эквивалентным конденсатором, емкость которого можно определить, разложив схему на участки с последовательно и параллельно соединенными конденсаторами. При расчете параметров конденсаторов необходимо использовать закон сохранения энергетического заряда и соотношение работы и потенциальной энергии. При решении задач на энергию электрического поля (как правило, соответствующую энергии конденсатора) необходимо помнить, что при преобразовании системы из одного состояния в другие (например, при соединении заряженных конденсаторов) часть энергии поля может переходить в другой вид энергии, например, выделяться в виде искры.	[12], №№ 171–1725 [11], №№ 349–374 [1], №№ 101–1019

1.4. Примеры решения задач

Пример 1. Два точечных заряда $q_1 = 1$ нКл и $q_2 = -2$ нКл находятся в воздухе на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. Определить напряженность $\vec{E}$ и потенциал ϕ поля, создаваемого этими зарядами в точках A (удаленной от заряда q_1 на расстояние $r_1 = 9$ см и от

заряда q_2 на расстояние $r_2 = 7$ см), B и C (находящихся на прямой, проходящей через заряды q_1 и q_2 и расположенных: точка B расположена на расстоянии $r_3 = 4$ см от заряда q_2 , точка C расположена на расстоянии $r_4 = 4$ см от заряда q_1), (см. рисунок). (**Уровень 2**).



Решение. Согласно принципу суперпозиции электрических полей каждый заряд создает поле независимо от присутствия в пространстве других зарядов. Поэтому напряженность $\vec{E}$ результирующего электрического поля в искомой точке может быть найдена как векторная сумма напряженностей $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Модуль напряженности электрического поля, создаваемого в воздухе ($\epsilon \approx 1$) точечным зарядом,

$$E = \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Для точки A

Напряженности электрического поля, создаваемые в точке A зарядами q_1 и q_2 ,

$$E_1 = \frac{|q_1|}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}; \quad E_2 = \frac{|q_2|}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}.$$

Вектор $\vec{E}_1$ (см. рисунок) направлен по силовой линии от заряда q_1 , так как этот заряд положителен; вектор $\vec{E}_2$ направлен также по силовой линии, но к заряду q_2 , так как этот заряд отрицателен.

Модуль вектора $\vec{E}$ найдем по теореме косинусов

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2 \cos \alpha}, \quad (1)$$

где α – угол, показанный на рисунке.

Угол α может быть найден из треугольника со сторонами r_1 , r_2 и d :

$$\cos \alpha = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2} = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}.$$

В данном случае во избежание громоздких записей значение $\cos \alpha$ удобно вычислить отдельно:

$$\cos \alpha = \frac{(0,09)^2 + (0,07)^2 - (0,1)^2}{2 \cdot 0,09 \cdot 0,07} = 0,238.$$

Подставляя выражения для $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ в равенство (1) и вынося общий множитель $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ за знак корня, получаем

$$E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^4} + \frac{q_2^2}{r_2^4} - 2 \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r_1^2 r_2^2} \cos \alpha}.$$

Произведем вычисления:

$$E_A = 9 \cdot 10^9 \sqrt{\frac{(10^{-9})^2}{(0,09)^4} + \frac{(2 \cdot 10^{-9})^2}{(0,07)^4} - 2 \frac{10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{(0,09)^2 \cdot (0,07)^2} 0,238} \text{ В/м} = 3,58 \cdot 10^3 \text{ В/м} = 3,58 \text{ кВ/м}.$$

В соответствии с принципом суперпозиции электрических полей потенциал φ результирующего поля, создаваемого двумя зарядами q_1 и q_2 , равен алгебраической сумме потенциалов:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Потенциал электрического поля, создаваемого в вакууме точечным зарядом q на расстоянии r от него, выражается формулой

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

В нашем случае для точки A имеем

$$\varphi_A = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2}.$$

Произведем вычисления:

$$\varphi_A = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{10^{-9}}{0,09} + \frac{-2 \cdot 10^{-9}}{0,07} \right) \text{ В} = -157 \text{ В}.$$

Для точки В

В точке В векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ напряженности поля, создаваемой зарядами q_1 и q_2 , направлены в одну сторону – слева направо (примем это направление за положительное). Поэтому модуль вектора результирующей напряженности направлен в ту же сторону и численно равен сумме модулей векторов напряженности E_1 и E_2 :

$$E_B = E_1 + E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{(d - r_3)^2} + \frac{q_2}{r_3^2} \right);$$

$$E_B = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{10^{-9}}{(0,06)^2} + \frac{2 \cdot 10^{-9}}{(0,04)^2} \right) \text{В/м} = 1,37 \cdot 10^4 \text{В/м}.$$

Потенциал $\varphi_B = \varphi_1 + \varphi_2$,

$$\varphi_B = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0(d - r_3)} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_3};$$

$$\varphi_B = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{10^{-9}}{0,06} + \frac{-2 \cdot 10^{-9}}{0,04} \right) \text{В} = 300 \text{ В}.$$

Для точки С

В точке С направления векторов $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ противоположны, поэтому

$$E_C = -E_1 + E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-q_1}{r_4^2} + \frac{q_2}{(d + r_4)^2} \right);$$

$$E_C = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{-10^{-9}}{(0,04)^2} + \frac{2 \cdot 10^{-9}}{(0,14)^2} \right) \text{В/м} = -4,7 \cdot 10^3 \text{В/м}.$$

Потенциал $\varphi_C = \varphi_1 + \varphi_2$,

$$\varphi_C = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_4} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 (d + r_4)};$$

$$\varphi_C = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{10^{-9}}{0,04} + \frac{-2 \cdot 10^{-9}}{0,14} \right) \text{В} = 96 \text{ В}.$$

Ответ: $E_A = 3,58 \text{ кВ/м}$; $\varphi_A = -157 \text{ В}$; $E_B = 1,37 \cdot 10^4 \text{ В/м}$; $\varphi_B = 300 \text{ В}$;
 $E_C = -4,7 \cdot 10^3 \text{ В/м}$; $\varphi_C = 96 \text{ В}$.

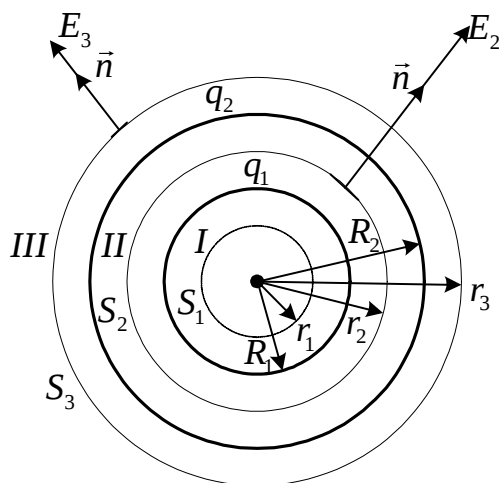


Рис. 1

Пример 2. Две концентрические проводящие сферы радиусами $R_1 = 6$ см и $R_2 = 10$ см несут соответственно заряды $q_1 = 1$ нКл и $q_2 = -0,5$ нКл (рис. 1). Найти напряженность E поля в точках, отстоящих от центра сфер на расстояниях $r_1 = 5$ см, $r_2 = 9$ см, $r_3 = 15$ см. Построить график $E(r)$. (**Уровень 3**).

Решение. Точки, в которых требуется найти напряженность электрического поля, лежат в трех областях: в области I ($r_1 < R_1$), области II ($R_1 < r_2 < R_2$), области III ($r_3 > R_3$).

1. Для определения напряженности E_1 в области I выберем сферу S_1 радиусом r_1 («гауссову» поверхность) и воспользуемся теоремой Остроградского – Гаусса

$$\oint_{S_1} E_n dS = 0,$$

так как суммарный заряд, находящийся внутри «гауссовой» поверхности, равен нулю.

Из соображений симметрии $E_n = E_1 = \text{const}$. Следовательно, $E_1 \oint_{S_1} dS = 0$, поэтому E_1 (напряженность поля в области I) во всех точках,

удовлетворяющих условию $r_1 < R_1$, равна нулю.

2. В области II «гауссову» поверхность S_2 выберем радиусом r_2 .

В этом случае $\oint_{S_2} E_n dS = \frac{q_1}{\epsilon_0 \epsilon} = \frac{q_1}{\epsilon_0}$, так как $\epsilon \approx 1$ для воздуха, или $E_2 S_2 = \frac{q_1}{\epsilon_0}$.

Для напряженности E_2 для области II получим

$$E_2 = \frac{q_1}{\epsilon_0 S_2},$$

где $S_2 = 4\pi r_2^2$ – площадь сферической «гауссовой» поверхности.

Тогда

$$E_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}; \quad E_2 = \frac{10^{-9}}{4\pi/(4\pi \cdot 9 \cdot 10^9) (0,09)^2} \text{ В/м} = 1,11 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

3. Пусть в области III «гауссова» поверхность S_3 имеет радиус r_3 . Обозначим напряженность E области III через E_3 и учтем, что в этом случае «гауссова» поверхность охватывает обе сферы и, следовательно, суммарный заряд внутри нее равен $q_1 + q_2$. Тогда

$$E_3 = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r_3^2}.$$

Учитывая, что q_2 отрицателен, это выражение перепишем в виде

$$E_3 = \frac{q_1 - |q_2|}{4\pi\epsilon_0 r_3^2}; \quad E_3 = 9 \cdot 10^9 \frac{(1 - 0,5) \cdot 10^{-9}}{(0,15)^2} \text{ В/м} = 200 \text{ В/м}.$$

Построим график $E(r)$ (рис. 2). В области I ($r_1 < R_1$) $E = 0$. В области II ($R_1 \leq r < R_2$) $E_2(r)$ изменяется по закону $1/r^2$.

$$\text{В точке } r = R_1 \text{ напряженность } E_2(R_1) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} = 2,5 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

В точке $r = R_2$ (r стремится к R_2 слева)

$$E_2(R_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} = 0,9 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

В области III ($r > R_2$) $E_3(r)$ изменяется по закону $1/r^2$, причем в точке $r = R_2$ (r стремится к R_2 справа)

$$E_3(R_2) = \frac{(q_1 - |q_2|)}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} = 0,45 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

Таким образом, функция $E(r)$ в точках $r = R_1$, $r = R_2$ терпит разрыв.

Ответ: $E_1 = 0 \text{ В/м}$;

$$E_2 = 1,11 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}; \quad E_3 = 200 \text{ В/м}.$$

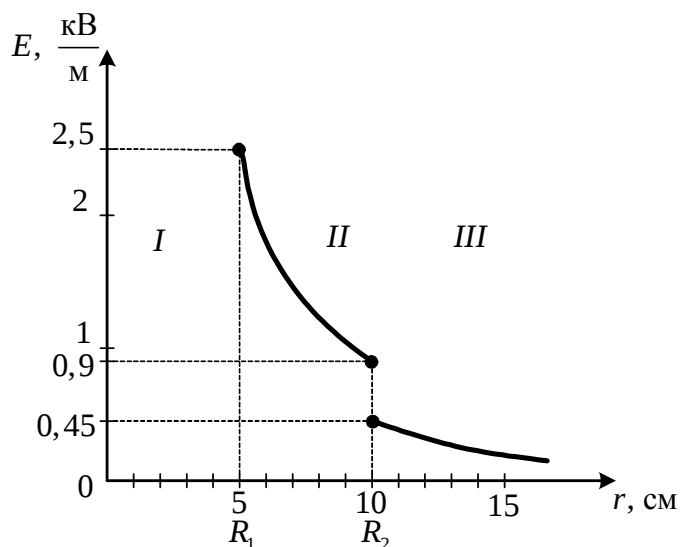


Рис. 2

Пример 3. Определить напряженность поля, которое создают две бесконечные пластины, если плотности их зарядов σ_1 и σ_2 , причем $\sigma_2 < \sigma_1$. Рассмотреть также случай, когда $\sigma_2 < 0$. (Уровень 2).

Решение. В любой точке пространства (между пластинами и вне их) согласно принципу суперпозиции $\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$. Поэтому

$$\vec{E}_A = \vec{E}'_1 + \vec{E}'_2 ; \quad \vec{E}_B = \vec{E}_1 + \vec{E}'_2 ; \quad \vec{E}_C = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 ,$$

где $\vec{E}_1$ и $\vec{E}'_1$, $\vec{E}_2$ и $\vec{E}'_2$ – напряженности полей первой и второй пластины справа и слева от них (рис. 1).

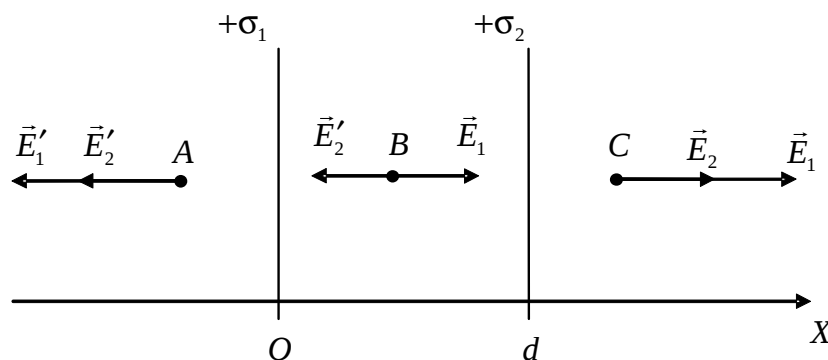


Рис. 1

Направим координатную ось OX перпендикулярно к пластинам. Проецируя векторы напряженностей на эту ось, получим: $E_A = -(E'_1 + E'_2)$; $E_B = E_1 - E'_2$; $E_C = E_1 + E_2$. Поскольку пластины бесконечны, то

$$E_1 = E'_1 = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0\epsilon}; \quad E_2 = E'_2 = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0\epsilon}.$$

Следовательно, для первого случая

$$E_A = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0\epsilon}; \quad E_B = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0\epsilon}; \quad E_C = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0\epsilon}.$$

Когда заряд второй пластины отрицательный ($\sigma_2 < 0$) (рис. 2), напряженность поля между пластинами $E_B = \frac{\sigma_1 + |\sigma_2|}{2\epsilon_0\epsilon}$, вне пластин

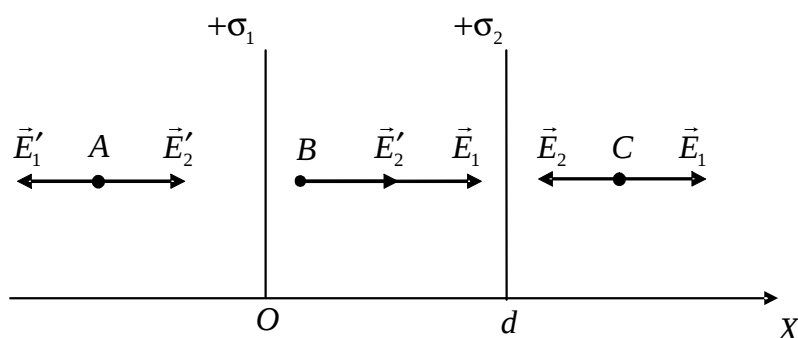


Рис. 2

$$E_A = \frac{|\sigma_2| - \sigma_1}{2\epsilon_0\epsilon};$$

$$E_C = \frac{\sigma_1 - |\sigma_2|}{2\epsilon_0\epsilon}.$$

На рис. 3, *a* и *б* представлен график изменения модуля напряженности поля вдоль прямой, перпендикулярной к пластинам.

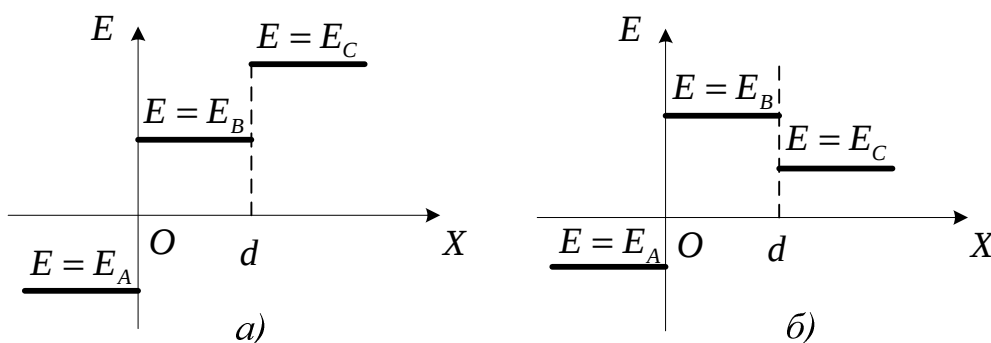
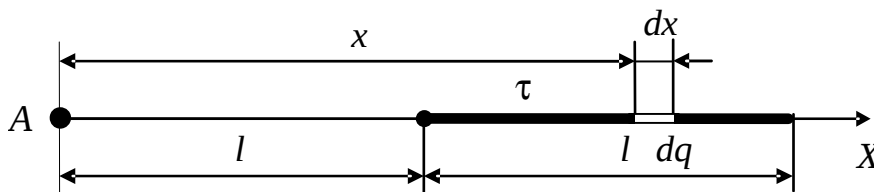


Рис. 3

Ответ: для случая $\sigma_2 > 0$ $E_{A,C} = \pm \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0\epsilon}$; $E_B = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0\epsilon}$;
 для случая $\sigma_2 < 0$ $E_{A,C} = \pm \frac{|\sigma_2| - \sigma_1}{2\epsilon_0\epsilon}$; $E_B = \frac{\sigma_1 + |\sigma_2|}{2\epsilon_0\epsilon}$.

Пример 4. На тонком стержне длиной l равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\tau = 10$ нКл/м. Найти потенциал ϕ , созданный распределенным зарядом в точке A , расположенной на оси стержня и удаленной от его ближайшего конца на расстояние l . (**Уровень 4**).

Решение. Выделим на стержне малый участок длиной dx (см. рисунок). На этом участке будет сосредоточен заряд $dq = \tau dx$, который можно считать точечным.



Потенциал $d\phi$, создаваемый этим точечным зарядом в точке A (см. рисунок), можно определить по формуле

$$d\phi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 x} = \frac{\tau dx}{4\pi\epsilon_0 x}.$$

Согласно принципу суперпозиции электрических полей потенциал электрического поля, создаваемого заряженным стержнем в точке A , най-

дем интегрированием (здесь принято, что потенциал в бесконечности от стержня равен нулю)

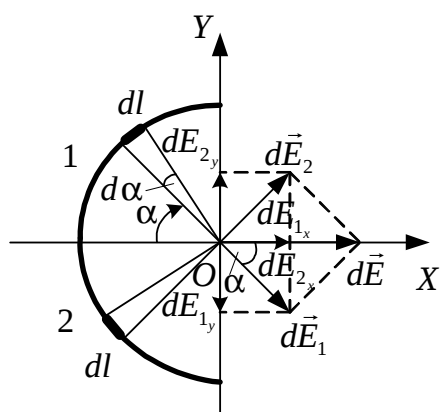
$$\varphi = \int_l^{2l} \frac{\tau dx}{4\pi\epsilon_0 x} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_l^{2l} \frac{dx}{x} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln x \Big|_l^{2l} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln 2;$$

$$\varphi = 90 \cdot 0,693 \text{ В} = 9 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 10^{-9} \cdot 0,693 \text{ В} = 62,4 \text{ В}.$$

Ответ: $\varphi = 62,4 \text{ В}$.

Пример 5. Найти напряженность E и потенциал φ в центре полукольца радиусом $R = 5 \text{ см}$, по которому равномерно распределен заряд $q = 3 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$. (Уровень 4).

Решение. Для определения напряженности $\vec{E}$ и потенциала φ в центре полукольца воспользуемся принципом суперпозиции.



Разделим полукольцо на малые элементы дуги dl так, чтобы заряд $dq = \tau dl = \frac{q}{\pi R} dl$ каждой точки дуги можно

было считать точечным. Выберем два произвольных симметрично расположенных относительно OX элемента дуги (см. рисунок). Эти элементы (1 и 2) в точке O создают напряженности электрического поля $d\vec{E}_1$ и $d\vec{E}_2$ соответственно. Согласно

принципу суперпозиции $d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2$. Из соображений симметрии следует, что алгебраическая сумма проекций напряженностей поля выбранных элементов на ось OY равна нулю. Результирующая напряженность поля направлена вдоль оси OX :

$$dE = dE_x = dE_1 \cos \alpha = \frac{dq}{4\pi \epsilon_0 R^2} \cos \alpha = \frac{q \cos \alpha}{4\pi^2 \epsilon_0 R^3} dl.$$

$$\text{Так как } dl = R d\alpha, \text{ то } dE = \frac{q \cos \alpha}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2} d\alpha.$$

Положение точечного заряда dq на полукольце определяется углом α , а длина элемента dl как части дуги – углом $d\alpha$, т.е. $dl = R d\alpha$, поэтому

$$E = E_x = \frac{q}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha = \frac{q}{2\pi^2 \epsilon_0 R_2^2};$$

$$E = \frac{3 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot (3,14)^2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot (0,05)^2} = 6,88 \cdot 10^3 \text{ В/м.}$$

Потенциал ϕ в центре полукольца определяется алгебраической суммой $d\phi$ потенциалов электрического поля элементарных зарядов (согласно принципу суперпозиции). Учитывая, что для точечного заряда

$$d\phi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{qdl}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2}, \text{ где } dq = \frac{qdl}{\pi R}, \text{ определяем } \phi:$$

$$\phi = \int_0^{\pi R} d\phi = \frac{q}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2} \int_0^{\pi R} dl = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R};$$

$$\phi = \frac{3 \cdot 10^{-9}}{4\pi / (4\pi \cdot 9 \cdot 10^9) 0,05} = 5,39 \cdot 10^2 \text{ В.}$$

Заметим, что при расчете ϕ не обязательно переходить к переменной α , поскольку потенциал – скалярная величина. В этом случае достаточно определить пределы изменения переменной l (от 0 до πR).

Ответ: $E = 6,88 \cdot 10^3 \text{ В/м, } \phi = 5,39 \cdot 10^2 \text{ В.}$

Пример 6. Два тонких кольца радиусом $r = 5 \text{ см}$ каждое расположены в вакууме так, что плоскости, в которых лежат кольца, параллельны, расстояние между их центрами составляет $d = 12 \text{ см}$, а центры лежат на одной прямой. На первом кольце равномерно распределен заряд $q_1 = 82 \text{ мкКл}$, на втором – заряд $q_2 = 60 \text{ мкКл}$. Определить работу, необходимую для перемещения заряда $q_3 = 3 \text{ нКл}$ из центра одного кольца O_1 в центр другого O_2 . Рисунок выполнить самостоятельно. (**Уровень 4**).

Решение. Работа при перемещении заряда зависит от разности потенциалов точек начала и конца перемещения (в нашем случае это центры колец). Для решения задачи вычислим потенциалы этих точек ϕ_{01} и ϕ_{02} .

Условно разделим каждое из колец на n равных частей, тогда заряд каждой части можно считать точечным:

$$q'_1 = \frac{q_1}{n} \quad \text{и} \quad q'_2 = \frac{q_2}{n}.$$

Потенциал, образованный точечным зарядом q_1' в центре первого кольца O_1 , $\varphi_1' = k \frac{q_1}{\epsilon r}$. Весь заряд q_1 образует в центре первого кольца потенциал φ_1 , равный алгебраической сумме потенциалов n точечных зарядов кольца 1, или

$$\varphi_1 = \varphi_1' n = k \frac{q_1'}{\epsilon r} n = k \frac{q_1}{\epsilon r}.$$

Рассуждая подобным образом, найдем потенциал в центре первого кольца O_1 , обусловленный зарядом q_2 . Так как расстояние от элементов кольца 2 до центра кольца 1 $l = \sqrt{d^2 + r^2}$, то $\varphi_2 = k \frac{q_2}{\epsilon \sqrt{d^2 + r^2}}$. Потенциал электрического поля в центре первого кольца, созданный зарядами q_1 и q_2 ,

$$\varphi_{01} = k \frac{q_1}{\epsilon r} + k \frac{q_2}{\epsilon \sqrt{d^2 + r^2}}.$$

Повторяя все рассуждения, найдем выражение для потенциала в центре второго кольца O_2 :

$$\varphi_{02} = k \frac{q_2}{\epsilon r} + k \frac{q_1}{\epsilon \sqrt{d^2 + r^2}}.$$

Работа, совершаемая при перемещении заряда q из центра первого кольца (точка O_1) в центр второго кольца (точка O_2),

$$A = q(\varphi_{01} - \varphi_{02}) = k \frac{q}{\epsilon} (q_1 - q_2) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{d^2 + r^2}} \right) \approx 7,3 \text{ мкДж}.$$

Ответ: $A = 7,3 \text{ мкДж}$.

Пример 7. Напряжение на пластинах плоского (внутренняя среда – вакуум) конденсатора $U = 1 \text{ кВ}$, расстояние между ними $d = 1 \text{ см}$. Определить, при каком положении пластин в пространстве и каком заряде пылинки массой $m = 10^{-12} \text{ кг}$ она будет находиться в равновесии между пластинами. Как изменится положение пылинки, если сдвигать и раздвигать пластины? Как нужно изменить напряжение на конденсаторе, чтобы пылинка падала с ускорением $a = 0,5 g$; поднималась с ускорением $a = g$? Рисунок выполнить самостоятельно. (**Уровень 3**).

Решение. Для равновесия пылинки необходимо, чтобы результирующая всех сил равнялась нулю. На пылинку действует сила тяжести $m\vec{g}$ и сила $\vec{F} = q\vec{E}$ со стороны электростатического поля. Поэтому равновесие возможно только при горизонтальном расположении пластин, когда верх-

ная пластина заряжена отрицательно, а заряд пылинки положителен. Условие неподвижности пылинки запишем в виде

$$mg = qE.$$

Поскольку электрическое поле в пространстве между пластинами конденсатора однородно, то

$$mg = q \frac{U}{d}.$$

При изменении d в n раз в $\frac{1}{n}$ раз изменится емкость конденсатора и в n раз изменится разность потенциалов ($q = \text{const}$), так что $\frac{U}{d} = \text{const}$, и положение пылинки не изменится.

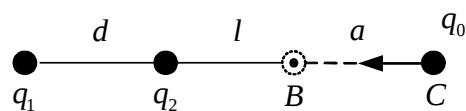
Уравнение движения частицы вниз имеет вид $mg - qE = ma_1$, где $a_1 = 0,5g$, или $mg - q \frac{U}{d} = ma_1$; следовательно, $U_1 = \frac{mgd}{q} \left(1 - \frac{a_1}{g} \right) = 0,5 \text{ кВ}$, а $\Delta U_1 = U - U_1 = 0,5 \text{ кВ}$.

При подъеме пылинки вверх с ускорением $a_2 = g$ применимо уравнение $q \frac{U_2}{d} - mg = ma_2$; следовательно, $U_2 = \frac{mgd}{q} \left(1 + \frac{a_2}{g} \right) = 2 \text{ кВ}$, а $\Delta U_2 = U_2 - U$.

Ответ: $\Delta U_1 = 0,5 \text{ кВ}$, $\Delta U_2 = 1 \text{ кВ}$.

Пример 8. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы переместить заряд q_0 из точки C в точку B в поле двух точечных зарядов q_1 и q_2 (см. рисунок)? Расстояния a , d , l известны. (**Уровень 2**).

Решение. Так как электрическое поле неподвижных зарядов потенциально, то работа по перемещению заряда q_0 из точки C в точку B не зависит от формы траектории, по которой перемещается частица q_0 , и равна разности потенциальных энергий заряда q_0 в конечной и начальной точках пути:



$$A' = \Pi_B - \Pi_C.$$

Здесь учтено, что работа сил электростатического поля A и работа против сил поля равны по величине и противоположны по знаку: $A' = -A$.

Энергия заряда q_0 в поле двух точечных зарядов

$$П = q_0(\varphi_1 + \varphi_2),$$

где φ_1 и φ_2 – потенциалы электрического поля зарядов q_1 и q_2 соответственно, в точке расположения заряда q_0 .

Потенциальная энергия в точке C

$$П_C = q_0 \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0(d+l+a)} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0(l+a)} \right),$$

где первое слагаемое соответствует потенциалу электрического поля в точке C , создаваемого зарядом q_1 , а второе – зарядом q_2 .

Аналогично для точки B :

$$П_B = q_0 \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0(d+l)} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 l} \right).$$

Следовательно, искомая работа

$$A = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{d+l} + \frac{q_2}{l} - \frac{q_1}{d+l+a} - \frac{q_2}{l+a} \right) = \frac{q_0 a}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{(d+l)(d+l+a)} + \frac{q_2}{l(l+a)} \right).$$

$$\text{Ответ: } A = \frac{q_0 a}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{(d+l)(d+l+a)} + \frac{q_2}{l(l+a)} \right).$$

Пример 9. Конденсатор емкостью $C_1 = 3$ мкФ был заряжен до разности потенциалов $U_1 = 40$ В. После отключения от источника тока конденсатор соединили параллельно с другим незаряженным конденсатором емкостью $C_2 = 5$ мкФ. Какая энергия $П'$ израсходуется на образование искры в момент присоединения второго конденсатора. (**Уровень 3**)?

Решение. Энергия, израсходованная на образование искры,

$$П' = П_1 - П_2, \tag{1}$$

где $П_1$ – энергия, которой обладал первый конденсатор до присоединения к нему второго конденсатора; $П_2$ – энергия, которую имеет батарея, составленная из двух конденсаторов.

Энергия заряженного конденсатора определяется по формуле

$$П = \frac{1}{2}CU^2, \quad (2)$$

где C – емкость конденсатора или батареи конденсаторов.

Выразив в формуле (1) энергии $П_1$ и $П_2$ по формуле (2) и приняв во внимание, что общая емкость параллельно соединенных конденсаторов равна сумме емкостей отдельных конденсаторов, получим

$$П' = \frac{C_1 U_1^2}{2} - \frac{(C_1 + C_2) U_2^2}{2}, \quad (3)$$

где U_2 – разность потенциалов на зажимах батареи конденсаторов.

Учитывая, что заряд $q = C_1 U_1$ после присоединения второго конденсатора остался прежним, выразим разность потенциалов U_2 :

$$U_2 = \frac{q}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 U_1}{C_1 + C_2}. \quad (4)$$

Подставив (4) в (3), найдем

$$П' = \frac{C_1 U_1^2}{2} - \frac{(C_1 + C_2) C_1^2 U_1^2}{2(C_1 + C_2)^2}$$

или

$$П' = \frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U_1^2;$$

$$П' = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-6} + 5 \cdot 10^{-6}} \cdot 1600 \text{ Дж} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

Ответ: $П' = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}$.

Пример 10. Определим общую емкость системы конденсаторов, изображенной на рис. 1, а. (**Уровень 3**).

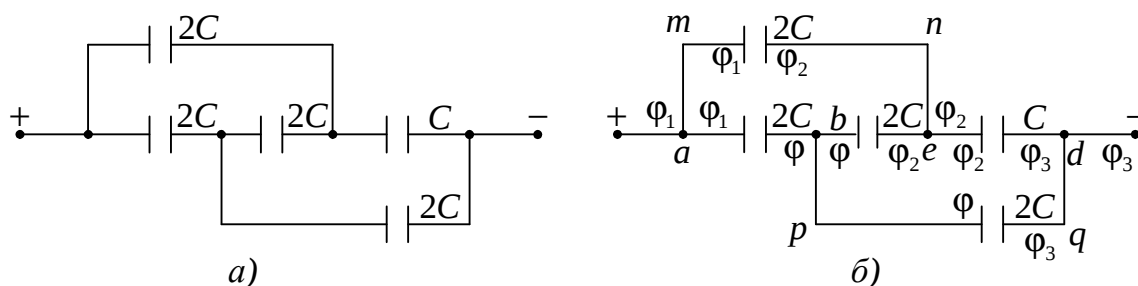


Рис. 1

Решение. Представим эту схему иначе. Левые обкладки конденсаторов на участках mn и ab соединены в точке a (см. рис. 1, б). Значит, они

имеют одинаковый потенциал, например, φ_1 . Расположим эти конденсаторы друг под другом (рис. 2, а). Правая обкладка конденсатора на участке mn соединена с правой обкладкой конденсатора на участке be (см. рис. 1, б), а правая обкладка конденсатора на участке ab соединена с левой обкладкой конденсатора на участке be , значит, этот конденсатор емкостью C может служить перемычкой между конденсаторами емкостью $2C$ на участках mn и ab . Поэтому расположим участок be вертикально, соединив точки n и e (а также b и p) в одну точку (см. рис. 2, а). Конденсаторы на участках mn и ab оказались расположенными симметрично относительно конденсатора C слева от него.

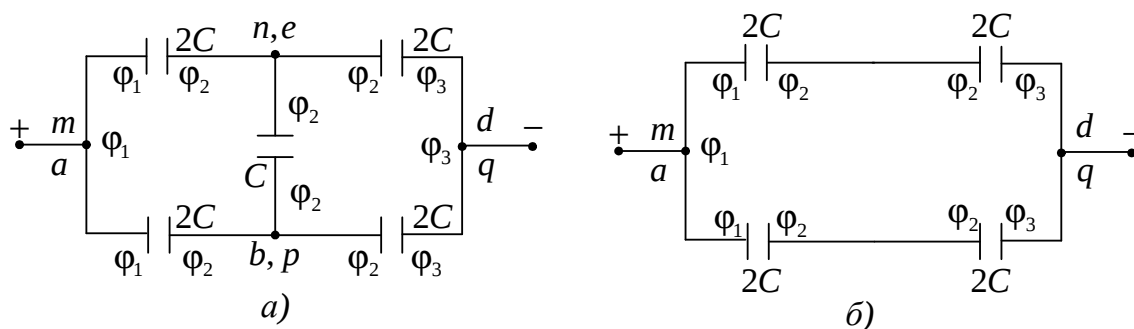


Рис. 2

Можно расположить конденсаторы на участках ed и pq справа от конденсатора C (см. рис. 1, б). Мы получим схему, изображенную на рис. 2, а. Из схемы видно, что левые обкладки верхнего и нижнего конденсаторов, расположенных слева от конденсатора C , имеют одинаковый потенциал φ_1 , такой же, как и потенциал точки a . Поскольку емкости этих конденсаторов одинаковы, то и заряд на их обкладках будет одинаков. Но это означает, что и правые обкладки этих конденсаторов в силу симметрии схемы относительно перемычки mn тоже имеют одинаковый потенциал, который обозначим, например, φ_2 . Верхняя обкладка конденсатора C соединена с правой обкладкой верхнего конденсатора, расположенного на участке mn ; следовательно она тоже имеет потенциал φ_2 . Нижняя обкладка конденсатора C соединена с правой обкладкой нижнего конденсатора на участке ab ; значит, и она имеет потенциал φ_2 .

Следовательно, обкладки конденсатора C в этой схеме всегда будут иметь одинаковый потенциал φ_2 , и разность потенциалов между обкладками этого конденсатора всегда будет равной нулю при подключении этой батареи к любому источнику зарядов. Заряд на его обкладках тоже всегда будет равным нулю согласно формуле $q = C(\varphi_2 - \varphi_2) = 0$.

Поэтому конденсатор C всегда будет оставаться незаряженным при подключении этой батареи к любому источнику зарядов, и его (в схеме) можно убрать, заменив схему, изображенную на рис. 2, *а*, схемой, изображенной на рис. 2, *б*.

В полученной схеме имеются две параллельные ветви, содержащие по два одинаковых конденсатора каждая. Поскольку емкость каждого конденсатора равна $2C$, то емкость одной ветви, содержащей два таких последовательных конденсатора, равна $\frac{2C}{2} = C$. Поскольку таких ветвей две и они параллельны, то общая емкость всей этой батареи конденсаторов $C_{\text{общ}} = 2C$.

Ответ: $C_{\text{общ}} = 2C$.

Пример 11. Какую разность потенциалов должен пройти влетающий в однородное электрическое поле со скоростью v_0 электрон, чтобы увеличить свою скорость в n раз. (**Уровень 1**)?

Решение. Электрон должен пройти такую разность потенциалов U , чтобы приобретенная при этом энергия $\Delta\Pi$ равнялась разности кинетических энергий электрона:

$$\Delta\Pi = K_2 - K_1,$$

где $K_1 = \frac{m_e v_0^2}{2}$ – начальная кинетическая энергия электрона массой m_e ;

$K_2 = \frac{m_e n^2 v_0^2}{2}$ – конечная кинетическая энергия электрона.

$$eU = \frac{m_e n^2 v_0^2}{2} - \frac{m_e v_0^2}{2},$$

откуда

$$U = \frac{m_e v_0^2}{2e} (n^2 - 1).$$

Ответ: $U = \frac{m_e v_0^2}{2e} (n^2 - 1)$.

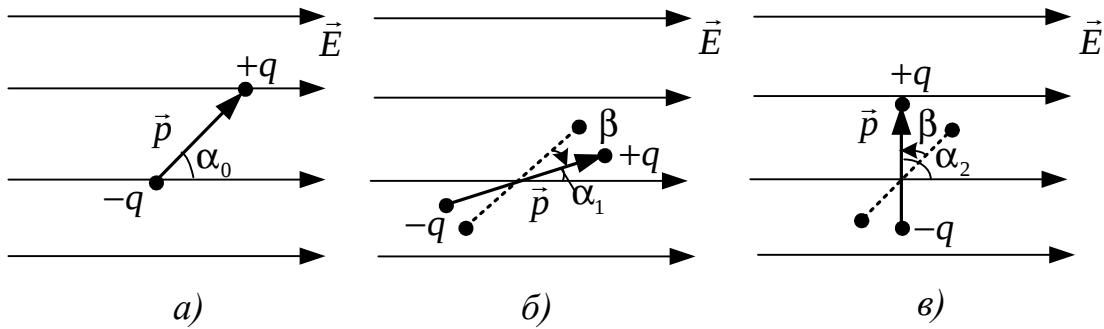
Пример 12. Диполь с электрическим моментом $p = 2$ нКл·м находится в однородном электрическом поле напряженностью $E = 30$ кВ/м. Вектор $\vec{p}$ составляет угол $\alpha_0 = 60^\circ$ с направлением силовых линий поля. Определить работу, обеспечивающую поворот диполя на угол $\beta = 30^\circ$ по отношению к силовым линиям (рассмотреть возможные варианты). (**Уровень 3**).

Решение. Из исходного положения (см. рисунок, *а*) диполь можно повернуть на угол $\beta = 30^\circ = \pi/6$ двумя способами:

- по часовой стрелке до угла $\alpha_1 = \alpha_0 - \beta = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ (см. рисунок, б);
- против часовой стрелки до угла $\alpha_2 = \alpha_0 + \beta = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ (см. рисунок, в).

В первом случае диполь будет поворачиваться под действием сил поля (см. рисунок, б). Во втором случае поворот может быть произведен только под действием внешних сил (см. рисунок, в).

Работу, совершенную при повороте диполя, можно вычислить непосредственно интегрированием выражения элементарной работы.



Элементарная работа при повороте диполя на угол α

$$dA = Md\alpha = pE \sin \alpha d\alpha,$$

а полная работа при повороте на угол от α_0 до α

$$A = \int_{\alpha_0}^{\alpha} pE \sin \alpha d\alpha = pE \int_{\alpha_0}^{\alpha} \sin \alpha d\alpha.$$

Произведя интегрирование, получим

$$A = -pE(\cos \alpha - \cos \alpha_0) = pE(\cos \alpha_0 - \cos \alpha). \quad (1)$$

Работа внешних сил при повороте диполя по часовой стрелке ($\alpha = \alpha_1$)

$$A_1 = pE(\cos \alpha_0 - \cos \alpha_1) = -21,9 \text{ мкДж};$$

против часовой стрелки ($\alpha = \alpha_2$)

$$A_2 = pE(\cos \alpha_0 - \cos \alpha_2) = 30 \text{ мкДж}.$$

Заметим, что работа равна изменению потенциальной энергии, взятой с обратным знаком, т.е.

$$A = -\Delta\Pi. \quad (2)$$

Сравнив (1) и (2), можем записать, что потенциальная энергия диполя Π_e в электрическом поле определяется выражением

$$\Pi_e = -p_e E \cos \alpha.$$

Ответ: $A_1 = -21,9$ мкДж, $A_2 = 30$ мкДж.

Пример 13. В атоме йода, находящемся на расстоянии $r = 1$ нм от альфа-частицы, индуцирован электрический момент $p = 1,5 \cdot 10^{-32}$ Кл·м. Определить поляризуемость α атома йода. (**Уровень 3**).

Решение. По определению поляризуемость атома может быть выражена как

$$\alpha = \frac{p}{\epsilon_0 E}, \quad (1)$$

где p – индуцированный электрический момент атома; E – напряженность поля, в котором этот атом находится.

В данном случае таким полем является поле, созданное альфа-частицей. Напряженность этого поля определяется выражением

$$E = \frac{2|e|}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (2)$$

Подставив выражение E из равенства (2) в формулу (1), найдем

$$\alpha = \frac{2\pi r^2 p}{|e|}.$$

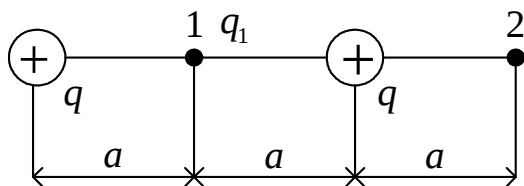
Произведя вычисления по этой формуле, получим $\alpha = 5,9 \cdot 10^{-30}$ м³.

Ответ: $\alpha = \frac{2\pi r^2 p}{|e|}.$

1.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Определите, с какой силой действуют два равных заряда на третий, помещенный на середине расстояния между ними. Рассмотрите случаи одноименных и разноименных зарядов. $[0; k \frac{4qQ}{e^2};$ **уровень 1**].
2. Точечные заряды q и $4q$ находятся на расстоянии r друг от друга. Какой заряд и где нужно поместить, чтобы вся система находилась в равновесии, если заряды: а) закреплены; б) свободны? [отрицательный; $r_1 = \frac{1}{3}r$; **уровень 2**].

3. В вершинах квадрата помещены точечные положительные заряды по 1 мкКл каждый. Какой заряд нужно поместить в центре квадрата, чтобы вся система находилась в равновесии? [0,96 мкКл; **уровень 2**].
4. Два заряженных шарика массой по 10 г подвешены на нитях длиной 1 м каждая к одной точке, в которой находится третий шарик, заряженный так же, как и два первых. Определить заряд третьего шарика и силу натяжения нитей, если угол расхождения их в положении равновесия равен 60° . [$6,4 \cdot 10^{-12}$ Кл; **уровень 3**].
5. Определить положение точки, в которой напряженность поля равна нулю вблизи двух точечных зарядов 9 и 4 мКл, находящихся на расстоянии 1 м друг от друга. Рассмотреть также случай разноименных зарядов ($q_2 < 0$). [0,6 м; 1,97 м; **уровень 3**].
6. В однородном электрическом поле равномерно движется по окружности шарик массой 0,5 г с положительным зарядом 10 нКл, подвешенный на нити длиной 0,5 м. Определить силу натяжения нити и кинетическую энергию шарика, если напряженность поля равна 100 кВ/м и направлена вертикально вниз. Нить образует с вертикалью угол 60° . [$12 \cdot 10^{-3}$ Н; 2,25 мДж; **уровень 4**].
7. Маленький шарик с зарядом $q = 10^{-8}$ Кл находится на расстоянии $l = 3$ см от большой заземленной металлической пластины. С какой силой они взаимодействуют? [$2,5 \cdot 10^{-4}$ Н; **уровень 2**].
8. Одинаковые точечные заряды $q = 100$ нКл расположены в вершинах квадрата со стороной $a = 10$ см. Определите потенциальную энергию этой системы. [4,87 мДж; **уровень 4**].

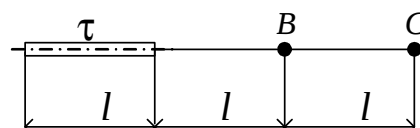


9. Электрическое поле создано двумя одинаковыми положительными точечными зарядами q (см. рисунок). Найти работу $A_{1,2}$ сил поля по перемещению заряда $q_1 = 10$ нКл из точки 1 с потенциалом $\phi_1 = 300$ В в точку 2. [2 мкДж; **уровень 2**].
10. В боровской модели атома водорода электрон движется по круговой орбите радиусом $r = 52,8$ пм, в центре которой находится протон. Определите: 1) скорость электрона на орбите; 2) потенциальную энергию электрона в поле ядра, выразив ее в электрон-вольтах. [1) 2,19 мм/с; 2) $-27,3$ эВ; **уровень 4**].

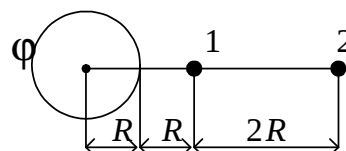
11. Электростатическое поле создается положительным точечным зарядом. Определите числовое значение и направление градиента потенциала этого поля, если на расстоянии $r = 10$ см от заряда потенциал $\varphi = 100$ В. [1 кВ/м; уровень 4].

12. Определите линейную плотность бесконечно длинной заряженной нити, если работа сил поля по перемещению заряда $q = 1$ нКл с расстояния $r_1 = 5$ см до $r_2 = 2$ см равна 50 мкДж. [3 мкКл/м; уровень 3].

13. На отрезке прямого провода равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\tau = 1 \frac{\text{мКл}}{\text{м}}$. Определить работу A сил поля по перемещению заряда $q = 1$ нКл из точки B в точку C (см. рисунок). [2,62 мкДж; уровень 4].



14. Определить работу $A_{1,2}$ сил поля по перемещению заряда $q = 1$ мкКл из точки 1 в точку 2 поля, созданного заряженным проводящим шаром (см. рисунок). Потенциал шара $\varphi = 1$ кВ. [250 мкДж; уровень 3].

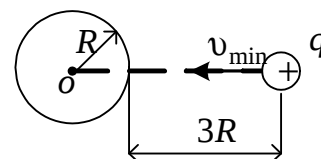


15. Какая ускоряющая разность потенциалов U требуется для того, чтобы сообщить скорость $v = 3 \cdot 10^7$ м/с: 1) электрону; 2) протону? [2,55 кВ; 4,69 мВ; уровень 3].

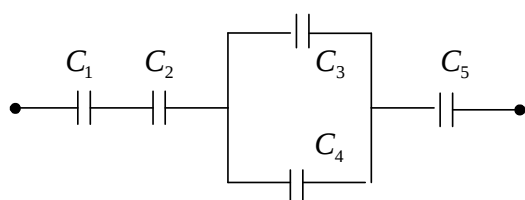
16. Пылинка массой $m = 10^{-12}$ г, несущая на себе пять электронов, прошла в вакууме ускоряющую разность потенциалов $U = 3$ МВ. Какова кинетическая энергия пылинки? Какую скорость она приобрела? [15 МэВ; 2,19 м/с; уровень 2].

17. Электрон движется вдоль силовой линии однородного электрического поля. В некоторой точке поля с потенциалом $\varphi_1 = 100$ В электрон имел скорость $v_1 = 6 \cdot 10^6$ м/с. Определить потенциал φ_2 точки поля, в которой скорость v_2 электрона будет равна $v_1/2$. [23,2 В; уровень 3].

18. Какой минимальной скоростью $v_{\min}$ должен обладать протон, чтобы он мог достигнуть поверхности заряженного до потенциала $\varphi = 400$ В металлического шара (см. рисунок). [0,24 мм/с; уровень 3].



19. Два электрона, находящиеся на большом расстоянии друг от друга, сближаются с относительной начальной скоростью $v = 10^7$ м/с. Определить минимальное расстояние $r_{\min}$, на которое они могут подойти друг к другу. [10,1 пм; **уровень 4**].
20. Расстояние l между зарядами $q = \pm 3,2$ нКл диполя равно 12 см. Найти напряженность E и потенциал ϕ поля, созданного диполем, в точке, удаленной на $r = 8$ см как от первого, так и от второго заряда. [6,75 кВ/м; **уровень 3**].
21. Диполь с электрическим моментом $p = 10^{-10}$ Кл·м свободно устанавливается в однородном электрическом поле напряженностью $E = 150$ кВ/м. Вычислить работу, необходимую для того, чтобы повернуть диполь на угол $\alpha = 180^\circ$. [30 мкДж; **уровень 4**].
22. Между пластинами плоского конденсатора помещено два слоя диэлектрика – слюдяная пластинка ($\epsilon_1 = 7$) толщиной $d_1 = 1$ мм и парафин ($\epsilon_2 = 2$) толщиной $d_2 = 0,5$ мм. Определите: 1) напряженность электростатических полей в слоях диэлектрика; 2) электрическое смещение, если разность потенциалов между пластинами конденсатора $U = 500$ В. [182 кВ/м; 637 кВ/м; 11,3 мкКл/м²; **уровень 4**].
23. Определите напряженность электростатического поля на расстоянии $x = 2$ см от центра воздушного сферического конденсатора, образованного двумя сферами (внутренней с радиусом $r_1 = 1$ см, внешней с радиусом $r_2 = 3$ см), между которыми приложена разность потенциалов $U = 1$ кВ. [37,5 кВ/м; **уровень 4**].
24. К пластинам плоского воздушного конденсатора приложена разность потенциалов $U_1 = 500$ В. Площадь пластин $S = 200$ см², расстояние между ними $d_1 = 1,5$ мм. Пластины раздвинули до расстояния $d_2 = 15$ мм. Найдите энергию W_1 и W_2 конденсатора до и после раздвижения пластин, если источник напряжения перед раздвижением: 1) отключался; 2) не отключался. [1) 74,8 мкДж; 148 мкДж; 2) 14,8 мкДж; 1,48 мкДж; **уровень 4**].



25. Определите емкость C батареи конденсаторов, изображенной на рисунке. Емкость каждого конденсатора $C_i = 1$ мкФ. [0,286 мкФ; **уровень 2**].

УЧЕБНЫЙ БЛОК 2. ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В РАЗЛИЧНЫХ СРЕДАХ

В этом разделе рассматриваются основные закономерности, которые проявляются при прохождении электрического тока в различных средах. Изучаются законы Ома и Джоуля – Ленца, установленные для проводников в рамках классической теории проводимости. Рассматриваются правила Кирхгофа как один из методов расчета параметров разветвленных электрических цепей постоянного тока.

При изучении данного раздела студенты должны **иметь представление:**

– об основных физических величинах (заряд, сила тока, плотность тока, потенциал и работа сил электрического поля);

обладать навыками:

– решения систем линейных уравнений;
– применения элементов дифференциального и интегрального исчисления.

Учебная программа блока

Содержание блока	Форма подготовки	Литература
Постоянный электрический ток, его характеристики и условия существования	лекция	[3], [7] – [10]
Классическая электронная теория электропроводности металлов. Законы Ома и Джоуля – Ленца в дифференциальной форме	лекция, самост.	[3], [7] – [10]
Закон Ома для участка цепи. Сопротивление проводников. Зависимость сопротивления проводников от температуры	самост.	[3], [7] – [10]
Закон Ома для замкнутой цепи. ЭДС. Обобщенный закон Ома в интегральной форме. Разность потенциалов, электродвижущая сила, напряжение. Работа, мощность и тепловое действие тока	лекция	[3], [7] – [10]
Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа	лекция	[3], [7] – [10]
Ток в полупроводниках, газах, вакууме	лекция, самост.	[3], [7] – [10]

Цели обучения

Студент должен знать	Студент должен уметь
– условия существования тока; – законы постоянного тока; – правила Кирхгофа; – основы классической теории электропроводности металлов; – характеристики тока в газах, полупроводниках, вакууме	– вычислять сопротивление проводников постоянно-го и переменного сечения; – вычислять сопротивление участка цепи при смешанном соединении сопротивлений; – определять ток и напряжение на элементах цепи; – рассчитывать параметры цепи с применением правил Кирхгофа; – определять силу тока и другие параметры в газах, полупроводниках, вакууме

2.1. Краткое содержание теоретического материала

Электрический ток в металлах

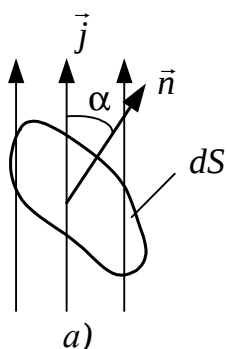
Если в проводнике создать электрическое поле, то свободные заряды наряду с их хаотическим движением будут совершать и направленное (упорядоченное) движение. Это направленное движение зарядов получило название – *электрический ток*. Его принято характеризовать *силой тока* – скалярной величиной, которая по определению равна заряду, переносимому через рассматриваемое сечение проводника в единицу времени:

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Для возбуждения в среде электрического тока необходимо выполнение следующих двух условий: во-первых, в среде должны быть свободные носители заряда, во-вторых, в среде должно существовать электрическое поле.

Плотностью электрического тока называется вектор $\vec{j}$, совпадающий с направлением тока в рассматриваемой точке и численно равный отношению силы тока dI сквозь малый элемент поверхности, ортогональный направлению тока, к площади $dS_{\perp}$ этого элемента:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}.$$



Если элемент поверхности (рис. 2.1, а) расположен так, что нормаль $\vec{n}$ к этому элементу составляет с вектором плотности тока угол α , то сила тока через участок сечения

$$dI = j dS_{\perp} = j dS \cos \alpha = \vec{j} \vec{n} dS = j_n dS,$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор, нормальный к площадке dS , j_n – проекция вектора $\vec{j}$ на нормаль $\vec{n}$.

Из сказанного следует, что сила тока через произвольную площадь сечения S равна *потoku* через эту площадь вектора плотности тока:

$$I = \int_S j_n dS. \quad (1)$$

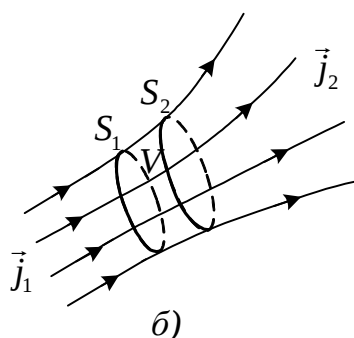


Рис. 2.1

Если в потоке вектора $\vec{j}$ выделить некоторый малый объем V (см. рис. 2.1, б) с поверхностями S_1 и S_2 , то поток вектора $\vec{j}_1$ через площадь S_1 является входящим в объем, а поток вектора $\vec{j}_2$ через площадь S_2 – выходящим. Если предположить, что согласно рис. 2.1, б через боковую поверхность малого объема

V поток вектора $\vec{j}$ отсутствует и входящий поток считать положительным, то результирующий поток $\vec{j}$ через поверхность, ограничивающую объем,

$$j_n S = j_{1n} S_1 - j_{2n} S_2,$$

т.е. равен сумме потоков с учетом их направлений.

Входящий поток вектора $\vec{j}$ вносит заряды в малый объем V , а выходящий – выносит заряды из объема. Поэтому заряд, находящийся в объеме V , в каждый момент времени зависит от суммарного потока вектора $\vec{j}$ через замкнутую поверхность, ограничивающую малый объем V . Таким образом, в общем виде для изменения заряда с течением времени в малом объеме V проводника можно записать

$$\oint_S \vec{j}_n dS = -\frac{dq}{dt}, \quad (2)$$

где знак « $-$ » означает, что если в объеме V заряды «рождаются» в $\frac{dq}{dt}$, то это приводит к увеличению выходящего (отрицательного) потока.

Уравнение (2) называется уравнением неразрывности и оно означает, что разность потоков – входящего в пространство, ограниченное S , и выходящего из него – определяет изменение заряда в этом пространстве. Для постоянного тока заряд в каждом микрообъеме проводника должен быть постоянным, т.е. заряд $q = \text{const}$, и уравнение (2) принимает вид $\oint_S j_n dS = 0$.

Экспериментально установленная зависимость силы тока в проводнике от разности потенциалов на его концах получила название закона Ома для участка цепи:

$$I = \frac{U}{R}, \quad (3)$$

где R – сопротивление проводника; U – разность потенциалов на крайних точках участка.

Сопротивление металлического проводника прямо пропорционально его длине l и обратно пропорционально площади S поперечного сечения

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

где ρ – удельное сопротивление материала, из которого изготовлен проводник.

Сопротивление проводника переменного сечения

$$R = \int_l \frac{\rho}{S(l)} dl,$$

где $S(l)$ – функция площади сечения по длине проводника.

Проводники в электрических цепях могут соединяться *последовательно* и *параллельно*:

а) при *последовательном* соединении сопротивлений сила тока во всех проводниках одинакова: $I = I_1 = I_2 = \dots = I_N$, а напряжения на них складываются: $U = U_1 + U_2 + \dots + U_N = IR_1 + IR_2 + \dots + IR_N$; поэтому полное (эквивалентное) сопротивление равно сумме сопротивлений

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_N = \sum_{i=1}^N R_i;$$

б) при *параллельном* соединении сопротивлений $I = I_1 + I_2 + \dots + I_N$; $U = U_1 = U_2 = \dots = U_N$. Поэтому общее (эквивалентное) сопротивление может быть найдено по формуле

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}.$$

Опыт показывает, что в первом приближении сопротивление R металлических проводников линейно возрастает с температурой t по закону

$$R = R_0(1 + \alpha t), \quad (4)$$

где R_0 – сопротивление при температуре $t = 0$ °C, α – температурный коэффициент сопротивления, близок к величине $\frac{1}{273}$ °C для химически чистых проводников.

Закон Ома можно записать в дифференциальной форме. Поскольку напряжение на концах проводника цилиндрической формы $U = El$, а сила тока $I = jS$, подставляя эти выражения в (3), получаем

$$jS = \frac{El}{R}, \text{ или в векторном виде } \vec{j} = \frac{l}{RS} \vec{E} = \frac{1}{\rho} \vec{E}, \text{ и}$$

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \gamma \vec{E}, \quad (5)$$

где $\gamma = \frac{1}{\rho}$ – удельная проводимость материала проводника, ρ – его удельное сопротивление.

Формула (5) выражает **закон Ома в дифференциальной форме**.

В замкнутой цепи постоянного тока существуют участки, где свободные заряды движутся под действием сил электрического поля, и участки, где свободные заряды движутся против сил электрического поля. На этих участках перенос свободных зарядов возможен только с помощью сил неэлектрического происхождения, называемых *сторонними силами*. Сторонние силы характеризуются работой по перемещению заряда по цепи.

Величина, равная отношению работы сторонних сил по перемещению заряда вдоль всей цепи к величине этого заряда, называется *электродвижущей силой* (ЭДС):

$$\varepsilon = \frac{A_{cm}}{q}.$$

Работа сторонних сил по перемещению заряда на всем протяжении замкнутой цепи

$$A_{cm} = \oint_l q \vec{E}^* d\vec{l} = \oint_l q E_l^* dl,$$

где $\vec{E}^*$ – напряженность поля сторонних сил, E_l^* – проекция вектора напряженности на направление l .

Разделив A_{cm} на заряд, получим выражение, связывающее электродвижущую силу и напряженность поля сторонних сил

$$\varepsilon = \oint_l E_l^* dl,$$

или для участка цепи 1 – 2 запишем выражение для электродвижущей силы: $\varepsilon_{12} = \int_1^2 E_l^* dl$.

Работу электростатических и сторонних сил над зарядом на участке 1 – 2 цепи выразим суммой

$$A = \int_1^2 q E_l^* dl + \int_1^2 q E_l dl = q \varepsilon_{12} + q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Разделив A на заряд, получаем

$$U_{12} = \varepsilon_{12} + (\varphi_1 - \varphi_2),$$

где U_{12} – *падение напряжения* или *напряжение* на данном участке цепи.

Поскольку $U_{12} = IR$, где R – сопротивление данного участка цепи, получаем

$$IR = \varepsilon_{12} + (\varphi_1 - \varphi_2); \quad I = \frac{\varepsilon_{12} + (\varphi_1 - \varphi_2)}{R}.$$

Это **закон Ома для участка цепи**, содержащего ЭДС. Поскольку для замкнутой цепи $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, получим выражение **закона Ома для замкнутой цепи**

$$I = \frac{\varepsilon}{R},$$

где ε – ЭДС, действующая в цепи; R – сопротивление всей цепи, включая внутренние сопротивления источников ЭДС.

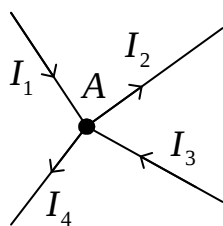


Рис. 2.2

Расчет разветвленных цепей значительно упрощается, если пользоваться правилами Кирхгофа. Первое правило относится к узлам цепи. Узлом называется точка, в которой сходится более чем два проводника (рис. 2.2, точка А). Условно ток, текущий к узлу, можно считать положительным, текущий из узла – отрицательным.

Первое правило Кирхгофа гласит: алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю

$$\sum_{k=1}^N I_k = 0. \quad (6)$$

Справедливость этого соотношения вытекает из условия, что в узле не происходит накопления заряда. Таким образом, чтобы токи были постоянными, необходимо выполнения условия (6). Для случая, изображенного на рис. 2.2, можно записать

$$I_1 - I_2 + I_3 - I_4 = 0.$$

Уравнение можно записать для N узлов цепи. Однако независимыми являются только $N - 1$ уравнение (N -ное уравнение будет следствием из них).

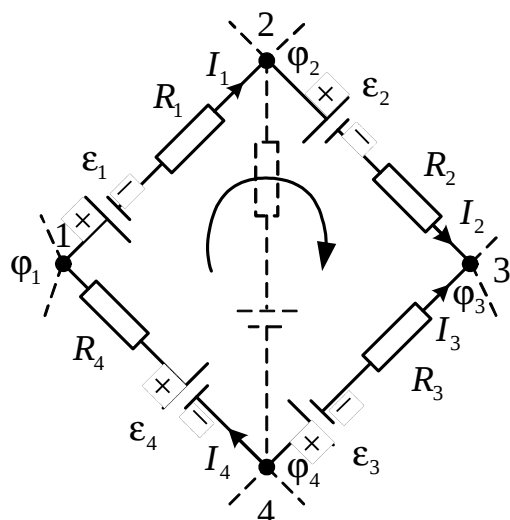


Рис. 2.3

Второе правило Кирхгофа относится к замкнутым контурам. Выделим в разветвленной цепи произвольный замкнутый контур (контур 1 – 2 – 3 – 4 – 1 на рис. 2.3). Укажем предполагаемые направления токов. Зададим направление обхода контура (например, по часовой стрелке) и применим к каждому участку закон Ома. Тогда получим четыре уравнения:

$$I_1 R_1 = -\varepsilon_1 + (\varphi_1 - \varphi_2);$$

$$I_2 R_2 = -\varepsilon_2 + (\varphi_2 - \varphi_3);$$

$$-I_3 R_3 = \varepsilon_3 + (\varphi_3 - \varphi_4);$$

$$I_4 R_4 = \varepsilon_4 + (\varphi_4 - \varphi_1).$$

При составлении таких уравнений необходимо знак силы тока и ЭДС выбирать в соответствии с выбранным направлением обхода: ток нужно считать отрицательным, если он течет навстречу выбранному направлению обхода; ЭДС также нужно приписать знак «–», если она действует в направлении, противоположном направлению обхода (т.е. если направление обхода совпадает с направлением от «+» к «–» в ЭДС). При сложении этих выражений получаем уравнение

$$I_1 R_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + I_2 R_2 - I_3 R_3 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 + I_4 R_4 = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4.$$

Такие уравнения могут быть составлены для всех замкнутых контуров, которые можно выделить мысленно в данной разветвленной цепи. В общем случае эти уравнения представляют собой *второе правило Кирхгофа*: алгебраическая сумма напряжений на сопротивлениях и ЭДС для замкнутого контура равна нулю:

$$\sum_{k=1}^m I_k R_k + \sum_{k=1}^m \varepsilon_k = 0. \quad (7)$$

При прохождении по проводнику электрического тока проводник нагревается. Джоуль и независимо от него Ленц обнаружили экспериментально, что количество теплоты, выделяемой в проводнике, пропорционально его сопротивлению R , времени t и квадрату силы постоянного тока:

$$Q = I^2 R t. \quad (8)$$

Если сила тока изменяется со временем, то количество теплоты можно найти по формуле

$$Q = \int_0^{t_0} I(t)^2 R dt, \quad (9)$$

где $I(t)$ – функция силы тока от времени.

Соотношения (8) и (9) выражают закон Джоуля – Ленца.

Многочисленными опытами доказано, что свободными зарядами, обеспечивающими электрический ток в металлах, являются электроны. Перенеся на металлы некоторые представления и выводы классической теории газов, Лоренц и Друде разработали классическую теорию электропроводности металлов, согласно которой свободные электроны в металле представляют собой своеобразный *электронный газ*. Концентрацию свободных электронов в металле можно определить исходя из валентности атомов металла. Электронный газ считается идеальным и подчиняющимся статистике Максвелла – Больцмана. В результате взаимодействия электронов и ионов решетки, обусловленного их столкновениями, обе подсистемы частиц в состоянии термодинамического равновесия должны приобрести одну и ту же температуру T . Следовательно, средняя арифметическая скорость при комнатной температуре ($T = 300$ K)

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = 1,75 \cdot 10^5 \text{ м/с.}$$

Поскольку электрон пролетает расстояние, равное длине свободного пробега λ , с некоторой средней скоростью $\langle v \rangle$, то время свободного пробега

$$\tau = \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle v \rangle}.$$

Если создать внутри металла электрическое поле напряженностью $\vec{E}$, то свободные электроны приобретут на длине свободного пробега в отно-

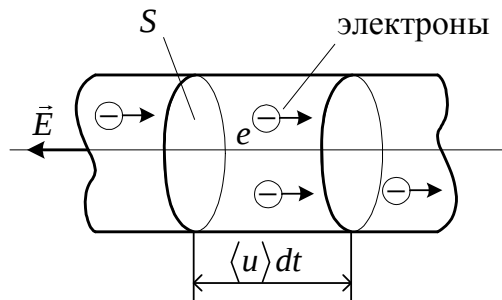


Рис. 2.4

сительно «неподвижной» пространственной структуре положительно заряженных (потерявших свободные электроны) атомов металла дополнительную (направленную) скорость $\vec{v}$ в направлении, противоположном вектору $\vec{E}$ (рис. 2.4). Введя в рассмотрение движения свободных электронов среднюю длину их свободного пробега и условие, что при столкновении электронов с атомами металла полученный ими на средней длине сво-

бодного пробега средний направленный импульс становится равным нулю (вследствие того, что масса электронов много меньше массы атомов), направленное движение «электронного газа» в проводнике будем характеризовать некоторой усредненной скоростью $\langle u \rangle$ – дрейфовой скоростью. За промежуток времени dt через площадку S пройдут те заряды, которые находятся от площадки на расстоянии, не превышающем $\langle u \rangle dt$. Если концентрация зарядов равна n , то заряд dq , который пройдет за это время через поперечное сечение проводника в направлении электрического поля,

$$dq = enS \langle u \rangle dt.$$

Отсюда величина электрического тока, текущего в проводнике,

$$I = \frac{dq}{dt} = en \langle u \rangle S, \quad (10)$$

а плотность тока

$$\vec{j} = en \langle \vec{u} \rangle. \quad (11)$$

Величину направленной (дрейфовой) скорости движения электронов $\langle u \rangle$ можно оценить следующим образом.

Электрон в электрическом поле с напряженностью E испытывает дей-

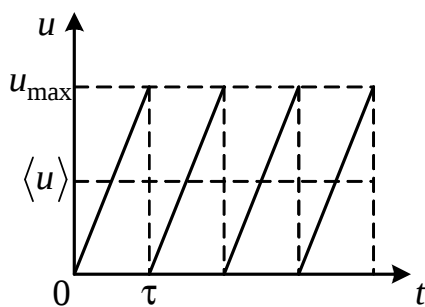


Рис. 2.5

ствие силы $\vec{F} = e\vec{E}$ и приобретает ускорение

$$\vec{a} = \frac{e\vec{E}}{m}.$$

Скорость направленного движения $\vec{v}$ линейно растет со временем. Однако в конце свободного пробега электрон сталкивается с ионами решетки, и его скорость направленного движения u падает до нуля (рис. 2.5).

За время свободного пробега частица приобретает среднюю скорость направленного движения (модуль)

$$u_{\max} = a\tau = \frac{eE}{m}\tau = \frac{eE\langle\lambda\rangle}{m\langle v\rangle}.$$

Средняя скорость

$$\langle u \rangle = \frac{u_{\max}}{2} = \frac{eE\langle\lambda\rangle}{2m\langle v_{\text{кв}}\rangle}, \quad (12)$$

она пропорциональна напряженности поля ($\langle u \rangle = \mu E$, где $\mu = \frac{e\langle\lambda\rangle}{2m\langle v\rangle} = \frac{e\tau}{2m}$ – подвижность носителей заряда). Подставляя (12) в (11), получим

$$j = \frac{ne^2\langle\lambda\rangle E}{2m\langle v\rangle},$$

с учетом векторного характера величин

$$\vec{j} = \frac{ne^2\langle\lambda\rangle\vec{E}}{2m\langle v\rangle} \quad \text{или} \quad \vec{j} = en\mu\vec{E}. \quad (13)$$

Получаем **закон Ома в дифференциальной форме** (13). Таким образом, электронная теория объясняет механизм электропроводности металлов, предсказывает основную закономерность явления – закон Ома – и дает выражение для удельной проводимости

$$\gamma = \frac{ne^2\langle\lambda\rangle}{2m\langle v\rangle} = en\mu.$$

Электронная теория позволяет понять механизм электрического тока. Электрическое поле совершает работу, ускоряя свободные электроны, поэтому температура «электронного газа» возрастает. Основываясь на предположении, что «электронный газ» находится в тепловом равновесии с решеткой проводника, можно вывести закон Джоуля – Ленца (7). Приращение кинетической энергии «электронного газа»

$$\Delta K = \frac{mu_{\max}^2}{2}.$$

Этой энергией, накопленной электроном при свободном пробеге, электрон обменивается с ионами решетки. Полная энергия, выделяемая в единице объема за единицу времени,

$$w = \frac{n\Delta K}{\tau} = \frac{n\langle v\rangle}{\langle\lambda\rangle} \frac{mu_{\max}^2}{2} = \frac{n\langle v\rangle}{\langle\lambda\rangle} \frac{m}{2} \left(\frac{eE\langle\lambda\rangle}{2m\langle v\rangle} \right)^2 = \frac{ne^2\langle\lambda\rangle}{2m\langle v\rangle} E^2 = \gamma E^2.$$

Соотношение

$$w = \gamma E^2 \quad (14)$$

представляет собой **дифференциальную форму закона Джоуля – Ленца**.

Переход к интегральной форме можно осуществить, выделив участок проводника длиной l с площадью поперечного сечения S . Мощность, выделяемая в объеме $V = lS$,

$$P = wV = \sigma E^2 lS = (El)^2 \frac{S}{\rho l} = \frac{U^2}{R}. \quad (15)$$

Используя закон Ома для участка цепи, можно записать **закон Джоуля – Ленца в интегральном виде**

$$P = I^2 R = UI = \frac{U^2}{R}.$$

Классическая теория позволяет объяснить законы Ома и Джоуля – Ленца и получить выражения для удельной проводимости и коэффициента теплопроводности. Однако эта теория оказалась неспособной объяснить ряд важных экспериментальных фактов, что обсуждается в разделе квантовой физики.

Электрический ток в других средах

Полупроводниками называют вещества, обладающие особым характером электрической проводимости, у которых удельная проводимость γ сильно зависит от температуры, внешнего электрического поля, наличия примесей, интенсивности облучения, внешнего давления и т.д. *Собственным полупроводником* называется чистый (беспримесный) полупроводник, имеющий идеально правильную кристаллическую решетку. Плотность тока при собственной (не обусловленной примесями) проводимости полупроводника складывается из плотности тока электронов (n) и дырок (p). Дырка отождествляется с нескомпенсированным положительным зарядом, который образуется в кристалле в том месте, которое покинул электрон, став свободным. Это место (вакансия) может быть занято электроном из соседнего атома под действием электрического поля, что обеспечивает подвижность «дырок». Таким образом,

$$\vec{j} = \vec{j}_e + \vec{j}_p = en\mu_n \vec{E} + ep\mu_p \vec{E}.$$

С учетом равенства концентраций разных носителей заряда ($n = p = n_0$) получаем закон Ома в дифференциальной форме для собственного полупроводника

$$\vec{j} = en_0 (\mu_n + \mu_p) \vec{E}. \quad (16)$$

В общем случае удельная электрическая проводимость полупроводника

$$\gamma = e n \mu_n + e p \mu_p,$$

причем подвижности электронов μ_n и дырок μ_p и их концентрации в общем случае различны.

Особенно характерна зависимость электропроводности собственного полупроводника от температуры:

$$\gamma = \gamma_0 e^{-\frac{\Delta E}{2kT}},$$

где γ_0 – постоянная величина, характеризующая проводимость полупроводника при определенной температуре (например, $T = 273$ К), ΔE – ширина запрещенной зоны полупроводника. Данная зависимость определяется, прежде всего, зависимостью концентрации носителей заряда от температуры.

Проводимость газов

В обычных условиях газ является плохим проводником электрического тока, поскольку состоит, в основном, из нейтральных молекул и атомов, т.е. содержит относительно мало заряженных частиц – носителей тока, способных приходить в упорядоченное движение под действием поля. Газ становится проводником, если существенную часть молекул его ионизовать, т.е. отделить от атомов (молекул) один или более электронов. Для ионизации необходимо совершить *работу ионизации* A_i . Ионизация может происходить под влиянием различных внешних воздействий – сильного нагрева газа, облучения ультрафиолетовыми, рентгеновскими или гамма-лучами, бомбардировки частиц газа быстро движущимися электронами, нейтронами и другими элементарными частицами.

Прохождение тока через газ называется *газовым разрядом*. Различают два типа газовых разрядов: *несамостоятельный* и *самостоятельный*. Явление прохождения тока через газ под влиянием электрического поля и какого-либо внешнего воздействия (например, излучения) называется *несамостоятельным электрическим разрядом*. Носителями заряда в этом случае являются образующиеся при ионизации газа частицы – электроны и ионы. Для нахождения плотности тока в разряде можно воспользоваться выражением (14). Если при ионизации образуются электроны и одновалентные положительные ионы, число пар которых одинаково, то

$$\vec{j} = en(\mu_+ + \mu_-)\vec{E},$$

где μ_+ , μ_- – подвижности ионов и электронов соответственно.

Если электрический ток в газе сохраняется после прекращения действия внешнего ионизатора, газовый разряд называется *самостоятельным*.

Основным механизмом самостоятельного разряда является *ударная ионизация* молекул газа, которая может быть реализована, если кинетическая энергия электронов, ускоренных в электрическом поле, больше, чем энергия ионизации частиц газа W_i , т.е. $\frac{m u^2}{2} \geq W_i$. Характеристики самостоятельного разряда определяются составом газа и температурой, приложенным напряжением, формой, размерами и относительным расположением электродов, на которые подается напряжение и между которыми находится газ. Различают следующие виды газовых разрядов: тлеющий, дуговой, искровой и коронный.

Для получения *электрического тока в вакуумном промежутке* между металлическими электродами, на которые подается соответствующее напряжение, один из электродов (*катод*) обеспечивает выход его свободных электронов в межэлектродный промежуток. Этот процесс называется *электронной эмиссией*. В зависимости от способа повышения в материале катода энергии свободных электронов, которые вследствие этого могут выходить в вакуумный промежуток между электродами, различают следующие виды электронной эмиссии: термоэлектронная (катод нагревают до высокой температуры), фотоэлектронная (катод облучают светом), вторичная эмиссия (на катод направляют поток ускоренных электронов или ионов). Особый вид эмиссии (автоэлектронная или электростатическая) возникает, когда у поверхности катода создается электрическое поле с большой напряженностью.

Электронная эмиссия создает в вакуумном промежутке между катодом и электродом (анодом), потенциал которого положителен относительно катода, объемный заряд электронов. При малой разности потенциалов между катодом и анодом и достаточно большой плотности тока эмиссии в пространстве между электродами может возникать область с потенциалом ниже потенциала катода. В результате часть эмиттированных электронов возвращается обратно на катод, а другая часть движется к аноду. Этот режим электрического тока *называют режимом ограничения тока пространственным зарядом*, в котором связь между током и напряжением U на электродах подчиняется **закону Богуславского – Ленгмюра**

$$I = B U^{3/2}.$$

Коэффициент B зависит от формы, размеров и относительного расположения катода и анода. Когда напряжение на электродах достигает достаточно больших величин, ток анода становится равным току электронной эмиссии. Такой режим тока в вакууме называется *режимом насыщения*.

2.2. Методические указания к лекционным занятиям

Вопросы лекции	Форма изучения	Литература	Вопросы для самоконтроля
Постоянный электрический ток, его характеристики и условия существования. Закон Ома в интегральной и дифференциальной форме. Сопротивление проводников. Зависимость сопротивления от температуры. Соединение проводников: параллельное и последовательное. Закон Ома для полной цепи. ЭДС источника тока. Работа и мощность тока. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа. Классическая теория электропроводности металлов. Закон Джоуля – Ленца и закон Ома в классической теории. Ток в полупроводниках, газах, вакууме.	лекция самост. самост. лекция лекция лекция	[3], п. 19.1 [10], п. 96 [9], п. 31 [8], п. 18.1 [7], п. 13.3 [10], п. 98 [7], п. 13.4 [3], п. 19.2 [10], п. 99, 100 [9], п. 33 [8], п. 19.3 [3], п. 19.3 [10], п. 101 [9], пп. 34 – 35 [3], п. 18.2 [9], пп. 69 – 70 [10], п. 98 [3], пп. 20.1 – 20.9 [9], пп. 72, 74 – 75, 84 – 90 [10], пп. 87 – 90	1. Что называется электрическим током? 2. Как выражается зависимость сопротивления проводника от его размеров? 3. Как выражается зависимость сопротивления проводника от температуры? 4. Запишите соотношения, соответствующие параллельному и последовательному соединению проводников. 5. Запишите закон Ома в интегральной и дифференциальной формах. 6. Дайте определение ЭДС. 7. Сформулируйте закон Ома для полной цепи. 8. Запишите формулы расчета работы и мощности тока. 9. Как вычисляется кпд цепи? 10. Сформулируйте правила Кирхгофа. 11. Какова природа носителей тока в металлах, полупроводниках, газах, вакууме? 12. Приведите молекулярно-кинетическое объяснение законов Ома и Джоуля – Ленца. 13. Что такое несамостоятельный и самостоятельный газовый разряд? 14. Как зависит собственная проводимость полупроводника от температуры?

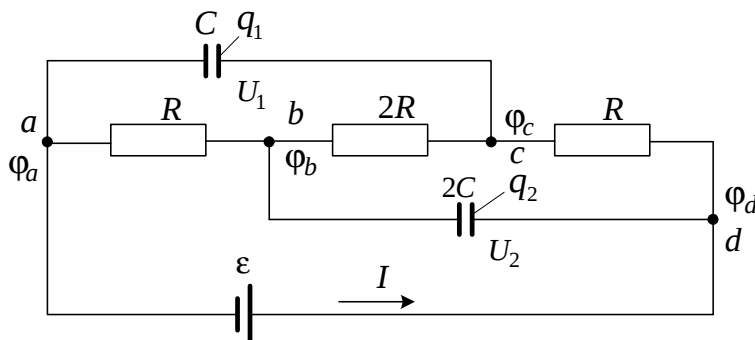
2.3. Методические указания к практическим занятиям

Тема занятий	Задачи	Рекомендации	Задачи из сборников
Расчет параметров электрических цепей	Расчет сопротивления проводника постоянного и переменного сечения. Расчет токов и напряжений на участках смешанного соединения, а также для цепи, содержащей ЭДС. Расчет мощности, выделяемой на участке цепи, кпд источника. Расчет токов и направлений в разветвленных цепях постоянного тока с применением правил Кирхгофа	При расчете сопротивления цепи необходимо пронумеровать сопротивления, рассчитать эквивалентные сопротивления отдельных участков, упрощая схему соединения. Составить уравнения по правилам Кирхгофа для сложных систем. При расчете мощности, которая выделяется на участке цепи сопротивлением R_1, необходимо учитывать ток I_1 именно на этом участке, т.е. $P = I_1^2 R_1$. Если в условии задачи указано, что параметры цепи меняются, например, замыкается или размыкается ключ и т.д., то это приводит к изменению тока во всех участках цепи, поэтому в ряде задач для определения мощности удобно использовать выражение $P = \frac{U^2}{R}, \text{ если } U \text{ во всех возможных подключениях остается постоянным.}$ Для расчета кпд удобно использовать соотношение, которое может быть получено с помощью закона Ома, а именно: $\eta = \frac{U}{\varepsilon} = \frac{R}{R+r}$, где U – падение напряжения на участке цепи с сопротивлением R, ε и r – ЭДС и внутреннее сопротивление источника. При решении задач полезно знать и применять выражения для критических значений, таких как ток короткого замыкания $I_{кз} = \varepsilon/r$; максимальная мощность источника $P_{\max} = \frac{\varepsilon^2}{4r}, \text{ которая достигается при } R = r; \text{ ток в цепи при этом } I = \frac{\varepsilon}{2r} = \frac{1}{2} I_{кз} \text{ и др.}$	[2], №№ 104, 10.12, 10.19, 10.28 – 10.32, 10.37 [12], №№ 19.17, 19.18, 19.26, 19.30, 19.33 – 19.35 [1], №№ 11.3 – 11.10 [11], № № 3.75 – 3.113 [2], №№ 10.76 – 10.81 [12], №№ 19.21 – 19.24 [2], №№ 10.97 – 10.102, 10.115 – 10.119 [12], №№ 20.2 – 20.6, 20.17 – 20.21
Электрический ток в различных средах	Расчет плотности тока, тока и других параметров в различных средах – газообразной, жидкой, в полупроводниках	Необходимо учитывать, что проводимость газов и полупроводников обусловлена зарядами обоих знаков – электронов, а также отрицательных и положительных ионов. Образование пары электрон – ион возможно вследствие ударной ионизации, т.е. $K > W_i$ (где W_i – энергия ионизации атома, K – кинетическая энергия налетающей частицы). Токи в вакууме возможны за счет процессов электронной эмиссии с катода и реализуются в двух режимах: с сильной зависимостью тока от напряжения на электродах и тогда, когда величина тока зависит только от внешних факторов, например, температуры электрода. Для решения задач на токи в газах и вакууме достаточно знать основные уравнения электростатики и электродинамики, основные законы и формулы механики	[2], №№ 10.76 – 10.81 [12], №№ 19.21 – 19.24

2.4. Примеры решения задач

Пример 1. Дана схема (см. рисунок). Известны емкости C и $2C$ конденсаторов, сопротивления R и $2R$ проводников и ЭДС источника ε . Внутренним сопротивлением источника можно пренебречь ($r = 0$). Определить напряжения U_1 и U_2 на конденсаторах и заряды q_1 и q_2 этих конденсаторов. (Уровень 3).

Решение. Напряжение U_1 на конденсаторе C равно разности потенциалов $\varphi_c - \varphi_a$ между точками c и a , а напряжение U_2 на конденсаторе $2C$ равно разности потенциалов $\varphi_d - \varphi_b$ между точками d и b . Поскольку ток через конденсаторы в режиме



постоянного (установившегося) тока отсутствует, имеем цепь с тремя последовательно соединенными сопротивлениями, по которым идет одинаковый ток I . Тогда разность потенциалов $\varphi_c - \varphi_a$, как следует из закона Ома для участка цепи, равна произведению силы тока I и сопротивления участка ac , которое равно $2R + R = 3R$. Поэтому $U_1 = \varphi_c - \varphi_a = 3RI$. Аналогично находим разность потенциалов $\varphi_d - \varphi_b = U_2 = 3RI$. Таким образом, чтобы решить задачу, надо определить силу тока I . Определим ее по закону Ома для замкнутой цепи с учетом того, что внутреннее сопротивление источника $r = 0$:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{\text{общ}}} = \frac{\varepsilon}{2R + R + R} = \frac{\varepsilon}{4R}.$$

Тогда

$$U_1 = \frac{3R\varepsilon}{4R} = \frac{3}{4}\varepsilon \quad \text{и} \quad U_2 = \frac{3R\varepsilon}{4R} = \frac{3}{4}\varepsilon,$$

или

$$U_1 = 0,75 \varepsilon \quad \text{и} \quad U_2 = 0,75 \varepsilon.$$

Найдем заряды конденсаторов q_1 и q_2 , воспользовавшись определением емкости $C = q/U$. Отсюда

$$q_1 = CU_1 \quad \text{и} \quad q_2 = 2CU_2.$$

$$\text{Ответ: } U_1 = \frac{3R\varepsilon}{4R} = \frac{3}{4}\varepsilon; U_2 = \frac{3R\varepsilon}{4R} = \frac{3}{4}\varepsilon; q_1 = CU_1; q_2 = 2CU_2.$$

Пример 2. Сила тока в проводнике сопротивлением $R = 50$ Ом равномерно возрастает от $I_0 = 0$ до $I_{\max} = 3$ А за время $\tau = 6$ с. Определить выделившееся в проводнике за это время количество теплоты. (**Уровень 3**).

Решение. Согласно закону Джоуля – Ленца количество теплоты, которое выделяется в проводнике за бесконечно малый промежуток времени,

$$dQ = I^2 R dt.$$

По условию задачи сила тока равномерно растет, т.е. $I = kt$, где коэффициент пропорциональности $k = \frac{I_{\max} - I_0}{\tau} = \text{const}$. Тогда можно записать

$$dQ = k^2 R t^2 dt.$$

Проинтегрировав это выражение и подставив k , найдем искомое количество теплоты:

$$Q = \int_0^{\tau} k^2 R t^2 dt = \frac{1}{3} k^2 R \tau^3 = \frac{1}{3} \frac{(I_{\max} - I_0)^2}{\tau^2} R \tau^3 = \frac{1}{3} (I_{\max} - I_0)^2 R \tau.$$

Вычисляя, получаем $Q = 900$ Дж.

Ответ: $Q = 900$ Дж.

Пример 3. Определить заряд q , прошедший через поперечное сечение провода с сопротивлением $R = 3$ Ом при равномерном нарастании напряжения на нем от $U_0 = 2$ В до $U = 4$ В в течение $t = 20$ с. (**Уровень 4**).

Решение. Так как сила тока в проводе изменяется, то воспользоваться для подсчета заряда формулой $q = It$ нельзя. Поэтому запишем с учетом того, что $I = I(t)$, и проинтегрируем

$$q = \int_0^t I(t) dt. \quad (1)$$

Выразив силу тока по закону Ома $I(t) = \frac{U(t)}{R}$, получим

$$q = \int_0^t \frac{U(t)}{R} dt. \quad (2)$$

В силу равномерности нарастания напряжение $U(t)$ может быть выражено формулой

$$U(t) = U_0 + kt, \quad (3)$$

где k – коэффициент пропорциональности.

Подставив (3) в (2), найдем

$$q = \int_0^t \left(\frac{U_0}{R} + \frac{kt}{R} \right) dt = \frac{U_0}{R} \int_0^t dt + \frac{k}{R} \int_0^t t dt.$$

Проинтегрировав, получим

$$q = \frac{U_0 t}{R} + \frac{kt^2}{2R} = \frac{t}{2R} (2U_0 + kt). \quad (4)$$

Значение коэффициента пропорциональности найдем из формулы (3) из условия, что при $t = 20$ с $U = 4$ В:

$$k = \frac{U - U_0}{t} = 0,1 \text{ В/с}.$$

Подставив значения величин в формулу (4), найдем величину заряда:
 $q = 20$ Кл.

Ответ: $q = 20$ Кл.

Пример 4. Определить внутреннее сопротивление источника тока, если во внешней цепи при силе тока $I_1 = 4$ А развивается мощность $P_1 = 10$ Вт, а при силе тока $I_2 = 6$ А – мощность $P_2 = 12$ Вт. (**Уровень 3**).

Решение. Мощности, развиваемые токами I_1 и I_2 ,

$$P_1 = I_1^2 R_1 \quad \text{и} \quad P_2 = I_2^2 R_2, \quad (1)$$

где R_1 и R_2 – сопротивления резисторов внешней цепи.

Согласно закону Ома

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + r} \quad \text{и} \quad I_2 = \frac{\varepsilon}{R_2 + r},$$

где ε – ЭДС источника.

Решив эти два уравнения относительно r , получим

$$r = \frac{I_1 R_1 - I_2 R_2}{I_2 - I_1}. \quad (2)$$

Выразив R_1 и R_2 из уравнений (1) и подставив в выражение (2), найдем искомое внутреннее сопротивление источника тока

$$r = \frac{\frac{P_1}{I_1} - \frac{P_2}{I_2}}{I_2 - I_1} = \frac{P_1 I_2 - P_2 I_1}{(I_1 I_2)(I_2 - I_1)}.$$

Вычисляя, получаем $r = 0,25$ Ом.

Ответ: $r = 0,25$ Ом.

Пример 5. Батарея состоит из $n = 5$ последовательно соединенных элементов ЭДС. Внутреннее сопротивление каждого из них $r = 0,3$ Ом, а создаваемое напряжение 1,4 В. При какой силе тока полезная мощность батареи равна 8 Вт? Определите максимальную полезную мощность, которую может обеспечить эта батарея. **(Уровень 4).**

Решение. Полезная мощность батареи соответствует мощности, которая выделяется на внешнем сопротивлении R :

$$P = I^2 R, \quad (1)$$

где R – сопротивление внешней цепи; I – сила тока, текущего в цепи, которая определяется по закону Ома,

$$I = \frac{n\varepsilon_i}{nr_i + R}, \quad (2)$$

где $n\varepsilon_i$ – полная ЭДС батареи, состоящей из n последовательно соединенных элементов; nr_i – внутреннее сопротивление батареи.

Выразим R из (1):

$$R = \frac{P}{I^2}.$$

Подставив это выражение в (2), получим

$$I = \frac{n\varepsilon_i}{nr_i + \frac{P}{I^2}} \quad \text{или} \quad I(nr_i + \frac{P}{I^2}) = n\varepsilon_i. \quad (3)$$

Преобразуя выражение (3), получаем квадратное уравнение относительно I :

$$nr_i I^2 - n\varepsilon_i I + P = 0.$$

Решая квадратное уравнение, находим:

$$I_{1,2} = \frac{n\varepsilon_i \pm \sqrt{n^2 \varepsilon_i^2 - 4nr_i P}}{2nr_i}.$$

Для того чтобы определить максимальную полезную мощность батареи, найдем зависимость ее от внешнего сопротивления. Подставим в (1) выражение (2):

$$P = \frac{n^2 \varepsilon_i^2 R}{(nr_i + R)^2}. \quad (4)$$

Из этой формулы следует, что при постоянных величинах ε_i и r_i мощность является функцией одной переменной – внешнего сопротивления R .

Известно, что эта функция имеет максимум, если $\frac{dP}{dR} = 0$, следовательно,

$$\frac{dP}{dR} = \frac{n^2 \epsilon_i^2 (R + nr_i) - 2n^2 \epsilon_i^2 R}{(R + nr_i)^3} = 0;$$

$$n^2 \epsilon_i^2 (R + nr_i) - 2n^2 \epsilon_i^2 R = 0. \quad (5)$$

Таким образом, задача сводится к определению сопротивления внешней цепи. Из уравнения (5) следует: $R = nr_i$, поэтому $P_{\max} = \frac{n^2 \epsilon_i^2}{4nr_i} = \frac{n\epsilon_i^2}{4r_i}$

Подставляя найденное значение R в формулу (4), имеем

$$I_1 = \frac{5 \cdot 1,4B + \sqrt{5^2 \cdot 1,4^2 B^2 - 4 \cdot 5 \cdot 0,3 \text{ Ом} \cdot 8 \text{ Вт}}}{2 \cdot 5 \cdot 0,3 \text{ Ом}} = 2,66 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{5 \cdot 1,4B - \sqrt{5^2 \cdot 1,4^2 B^2 - 4 \cdot 5 \cdot 0,3 \text{ Ом} \cdot 8 \text{ Вт}}}{2 \cdot 5 \cdot 0,3 \text{ Ом}} = 2 \text{ А};$$

$$P_{\max} = \frac{5 \cdot (1,4)^2 B^2}{4 \cdot 0,3 \text{ Ом}} = 8,17 \text{ Вт}.$$

Ответ: $I_1 = 2,66 \text{ А}; I_2 = 2 \text{ А}; P_{\max} = 8,17 \text{ Вт}.$

Пример 6. Определить плотность j электрического тока в медном проводе (удельное сопротивление $\rho = 17 \text{ н}\cdot\text{Ом}\cdot\text{м}$), если удельная тепловая мощность тока $w = 1,7 \text{ Дж}/(\text{м}^3\cdot\text{с})$. (**Уровень 2**).

Решение. Согласно законам Джоуля – Ленца и Ома в дифференциальной форме (см. также (13) и (14) в кратком содержании теоретического материала)

$$w = \gamma E^2 = \frac{E^2}{\rho}; \quad (1)$$

$$j = \gamma E = \frac{E}{\rho}, \quad (2)$$

где γ и ρ – соответственно удельные проводимость и сопротивление проводника. Из формулы (2) получим, что $E = \rho \cdot j$. Подставив это выражение в (1), найдем искомую плотность тока:

$$j = \sqrt{\frac{w}{\rho}}.$$

Вычисляя, получаем: $j = 10 \text{ кА}/\text{м}^2$.

Ответ: $j = 10 \text{ кА}/\text{м}^2$.

Пример 7. В цепь источника постоянного тока с ЭДС $\varepsilon = 6$ В включен резистор с сопротивлением $R = 80$ Ом. Определить: 1) плотность тока в соединительных проводах площадью поперечного сечения $S = 2$ мм²; 2) число N электронов, проходящих через сечения проводов за время $t = 1$ с. Внутренним сопротивлением источника тока и сопротивлением соединительных проводов пренебречь. **(Уровень 3).**

Решение:

1. Плотность тока по определению есть отношение силы тока к площади поперечного сечения провода:

$$j = \frac{I}{S}. \quad (1)$$

Силу тока в этой формуле выразим в соответствии с законом Ома

$$I = \frac{\varepsilon}{R + R_1 + r_i},$$

где R – сопротивление резистора; R_1 – сопротивление соединительных проводов; r_i – внутреннее сопротивление источника тока.

Пренебрегая сопротивлениями R_1 и r_i , получим $I = \frac{\varepsilon}{R}$. Подставив это выражение силы тока в (1), найдем $j = \frac{\varepsilon}{RS}$. Произведя вычисления, получим

$$j = \frac{6}{80 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} \frac{\text{В}}{\text{Ом} \cdot \text{м}^2} = 3,75 \cdot 10^4 \frac{\text{А}}{\text{м}^2}.$$

2. Число электронов, проходящих за время t через поперечное сечение, найдем, разделив заряд q , протекающий за это время через сечение, на элементарный заряд: $N = \frac{q}{e}$ или с учетом того, что $q = It$ и $I = \frac{\varepsilon}{R}$,

$$N = \frac{\varepsilon t}{eR}, \quad (e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} - \text{элементарный заряд}).$$

Произведя вычисления, получим

$$N = \frac{6 \cdot 1}{80 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{Кл} \cdot \text{Ом}} = 4,69 \cdot 10^{17} \text{ электронов}.$$

Ответ: $j = 3,75 \cdot 10^4 \frac{\text{А}}{\text{м}^2}$; $N = 4,69 \cdot 10^{17}$ электронов.

Пример 8. Пространство между пластинами плоского конденсатора имеет объем $V = 375$ см³ и заполнено водородом, который частично ионизован. Площадь пластин конденсатора $S = 250$ см². При каком напряжении U между пластинами конденсатора сила тока I , протекающего через кон-

денсатор, достигнет значения 2 мкА, если концентрация n ионов обоих знаков в газе равна $5,3 \cdot 10^7 \text{ см}^{-3}$? Принять подвижность ионов $\mu_+ = 5,4 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$ и $\mu_- = 7,4 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$. (Уровень 3).

Решение. Напряжение на пластинах конденсатора связано с напряженностью электрического поля между пластинами и расстоянием между ними соотношением

$$U = Ed. \quad (1)$$

Напряженность поля может быть найдена из выражения для плотности тока в газах (закона Ома в дифференциальной форме)

$$j = qn(\mu_+ + \mu_-)E,$$

где q – заряд иона. Отсюда

$$E = \frac{j}{qn(\mu_+ + \mu_-)} = \frac{I}{qn(\mu_+ + \mu_-)S}.$$

Расстояние d между пластинами, входящее в формулу (1), найдем из соотношения $d = V/S$. Подставив выражения для E и d в (1), получим

$$U = \frac{IV}{qn((\mu_+ + \mu_-)S^2)}.$$

Вычисляя, получаем: $U = 110 \text{ В}$.

Ответ: $U = 110 \text{ В}$.

Пример 9. Источники тока с электродвижущими силами $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ включены в цепь, как показано на рисунке. Определить силы токов, текущих в сопротивлениях R_2 и R_3 , если $\mathcal{E}_1 = 10 \text{ В}$ и $\mathcal{E}_2 = 4 \text{ В}$, а $R_1 = R_4 = 2 \text{ Ом}$ и $R_2 = R_3 = 4 \text{ Ом}$. Внутренним сопротивлением источников тока пренебречь. (Уровень 4).

Решение. Силы токов в разветвленной цепи определяют с помощью правил Кирхгофа. Чтобы найти четыре значения силы токов, следует составить четыре уравнения.

Примечание. Перед составлением уравнений по правилам Кирхгофа необходимо, во-первых, выбрать произвольно направления токов, текущих через сопротивления, указав их стрелками на чертеже; во-вторых, выбрать направление обхода контуров (последнее – только для составления уравнений по второму правилу Кирхгофа).

Выберем направления токов, как показано на рисунке, и условимся обходить контуры по часовой стрелке.

Рассматриваемая в задаче схема имеет два узла: A и B . Но составлять уравнение по первому правилу Кирхгофа следует только для одного узла, так как уравнение, составленное для второго узла, будет следствием первого уравнения.

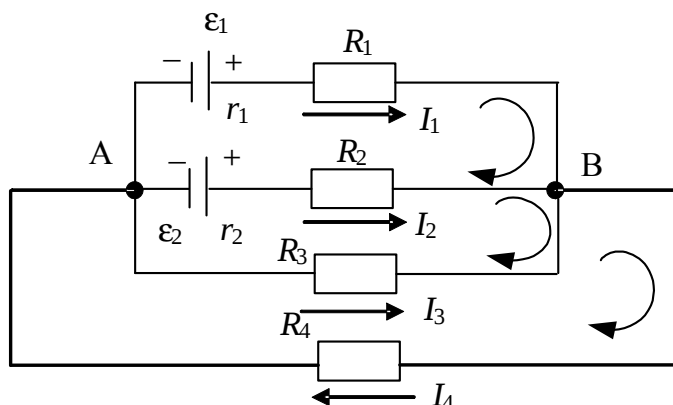
При составлении уравнений по первому правилу Кирхгофа необходимо соблюдать правило знаков: ток, подходящий к узлу, входит в уравнение со знаком «плюс»; ток, отходящий от узла, – со знаком «минус».

По первому правилу Кирхгофа для узла B имеем

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0. \quad (1)$$

Недостающие три уравнения получим с использованием второго правила Кирхгофа. Число независимых уравнений, которые могут быть составлены по второму закону Кирхгофа, также меньше числа контуров

(в нашем случае контуров шесть, а независимых уравнений три). Чтобы найти необходимое число независимых уравнений, следует придерживаться правила: выбирать контуры таким образом, чтобы в каждый новый контур входила хотя бы одна ветвь, не участвовавшая ни в одном из ранее использованных контуров.



При составлении уравнений по второму правилу Кирхгофа необходимо соблюдать следующее правило знаков:

а) если ток по направлению совпадает с выбранным направлением обхода контуров, то соответствующее произведение IR входит в уравнение со знаком «плюс», в противном случае произведение IR входит в уравнение со знаком «минус»;

б) если ЭДС при обходе контура «проходится» от «+» к «-», то соответствующая ЭДС входит в уравнение со знаком «плюс», в противном случае – со знаком «минус».

По второму правилу Кирхгофа, выбрав направление обхода по часовой стрелке, имеем соответственно для контуров AR_1BR_2A , AR_1BR_3A , AR_3BR_4A :

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0; \quad (2)$$

$$I_1 R_1 - I_3 R_3 - \varepsilon_1 = 0; \quad (3)$$

$$I_3 R_3 + I_4 R_4 = 0. \quad (4)$$

Подставив в равенства (2) – (4) значения сопротивлений и ЭДС, получим систему уравнений:

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0;$$

$$2I_1 - 4I_2 - 6 = 0;$$

$$2I_1 - 4I_3 - 10 = 0;$$

$$4I_3 + 2I_4 = 0.$$

Поскольку нужно найти только два тока, то удобно воспользоваться методом определителей (детерминантов). С этой целью перепишем уравнения в следующем виде:

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0;$$

$$2I_1 - 4I_2 + 0 + 0 = 6;$$

$$2I_1 + 0 - 4I_3 = 10;$$

$$0 + 0 + 4I_3 + 2I_4 = 0.$$

Искомые значения токов найдем из выражений

$$I_2 = \Delta_{I_2} / \Delta \quad \text{и} \quad I_3 = \Delta_{I_3} / \Delta,$$

где Δ – определитель системы уравнений; Δ_{I_2} и Δ_{I_3} – определители, полученные заменой соответствующих столбцов определителя Δ столбцами, составленными из свободных членов четырех вышеприведенных уравнений. Находим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 96;$$

$$\Delta_{I_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_{I_3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -96.$$

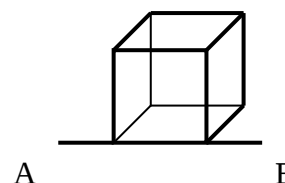
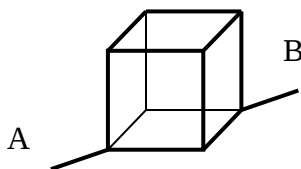
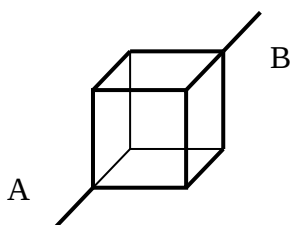
Отсюда получаем: $I_2 = 0$; $I_3 = -1$ А.

Знак «минус» у значения силы тока I_3 свидетельствует о том, что при произвольном выборе направлений токов, указанных на рисунке, направление тока I_3 было выбрано ошибочным. На самом деле ток I_3 течет от узла B к узлу A .

Ответ: $I_2 = 0$; $I_3 = -1$ А.

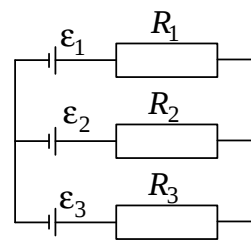
2.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Сила тока в проводнике равномерно нарастает от $I_0 = 0$ до $I = 3$ А в течение времени $t = 10$ с. Определить заряд q , прошедший через поперечное сечение проводника. [15 Кл; **уровень 3**].
2. Определить плотность тока j в железном проводнике длиной $l = 10$ м, если провод находится под напряжением $U = 6$ В. [6,1 мА/м²; **уровень 2**].
3. Проволочный каркас составлен из проводников так, что они являются ребрами куба. Сопротивление R_1 каждого проводника, составляющего ребро куба, равно 1 Ом. Вычислить сопротивление R этого проволочного каркаса в трех случаях, если он включен в электрическую цепь клеммами A и B (см. рисунок). [5/6 Ом; 3/4 Ом; 7/12 Ом; **уровень 3**].

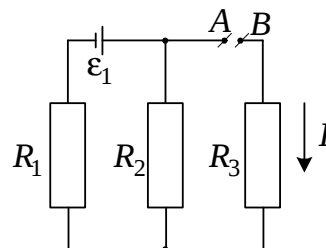


4. Два элемента ($\mathcal{E}_1 = 1,2$ В; $r_1 = 0,1$ Ом; $\mathcal{E}_2 = 0,9$ В; $r_2 = 0,3$ Ом) подключены друг к другу одинаковыми полюсами. Сопротивление R соединительных проводов равно 0,2 Ом. Определить силу тока I в цепи. [0,5 А; **уровень 3**].
5. При силе тока $I_1 = 3$ А во внешней цепи батареи аккумуляторов выделяется мощность $P_1 = 18$ Вт, при силе тока $I_2 = 1$ А соответственно $P_2 = 10$ Вт. Определить ЭДС и внутреннее сопротивление батареи. [12 В; 2 Ом; **уровень 3**].
6. Сила тока в проводнике сопротивлением $R = 12$ Ом равномерно убывает от $I_0 = 5$ А до $I = 0$ в течение 10 секунд. Какое количество теплоты Q выделяется в этом проводнике за указанный промежуток времени? [1 кДж; **уровень 3**].
7. Для батареи аккумуляторов ЭДС равна 12 В, сила тока короткого замыкания равна 5 А. Какую наибольшую мощность $P_{\max}$ можно получить во внешней цепи, соединенной с такой батареей? [15 Вт; **уровень 4**].

8. Определить среднюю скорость $\langle u \rangle$ упорядоченного движения электронов в медном проводнике при силе тока $I = 10$ А и сечении S проводника, равном 1 мм^2 . Принять, что на каждый атом меди приходится два электрона проводимости. [3,7 мкм/с; **уровень 2**].
9. Плотность тока j в медном проводнике равна 3 А/мм^2 . Найти напряженность электрического поля в проводнике. [0,05 В/м; **уровень 1**].
10. Энергия ионизации атома водорода $W_i = 2,18 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$. Определить потенциал ионизации U_i водорода. [13,6 В; **уровень 2**].
11. Азот ионизируется рентгеновским излучением. Определить проводимость азота, если в каждом кубическом сантиметре газа находится в условиях равновесия $n_0 = 10^7$ пар ионов. Подвижность положительных ионов $\mu_+ = 1,27 \frac{\text{см}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$ и отрицательных $\mu_- = 1,81 \frac{\text{см}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$. [0,5 нОм; **уровень 2**].
12. Объем газа V , заключенного между электродами ионизационной камеры, равен 0,5 л. Газ ионизируется рентгеновским излучением. Сила тока насыщения $I_{\text{нас}} = 4 \text{ нА}$. Сколько пар ионов образуется в 1 секунду в 1 см^3 газа? Заряд каждого иона равен элементарному заряду. [$5 \cdot 10^7 \text{ 1/см}^3 \text{ с}$; **уровень 3**].
13. Три источника ЭДС с $\varepsilon_1 = 11 \text{ В}$, $\varepsilon_2 = 4 \text{ В}$, $\varepsilon_3 = 6 \text{ В}$ и три сопротивления $R_1 = 5 \text{ Ом}$, $R_2 = 10 \text{ Ом}$, $R_3 = 2 \text{ Ом}$ соединены, как показано на рисунке. Определить силы токов в сопротивлениях. Внутреннее сопротивление источника тока пренебрежимо мало. [0,8 А; 0,3 А; 0,5 А; **уровень 4**].



14. Три сопротивления $R_1 = 5 \text{ Ом}$, $R_2 = 1 \text{ Ом}$, $R_3 = 3 \text{ Ом}$, а также источник тока с ЭДС $\varepsilon_1 = 1,4 \text{ В}$ соединены, как показано на рисунке. Определить ЭДС источника, который надо подключить в цепь между точками A и B , чтобы в сопротивлении R_3 ток составлял 1 А в направлении, указанном стрелкой. Сопротивлением источника тока пренебречь. [3,6 В; **уровень 4**].



УЧЕБНЫЙ МОДУЛЬ 5

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Теория, изложенная в данном модуле, называется **классической электродинамикой**. Ее законы сформулировал Дж. К. Максвелл (1864 г.) в виде уравнений Максвелла путем обобщения частных законов, полученных экспериментально.

Если в инерциальной системе отсчета заряд покоится, то в ней он создает *электростатическое поле*. Если в рассматриваемой системе заряд движется равномерно, то он одновременно с электрическим создает дополнительное (*магнитное*) поле, проявляющееся также силовым воздействием на движущиеся в этом поле заряды. Ускоренно движущийся заряд порождает *электромагнитное поле*, представляющее собой совокупность взаимосвязанных переменных электрического и магнитного полей.

Классическая теория электромагнетизма справедлива для макрообъектов, формирующих электромагнитные поля и взаимодействующих с ними. Микрообъекты (элементарные частицы вещества) создают поля, которые описываются микроскопической электродинамикой (электронная теория Лоренца) и квантовой теорией электромагнитных процессов (квантовая электродинамика).

В движущихся средах электромагнитные явления описываются уравнениями электродинамики движущихся сред.

Перечисленные выше теории представляют современное понимание явлений природы, связанных с электромагнитными полями.

Классическая электродинамика рассматривает следующие вопросы: параметры магнитного поля, формируемого проводниками с током; движущиеся заряды (не релятивистские); действие магнитного поля на проводники с током и движущиеся заряды; возникновение ЭДС индукции в проводниках, взаимодействующих с магнитным полем; энергию магнитного поля. Эти вопросы включены в содержание настоящего модуля и скомпонованы в три учебных блока:

1. Магнитное поле.
2. Электромагнитная индукция. Магнитные свойства вещества.
3. Основы теории Максвелла.

В первом блоке рассматриваются вопросы, охватывающие следующие темы: расчет магнитного поля в вакууме по заданной конфигурации токов; расчет магнитного потока; действие магнитного поля на проводники с током. Расчет индукции магнитного поля производится либо на основе закона Био – Савара – Лапласа и принципа суперпозиции, либо с помощью закона

полного тока (теорема о циркуляции вектора магнитной индукции). Рассматривается действие магнитного поля на проводники с током, работа, совершаемая при их перемещении, а также действие силы Лоренца и ее следствие на примере эффекта Холла.

Во втором блоке рассматриваются явления электромагнитной индукции, само- и взаимной индукции. Выясняются причины, вызывающие изменения магнитного потока, и причины возникновения индуцированного тока. Рассматриваются явления, возникающие в электрических цепях при изменении силы тока. Учитывается, что индуктивность и взаимная индуктивность зависят от геометрии проводников, их взаимного расположения и магнитных свойств среды. Эти коэффициенты не зависят от силы тока только при отсутствии ферромагнетиков. Представлены некоторые характеристики ферромагнетиков.

В третьем блоке рассматривается теория Максвелла, которая позволяет с единой точки зрения объяснять свойства электрических и магнитных полей. Вводятся понятия тока смещения (скорость изменения электрического смещения) и полного тока. Рассматривается физическая сущность уравнений Максвелла.

Учебно-методическая структура модуля

Учебный модуль 5. Электромагнетизм		
Учебный блок 1. Магнитное поле	Учебный блок 2. Электромагнитная индукция. Магнитные свойства вещества	Учебный блок 3. Основы теории Максвелла
– магнитный момент; – вектор магнитной индукции; – поток вектора магнитной индукции; – теорема Гаусса для магнитного поля; – закон Ампера; – напряженность магнитного поля. Закон Био – Савара – Лапласа; – закон полного тока; – циркуляция вектора напряженности магнитного поля; – работа по перемещению проводника с током в магнитном поле; – сила Лоренца. Эффект Холла	– ЭДС электромагнитной индукции; – потокосцепление; – самоиндукция, взаимная индукция; – индуктивность; – энергия магнитного поля. Плотность энергии; – токи при замыкании и размыкании цепи; – магнитные свойства вещества; – вектор намагничивания; – диамагнетики, парамагнетики, ферромагнетики. Магнитный гистерезис	– вихревое магнитное поле; – первое уравнение Максвелла; – ток смещения. Второе уравнение Максвелла; – третье и четвертое уравнения Максвелла; – полная система уравнений Максвелла для электромагнитного поля

Методическая программа модуля

Тема занятия	Цель занятия	Вид занятия	Часы
1. Магнитное поле. Вектор магнитной индукции. Поток вектора магнитной индукции. Закон Ампера. Контур с током в магнитном поле. Напряженность магнитного поля	Систематизация знаний, формирование новых знаний	лекция	2
2. Закон Био – Савара – Лапласа и применение его к расчету характеристик магнитного поля	Формирование новых знаний	лекция	1
3. Расчет индукции и напряженности магнитного поля, создаваемого токами. Применение закона Био – Савара – Лапласа	Формирование и систематизация новых навыков	практ. занятие	2
4. Закон полного тока. Магнитное взаимодействие токов. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле. Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца. Эффект Холла	Формирование новых знаний	лекция	3
5. Взаимодействие с магнитным полем проводников с током и движущихся заряженных частиц. Применение закона полного тока. Магнитное поле эквивалентных токов	Формирование и систематизация новых навыков	практ. занятие	2
6. Электромагнитная индукция. Электронная природа электромагнитной индукции. Индукционный ток. Правило Ленца. Самоиндукция. Индуктивность контура. Взаимная индукция. Энергия магнитного поля. Электромагнитные колебания	Формирование новых знаний	лекция	2
7. Токи при замыкании и размыкании цепей с индуктивностью. Ускорители заряженных частиц. Магнитные свойства вещества (диамагнетизм, парамагнетизм, ферромагнетизм)	Формирование новых знаний	лекция	2
8. Расчет ЭДС индукции, самоиндукции, индуктивности соленоида и параметров магнитного поля в соленоиде, объемной плотности энергии магнитного поля	Формирование и систематизация новых навыков	практ. занятие	2
9. Токи в цепях с индуктивностью и емкостью. Индукционные токи. Электромагнитные колебания, волновое сопротивление LC -контура	Формирование новых навыков	практ. занятие	2
10. Основы теории Максвелла. Вихревое электрическое поле. Первое уравнение Максвелла. Электромагнитная волна. Ток смещения. Второе уравнение Максвелла. Система уравнений Максвелла	Формирование новых знаний	лекция	2

УЧЕБНЫЙ БЛОК 1. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Все электрические и магнитные явления взаимосвязаны и взаимозависимы, так как являются различными формами проявления единого электромагнитного поля. Магнитное поле может создаваться как током, так и намагниченными телами. Движение электрического заряда сопровождается перемещением присущего заряду электрического силового поля. Изменение во времени электрического поля проявляется в форме возникающего вихревого магнитного поля.

Магнитное поле проявляется через неконтактное силовое действие тела, являющегося источником магнитного поля, на движущиеся электрические заряды и тела, обладающие магнитным моментом.

При изучении данного блока студенты должны **иметь представление:**

- о принципе суперпозиции полей;
- об основных законах, теоремах и уравнениях электростатики;
- о вращающем механическом моменте;

обладать навыками:

- определения характеристик электростатического поля;
- дифференциального и интегрального исчисления;
- математических действий с векторными величинами

Учебная программа блока

Содержание блока	Форма подготовки	Литература
1. Контур с током в магнитном поле. Магнитный момент. Механический (вращающий) момент, действующий на контур с током в однородном магнитном поле	лекция, самост.	[3], [5] – 10]
2. Магнитное поле. Вектор магнитной индукции. Линии магнитной индукции	лекция	
3. Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса для магнитного поля	лекция	
4. Закон Ампера. Правило левой руки	лекция, самост.	
5. Напряженность магнитного поля. Закон Био – Савара – Лапласа. Принцип суперпозиции полей	лекция	
6. Применение закона Био – Савара – Лапласа к расчету характеристик магнитного поля: проводника с током, кругового тока, движущегося заряда (эквивалентного тока)	лекция	
7. Закон полного тока (теорема о циркуляции). Циркуляция вектора напряженности магнитного поля	лекция	
8. Магнитное взаимодействие токов	самост.	
9. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле	самост.	
10. Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца. Определение удельного заряда частицы	лекция, самост.	
11. Эффект Холла	лекция	

Цели обучения

Студент должен знать	Студент должен уметь
– характеристики магнитного поля; – законы Ампера, Био – Савара – Лапласа; – закономерности эффекта Холла; – теорему Гаусса для магнитного поля; – принцип суперпозиции полей	– определять поток вектора магнитной индукции, механический момент, действующий на контур с током в однородном магнитном поле, действие магнитного поля на движущийся заряд, магнитное взаимодействие токов; – вычислять работу по перемещению проводника с током в магнитном поле; – определять удельный заряд частицы; – рассчитывать магнитные поля с помощью закона Био – Савара – Лапласа

1.1. Краткое содержание теоретического материала

Экспериментально было обнаружено, что существуют тела, которые, не будучи заряженными, взаимодействуют на расстоянии с большей силой, чем сила тяготения. Это означает, что такие тела создают в пространстве поле, отличающееся по своей природе от гравитационного и электрического. Это поле было названо *магнитным*, а тела, его создающие, – магнитными.

В XIX в. было установлено, что проводники с током взаимодействуют подобно магнитным телам. Основываясь на этом и других фактах, Ампер сформулировал гипотезу, что *источником магнитного поля является электрический ток*, а магнетизм тел обусловлен токами в молекулах тел. Эта гипотеза получила подтверждение только почти через 100 лет, однако она была использована для изучения магнитных полей. Если проводник с током создает магнитное поле, то его силовые характеристики могут быть определены другим проводником с током, который должен быть достаточно маленьким (пробным проводником). Таким пробным элементом для изучения магнитного поля в конечном варианте оказался маленький замкнутый контур с током, который своим магнитным полем не искажает исследуемое поле. Пробный контур, помещенный в магнитное поле, испытывает действие вращающего момента $\vec{M}$. Эксперименты показали, что для одной и той же точки магнитного поля максимальный вращающий момент $\vec{M}$ пропорционален произведению силы тока I в контуре на его площадь S . Величину IS называли *магнитным моментом контура* p_m . Было также установлено, что пробный контур вследствие вращающего момента ориентируется в пространстве определенным образом, зависящим от направлений

токов. Поэтому моменту $\vec{p}_m = IS\vec{n}$ контура приписали определенное направление: вектор $\vec{p}_m$ совпадает с направлением положительной нормали к плоскости контура, причем положительное направление совпадает с направлением перемещения буравчика (**правого винта**), вращаемого в направлении тока (рис. 1.1). Было также установлено, что отношение $\frac{M_{\max}}{p_m}$ для некоторой

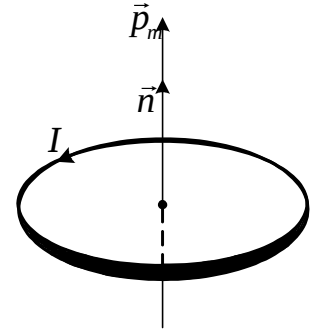


Рис. 1.1

точки поля, создаваемого проводником с постоянным током, не зависит от величины p_m пробного контура, т.е. выполняется равенство

$$\frac{M_{\max}}{p_m} = \text{const} \quad \text{или} \quad M_{\max} = Bp_m,$$

или в общем виде

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}]. \quad (1)$$

Величина B (коэффициент пропорциональности между $M_{\max}$ и p_m) была названа *магнитной индукцией*.

Магнитная индукция (векторная величина) по физической сути является силовой характеристикой в данной точке магнитного поля. Единицей ее измерения в системе СИ является *тесла* (Тл).

Подобно тому, как электрические поля графически отображаются с помощью линий напряженностей (силовых линий), магнитные поля также отображаются с помощью *линий магнитной индукции (силовых линий)*. Это линии, касательные к которым в данной точке совпадают по направлению с вектором $\vec{B}$ в данной точке поля. Направление вектора $\vec{B}$ (силовых линий) магнитного поля, создаваемого проводником с током, определяется по правилу правого винта (буравчика): если буравчик ввинчивать по направлению тока (элемента тока), создающего магнитное поле, то направление вращения рукоятки буравчика будет совпадать с направлением линий магнитной индукции.

Из экспериментов следует, что линии магнитной индукции прямого проводника с током представляют собой концентрические окружности, лежащие в плоскости, перпендикулярной к току, и центр этих окружностей находится на оси проводника.

Линии магнитной индукции всегда замкнуты и охватывают проводник с током. Это отличает магнитное поле от электростатического поля точечного заряда. Замкнутость линий магнитной индукции говорит о том,

что у источников магнитного поля всегда существует как бы два разноименных полюса, в отличие от зарядов, т.е. в природе не существует отдельных «магнитных зарядов», из которых бы эти линии только исходили или в которые только входили бы. Такие поля называют *вихревыми* (соленоидными).

Циркуляция вектора магнитной индукции по любому замкнутому контуру не равна нулю:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} \neq 0,$$

тогда как для электрического поля, которое является потенциальным,

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Магнитное поле называют *однородным*, если векторы магнитной индукции во всех его точках одинаковы ($\vec{B} = \text{const}$). Примером однородного магнитного поля может служить поле внутри соленоида, т.е. катушки, длина

которой много больше ее диаметра. Линии магнитной индукции однородного поля параллельны.

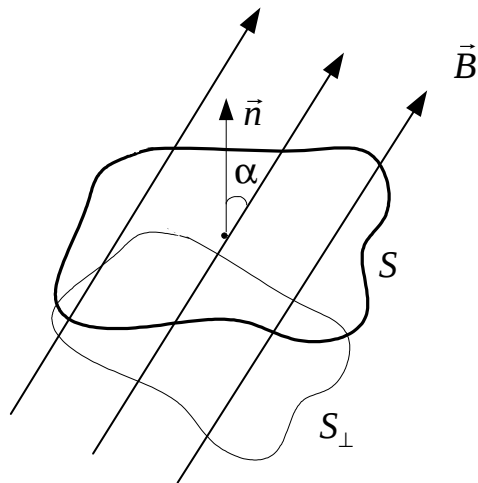


Рис. 1.2

Густота линий магнитной индукции (количество линий, пронизывающих единицу площади), как и в случае электрического поля, характеризует величину (модуль) магнитной индукции $\vec{B}$.

При рассмотрении магнитных явлений используется, по аналогии с электрическим полем, понятие *потока вектора магнитной индукции* (магнитного потока).

Пусть в некоторой области пространства существует магнитное поле с индукцией

$\vec{B}$ (рис. 1.2). Если в этом пространстве выделить некоторую поверхность S и ее проекцию $S_{\perp}$ на плоскость, перпендикулярную к линиям индукции $\vec{B}$, то по определению магнитным потоком через поверхность S является величина Φ , которая в случае однородного поля

$$\Phi = BS_{\perp} = BS \cos \alpha = B_n S, \quad (2)$$

где $B_n = B \cos \alpha$ – проекция вектора $\vec{B}$ на направление нормали к площадке; α – угол между вектором $\vec{B}$ и нормалью $\vec{n}$ к поверхности S .

Единица магнитного потока – *вебер* (Вб). Так как B_n – скаляр, то и магнитный поток – величина скалярная.

В случае неоднородного магнитного поля или неплоской поверхности S (произвольной формы) выражение (2) будет справедливым только для бесконечно малой площадки dS , в пределах которой поле можно считать однородным ($B_n = \text{const}$) и поверхность – плоской. Поэтому в общем случае выражение (2) преобразуется к виду

$$d\Phi = B_n dS,$$

а полный поток через некоторую поверхность

$$\Phi = \int_S B_n dS, \quad (3)$$

где B_n – проекция вектора индукции магнитного поля на нормаль $\vec{n}$ к площади dS , причем в общем случае B_n является функцией S .

Если поверхность в области магнитного поля взять замкнутой, то вследствие вихревого характера магнитного поля (линии $\vec{B}$ замкнуты) выполняется условие

$$\Phi = \oint B_n dS = 0, \quad (4)$$

так как сколько силовых линий $\vec{B}$ будет входить внутрь объема, ограниченного замкнутой поверхностью, столько будет и выходить из него. В этом суть **теоремы Гаусса для магнитного поля**: *поток вектора магнитной индукции через замкнутую поверхность равен нулю*. Физическая сущность теоремы заключается в следующем: хотя намагниченные тела имеют (условно) положительный и отрицательный («северный» и «южный») полюса, каждый из полюсов отдельно существовать не может и, как бы ни дробилось намагниченное тело, «магнитные полюса» всегда существуют парами.

Ампером было установлено, что на проводник с током в однородном магнитном поле, индукция которого $\vec{B}$, действует сила (**закон Ампера**)

$$F = BIl \sin \alpha, \quad (5)$$

где I – сила тока, l – длина проводника, α – угол между направлением вектора плотности тока и вектором индукции магнитного поля.

Эта формула справедлива для прямолинейного проводника и однородного поля.

Если проводник имеет произвольную форму и поле неоднородно, то выражение (5) принимает вид

$$dF = IBdl \sin \alpha, \quad (6)$$

или в векторной форме

$$d\vec{F} = I [d\vec{l} \times \vec{B}],$$

где $d\vec{l}$ – малый участок проводника, имеющий направление, совпадающее с направлением вектора плотности тока. Произведение $I d\vec{l}$ называют *элементом тока*.

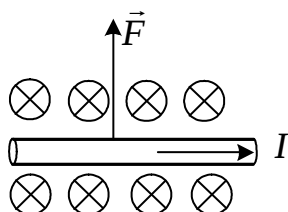


Рис. 1.3

Сила Ампера направлена перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы $\vec{B}$ и $d\vec{l}$ (рис. 1.3). Для определения направления силы применяется **правило левой руки**: если левую руку расположить так, чтобы линии магнитной индукции входили в ладонь, а вытянутые четыре пальца совпадали с направлением тока в проводнике, то отогнутый большой палец указывает направление силы.

Зная направление и модуль силы, действующей на любой участок dl проводника, можно определить силу, действующую на весь проводник длиной l , если проводник жесткий, т.е. не изменяет своей конфигурации. Для этого определяется векторная сумма сил $d\vec{F}$, действующих на все элементарные участки проводника:

$$\vec{F} = \int_0^l d\vec{F}.$$

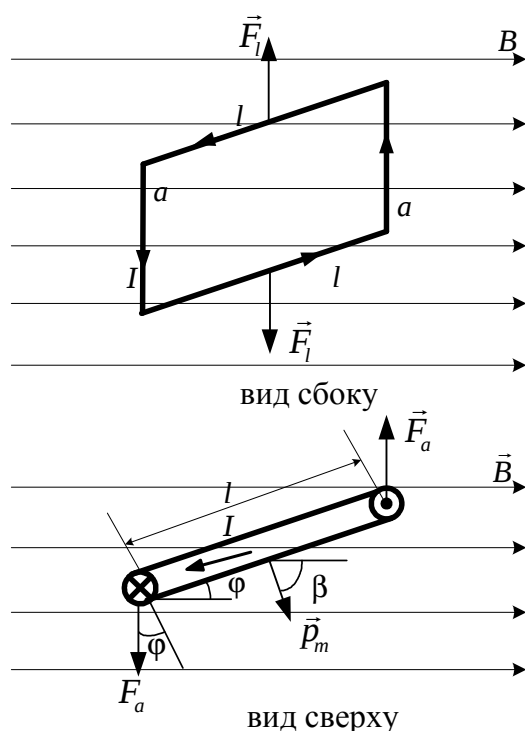


Рис. 1.4

При этом часто удобно использовать разложение $d\vec{F}$ на компоненты по координатам x, y, z . Если проводник гибкий, т.е. может изменить свою конфигурацию, то в магнитном поле он приобретает форму, при которой результирующая элементарных сил равна нулю.

Закон Ампера в учении о магнетизме играет такую же роль, как и закон Кулона в электростатике.

Пусть рамка с током, имеющая стороны a и l , помещена в пространство с магнитным полем (рис. 1.4). На каждую сторону контура действует сила Ампера. Так, на горизонтальные стороны l контура

действуют силы F_l , которые взаимно скомпенсированы. На каждую из вертикальных сторон a действует сила $F_a = IBa$. Эти силы создают пару сил, вращающий момент которых равен

$$M = Fl \cos \varphi, \quad (7)$$

где φ – угол между вектором $\vec{B}$ и плоскостью контура.

Момент сил стремится повернуть контур так, чтобы поток Φ , пронизывающий контур, был максимальным. Подставляя в (7) выражение для силы (5), с учетом того, что угол $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (вектор $\vec{B}$ и направление тока в сторонах a взаимно перпендикулярны), имеем

$$M = IBal \cos \varphi$$

или

$$M = Bp_m \sin \beta, \quad (8)$$

где $al = S$; $IS = p_m$; $\cos \varphi = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = \sin \beta$.

В векторной форме соотношение (8) соответствует (1):

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}].$$

Опыт показал, что если магнитное поле создается в различных средах, то магнитная индукция зависит от характеристик вещества, в котором возбуждается магнитное поле.

Величина, показывающая, во сколько раз магнитная индукция в данной среде отличается от величины магнитной индукции в вакууме (воздухе), называется *относительной магнитной проницаемостью среды* (или короче – *магнитной проницаемостью*):

$$\mu = \frac{B}{B_0}.$$

Относительная магнитная проницаемость – безразмерная величина.

Величина, характеризующая магнитное поле и не зависящая от среды, в которой оно возбуждается, получила название *напряженности магнитного поля* $\vec{H}$. Для вакуума физические величины $\vec{B}_0$ и $\vec{H}$ связаны между собой равенством (которое справедливо и для воздуха, т.к. $\mu \approx 1$)

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H},$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$ – магнитная постоянная в СИ.

Единица напряженности магнитного поля – *ампер на метр* (А/м).

Индукция магнитного поля в среде с магнитной проницаемостью μ

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}. \quad (9)$$

Векторы $\vec{B}$ и $\vec{H}$ для изотропной среды, в которой магнитная проницаемость постоянна, совпадают по направлению.

Обобщая экспериментальные данные французских физиков Био и Савара, Лаплас (французский математик) предложил формулу, по которой можно определить напряженность магнитного поля, создаваемого элементом тока в любой точке C , расположенной от этого элемента на расстоянии r (рис. 1.5).

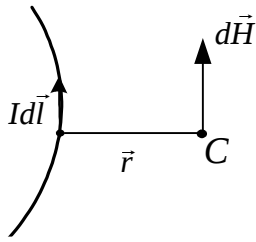


Рис. 1.5

В векторной форме **закон Био – Савара – Лапласа** записывается в виде

$$d\vec{H} = \frac{I[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}. \quad (10)$$

Векторное произведение $[d\vec{l} \times \vec{r}]$ показывает, что вектор $d\vec{H}$ перпендикулярен к плоскости, образуемой векторами $d\vec{l}$ и $\vec{r}$. Чтобы найти напряженность поля, создаваемого всем проводником, применяется **принцип суперпозиции** полей, т.е. выполняется сложение векторов напряженности $\vec{H}_i$ от каждого элемента тока:

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^n \vec{H}_i, \quad (11)$$

где n – общее число участков, на которые разделен проводник с током.

Или в интегральной форме, если число $n \rightarrow \infty$,

$$H_x = \int dH_x; \quad H_y = \int dH_y; \quad H_z = \int dH_z \quad \text{и} \quad H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2}.$$

Определим напряженность поля, создаваемого прямолинейным бесконечным проводником с током в точке C , находящейся на расстоянии b от проводника. Выделим на проводнике с током I элемент тока $Id\vec{l}$ и проведем радиус-вектор $\vec{r}$ в точку C . Для определения напряженности поля используем закон Био – Савара – Лапласа в скалярной форме, поскольку все элементы тока создают магнитное поле с одинаковым направлением вектора $d\vec{H}$, что позволяет векторное сложение заменить скалярным. Для элемента тока Idl закон Био – Савара – Лапласа имеет вид (в системе СИ)

$$dH = \frac{Idl \sin \alpha}{4\pi r^2}, \quad (12)$$

где α – угол между вектором $\vec{r}$ и направлением тока.

Из рис. 1.6 следует, что

$$r = \frac{b}{\sin \alpha}; \quad dl = \frac{dS}{\sin \alpha} = \frac{rd\alpha}{\sin \alpha}.$$

Подставляя эти выражения в (12), получаем

$$dH = \frac{Ibd\alpha \sin^3 \alpha}{4\pi R^2 \sin^2 \alpha} = \frac{I}{4\pi b} \sin \alpha \cdot d\alpha, \quad (13)$$

Чтобы найти H , надо просуммировать все dH , т.е. проинтегрировать функцию (13) по углу α . Пределы интегрирования определяем из следующих соображений. Проводник конечной длины l из точки C виден под углами α_1 (снизу) и α_2 (сверху), причем оба угла отсчитываются в одном направлении (на рис. 1.6 – против часовой стрелки).

Таким образом,

$$H = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dH = \frac{I}{4\pi b} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = -\frac{I}{4\pi b} \cos \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{I}{2\pi b} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (14)$$

Для бесконечного прямого проводника снизу $\alpha_1 \rightarrow 0$, а сверху $\alpha_2 \rightarrow \pi$, поэтому

$$H = \frac{I}{4\pi b} (\cos 0 - \cos \pi) = \frac{I}{2\pi b}. \quad (15)$$

Направление $\vec{H}$ определяется правилом «правого винта». Для нашего случая $\vec{H}$ направлен перпендикулярно к рисунку к нам.

Пусть ток протекает по окружности (кольцевому проводнику) (рис. 1.7). В этом случае все элементы dl проводника перпендикулярны к радиус-вектору $\vec{r}$ (для поля в центре), $\sin \alpha = 1$ и $|\vec{r}| = R$, где R – радиус кольца.

Поэтому согласно (12) напряженность dH в центре кругового проводника

$$dH = \frac{Idl}{4\pi R^2}.$$

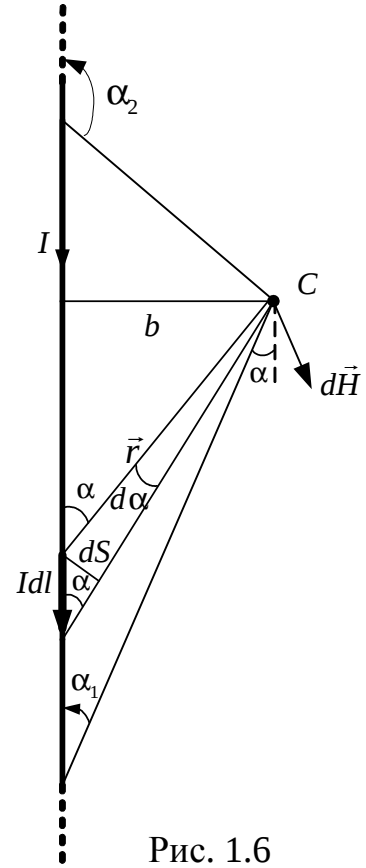


Рис. 1.6

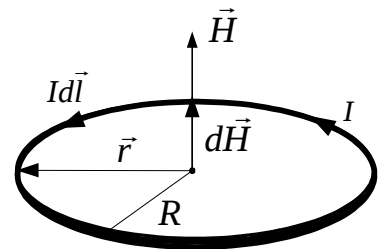


Рис. 1.7

Так как все элементы тока создают поле, напряженность которого $d\vec{H}$ направлена одинаково, то, переходя от векторного сложения к скалярному, получаем напряженность поля в центре кругового проводника

$$H = \frac{I}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{I}{4\pi R^2} 2\pi R = \frac{I}{2R}. \quad (16)$$

Для проводника, не лежащего в плоскости, не образующего замкнутое кольцо (ϕR – часть кольца, ограниченная углом ϕ), но имеющего определенный радиус кривизны R , выражение (16) преобразуется к виду

$$H = \frac{I}{4\pi R^2} \int_0^{\phi R} dl = \frac{I}{2R} \frac{\phi}{2\pi}.$$

Напряженность магнитного поля движущегося заряда также можно определить, используя закон Био – Савара – Лапласа. Для этого ток в выражении (12) необходимо выразить через заряд. Силу тока можно определить через плотность тока j и площадь S поперечного сечения проводника ($I = jS$), а плотность тока j – через концентрацию n движущихся носителей и скорость их направленного движения ($j = nq\upsilon$, где q – заряд частицы). Таким образом,

$$Idl = jSdl = nq\upsilon Sdl = nqdV\upsilon = Nq\upsilon,$$

где dV – объем элемента проводника dl , N – полное число свободных носителей заряда в отрезке dl проводника.

Согласно (12)

$$dH = \frac{Nq\upsilon \sin \alpha}{4\pi r^2},$$

а напряженность поля, создаваемого одной заряженной частицей в момент времени, соответствующий расстоянию r между зарядом и точкой C (см. рис. 1.6), в скалярной форме

$$H = \frac{q\upsilon \sin \alpha}{4\pi r^2}. \quad (17)$$

В векторной форме (17) запишется в виде

$$\vec{H} = \frac{q[\vec{\upsilon} \times \vec{r}]}{4\pi r^3}. \quad (18)$$

Формула (18) определяет $\vec{H}$ для любого заряда, движущегося со скоростью $\vec{\upsilon}$. Для отрицательного заряда вектор $\vec{H}$ имеет противоположное направление (относительно правила буравчика) поскольку направле-

ние вектора элемента тока $I d\vec{l}$ совпадает с направлением движения положительного заряда и, соответственно, противоположно движению электронов.

Вихревой характер магнитного поля проявляется также при определении циркуляции вектора напряженности поля.

Циркуляцией вектора напряженности $\vec{H}$ по замкнутому контуру L называется интеграл вида

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \oint_L H_l dl, \quad (19)$$

где H_l – проекция вектора напряженности $\vec{H}$ в некоторой точке контура на элемент dl ; $d\vec{l}$ – вектор элемента длины выбранного контура циркуляции, направленный по направлению обхода контура,

$$H_l = H \cos \alpha,$$

где α – угол между векторами $\vec{H}$ и $d\vec{l}$.

В электрическом поле (потенциальном) циркуляция вектора $\vec{E}$ вдоль замкнутого контура равна нулю (**признак потенциального характера электрического поля**):

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Если в магнитном поле контур L выбрать вдоль силовой линии, то, учитывая вихревой характер поля, можно утверждать, что $\oint_L H_l dl \neq 0$.

Например, силовые линии бесконечно длинного прямолинейного проводника представляют собой концентрические окружности радиуса r , охватывающие проводник. В каждой точке выбранного контура, совпадающего с силовой линией, вектор $\vec{H}$ одинаков по модулю $\left(H = \frac{I}{2\pi r_0} \right)$, следовательно, циркуляция вектора $\vec{H}$ по такому контуру равна

$$\oint_L H_l dl = \oint_L \frac{I}{2\pi r_0} dl = \frac{I}{2\pi r_0} \int_0^{2\pi r_0} dl = I. \quad (20)$$

Если контур охватывает несколько токов,

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum_{i=1}^n I_i, \quad (21)$$

где правая часть равенства – алгебраическая сумма токов, охватываемых контуром циркуляции.

Соотношение (21) связывает циркуляцию вектора напряженности магнитного поля с величиной охватываемого контуром тока и называется **законом полного тока** (или **теоремой о циркуляции вектора напряженности магнитного поля**).

Положительным считается ток, направление которого совпадает с направлением обхода по контуру правилом правого винта, ток противоположного направления считается отрицательным.

Выражение (21) справедливо для бесконечно длинных проводников с током. Это ограничение снимается более строгой формулировкой закона полного тока, который может быть применен и к проводникам конечной длины. Прежде чем привести эту формулировку, следует отметить, что проводник, который создает напряженность магнитного поля в некоторой точке, всегда образует некоторую замкнутую цепь. Поэтому, определяя $\vec{H}$ в данной точке, мы должны учитывать все элементы этой цепи. Это может быть достигнуто, если **закон полного тока** сформулировать следующим образом: *циркуляция вектора $\vec{H}$ по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, пересекающих любую поверхность, опирающуюся на этот контур*. Эта формулировка показывает, что при определении напряженности поля, созданного некоторым элементом (ограниченной длины) цепи с током, необходимо учитывать вклад проводников, подводящих и отводящих ток от рассматриваемого элемента.

Используя закон Ампера, рассмотрим взаимодействие параллельных проводников с током (рис. 1.8). Предположим, что в изотропной среде с магнитной проницаемостью μ на расстоянии d друг от друга расположены

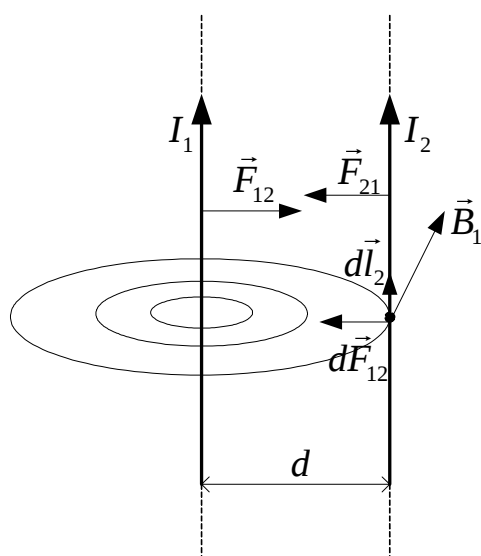


Рис. 1.8

два проводника. Пусть по одному из них течет ток I_1 , по второму – I_2 , и направления токов совпадают. Выделим на проводнике 2 элемент dl_2 . На этот элемент будет действовать сила Ампера $dF_{12} = B_1 I_2 dl_2 \sin \alpha$, причем модуль вектора магнитной индукции B_1 , созданный проводником с током I_1 , в месте расположения проводника с током I_2 определяется выражением

$$B_1 = \mu \mu_0 \frac{I_1}{2\pi d}.$$

Вектор $\vec{B}$ направлен перпендикулярно к току I , поэтому $\sin \alpha = 1$. Учитывая это, находим

$$dF_{12} = \frac{\mu\mu_0 I_1}{2\pi d} I_2 dl_2.$$

Применяя правило левой руки, определяем направление этой силы (см. рис. 1.8). Чтобы определить силу F_{12} , т.е. силу, действующую со стороны проводника 1 на проводник 2, нужно просуммировать все элементарные силы dF_{12} :

$$F_{12} = \int_0^{l_2} dF_{12} = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \int_0^{l_2} dl_2 = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2 l_2}{2\pi d}. \quad (22)$$

Сила F_{12} , с которой проводник 1 действует на параллельный ему проводник 2, согласно третьему закону Ньютона численно равна силе F_{21} , с которой проводник 2 действует на проводник 1.

Если по проводникам текут токи в одинаковых направлениях, то проводники притягиваются, а если в противоположных – отталкиваются.

Пусть проводник с током I длиной l помещен в пространство, где существует магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ (рис. 1.9). Действующая на проводник сила Ампера $F = IlB$ направлена влево ($\sin \alpha = 1$). Под действием этой силы проводник l за некоторое время переместится на расстояние dx . Элементарная работа перемещения $dA = Fdx$, или

$$dA = BIl dx = BIdS = Id\Phi. \quad (23)$$

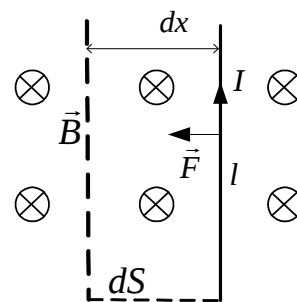


Рис. 1.9

Работа, совершаемая при перемещении проводника с током в магнитном поле, равна произведению силы тока на магнитный поток сквозь поверхность, которую «заметает» проводник при его движении.

В более общем случае, когда I – функция времени или $\vec{B}$ в области движения проводника изменяется, работа перемещения определяется интегрированием (23), когда B или (и) I записываются в виде соответствующих функций. Например, пусть по длинному проводнику M (рис. 1.10) и параллельному ему отрезку проводника K длиной l текут противоположно направленные

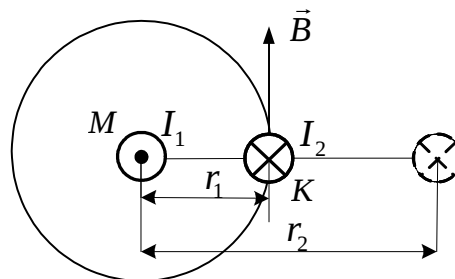


Рис. 1.10

ные токи I_1 и I_2 . Проводник K вначале закреплен на расстоянии r_1 от проводника M (на рис. 1.10 показано сечение проводников). После освобождения проводника K он перемещается до расстояния r_2 . Индукция $\vec{B}$ поля прямого длинного проводника определяется по формуле

$$B = \mu\mu_0 \frac{I_2}{2\pi r},$$

т.е. убывает обратно пропорционально расстоянию r .

На подвижный проводник K действует сила

$$F(r) = \mu\mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi r} l.$$

Поэтому элементарная работа переменной силы на пути dr равна

$$dA = F(r) dr.$$

Работа сил поля при перемещении проводника K от r_1 до r_2

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr \quad \text{или} \quad A = \int_{r_1}^{r_2} \mu\mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi} l \frac{dr}{r} = \mu\mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi} l \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Силу действия магнитного поля на движущийся заряд можно найти исходя из закона Ампера. Пусть по проводнику длиной dl за промежуток времени dt проходит заряд dQ , образованный dN зарядами величиной q , сила которого $I = \frac{dQ}{dt} = \frac{qdN}{dt}$.

Согласно закону Ампера на dN зарядов будет действовать сила

$$dF = B I dl \sin \alpha = B \frac{qdN}{dt} dl \sin \alpha.$$

Сила, с которой поле действует на каждый заряд, равна

$$F_{\text{Л}} = \frac{dF}{dN} = Bq \frac{dl}{dt} \sin \alpha = Bq v \sin \alpha,$$

где $\frac{dl}{dt} = v$ – скорость движения заряда; α – угол между вектором скорости $\vec{v}$ и вектором магнитной индукции $\vec{B}$.

Сила Лоренца, действующая со стороны магнитного поля на движущийся заряд q , равна (в скалярной и векторной формах)

$$\begin{aligned} F_{\text{Л}} &= qvB \sin \alpha; \\ \vec{F}_{\text{Л}} &= q[\vec{v} \times \vec{B}]. \end{aligned} \tag{24}$$

Сила Лоренца перпендикулярна к векторам $\vec{v}$ и $\vec{B}$. Ее направление определяется согласно **правилу левой руки**: если пальцы направить вдоль вектора скорости положительного заряда, а вектор $\vec{B}$ входит в ладонь, большой палец показывает направление силы (рис. 1.11, а). С изменением знака заряда направление силы изменяется на противоположное (см. рис. 1.11, б).

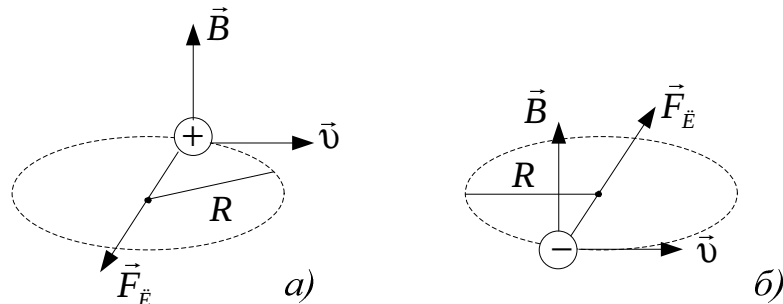


Рис. 1.11

Из (24) можно сделать выводы:

- если скорость заряда равна нулю ($v = 0$), то $F_L = 0$, т.е. магнитное поле не действует на неподвижную заряженную частицу;
- если $\alpha = 0$, $\sin\alpha = 0$, то $F_L = 0$, т.е. если частица движется так, что вектор скорости $\vec{v}$ частицы параллелен вектору магнитной индукции $\vec{B}$, то магнитное поле на движение заряда не влияет.

Так как сила Лоренца всегда направлена перпендикулярно к вектору скорости отдельно движущейся частицы, то она не изменяет величину скорости, а изменяет лишь направление ее движения, т.е. по физической сути является центростремительной силой. Действие этой силы не приводит к изменению энергии заряженной частицы, т.е. *сила Лоренца не совершает работу*.

Это свойство силы Лоренца используется при исследовании свойств заряженных частиц, поскольку траектория такой частицы в магнитном поле зависит от ее удельного заряда $\frac{q}{m}$, скорости v и величины индукции магнитного поля B . Действительно, если частица движется со скоростью v только под действием силы Лоренца ($\vec{F}_L \perp \vec{v}$), то траектория частицы представляет собой окружность радиусом R , который можно определить из равенства силы Лоренца и центростремительной силы:

$$\frac{mv^2}{R} = qvB,$$

откуда

$$R = \frac{mv}{qB}. \quad (25)$$

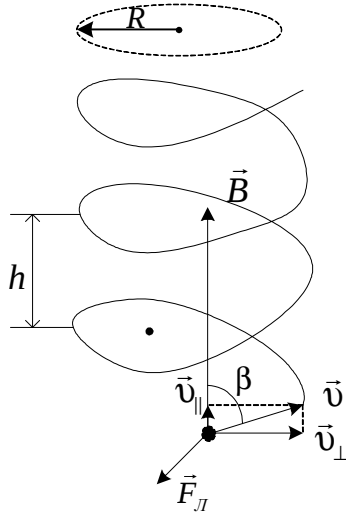


Рис. 1.12

Если частица движется под углом β к линиям $\vec{B}$, то траекторией ее движения является *винтовая линия (спираль)* (рис. 1.12). Радиус спирали, согласно (25), определяется в этом случае компонентой скорости $v_{\perp}$, перпендикулярной к вектору $\vec{B}$, т.е.

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv \sin \beta}{qB}.$$

Шаг h спирали определяется составляющей скорости $v_{\parallel}$ частицы, совпадающей по направлению с вектором $\vec{B}$, как расстояние, которое проходит частица в направлении вектора $\vec{B}$ за время одного оборота T :

$$h = v_{\parallel}T = vT \cos \beta,$$

где $T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi R}{v \sin \beta}$ – *период обращения* (время одного оборота частицы).

Если заряд движется в области, где одновременно действуют электрическое и магнитное поля, то результирующая сила, действующая на частицу,

$$\vec{F} = q[\vec{v} \times \vec{B}] + q\vec{E},$$

т.е. сила имеет две составляющие: обусловленную действием магнитного (первое слагаемое) и электрического (второе слагаемое) полей. Между этими составляющими имеется принципиальная разница. Электрическое поле изменяет величину скорости и кинетическую энергию частицы, а однородное магнитное поле изменяет только направление движения.

Совместное действие на заряженные частицы электрического и магнитного полей используется для определения удельного заряда q/m частицы в приборах, называемых *масс спектрометрами*. Измерение q/m для ионов является важнейшим и наиболее точным методом определения атомных масс химических элементов и широко применяется в современной физике.

Еще одним важным примером проявления силы Лоренца является эффект, который обнаружил американский ученый Э. Холл: в проводнике, помещенном в магнитное поле, возникает разность потенциалов в направ-

лении, перпендикулярном к вектору магнитной индукции $\vec{B}$ и плотности тока $\vec{j}$, вследствие действия силы Лоренца на заряды, движущиеся в этом проводнике. Опыты показали, что разность потенциалов U определяется равенством

$$U = \kappa b j B, \quad (26)$$

где κ – постоянная Холла, зависящая от рода вещества; j – плотность тока в проводнике.

Этот эффект объясняется следующим образом. В направлении вектора $\vec{j}$ свободные электроны проводника движутся со скоростью $\vec{v}$, на них действует сила Лоренца, равная

$$\vec{F}_L = e[\vec{v} \times \vec{B}].$$

В результате все электроны, двигаясь влево, одновременно смещаются вверх к плоскости S_1 , создавая на ней избыточный отрицательный заряд (рис. 1.13). На нижней плоскости S_2 остается нескомпенсированный положительный заряд атомов кристаллической решетки, и между плоскостями

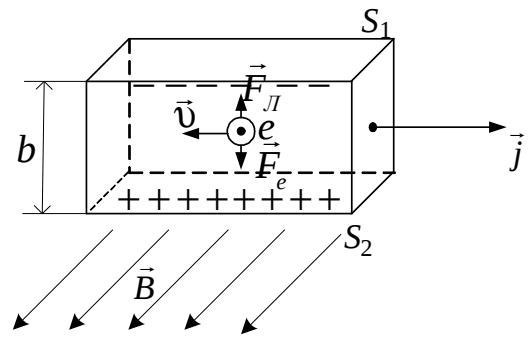


Рис. 1.13

S_1 и S_2 возникает разность потенциалов U . Электрическое поле напряженностью E , возникающее в проводнике между плоскостями S_1 и S_2 , действует на электроны с силой $F_e = eE$. Условие $F_e = F_L$ обеспечивает постоянство разности потенциалов U , равной $U = Eb$. С учетом равновесия сил F_L и F_e можно записать: $U = vBb$. Скорость электронов v можно выразить через плотность тока j . Так как $j = ev$, получим

$$U = \frac{1}{ne} j B b.$$

Сравнивая это выражение с (26), получаем

$$\kappa = \frac{1}{ne}.$$

Таким образом, постоянная Холла зависит от концентрации свободных электронов в проводнике. Следовательно, определив экспериментально постоянную Холла, можно найти концентрацию электронов проводимости в проводнике.

1.2. Методические указания к лекционным занятиям

Вопросы лекции	Форма изучения	Литература	Вопросы для самоконтроля
Магнитное поле. Вектор магнитной индукции. Поток вектора магнитной индукции. Закон Ампера. Контур с током в магнитном поле. Напряженность магнитного поля (однородного и неоднородного). Закон Био – Савара – Лапласа. Применение закона к расчету магнитного поля. Закон полного тока. Магнитное взаимодействие токов. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле. Сила Лоренца. Эффект Холла.	лекция + самост.	[8], пп. 20.1 – 20.4 [10], пп. 109 – 121 [6], пп. 2.35 – 2.42 [7], пп. 15.1 – 15.4 [5], пп. 2.36 – 2.43 [8], пп. 20.1 – 20.3 [10], пп. 110 – 119 [7], пп. 5.2, 15.3 [5], пп. 2.37, 2.38 [8], п. 20.2 [10], пп. 113 – 117 [7], пп. 2.40 – 2.45	1. Чему равен и как направлен магнитный момент рамки с током? 2. Что называют индукцией магнитного поля? Как определяют направление вектора магнитной индукции $\vec{B}$? 3. Что такое линии магнитной индукции? Как определяется их направление? Чем они отличаются от линий напряженности электростатического поля? 4. Нарисуйте и покажите, как ориентированы линии магнитной индукции поля прямого тока. 5. Почему магнитное поле является вихревым? 6. Как вычислить силу взаимодействия между протяженными проводниками с током? 7. Как взаимодействуют между собой тонкие прямолинейные параллельные проводники с током? 8. Сформулируйте закон Био – Савара – Лапласа. 9. Как вычислить вектор магнитной индукции магнитных полей линейных токов? 10. Как рассчитать магнитную индукцию поля бесконечного проводника, отрезка проводника? 11. Как рассчитать магнитную индукцию на оси кругового тока, квадратного контура с током, катушки, состоящей из нескольких витков? 12. Когда целесообразно использовать закон полного тока для определения индукции магнитного поля? 13. Что такое поток вектора магнитной индукции? 14. Запишите и поясните формулу для силы Лоренца. 15. Опишите движение заряженной частицы в магнитном поле по спирали? От чего зависит шаг спирали? (Ответы подтвердите выводами формул). 16. Когда заряженная рамка с током в магнитном поле (однородном и неоднородном) поведет себя так, как описано в законе Ампера при перемещении замкнутого контура в магнитном поле? 17. Поясните, как рассчитать индукцию магнитного поля, создаваемого в некоторой точке проводником произвольной формы. 20. В чем заключается эффект Холла? Выведите формулу для холловской разности потенциалов.

1.3. Методические указания к практическим занятиям

Тема занятия	Задачи	Рекомендации	Задачи из сборников
Определение характеристик магнитного поля	Определение индукции магнитного поля, создаваемого проводником произвольной формы в любой точке пространства, и несколькими проводниками	В задачах на расчет индукции магнитного поля, создаваемого несколькими токами, обязательно нужно использовать рисунок, на котором требуется изобразить векторы индукции отдельных токов в рассматриваемых точках поля. При этом особое внимание следует обратить на направление векторов индукции. В общем случае для определения направления вектора индукции произвольного прямолинейного участка с током можно воспользоваться правилом буравчика. Определив направления векторов индукции всех токов, далее нужно найти их количественные значения в рассматриваемой точке поля (по известным формулам) и вычислить индукцию магнитного поля, создаваемого всеми токами, воспользовавшись принципом суперпозиции (векторного сложения) или сложения проекций соответствующих векторов в выбранной системе координат	[1], №№ 121–126 [11], №№ 3.175–3.179 [12], №№ 21.4–21.32
Взаимодействие с магнитным полем проводников с током и движущихся зарядов	Движение зарядов в магнитном поле	При решении задач на движение заряженных частиц в магнитных полях нужно помнить, что: – если вектор скорости частицы параллелен вектору индукции магнитного поля, то частица движется вдоль силовой линии; сила на частицу со стороны магнитного поля не действует; – если скорость частицы перпендикулярна к линиям индукции, то ее траектория – окружность постоянного радиуса R; – если скорость частицы направлена под некоторым углом, то ее траектория представляет собой винтовую линию с радиусом R и шагом h; – независимо от направления скорости частицы и направления магнитного поля сила Лоренца не меняет величину скорости частицы (не совершает работу). При решении таких задач можно придерживаться следующей последовательности: 1) сделать чертеж, на котором изобразить силовые линии магнитного поля и вектор начальной скорости частицы; 2) если начальная скорость частицы направлена под углом к линиям индукции, то ее следует разложить на две составляющие, одна из которых $\vec{v}_\perp$ должна быть направлена перпендикулярно к векторам индукции, а вторая $\vec{v}_\parallel$ – параллельно им. Такое разложение позволяет представить достаточно сложное движение частицы в магнитном поле в виде наложения двух более простых: наличие составляющей $\vec{v}_\perp$ приводит к движению по окружности постоянного радиуса R, а наличие $\vec{v}_\parallel$ – к прямолинейному движению вдоль силовых линий поля;	[12], №№ 3.1–23.40, 23.33–21.35 [1], №№ 13.1–13.3

Тема занятия	Задачи	Рекомендации	Задачи из сборников
Взаимодействие с магнитным полем проводников с током и движущихся зарядов	Движение зарядов в магнитном поле	3) изобразить силы, действующие на частицу в произвольный момент движения. Для определения направления силы Лоренца следует воспользоваться правилом левой руки; 4) ввести сопровождающую систему отсчета, направив одну из осей системы координат по составляющей $\vec{v}_\perp$ скорости частицы, вторую – по составляющей $\vec{v}_\parallel$, третью (обычно в такой оси нет необходимости) – перпендикулярно к первым двум; 5) записать уравнение второго закона Ньютона в проекции на оси выбранной системы координат, дополнив их развернутыми выражениями для сил, действующих на частицу; 6) при необходимости записать уравнения кинематики и решить систему уравнений	[12], №№ 23.1–23.40, 23.33–21.35 [1], №№ 13.1–13.3
	Взаимодействие проводников с током в магнитном поле	При решении задач, в которых рассматривается движение проводников с током в магнитном поле, надо учесть, что эти задачи ничем принципиально не отличаются от задач механики; единственное отличие – это наличие дополнительной силы Ампера. Если в задаче рассматривается контур с током или его часть, то значение силы Ампера и ее направление следует найти для всех участков проводника и сложить силы векторно, а при необходимости проинтегрировать. Следует помнить, что контур с током в магнитном поле силы Ампера будут растягивать или сжимать (но не то и другое одновременно), и если плоскость контура не перпендикулярна к линиям индукции, то на контур будут действовать механический момент сил, разворачивающий контур так, чтобы расположить его в плоскости, перпендикулярной к силовым линиям (чтобы вектора магнитного момента и магнитной индукции имели одинаковое направление).	[12], №№ 23.1–23.40 [12], №№ 25.1–25.46 [1], №№ 13.6–13.10 [2], №№ 11.1–11.26, 11.93–11.102
	Определение магнитного поля распределенных токов	При решении задач на определение магнитного поля распределенных токов необходимо уяснить, что такое распределенные токи, вспомнить понятие «плотность тока». Необходимо научиться выбирать рациональный вид контура циркуляции для упрощения процедуры нахождения циркуляции. Целесообразно внимательно изучить примеры расчета поля соленоида и проводников конечного сечения, а также проводников из различных материалов, объединенных в один проводник, обратив при этом внимание на аналогии с решением задач по определению напряженности электрического поля с помощью теоремы Остроградского – Гаусса в заряженном шаре, сплошном цилиндре	[12], №№ 24.1–24.4 [11], №№ 3.54–3.75 [1], №№ 12.7–12.10, 14.8, 14.9

1.4. Примеры решения задач

Пример 1. По двум бесконечно длинным прямолинейным проводникам, находящимся на расстоянии 10 см друг от друга, текут токи силой 5 А в каждом. Определить индукцию магнитного поля, создаваемого токами в точке А, лежащей посередине между проводниками, в случаях: а) проводники параллельны и токи текут в одном направлении (рис. 1, а); б) проводники параллельны и токи текут в разных направлениях (см. рис. 1, б); в) проводники перпендикулярны, направления токов показаны на рис. 2). (**Уровень 2**).

Решение. Результирующая индукция магнитного поля в данной точке равна векторной сумме индукций полей, создаваемых каждым током в отдельности:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2, \quad (1)$$

где $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ – индукции полей, создаваемых соответственно токами I_1 и I_2 .

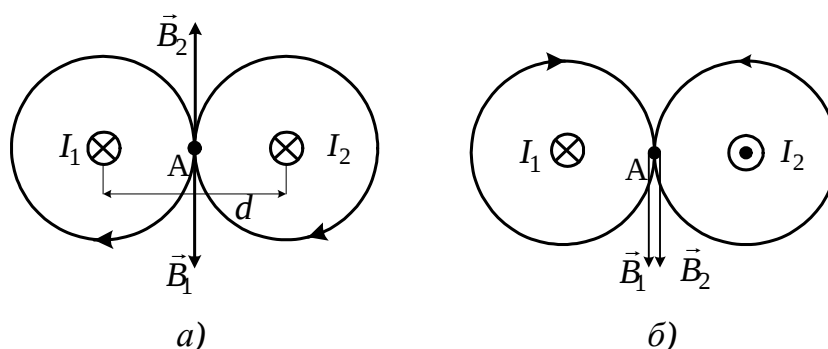


Рис. 1

Если токи текут по параллельным проводникам в одном направлении (см. рис. 1, а), то, применив правило правого винта, определяем направления $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$. Как видно из рисунка, $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ направлены в противоположные стороны, поэтому векторная сумма (1) в данном случае может быть заменена суммой проекций. Выбрав направление B_1 положительным, получаем:

$$B = B_1 - B_2. \quad (2)$$

Индукция полей, создаваемых бесконечно длинными проводниками,

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}; \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}, \quad (3)$$

где r_1 и r_2 – соответственно расстояния от проводников до точки, в которой определяется индукция магнитного поля.

Согласно условию задачи $r_1 = r_2 = r = d/2$; $I_1 = I_2 = I$.

Тогда

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} - \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = 0 \quad (\text{а}).$$

Если токи текут в противоположных направлениях, то очевидно, что

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{\pi r} \quad (\text{б}).$$

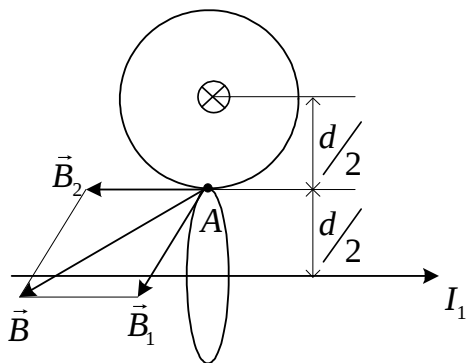


Рис. 2

В случае, когда проводники перпендикулярны (рис. 2), результирующая индукция в точке А, лежащей посередине между проводниками, равна

$$B_1 = \sqrt{B_1^2 + B_2^2};$$

$$B = \sqrt{\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \sqrt{2} \quad (\text{в});$$

$$B = \frac{12,56 \text{ Гн/м} \cdot 5 \text{ А} \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 3,14 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}} = 27,63 \cdot 10^{-6} \text{ Тл} = 27,63 \text{ мкТл}.$$

Ответ: а) $B = 0$; б) $B = 39,2 \text{ мкТл}$; в) $B = 27,63 \text{ мкТл}$.

Пример 2. Прямолинейный проводник изогнут под прямым углом и образует две стороны квадрата длиной $a = 20 \text{ см}$. В плоскости угла помещен кольцевой проводник радиусом $r_0 = 10 \text{ см}$. Сила тока в проводнике $I = 2 \text{ А}$. Найти индукцию в центре кольца (рис. 1). Влияние подводящих проводов не учитывать. (**Уровень 4**).

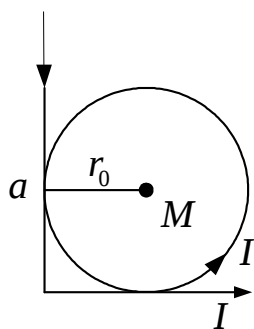


Рис. 1

Решение. Индукция dB в точке поля от элемента проводника dl с током I (проводник имеет произвольную конфигурацию) определяется по закону Био – Савара – Лапласа:

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2}, \quad (1)$$

где r – модуль радиус-вектора, проведенного из элемента в точку, где определяется индукция; α – угол, составленный векторами $d\vec{l}$ и $\vec{r}$; μ_0 – магнитная постоянная.

Направление вектора индукции перпендикулярно к плоскости, содержащей $d\vec{l}$ и $\vec{r}$ (определяется правилом правого винта). Например, в центре окружности векторы индукции от всех элементов перпендикулярны к плоскости окружности и направлены на нас. Интегрируя выражение (1), получаем индукцию в центре окружности радиусом r_0

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2r_0}. \quad (2)$$

Индукция, создаваемая в точке M конечным отрезком AB прямого проводника на расстоянии r_0 от него,

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Эту формулу в некоторых случаях удобнее использовать в виде (выведите эту формулу самостоятельно, используя рис. 2)

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\sin \beta_1 + \sin \beta_2). \quad (3)$$

Вектор индукции $\vec{B}_2$ в точке M перпендикулярен к плоскости, в которой лежат проводник AB и r_0 , и совпадает по направлению с $\vec{B}_1$.

По условию задачи $\beta_1 = \beta_2 = 45^\circ$. Индукция от двух сторон угла

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{4\pi r_0}. \quad (4)$$

Так как направления создаваемых проводниками векторов индукции полей совпадают, то результирующая индукция $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_3$ в центре кольца

$$B = B_1 + B_3 = \frac{\mu_0 I}{2r_0} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \right);$$

$$B = \frac{12,56 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м} \cdot 2 \text{ А}}{2 \cdot 0,1 \text{ м}} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3,14} \right) = 15,32 \cdot 10^{-6} \text{ Тл} = 15,32 \text{ мкТл}.$$

Ответ: $B = 15,32 \text{ мкТл}$.

Пример 3. Два круговых витка с токами I_1 и I_2 лежат в одной плоскости и имеют общий центр. Радиус большего витка 12 см, а меньшего 2 см. Напряженность поля в центре витков равна 50 А/м, если токи текут в одном направлении, и равна нулю, если в противоположных. Определить силы тока в витках. (Уровень 2).

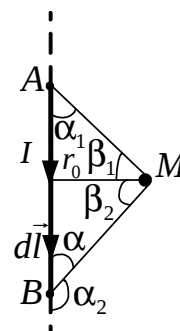
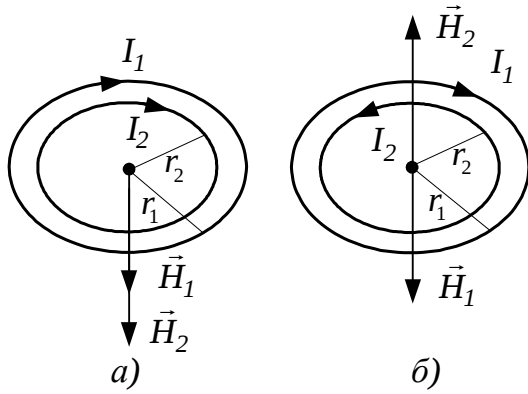


Рис. 2



Решение. Напряженность H магнитного поля, создаваемого кольцевым проводником радиусом r с током I , в центре кольца (см. рисунок) определяется по формуле $H = \frac{I}{2r}$.

По условию, когда токи имеют одинаковое направление

(см. рисунок, а), $H_1 = \frac{I_1}{2r_1} + \frac{I_2}{2r_2}$; если направление токов разное (см. рисунок, б), то $H_2 = \frac{I_1}{2r_1} - \frac{I_2}{2r_2}$.

Составляем систему уравнений и, решая их совместно, получаем

$$\begin{cases} \frac{I_1}{2 \cdot 0,12} + \frac{I_2}{2 \cdot 0,02} = 50 \\ \frac{I_1}{2 \cdot 0,12} - \frac{I_2}{2 \cdot 0,02} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} I_1 + 6I_2 = 12 \\ I_1 - 6I_2 = 0 \end{cases} \quad I_1 = 6 \text{ A}; \quad I_2 = 1 \text{ A}.$$

Ответ: $I_1 = 6 \text{ A}$; $I_2 = 1 \text{ A}$.

Пример 4. Пройдя ускоряющую разность потенциалов 3,52 кВ, электрон влетает в однородное магнитное поле перпендикулярно к линиям индукции. Индукция поля 0,01 Тл, радиус траектории $r = 2$ см. Определить удельный заряд электрона. (**Уровень 3**).

Решение. Удельным зарядом частицы называется величина, равная отношению заряда к массе, т.е. e/m .

В магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ на заряд, движущийся со скоростью $\vec{v}$ перпендикулярно к линиям индукции, действует сила Лоренца $F_L = evB$. Под действием этой силы заряд перемещается по дуге окружности. Так как при этом сила Лоренца вызывает центростремительное ускорение, то согласно второму закону Ньютона

$$evB = \frac{mv^2}{r}.$$

За счет работы A сил электрического поля ($A = eU$) электрон приобретает кинетическую энергию, равную $\frac{mv^2}{2}$, поэтому

$$\frac{mv^2}{2} = eU.$$

Исключив из этих соотношений скорость, получим формулу для определения удельного заряда электрона

$$\frac{e}{m} = \frac{2U}{B^2 r^2};$$

$$\frac{e}{m} = \frac{2 \cdot 3,52 \cdot 10^3 \text{ В}}{10^{-4} \text{ Тл}^2 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}.$$

Ответ: $\frac{e}{m} = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}.$

Пример 5. Момент импульса протона в однородном магнитном поле напряженностью 20 кА/м равен $6,6 \cdot 10^{-23} \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$. Найти кинетическую энергию протона, если он движется перпендикулярно к линиям индукции магнитного поля. (Уровень 3).

Решение. Кинетическая энергия $K = \frac{mv^2}{2}$. Протон движется по окружности радиуса r под действием силы Лоренца $F_L = qvB$, которая численно равна центростремительной силе, тогда $evB = \frac{mv^2}{r}$.

Домножив левую и правую части на $\frac{1}{2}$, получим

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{evBr}{2},$$

где K – кинетическая энергия электрона.

Из выражения для момента импульса $L = mvr$ получим произведение vr и, учитывая, что $B = \mu\mu_0 H$, для кинетической энергии запишем

$$K = \frac{eBL}{2m} = \frac{e\mu\mu_0 HL}{2m}.$$

$$K = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \cdot 12,56 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 6,6 \cdot 10^{-23}}{2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}} = 8 \cdot 10^{-17} \text{ Дж}.$$

Ответ: $K = 8 \cdot 10^{-17} \text{ Дж}.$

Пример 6. Виток радиусом 2 см, по которому течет ток силой 10 А, свободно установился в однородном магнитном поле с индукцией 1,5 Тл. Линии индукции перпендикулярны к плоскости витка. Определите работу, совершаемую внешними силами при повороте витка на угол 90° вокруг оси, совпадающей с диаметром витка. Считать, что при повороте витка сила тока в нем поддерживается неизменной. (**Уровень 4**).

Решение. На виток с током, помещенный в магнитное поле, действует вращающий момент

$$M = p_m B \sin \alpha, \quad (1)$$

где $p_m = IS = I\pi r^2$ – магнитный момент витка; B – индукция магнитного поля; α – угол между векторами $\vec{p}_m$ и $\vec{B}$.

В начальном положении согласно условию задачи виток свободно установился в магнитном поле. Следовательно, векторы $\vec{p}_m$ и $\vec{B}$ совпадают по направлению, т.е. $\alpha = 0$ и $M = 0$.

При действии внешних сил виток выходит из положения равновесия, при этом возникает момент сил, определяемых формулой (1). Момент сил стремится возвратить виток в исходное положение. При повороте витка внешние силы совершают работу против этого момента, который является переменным и зависит от угла поворота α :

$$dA = Md\alpha;$$

$$dA = I\pi r^2 B \sin \alpha d\alpha.$$

Взяв интеграл от этого выражения, найдем работу, совершаемую при повороте витка на конечный угол:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/2} I\pi r^2 B \sin \alpha d\alpha = I\pi r^2 B \int_0^{\pi/2} \sin \alpha d\alpha = I\pi r^2 B (-\cos \alpha) \Big|_0^{\pi/2} = \\ &= I\pi r^2 B (-\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0) = I\pi r^2 B; \end{aligned}$$

$$A = 10 \text{ А} \cdot 3,14 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \cdot 1,5 \text{ Тл} = 18,84 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} \approx 0,02 \text{ Дж}.$$

$$\text{Ответ: } A = 18,84 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} \approx 0,02 \text{ Дж}.$$

Пример 7. Квадратная рамка со стороной 4 см содержит 100 витков и помещена в однородное магнитное поле напряженностью 100 А/м. Направление поля составляет с нормалью к рамке угол 30° . Какая работа совершается при повороте рамки на 30° в одну и в другую сторону, если сила тока в ней 1А? (**Уровень 3**).

Решение. При повороте рамки на 30° по часовой стрелке угол между $\vec{B}$ и $\vec{n}$ $\alpha_1 = 0$, т.е. рамка расположится перпендикулярно к полю. При повороте рамки на 30° в другую сторону угол между $\vec{B}$ и $\vec{n}$ $\alpha_2 = 60^\circ$. Работа при повороте рамки

$$A = I \Delta \Phi N,$$

где I – сила тока; N – количество витков; $\Delta \Phi = \Phi - \Phi_0$ – изменение магнитного потока, пронизывающего плоскость рамки; $\Phi = BS \cos \alpha$, где $S = a^2$ – площадь рамки, $B = \mu_0 H$ – индукция магнитного поля, H – напряженность.

$$\Phi_0 = BS \cos \alpha_0; \quad \Phi_1 = BS \cos \alpha_1; \quad \Phi_2 = BS \cos \alpha_2.$$

В первом случае, когда $\alpha_1 = 0$, $A_1 = I \mu_0 H S N (\cos \alpha - \cos \alpha_0)$.

$$A_1 = I \mu_0 H a^2 N (\cos 0^\circ - \cos 30^\circ).$$

Подставив значения, получим

$$A_1 = 1 \cdot 12,56 \cdot 10^{-7} \cdot 10^4 \cdot 4^2 \cdot 10^{-4} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \approx 2,7 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.}$$

Для второго случая, когда $\alpha_2 = 60^\circ$,

$$A_2 = I \mu_0 H a^2 N (\cos 60^\circ - \cos 30^\circ);$$

$$A_2 = 1 \cdot 12,56 \cdot 10^{-7} \cdot 10^4 \cdot 4^2 \cdot 10^{-4} (0,5 - 0,866) \approx -7,4 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.}$$

Ответ: $A_1 = 2,7 \cdot 10^{-4}$ Дж; $A_2 = -7,4 \cdot 10^{-4}$ Дж.

Пример 8. Ток I течет по стержню диаметром R . Определите зависимость B магнитного поля, создаваемого током, от расстояния, измеряемого от центра стержня, если магнитная проницаемость материала стержня μ . (Уровень 4).

Решение. При решении этой задачи целесообразно воспользоваться законом полного тока (теоремой о циркуляции) $\oint B_l dl = \mu_0 \mu I$.

Так как сечение проводника – круг, контур циркуляции целесообразно взять в виде окружности.

Область пространства (рис. 1) относительно центра проводника делится на две части: 1 (первая) ($r < R$) – в ней течет ток; 2 (вторая) ($r > R$) – в ней ток не течет.

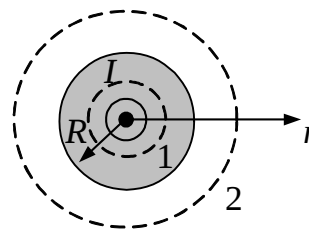


Рис. 1

Для первой области длина произвольно выбранной окружности равна $2\pi r$, в каждой точке ее $\vec{B}$ направлен по касательной и лежит в плоскости окружности. Поэтому

$$\oint B_l dl = B(r) 2\pi r.$$

Ток, охватываемый контуром, равен

$$I(r) = j\pi r^2,$$

и закон полного тока запишется в виде

$$B(r) 2\pi r = \mu\mu_0 j\pi r^2.$$

Так как $j = \frac{4I}{\pi d^2}$, получим $B(r) = \frac{4\mu\mu_0 I r}{2\pi d^2} = 2\mu\mu_0 I \frac{r}{\pi d^2},$

где r – текущая координата, причем $r < R$.

Для второй области (см. рис. 1) контур циркуляции также выбираем в виде окружности и, как и для первой области, циркуляция запишется в виде $\oint B_l dl = B(r) 2\pi r$. Но какой бы радиус r контура циркуляции не был

взят для этой зоны, этот контур будет охватывать весь ток I .

Поскольку вне стержня $\mu \approx 1$, то при $r > R$

$$B(r) 2\pi r = \mu_0 I.$$

Отсюда

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Строим зависимость B от r (рис. 2). Величину индукции на поверхности определим в соответствии с соотношениями (1) и (2), подставляя вместо r величину радиуса проводника $R = \frac{d}{2}$.

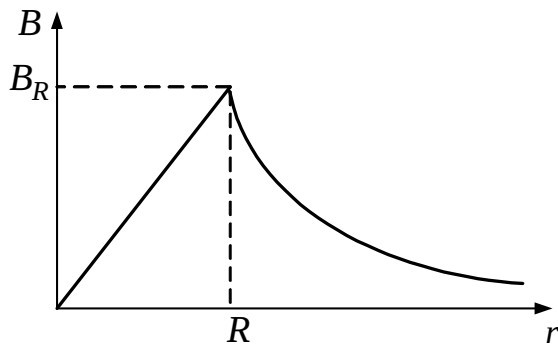


Рис. 2

Согласно (1) при $r \rightarrow R$ слева (изнутри проводника) получаем

$$B_1 = \frac{2\mu\mu_0 I \left(\frac{d}{2}\right)}{\pi d^2} = \frac{\mu\mu_0 I}{\pi d},$$

а согласно (2) при $r \rightarrow R$ справа (снаружи проводника) имеем

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi \frac{d}{2}} = \frac{\mu_0 I}{\pi d}.$$

Видим, что функция B от r на границе проводника терпит разрыв, определяемый величиной μ .

Ответ: при $r < R$ $B(r) = \frac{2\mu_0\mu I r}{\pi d^2}$; при $r > R$ $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$.

Пример 9. Тонкий стержень длиной l , заряженный с линейной плотностью заряда τ , вращается с угловой скоростью ω . Ось вращения перпендикулярна к стержню и проходит на расстоянии a от одного из его концов. Определить индукцию магнитного поля в точке A и создаваемый стержнем магнитный момент (см. рисунок). (**Уровень 5**).

Решение. Каждый элемент несет заряд $dq = \tau dl$. Вследствие вращения стержня заряд dq движется по окружности радиусом r и создает эквивалентный круговой ток $dI_{\circ}$.

Так как $dI = \frac{dq}{dt}$, то $dI_{\circ} = \frac{dq}{T} = \frac{\tau dl}{T}$,

поскольку за период T в воображаемой цепи эквивалентного тока проходит заряд dq .

Заменяя dl на dr , можно записать

$$dB = \frac{\mu_0 dq}{2rT} = \frac{\mu_0 \tau}{2T} \frac{dr}{r}.$$

Так как $\omega = \frac{2\pi}{T}$, выражение для dB запишется в виде

$$dB(r) = \frac{\mu_0 \tau \omega}{4\pi} \frac{dr}{r}.$$

Чтобы учесть весь заряд стержня и определить индукцию B_A в точке A , проинтегрируем в пределах, выбор которых следует из рисунка:

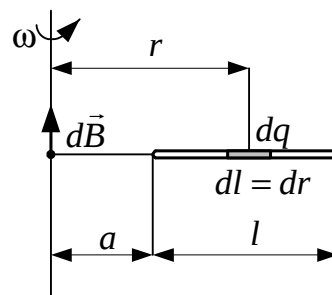
$$B_A = \int_a^{l+a} dB(r) = \frac{\mu_0 \tau \omega}{4\pi} \ln r \Big|_a^{l+a} = \frac{\mu_0 \tau \omega}{4\pi} \ln \frac{l+a}{a}.$$

Магнитный момент замкнутого эквивалентного тока

$$dp_m = S dI_{\circ}.$$

Поэтому $dp_m = \frac{dq}{T} \pi r^2 = \frac{\pi \tau \omega r^2}{2\pi} dr$.

Интегрируя, находим p_m , создаваемый стержнем,



$$p_m = \int_a^{l+a} dp_m = \frac{\tau\omega}{2} \int_a^{l+a} r^2 dr = \frac{\tau\omega r^3}{6} \Big|_a^{l+a} = \frac{\tau\omega}{6} [(l+a)^3 - a^3].$$

$$\text{Ответ: } B_A = \frac{\mu_0 \tau \omega}{4\pi} \ln \frac{l+a}{a}; \quad p_m = \frac{\tau\omega}{6} [(l+a)^3 - a^3].$$

Пример 10. Проводник длиной 0,3 м, сила тока в котором 1 А, равномерно вращается вокруг оси, проходящей через его конец, в плоскости, перпендикулярной к линиям индукции магнитного поля напряженностью 1 кА/м. За 1 мин вращения совершается работа 0,1 Дж. Определить угловую скорость вращения проводника. (**Уровень 3**).

Решение. Работа, совершаемая силами магнитного поля при перемещении проводника с током I , $A = I\Delta\Phi$, где $\Delta\Phi = B\Delta S$ – изменение магнитного потока, т.е. магнитный поток, пересекаемый проводником при его вращении; $B = \mu_0 H$ – индукция; H – напряженность. Площадь ΔS , которую «заметает» проводник при повороте на угол φ , определим как площадь сектора

$$\Delta S = \pi l^2 \frac{\varphi}{2\pi}$$

или с учетом того, что проводник вращается равномерно, т.е. $\varphi = \omega t$,

$$\Delta S = \pi l^2 \frac{\omega}{2\pi} t,$$

где l – длина проводника.

$$A = I\Delta\Phi = IB\Delta S = I\mu_0 H \pi l^2 \frac{\omega}{2\pi} t,$$

отсюда

$$\omega = \frac{2A}{HI\mu_0 l^2 t}.$$

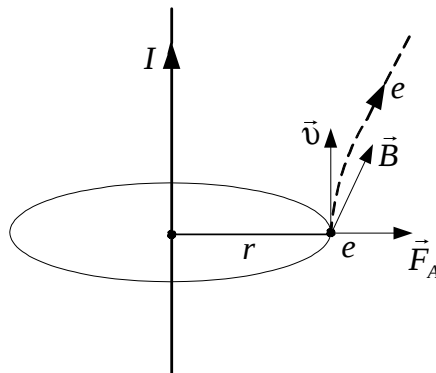
После подстановки числовых значений получаем

$$\omega = \frac{2 \cdot 10^{-1}}{1 \cdot 12,56 \cdot 10^{-7} \cdot 10^3 \cdot 0,09 \cdot 60} = 29,5 \text{ с}^{-1}.$$

$$\text{Ответ: } \omega = 29,5 \text{ с}^{-1}.$$

Пример 11. На расстоянии 5 см параллельно прямолинейному длинному проводнику движется электрон с кинетической энергией 1 кэВ. Рассчитайте силу, которая действует на электрон в момент включения в проводнике тока 1 А (1 эВ = $1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж). (**Уровень 2**).

Решение. Электрон, обладающий кинетической энергией $K = \frac{mv^2}{2}$, движется со скоростью $v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$. Прямолинейный проводник с током I создает магнитное поле, индукция которого B на расстоянии r от него определяется по формуле $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$.



На движущийся электрон со стороны поля действует сила Лоренца $F_L = evB$; $F_L = e\sqrt{\frac{2K}{m}} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$.

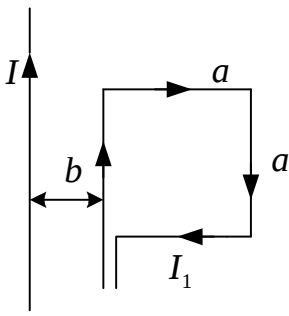
Необходимо отметить, что сила Лоренца, которую мы определили, относится к моменту времени, когда включили ток в проводнике, поскольку в последующие промежутки времени сила Лоренца, действующая на электрон, приведет к постоянному увеличению расстояния r и искривлению траектории электрона (см. рисунок).

$$F_L = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \cdot 12,56 \cdot 10^{-7} \cdot \sqrt{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-16}}}{2 \cdot 3,14 \cdot 0,05 \cdot \sqrt{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 1,2 \cdot 10^{-17} \text{ Н.}$$

Ответ: $F_L = 1,2 \cdot 10^{-17} \text{ Н.}$

1.5. Задачи для самостоятельного решения

- В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,5 \text{ Тл}$ находится прямоугольная рамка длиной $a = 8 \text{ см}$ и шириной $b = 5 \text{ см}$, содержащая $N = 100$ витков тонкой проволоки. Ток в рамке $I = 1 \text{ А}$, а плоскость рамки параллельна линиям магнитной индукции. Определите: 1) магнитный момент рамки; 2) вращающий момент, действующий на рамку. [1) $0,4 \text{ А} \cdot \text{м}^2$; 2) $0,2 \text{ Н} \cdot \text{м}$; **уровень 2**].
- Тонкое кольцо массой 10 г и радиусом $R = 8 \text{ см}$ заряжено с равномерно распределенной линейной плотностью $\tau = 10 \text{ нКл/м}$. Кольцо равномерно вращается с частотой $n = 15 \text{ с}^{-1}$ относительно оси, перпендикулярной к плоскости кольца и проходящей через ее центр. Определите: 1) магнитный момент кругового тока, создаваемого кольцом; 2) отношение магнитного момента к моменту импульса кольца. [1) $1,52 \text{ нА} \cdot \text{м}^2$; 2) 251 нКл/кг ; **уровень 5**].

3. Определите магнитную индукцию на оси тонкого проволочного кольца радиусом $R = 5$ см, по которому течет ток $I = 10$ А, в точке, расположенной на расстоянии $d = 10$ см от центра кольца. [112 мкТл; **уровень 4**].
4. По прямому горизонтально расположенному проводу пропускают ток $I_1 = 10$ А. Под ним на расстоянии $d = 1,5$ см находится параллельный ему алюминиевый провод, по которому пропускают ток $I_2 = 1,5$ А. Определите, какова должна быть площадь поперечного сечения алюминиевого провода, чтобы он удерживался незакрепленным. Плотность алюминия $\rho = 2,7$ г/см³. [$7,55 \cdot 10^{-9}$ м²; **уровень 4**].
5. Два бесконечных прямолинейных параллельных проводника с одинаковыми токами, текущими в одном направлении, находятся друг от друга на расстоянии d . Чтобы их раздвинуть до расстояния $2d$, на каждый сантиметр длины проводника затрачивается работа $A = 138$ нДж. Определите силу тока в проводниках. [10 А; **уровень 3**].
6. Контур из провода, изогнутого в виде квадрата (см. рисунок) со стороной $a = 0,5$ м, расположен в одной плоскости с бесконечным прямолинейным проводом с током $I = 5$ А так, что две его стороны параллельны проводу. Сила тока в контуре $I_1 = 1$ А. Определите силу, действующую на контур, если ближайшая к проводу сторона контура находится на расстоянии $b = 10$ см. Направления токов указаны на рисунке. [4,17 мкН; **уровень 3**].
- 
7. По тонкому проволочному полукольцу радиусом $R = 50$ см течет ток $I = 1$ А. Перпендикулярно к плоскости полукольца возбуждено однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,01$ Тл. Найдите силу, растягивающую полукольцо. Действие на полукольцо магнитного поля подводящих проводов и взаимодействие отдельных элементов полукольца не учитывать. [0,01 Н; **уровень 5**].
8. Согласно теории Бора электрон в атоме водорода движется вокруг ядра по круговой орбите радиусом $r = 52,8$ пм. Определите магнитную индукцию B поля, создаваемого электроном в центре круговой орбиты. [$1,25 \cdot 10^{-23}$ Тл; **уровень 4**].
9. Электрон, обладая скоростью $v = 10$ Мм/с, влетел в однородное магнитное поле перпендикулярно к линиям магнитной индукции. Индукция магнитного поля $B = 0,1$ мТл. Определите нормальное и тангенциальное ускорение электрона. [$a_n = \text{const} = 1,76 \cdot 10^{14}$ м/с²; $a_\tau = 0$; **уровень 4**].

10. Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U = 0,5$ кВ, движется параллельно прямолинейному длинному проводнику на расстоянии $r = 1$ см от него. Определите силу, действующую на электрон, если через проводник пропустить ток $I = 10$ А. [$4,24 \cdot 10^{-16}$ Н; **уровень 2**].
11. Электрон, влетев в однородное магнитное поле с магнитной индукцией $B = 2$ мТл, движется по круговой орбите радиусом $R = 15$ см. Определите магнитный момент p_m эквивалентного кругового тока. [$0,632$ пА·м²; **уровень 2**].
12. Протоны ускоряются в циклотроне в однородном магнитном поле с индукцией $B = 1,2$ Тл. Максимальный радиус кривизны траектории протонов составляет $R = 40$ см. Определите: 1) кинетическую энергию протонов в конце ускорения; 2) минимальную частоту ускоряющего напряжения, при которой протоны ускоряются до энергий 20 МэВ. [1) 11 МэВ; 2) 24,6 МГц; **уровень 4**].
13. В случае эффекта Холла для натриевого проводника при плотности тока $j = 150$ А/см² и магнитной индукции $B = 2$ Тл напряженность поперечного электрического поля $E = 0,75$ мВ/м. Определите концентрацию электронов проводимости, а также ее отношение к концентрации атомов в этом проводнике. Плотность натрия $\rho = 0,97$ г/см³. [$n = 2,5 \cdot 10^{28}$ м⁻³; $n/n' = 0,984$; **уровень 3**].
14. Определите постоянную Холла для натрия, если для него отношение концентрации электронов проводимости к концентрации атомов составляет 0,984. Плотность натрия $\rho = 0,97$ г/см³. [$2,5 \cdot 10^{-10}$ м³/(А·с); **уровень 4**].
15. Соленоид длиной $l = 0,5$ м содержит $N = 1000$ витков. Определите магнитную индукцию поля внутри соленоиды, если сопротивление его обмотки $R = 120$ Ом, а напряжение на его концах $U = 60$ В. [$1,26$ мТл; **уровень 2**].
16. Определите, пользуясь теоремой о циркуляции вектора $\vec{B}$, индукцию B и напряженность H магнитного поля на оси тороида без сердечника, по обмотке которого, содержащей 200 витков, протекает ток 2 А. Внешний диаметр тороида равен 60 см, внутренний – 40 см. [$B = 0,32$ мТл; $H = 255$ А/м; **уровень 4**].

УЧЕБНЫЙ БЛОК 2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ. МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА

Явление электромагнитной индукции имеет большое значение для практической деятельности человечества в областях преобразования механической и тепловой видов энергии в электрическую; преобразования электрической энергии, электромагнитной связи и локации; исследования свойств вещества. В содержание блока включены взаимосвязанные вопросы, составляющие феноменологическую основу электромагнитной теории.

При изучении данного раздела студенты должны

иметь представление:

- об электрической емкости;
- об энергии электрического поля;
- об эквивалентных токах;
- о магнитном потоке;
- о принципе суперпозиции магнитных полей;
- о законах постоянного тока;
- о теории Бора о строении атома;

обладать навыками:

- определения параметров магнитного поля;
- решения задач с применением законов полного тока и Био – Савара – Лапласа;
- определения величины и направления магнитного момента рамки с током;
- нахождения сил взаимодействия токов и зарядов с магнитным полем;
- определения параметров цепи постоянного тока.

Учебная программа блока

Содержание блока	Форма подготовки	Литература
ЭДС электромагнитной индукции. Закон Фарадея. Потокосцепление. Электронная теория электромагнитной индукции	лекция	[3] – [8], [10], [13], [14], [18]
Самоиндукция. Индуктивность контура. Взаимная индукция. Энергия и плотность энергии магнитного поля	лекция, самост.	
Токи при замыкании и размыкании цепи с индуктивностью. Электромагнитные колебания в LC-контуре. Ускорители заряженных частиц*	лекция	
Магнитные свойства вещества. Вектор намагничивания. Диамагнетики. Парамагнетики. Ферромагнетики	лекция	

* Рассматривается ознакомительно.

Цели обучения

Студент должен знать	Студент должен уметь
– закон электромагнитной индукции; правило Ленца; – явления самоиндукции и взаимной индукции; – формулы, определяющие энергию магнитного поля, плотность энергии, временные закономерности токов при замыкании и размыкании цепи с индуктивностью, частоту колебаний в LC-контуре, волновое сопротивление LC-контура; – магнитные свойства вещества на основе ориентационной и индуцированной намагниченности	– определять ЭДС индукции в проводниках, взаимодействующих с магнитным полем; – определять энергию и плотность энергии магнитного поля в различных структурах; – определять направление индукционных токов при изменении потокоцепления; – определять индуктивность проводников; – определять взаимную индуктивность проводников; – определять параметры колебаний в LC-контуре и его волновое сопротивление; – определять токи в цепях с индуктивностью в заданный момент времени

2.1. Краткое содержание теоретического материала

Явление электромагнитной индукции

В 1831 г. М. Фарадей экспериментально обнаружил, что в замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока через площадь, охватываемую контуром, возникает электрический ток. Это явление было названо *электромагнитной индукцией*. Экспериментально Фарадей установил, что *индукционный ток* возникает при изменении магнитного потока, пронизывающего поверхность, ограниченную контуром, независимо от того, каким способом достигается это изменение: изменением индукции магнитного поля во времени, изменением площади контура и его ориентации в пространстве или изменением того и другого одновременно.

Рассмотрим физические причины возникновения ЭДС индукции, а, следовательно, и индукционного тока. Пусть элемент проводника длиной l движется в магнитном поле со скоростью v . Магнитное поле однородно, вектор магнитной индукции направлен перпендикулярно к плоскости от нас (рис. 2.1). На каждый свободный

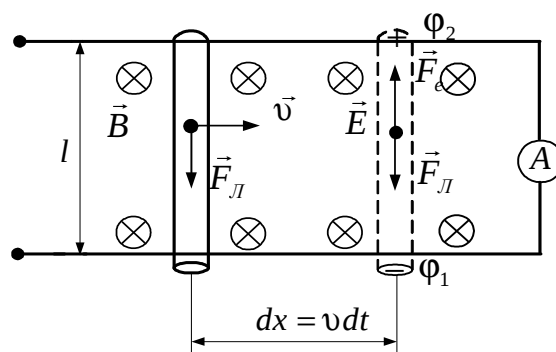


Рис. 2.1

электрон проводника со стороны магнитного поля действует сила Лоренца. Заряд электрона отрицательный, поэтому сила Лоренца F_L направлена вниз. Следовательно, электроны смещаются в нижнюю часть элемента l , а вверху остается нескомпенсированный положительный заряд, и на концах

элемента проводника l образуется разность потенциалов $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Эту разность потенциалов можно рассматривать как *электродвижущую силу* для замкнутой цепи, частью которой является движущийся проводник. При этом в цепи устанавливается некоторый ток I . Если скорость движения проводника постоянна, то и ток будет постоянным. Как следует из законов постоянного тока, разность потенциалов $\Delta\varphi$ стремится к максимально возможной величине ($\varepsilon_{\text{инд}}$), когда сопротивление внешней для движущегося проводника l цепи стремится к бесконечности (разрыв цепи). Для этого случая (как и при рассмотрении эффекта Холла) можно записать: $F_e = F_{\text{Л}}$ или

$$eE = e\nu B, \quad \text{или} \quad E = \nu B,$$

где E – напряженность электрического поля в движущемся проводнике l .

Так как в данном случае ($R \rightarrow \infty$)

$$\Delta\varphi = -El = \varepsilon_{\text{инд}},$$

с учетом предыдущего равенства

$$\varepsilon_{\text{инд}} = -\nu Bl.$$

Учитывая, что $\nu = \frac{dx}{dt}$, преобразуем полученное выражение

$$\varepsilon_{\text{инд}} = -B \frac{ldx}{dt},$$

где $ldx = dS$ – площадь контура, которую заполняет движущийся проводник длиной l за промежуток времени dt . Следовательно, **закон Фарадея** имеет следующий вид:

$$\varepsilon_{\text{инд}} = -\frac{BdS}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (1)$$

где Φ – поток магнитной индукции сквозь поверхность, ограниченную этим контуром.

Используя законы Ома для полной цепи и закон Фарадея, выражение для индукционного тока можно записать в виде

$$I_{\text{инд}} = \frac{\varepsilon_{\text{инд}}}{R+r} = -\frac{1}{(R+r)} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (2)$$

где R – сопротивление цепи.

Направление индукционного тока определяется **по правилу Ленца**: *индукционный ток всегда направлен так, что магнитное поле, формируемое им, стремится препятствовать всякому изменению магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную контуром, в котором возникает ЭДС электромагнитной индукции.*

Иначе говоря, при возрастании магнитного потока $\frac{d\Phi}{dt}$ индукционный ток течет так, что индукция магнитного поля, создаваемого им, направлена против индукции внешнего поля. При уменьшении магнитного потока индукция магнитного поля индукционного тока сонаправлена с индукцией внешнего поля.

Электродвижущая сила (ЭДС) в цепи – это результат действия сторонних сил, т.е. сил неэлектрического происхождения. При движении проводника в магнитном поле роль сторонних сил выполняет сила, движущая проводник l . Работа этой силы преобразуется в энергию магнитного поля, создаваемого индукционным током, а затем и в тепловую энергию, согласно закону Джоуля – Ленца.

Поскольку магнитный поток сквозь поверхность, ограниченную контуром, выражается соотношением $\Phi = BS \cos \alpha$, то закон Фарадея охватывает все возможные случаи изменения магнитного потока Φ : за счет изменения индукции внешнего магнитного поля B , за счет изменения ориентации нормали к плоскости контура относительно внешнего магнитного поля (угол α) и за счет изменения площади S , охватываемой контуром.

Наличие индукционного тока в замкнутом контуре при всех указанных условиях свидетельствует о том, что в проводнике (контуре) формируется электрическое поле с вектором $\vec{E}$ вдоль проводника (условие протекания тока). Очевидно, что силовые линии этого поля (как и проводник) замкнуты. Это означает, что переменное магнитное поле, в котором находится замкнутый контур, формирует в контуре вихревое электрическое поле. Такое поле (в отличие от поля зарядов) не является потенциальным, т.е. перемещение заряда в таком поле по замкнутой траектории не равно нулю.

Если замкнутый контур содержит N последовательно соединенных витков (например, катушка или соленоид), то ЭДС индукции равна сумме ЭДС каждого витка:

$$\varepsilon_{\text{инд}} = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt}, \quad (3)$$

где Ψ – суммарный магнитный поток через N витков (потокосцепление катушки).

Закон Фарадея (1) согласуется с законом сохранения энергии. Пусть в замкнутом проводнике источником ЭДС (ε) создается ток I (рис. 2.2). Элемент контура l может свободно пе-

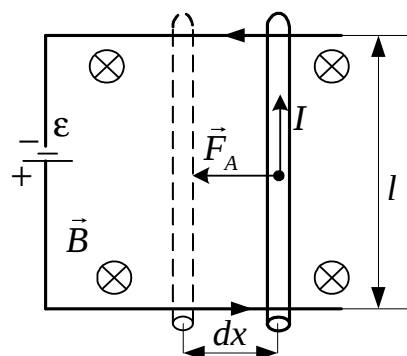


Рис. 2.2

ремещаться. Контур находится во внешнем магнитном поле с индукцией B . Под действием силы Ампера проводник за время dt переместится на отрезок dx . При этом сила Ампера совершает работу $dA = Id\Phi$. Если сопротивление контура равно R , то закон сохранения энергии запишется в виде

$$\varepsilon Idt = I^2 Rdt + Id\Phi, \quad (4)$$

где левая часть равенства – энергия, потребляемая от источника ЭДС, первое слагаемое правой части – энергия Джоуля – Ленца, а второе слагаемое – работа силы Ампера по перемещению проводника l . Из (4) следует

$$I = \frac{\varepsilon - \frac{d\Phi}{dt}}{R}. \quad (5)$$

Из (5) следует, что величина $\frac{d\Phi}{dt}$ может иметь смысл только при ЭДС, включенной встречно источнику ЭДС, изображенному на схеме (см. рис. 2.2).

Известно, что контур с током формирует магнитное поле, которое связано с этим контуром. Такое поле принято называть *сцепленным* с этим контуром. Если ток в контуре изменяется, то изменяется и магнитный поток, сцепленный с контуром. Электродвижущая сила электромагнитной индукции, которая возникает в контуре при изменении силы тока в нем, называется *ЭДС самоиндукции*.

Магнитный поток, сцепленный с контуром, всегда пропорционален силе тока в нем:

$$\Phi = LI. \quad (6)$$

Коэффициент пропорциональности L называют коэффициентом *самоиндукции* (*индуктивностью контура*).

Подставляя в закон Фарадея выражение (6), получаем

$$\varepsilon_c = -L \frac{dI}{dt}, \quad (7)$$

где ε_c – ЭДС самоиндукции. Выражение (7) представляет собой **закон Фарадея для самоиндукции**.

Индуктивность L зависит от формы и размеров контура (соленоида), а также от магнитных свойств среды. Если размеры, форма контура и магнитные свойства среды, в которой формируется собственное магнитное поле, не изменяются, то $L = \text{const}$.

Если контур представляет собой соленоид, содержащий N витков, то

$$\varepsilon_c = -\frac{d\Psi}{dt} = -NL \frac{dI}{dt}.$$

Знак « $-$ », как и ранее, отражает правило Ленца.

Определим индуктивность катушки, длина l которой много больше ее диаметра (соленоида). В этом случае можно пренебречь искажением поля вблизи концов соленоида. Используя закон полного тока, можно показать, что напряженность магнитного поля внутри соленоида $H = In$, где n – число витков, приходящихся на единицу длины соленоида. Если общее число витков соленоида длиной l равно N , то $H = I \frac{N}{l}$. Магнитный поток, пронизывающий один виток соленоида,

$$\Phi = BS = \mu\mu_0 I \frac{N}{l} S,$$

где S – площадь поперечного сечения соленоида; μ – относительная магнитная проницаемость окружающей среды.

Полный магнитный поток равен потокоцеплению

$$\Psi = N\Phi = \mu\mu_0 \frac{N^2 I}{l} S.$$

Так как $Sl = V$ (объем соленоида),
то

$$\Psi = \mu\mu_0 \frac{N^2 I}{l^2} V = \mu\mu_0 n^2 VI.$$

Поэтому индуктивность соленоида

$$L = \mu\mu_0 n^2 V \quad \text{или} \quad L = \mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l}. \quad (8)$$

Пусть имеются два контура, расположенные так, что силовые линии магнитного поля, создаваемого одним из контуров с током, пронизывают площадь, охватываемую вторым контуром. Такие контуры называются *индуктивно связанными* (рис. 2.3). Ясно, что первый контур формирует магнитный поток, охватываемый вторым контуром,

$$\Phi_{12} = B_{12} S_2,$$

где B_{12} – индукция магнитного поля, созданного первым контуром в плоскости второго контура, перпендикулярная к его плоскости; S_2 – площадь, охватываемая вторым контуром.

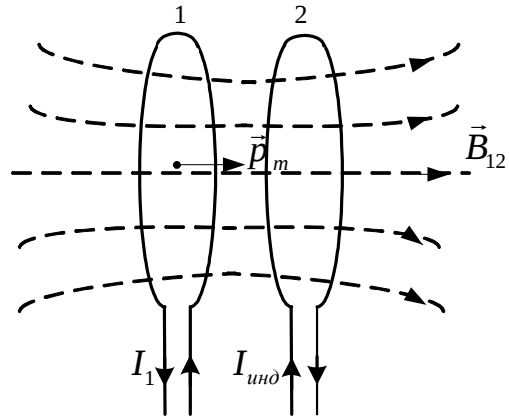


Рис. 2.3

Так как магнитное поле формируется током I_1 , то B_{12} пропорциональна I_1 . С учетом постоянства S_2 можно записать:

$$\Phi_{21} = L_{21}I_1, \quad (9)$$

где L_{21} – коэффициент пропорциональности, названный *индуктивностью контура 2 относительно контура 1 (взаимная индуктивность)*. Изменение тока I_1 приводит к появлению ЭДС индукционного тока $I_{\text{инд}}$ в контуре 2 (ЭДС взаимной индукции):

$$\varepsilon_{21} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -L_{21}\frac{dI_1}{dt}. \quad (10)$$

Экспериментальное исследование взаимной индукции позволило установить следующее:

- взаимная индуктивность зависит только от формы, размеров и взаимного расположения контуров;
- коэффициенты L_{21} и L_{12} равны друг другу: $L_{12} = L_{21}$.

Направление индукционного тока при взаимной электромагнитной индукции подчиняется правилу Ленца:

- если ток I_1 возрастает, то $I_{\text{инд}}$ течет в направлении, противоположном I_1 ;
- если ток I_1 , уменьшается, то $I_{\text{инд}}$ течет в направлении, совпадающем с направлением I_1 .

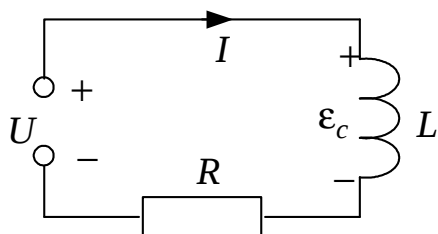


Рис. 2.4

Энергия магнитного поля

Пусть источник ЭДС (U) замкнут на некоторый контур с индуктивностью L (рис. 2.4). Сопротивление контура и внутреннее сопротивление источника ЭДС объединим в общее сопротивление R . Если изменять (например, увеличивать) ток в цепи, то в контуре L возникает ЭДС самоиндукции ε_c . Полярность

этой ε_c определяется правилом Ленца, т.е. она включена «встречно» напряжению на источнике ЭДС.

Закон Ома (для бесконечно малого промежутка времени) для этой цепи запишем в виде

$$I = \frac{U + \varepsilon_c}{R} = \frac{U - L \frac{dI}{dt}}{R} \quad \text{или} \quad U = IR + L \frac{dI}{dt},$$

где U – напряжение на источнике тока.

Умножим последнее уравнение на Idt :

$$UI dt = I^2 R dt + LI dI.$$

Левая часть полученного равенства – это энергия, отдаваемая источником ЭДС. Первое слагаемое правой части – тепловая энергия по закону Джоуля – Ленца. Второе слагаемое правой части может быть только энергией, запасаемой в индуктивном элементе цепи, т.е. энергией магнитного поля или эквивалентной ей работой dA , затрачиваемой на увеличение сцепленного с контуром магнитного поля. Поэтому

$$dA = LI dI .$$

Если проинтегрировать последнее выражение по току в пределах от 0 до I , то получим работу, эквивалентную энергии магнитного поля в индуктивном элементе при токе I :

$$A = W_m = \int_0^I dA = L \int_0^I IdI .$$

В результате получаем

$$W_m = \frac{LI^2}{2} . \quad (11)$$

Используя (11), можно определить связь энергии магнитного поля с его индукцией B . В общем случае, когда магнитное поле неоднородно в каждой конкретной его точке, может быть установлена связь между B и плотностью энергии магнитного поля. Рассмотрим эту связь на примере длинного соленоида, индуктивность которого определяется формулой $L = \mu\mu_0 n^2 V$. В этом случае (11) имеет вид

$$W_m = \frac{\mu\mu_0 n^2 V I^2}{2} .$$

Учитывая, что напряженность поля внутри бесконечно длинного соленоида $H = In$, получаем

$$W_m = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} V$$

или

$$W_m = \frac{BH}{2} V . \quad (12)$$

Магнитное поле соленоида однородно и локализовано внутри него, поэтому энергия распределена по объему соленоида с постоянной плотностью

$$w_m = \frac{W_m}{V} .$$

Учитывая (12), для плотности энергии магнитного поля в общем случае получаем

$$w_m = \frac{BH}{2}. \quad (13)$$

Переходные процессы в цепи с индуктивностью

При определении силы тока $I_{инд}$ в контуре по формуле (2) предполагалось, что в нем действует лишь ЭДС индукции $\varepsilon_{инд} = -\frac{d\Phi}{dt}$. В общем случае в контуре могут действовать и другие источники тока, например, аккумулятор батареи, создающий ЭДС, равную ε . Тогда

$$I = \frac{\varepsilon - \frac{d\Phi}{dt}}{R}, \quad (14)$$

где R – полное сопротивление контура.

Рассмотрим изменение тока в цепи, состоящей из аккумулятора (ε), индуктивного элемента – катушки (L) и сопротивления (R) при подключении и отключении источника ЭДС (ε). Процессы, протекающие при этом в цепи, получили название переходных процессов. Итак, согласно равенству (14)

$$IR = \varepsilon - \frac{d\Phi}{dt} = \varepsilon - L \frac{dI}{dt},$$

откуда $\frac{LdI}{\varepsilon - IR} = dt$. Умножим обе части этого равенства на $\left(-\frac{R}{L}\right)$:

$$-\frac{RdI}{\varepsilon - IR} = -\frac{R}{L}dt.$$

Проинтегрируем полученное выражение:

$$\int_0^I -\frac{RdI}{\varepsilon - IR} = -\int_0^t \frac{R}{L}dt; \quad \ln(\varepsilon - IR) = -\frac{R}{L}t + \ln C$$

или

$$\varepsilon - IR = Ce^{-\frac{R}{L}t}. \quad (15)$$

Постоянную интегрирования C определим для обоих случаев из следующих соображений. При подключении источника ЭДС в начальный момент времени ($t = 0$) ток в цепи отсутствует ($I = 0$), поэтому согласно (15) $C = \varepsilon$.

Тогда сила тока в цепи при подключении источника ЭДС нарастает по закону

$$I = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right), \quad (16)$$

где $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$ – максимально возможный ток в цепи.

При отключении источника ЭДС в начальный момент времени ($t = 0$) ток в цепи имеет максимальное значение ($I = I_0$), следовательно, $C = -I_0 R$ и

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (17)$$

Следовательно, сила тока в контуре в обоих случаях не изменяется мгновенно, а нарастает или спадает за некоторый промежуток времени τ . Это промежуток времени, в течение которого ток в цепи уменьшается в e раз при размыкании цепи, т.е.

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{e} = e^{-\frac{R}{L}\tau}, \quad \text{откуда} \quad \tau = \sqrt{\frac{L}{R}},$$

или τ – это промежуток времени, в течение которого сила тока в цепи достигает значения $\left(1 - \frac{1}{e}\right)I_0$ при замыкании цепи.

Электромагнитные колебания в LC -контуре

Кроме механических колебательных систем, совершающих в процессе движения периодическое изменение состояния относительно равновесного, существуют колебательные системы, в которых осуществляется периодическое изменение состояния полевых структур, в частности, электрического и магнитного полей. К таким колебательным системам относятся электрические цепи, включающие конденсатор емкости C и катушку с индуктивностью L . Пример такого индуктивно-емкостного контура показан на рис. 2.5.

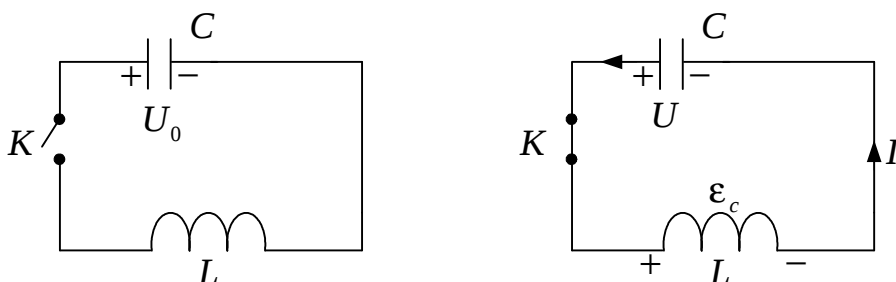


Рис. 2.5

Пусть в исходном состоянии ключ K разомкнут, конденсатор C заряжен до напряжения U_0 , а энергия сосредоточенного в конденсаторе электрического поля

$$W_e = \frac{CU_0^2}{2}.$$

При замыкании ключа K конденсатор начинает разряжаться через соленоид с индуктивностью L . Ток разряда конденсатора вызывает появление магнитного поля внутри соленоида с индуктивностью L .

После полной разрядки конденсатора энергия магнитного поля соленоида через ЭДС самоиндукции обеспечивает перезарядку конденсатора, т.е. снова переходит в энергию электрического поля. Так как энергия в LC -контуре превращается то в энергию электрического поля, то в энергию магнитного поля, колебания в контуре называются *электромагнитными*.

Ток во времени изменяется, поэтому в катушке L возникает ЭДС самоиндукции ε_c , полярность которой показана на рис. 2.5, а величина определяется выражением

$$\varepsilon_c = -\frac{LdI}{dt} = -L \frac{d}{dt} \left(\frac{dq}{dt} \right) = -L \frac{d^2q}{dt^2}, \quad (18)$$

где q – заряд конденсатора; dq – изменение заряда конденсатора или заряд, который протекает в цепи за время dt .

Пренебрегая для упрощения анализа активным сопротивлением цепи, согласно второму правилу Кирхгофа можем записать:

$$U - \varepsilon_c = 0, \quad (19)$$

где U – напряжение на конденсаторе в любой момент времени.

С учетом (18) равенство (19) можно представить как

$$\frac{q}{C} = -L \frac{d^2q}{dt^2}$$

или

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0. \quad (20)$$

Уравнение (20) напоминает (математически) уравнение колебаний механических систем, решением которого является гармоническая функция. Поэтому изменение заряда конденсатора также описывается гармоническим законом

$$q = q_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (21)$$

где q_0 – начальный (максимальный) заряд конденсатора; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – циклическая частота собственных электромагнитных колебаний заряда; φ_0 – начальная фаза колебаний.

Из уравнения (21) получим законы изменения силы тока I и напряжения U для LC -контура:

$$\begin{aligned} I &= \frac{dq}{dt} = I_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0); \\ U &= \frac{q}{C} = U_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \end{aligned} \quad (22)$$

где $I_0 = q_0 \omega_0 = \frac{q_0}{\sqrt{LC}}$ – амплитуда силы тока в контуре; $U_0 = \frac{q_0}{C}$ – амплитуда напряжения на конденсаторе.

Величины I_0 и U_0 связаны между собой соотношением

$$I_0 = \frac{U_0 C}{\sqrt{LC}} = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Так как $\frac{U_0}{I_0} = \sqrt{\frac{L}{C}}$, то из физических соображений (закона Ома) величину $\sqrt{\frac{L}{C}}$ можно считать сопротивлением. Оно называется *волновым сопротивлением* LC -контура.

Магнитное поле в веществе

Определенными магнитными свойствами обладают все вещества, поэтому термин «магнетики» применим ко всем материалам.

Для объяснения магнитных свойств различных веществ рассмотрим действие магнитного поля на движущиеся заряды (электроны) в молекулах и атомах вещества, используя «орбитальную» модель атома Бора. Условно будем считать, что электрон в атоме движется со скоростью $\vec{v}$ по круговой орбите. Это движение можно представить эквивалентным круговым током $I_\circ$, который формирует собственное магнитное поле в веществе. Орбитальный *магнитный момент* электрона с номером i

$$p_{mli} = I_\circ S.$$

Вектор орбитального магнитного момента $\vec{p}_m$ атома равен векторной сумме орбитальных моментов $\vec{p}_{m_i}$ электронов в атоме:

$$\vec{p}_m = \sum_{i=1}^z \vec{p}_{m_i},$$

где z – порядковый номер элемента в таблице Менделеева.

Если вещество имеет молекулярное строение, то орбитальный магнитный момент молекулы равен векторной сумме орбитальных магнитных моментов атомов, входящих в состав молекулы.

Кроме орбитального магнитного момента электроны обладают собственным (спиновым) магнитным моментом $\vec{p}_{msi}$.

Суммарный магнитный момент атома или молекулы равен векторной сумме магнитных моментов (орбитальных и спиновых) входящих в атом (молекулу) электронов:

$$\vec{p}_m = \sum \vec{p}_{mli} + \sum p_{msi}.$$

Собственным и орбитальным магнитными моментами обладают также ядра атомов, однако их суммарные магнитные моменты много меньше магнитных моментов электронов, поэтому ими, как правило, пренебрегают.

Суммарный магнитный момент молекулы (атома) определяется ее строением и в общем случае может быть равен нулю или больше нуля, а ориентация различна в пределах объема вещества.

При внесении магнетика во внешнее магнитное поле может происходить изменение ориентации существующих магнитных моментов атомов и молекул, а также появление (индуцирование) несуществовавших в отсутствие внешнего поля магнитных моментов за счет изменения траекторий движения электронов в атомах. В результате этих эффектов в магнетике формируется собственное магнитное поле с индукцией $\vec{B}_c$, которое складывается с внешним магнитным полем, индукция которого $\vec{B}_{BH}$. Вектор магнитной индукции $\vec{B}$ в магнетике определяется по принципу суперпозиции:

$$\vec{B} = \vec{B}_{BH} + \vec{B}_c. \quad (23)$$

Индукция $\vec{B}_c$ пропорциональна $\vec{B}_{BH}$ для большинства магнетиков (исключая некоторый тип магнетиков, например, ферромагнетики):

$$\vec{B}_c = \chi_m \vec{B}_{BH}, \quad (24)$$

где χ_m – магнитная восприимчивость вещества, показывающая, насколько сильно вещество реагирует на внешнее магнитное поле.

Подставим (24) в (23):

$$\vec{B} = \vec{B}_{BH} + \chi_m \vec{B}_{BH} = \vec{B}_{BH} (1 + \chi_m)$$

или

$$\vec{B} = \mu \vec{B}_{BH}. \quad (25)$$

Величина $\mu = 1 + \chi_m$ получила название *магнитной проницаемости* вещества.

Упорядочение направлений векторов магнитных моментов $\vec{p}_m$ отдельных атомов (молекул) магнетика, а также появление индуцированных магнитных моментов при наложении внешнего магнитного поля приводит к тому, что макроскопический объем приобретает определенный суммарный магнитный момент. Отношение этого суммарного момента к объему вещества (магнетика), помещенного в магнитное поле, называется *вектором намагничивания* $\vec{J}$ или намагниченностью вещества,

$$\vec{J} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N \vec{p}_m, \quad (26)$$

где N – число атомов или молекул, находящихся в объеме.

Вектор намагничивания $\vec{J}$ связан с напряженностью магнитного поля $\vec{H}$ соотношением $\vec{J} = \chi_m \vec{H}$. В отличие от диэлектрической проницаемости веществ, которая всегда больше единицы, магнитная проницаемость может быть как больше единицы, так и меньше. В зависимости от значения величины μ все вещества делятся на три группы: диамагнетики ($\mu < 1$), парамагнетики ($\mu > 1$) и ферромагнетики ($\mu \gg 1$).

Диамагнетики. Суммарный магнитный момент атома (молекулы) диамагнитных веществ равен нулю. При помещении диамагнетика во внешнее магнитное поле возникает индуцированный магнитный момент микрочастиц. Суть этого явления заключается в следующем. Пусть в отсутствие $\vec{B}_{вн}$ электрон движется по круговой орбите радиусом r и для него выполняется условие

$$F_{ц.с.} = F_{\kappa} = m\omega^2 r, \quad (27)$$

где $F_{ц.с.}$ – центростремительная сила, роль которой выполняет кулоновская сила F_{κ} ; m – масса электрона; ω – угловая скорость.

При наложении $\vec{B}_{BH}$ на движущийся электрон начинает действовать сила Лоренца $\vec{F}_L = -e[\vec{v} \times \vec{B}_{BH}]$, которая в рассматриваемом случае направлена по радиусу от центра окружности (рис. 2.6). Поэтому (27) запишется как

$$F_{ц.с.} = F_{\kappa} - F_L.$$

Очевидно, что появление лоренцевой силы приведет к изменению угловой скорости на $\Delta\omega$. С учетом этого запишем:

$$mr(\omega + \Delta\omega)^2 = F_{\kappa} - e\upsilon B_{BH}. \quad (28)$$

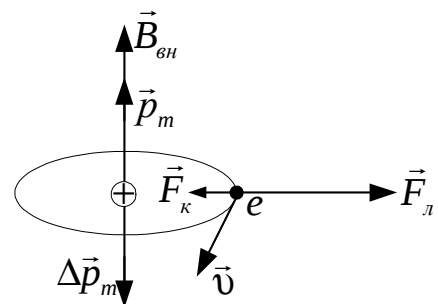


Рис. 2.6

Подставим в (28) $v = \omega r$ и раскроем скобки:

$$m\omega^2 r + 2mr\omega\Delta\omega + mr\Delta\omega^2 = F_k - e r \omega B_{BH}. \quad (29)$$

Величину $mr\Delta\omega^2$ можно считать малой и в уравнении (29) ею пренебречь. В результате получим:

$$\Delta\omega = -\frac{eB_{BH}}{2m}, \quad (30)$$

где знак «минус» означает, что угловая скорость уменьшается.

Изменение ω приводит к изменению орбитального магнитного момента электрона:

$$\Delta p_m = \Delta I_s S = \frac{e\Delta v}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{e\Delta\omega r^2}{2}, \quad (31)$$

где ΔI_s – изменение эквивалентного тока орбитального движения электрона; $\Delta v = r\Delta\omega$.

В итоге (31) приводим к виду

$$\Delta \vec{p}_m = -\frac{e^2 r^2}{4m} \vec{B}_{BH}, \quad (32)$$

где знак «минус» означает, что $\Delta \vec{p}_m$ противоположен по направлению орбитальному моменту электрона $\vec{p}_m$.

Так как для диамагнетиков суммарный магнитный момент всех электронов (молекул) в отсутствие B_{BH} равен нулю, то появление $\Delta \vec{p}$ для всех электронов атома свидетельствует о том, что возникает индуцированный в атоме (молекуле) дополнительный магнитный момент $\Delta \vec{p}_m$. Это явление называют **диамагнитным эффектом**. Согласно (32) собственное магнитное поле имеет индукцию, направленную против индукции внешнего поля. В результате индукция магнитного поля в диамагнетике оказывается меньше, чем индукция внешнего поля, т.к. магнитная проницаемость μ диамагнетиков меньше 1.

Зная Δp_m для одного электрона, можно определить величину магнитной восприимчивости. Определим модуль суммарного дополнительного момента Δp_m^a (для всех электронов атома (молекулы)):

$$\Delta p_m^a = -\sum_{i=1}^N \frac{e^2}{4m} \left(\sum_{i=1}^N r_i^2 \right) B_{BH},$$

где N – число электронов в атоме; r_i – радиус орбиты i -того электрона в атоме.

Для всего объема вещества (N_0 атомов) можем записать:

$$\sum_{i=1}^{N_0} \Delta p_{m(a)} = N_0 \frac{e^2 \sum_{i=1}^N r_i^2}{4m} B_{BH}.$$

Разделив суммарный магнитный момент вещества (диамагнетика) на объем вещества, получим величину вектора намагничивания диамагнетика во внешнем магнитном поле B_{BH}

$$|J| = \frac{\sum_{j=1}^{N_0} \Delta p_{mj}}{V} = -\frac{N_0}{4mV} e^2 \left(\sum_{i=1}^N r_i^2 \right) B_{BH} = -\frac{e^2 n_0}{4m} \left(\sum_{i=1}^N r_i^2 \right) B_{BH},$$

где n_0 – концентрация атомов в диамагнетике.

Сравнив это выражение с соотношением $J = \chi_m \vec{H} = \frac{\chi_m}{\mu_0} B_{BH}$, магнитную восприимчивость диамагнетика определим как

$$\chi_m = -\frac{e^2 n_0}{4m\mu_0} \sum_{i=1}^N r_i^2. \quad (33)$$

Из соотношения (33) следует, что диамагнетики во внешнем магнитном поле намагничиваются против поля.

Парамагнетики – вещества, в атомах (молекулах) которых магнитные моменты электронов взаимно не скомпенсированы, т.е. суммарный магнитный момент атомов (молекул) $p_m \neq 0$. Поэтому собственное магнитное поле возникает как за счет индуцированного магнитного момента (как в диамагнетиках), так и за счет ориентации существующих магнитных моментов. Индукция магнитного поля, обеспечиваемого ориентацией магнитных моментов эквивалентных токов электронов, сонаправлена с индукцией внешнего магнитного поля. Таким образом, для парамагнетиков

$$B = B_{BH} + B_1 - B_2,$$

где B_1 – индукция собственного магнитного поля, обусловленного ориентацией электронных орбит (магнитных моментов), а B_2 – собственное магнитное поле, обусловленное изменением $\Delta\omega$ угловой скорости движения электронов на орбитах (диамагнитный эффект).

К парамагнетикам относят вещества, у которых B_1 незначительно превышает B_2 , т.е. индукция магнитного поля в веществе незначительно превышает внешнее магнитное поле, поскольку $\mu \geq 1$ (рис. 2.7).

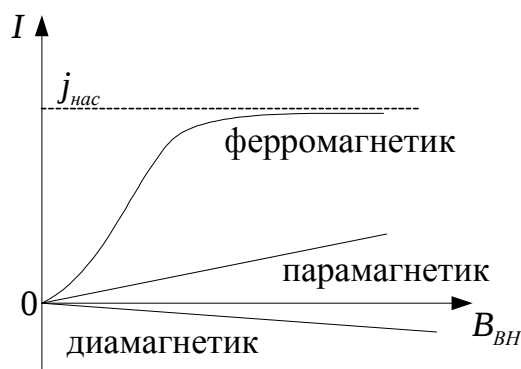


Рис. 2.7

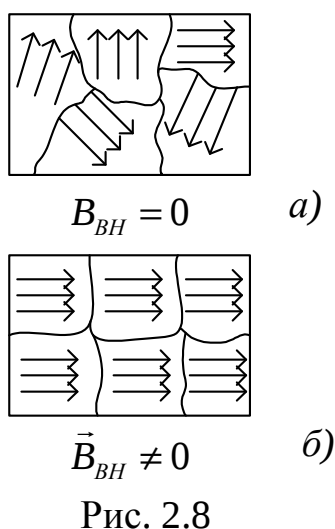


Рис. 2.8

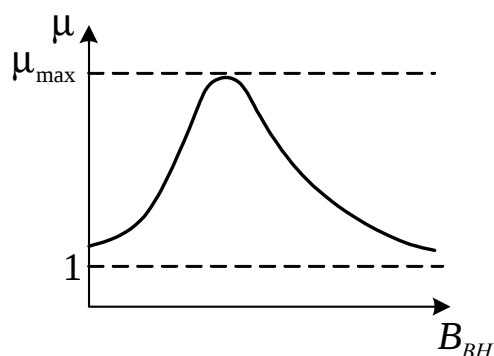


Рис. 2.9

Ферромагнетики – вещества, у которых суммарный магнитный момент электронов в атоме значителен, а ориентационная компонента собственного магнитного поля в веществе (B_1) значительно превышает компоненту индуцированного магнитного поля (B_2). В ферромагнетиках молекулы (атомы) обычно объединены в группы, в которых магнитные моменты атомов (молекул) ориентированы одинаково (сонаправлены). Эти группы (микрообласти вещества) названы *доменами* (рис. 2.8). В отсутствие внешнего магнитного поля направление магнитных моментов доменов имеет случайный характер. При наложении внешнего магнитного поля B_{BH} происходит ориентация доменов по полю, причем не всех доменов при определенном B_{BH} и в неравной степени при увеличении B_{BH} . Поэтому между B и B_{BH} существует нелинейная зависимость, что приводит (по аналогии с сегнетоэлектриками) к появлению *магнитного гистерезиса* (рис. 2.9).

При намагничивании индукция B_{BH} возрастает от 0 до некоторого значения (см. рис. 2.9). При увеличении B_{BH} (от нуля) изменение намагниченности J ферромагнетика характеризуется кривой OL . Если уменьшать B_{BH} , то изменение

намагниченности соответствует (качественно) кривой LM . При $B_{BH} = 0$ намагниченность $J_{ост}$ отлична от нуля. В этом состоянии ферромагнетик является *постоянным магнитом*. Чтобы уничтожить остаточное намагничивание, приходится создавать внешнее поле с индукцией $B_{BH} = -B_k$, направленной противоположно первоначальному направлению вектора $\vec{B}_{BH}$.

Индукцию магнитного поля, при которой $J = 0$, называют *задерживающей* или *коэрцитивной силой* B_k . При последующем изменении индукции внешнего поля B_{BH} намагниченность J изменяется, образуя *петлю гистерезиса* (рис. 2.10).

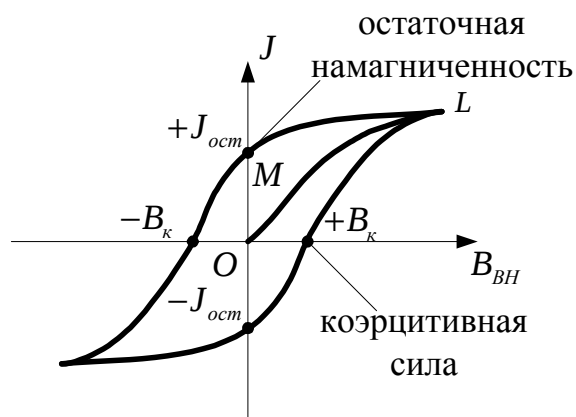


Рис. 2.10

В зависимости от значения коэрцитивной силы ферромагнетики делят на мягкие и жесткие.

Мягкие ферромагнетики имеют узкую петлю гистерезиса и малые значения коэрцитивной силы. Для *жестких ферромагнетиков* характерны широкая петля гистерезиса и соответственно — большие значения коэрцитивной силы. Площадь петли гистерезиса характеризует энергию, которую необходимо затратить для перемагничивания ферромагнетика.

Если в процессе использования ферромагнетик должен перемагничиваться переменным магнитным полем, то целесообразнее использовать мягкие ферромагнетики, площадь петли гистерезиса которых мала. Из мягких ферромагнетиков изготавливают сердечники трансформаторов, генераторов, электродвигателей. Из жестких ферромагнетиков изготавливают постоянные магниты.

При нагревании веществ возрастает энергия теплового движения молекул (атомов) вещества и степень ориентации их магнитных моментов снижается. В результате у парамагнетиков и ферромагнетиков снижается магнитная проницаемость μ , что приводит к уменьшению намагниченности при неизменном значении индукции B_{BH} . При некоторой температуре T_k молекулы ферромагнетика приобретают столь высокую энергию теплового хаотического движения, что это приводит к разрушению доменной структуры. Поэтому при $T = T_k$ (T_k называют *точкой Кюри*) ферромагнетик становится парамагнетиком.

К диамагнетикам относятся вода, мрамор, золото, ртуть, медь, инертные газы. К парамагнетикам относятся щелочные металлы, кислород, алюминий, платина. К мягким ферромагнетикам относятся железо, пермаллой (сплав) и другие материалы. К жестким ферромагнетикам относятся некоторые стали и специальные сплавы (например, самарий-кобальтовые).

2.2. Методические указания к лекционным занятиям

Вопросы лекции	Форма изучения	Литература	Вопросы для самоконтроля
Электромагнитная индукция Электронная природа электромагнитной индукции. Индукционный ток. Правило Ленца. Самоиндукция. Энергия магнитного поля. Электромагнитные колебания	лекция + самост.	[8], пп. 22.1 – 22.5 [5], пп. 2.40 – 2.45 [10], пп. 122 – 136	1. В чем заключается явление электромагнитной индукции? 2. Что является причиной возникновения ЭДС индукции в замкнутом проводящем контуре? От чего и как зависит ЭДС индукции, возникающая в контуре? 3. Какова природа ЭДС электромагнитной индукции? 4. Сформулируйте правило Ленца для индукционного тока, проиллюстрировав его примерами. 5. Возникает ли индукционный ток в проводящей рамке, поступательно движущейся в однородном магнитном поле? 6. Почему ток в цепи с индуктивностью нарастает постепенно при включении источника тока и спадает постепенно при отключении источника тока? 7. В чем заключаются явления самоиндукции и взаимной индукции? 8. Напряженность магнитного поля возросла в 2 раза. Как изменилась объемная плотность энергии магнитного поля? 9. Что такое диамагнетики? парамагнетики? В чем различие их магнитных свойств? 10. Каков механизм намагничивания парамагнетиков и ферромагнетиков? 11. Объясните петлю гистерезиса ферромагнетика. 12. Что скрывается под физическим понятием «точка Кюри»?
Токи при замыкании и размыкании цепей с индуктивностью. Магнитные свойства вещества. Диамагнетики. Парамагнетики. Ферромагнетики. Магнитный гистерезис	лекция + самост.	[8], пп. 21.1 – 21.3 [10], пп. 131 – 136 [7], пп. 16.1 – 16.4 [5], пп. 2.48 – 2.53	

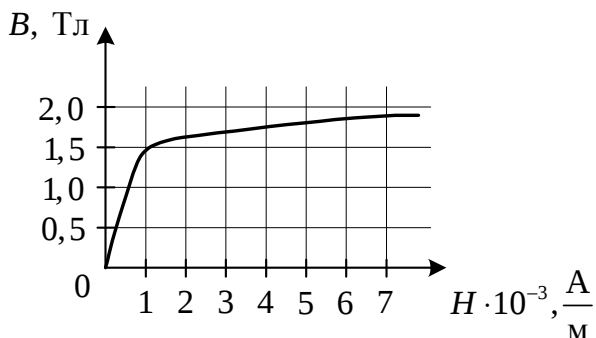
2.3. Методические указания к практическим занятиям

Тема занятия	Задачи	Рекомендации	Задачи из сборников
Явление электромагнитной индукции	Определение ЭДС индукции, индукционного тока при взаимном действии проводников с магнитным полем	При решении задач на определение ЭДС индукции и индукционного тока необходимо учитывать, что в большинстве случаев независимо от причин, вызывающих изменение магнитного потока, ЭДС и индукционный ток можно рассчитать по формулам $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{и} \quad I_i = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}.$ При этом в большинстве случаев знак ЭДС и направление индукционного тока при решении задач можно не учитывать. Однако если в задаче требуется определить направление индукционного тока, то необходимо выявить причины, вызывающие изменение магнитного потока, и соответственно – причины перераспределения зарядов. Если ЭДС индукции возникает в замкнутом пространстве, то для определения ЭДС и индукционного тока необходимо определить магнитный поток Φ (или магнитную индукцию B, или площадь S) как функцию времени и, продифференцировав, получить $\mathcal{E}_i$ или I_i. Если ЭДС индукции возникает в движущемся проводнике в магнитном поле, то ЭДС следует находить как удельную работу сторонней силы – силы Лоренца, т.е. $\mathcal{E}_i = \int_L [\vec{v} \times \vec{B}] d\vec{l}$, причем интегрирование проводится по контуру L, который пересекает проводник за время dt	[12], №№ 25.17 – 25.45 [1], № 14.4 [11], №№ 3.202 – 3.205 [4], №№ 3.95 – 3.104 [2], №№ 11.8 – 11.21
	Определение индуктивности проводников, взаимной индуктивности, энергии и плотности энергии магнитного поля, создаваемого в индуктивных элементах при протекании в них тока	Задачи на определение индуктивности обычно предлагаются для систем, находящихся применение в практической деятельности (соленоиды, различного рода трансформаторы и т.д.). Индуктивность (или взаимная индуктивность) не зависит от силы тока и определяется не только геометрией проводников (сечением катушки, диаметром провода, числом витков), но и взаимным расположением катушек в пространстве, наличием ферромагнетиков. Эти же рекомендации уместны при определении и энергии, и плотности энергии магнитного поля	

Тема занятия	Задачи	Рекомендации	Задачи из сборников
Явление электромагнитной индукции	Определение индуктивности проводников, взаимной индуктивности, энергии и плотности энергии магнитного поля, создаваемого в индуктивных элементах при протекании в них тока	При определении характеристик магнитного поля соленоидов и параметров катушек необходимо различать магнитный поток через сечения $\Phi = B_n S$ и полный поток (потокосцепление) $\Psi = N\Phi = LI$ (поток сцепления с катушкой с числом витков N и током I). Для определения вида зависимости индукционного тока и ЭДС индукции в катушке от времени при взаимоиндукции иногда достаточно знать вид функции $\Phi(t)$, который задается зависимостью тока в этой катушке от времени $I = f_r(t)$. Тогда без расчета коэффициента взаимоиндукции можно качественно определить вид зависимости ЭДС индукции или индукционного тока от времени, т.к. $I_i \approx -\frac{d\Phi}{dt} \approx -\frac{df_r}{dt}$, поскольку $\Phi \sim f_r(t)$	[12], №№ 25.17 – 25.45 [1], № 14.4 [11], №№ 3.202 – 3.205 [4], №№ 3.95 – 3.104 [2], №№ 11.8 – 11.21
Электрические цепи с индуктивностью и емкостью	Определение зависимости тока от времени в цепях с индуктивностью при их коммутации, энергии в таких цепях	При определении количества теплоты, которое выделяется в цепи, необходимо учитывать, что ток является функцией времени, поэтому необходимо использовать интегрирование: $Q = \int_{t_1}^{t_2} I^2(t) R dt$, причем направление тока I не имеет значения. При определении параметров переходных процессов необходимо использовать понятие времени релаксации: $\tau = \frac{L}{R}$ – время, в течение которого после включения источника питания ток в цепи достигает уровня 0,67 от максимального значения; $I_0 I = I_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$, но также время релаксации τ – это время, за которое при отключении от источника питания ток успевает уменьшиться до уровня 0,33 от максимального значения тока в цепи; $I = I_0 e^{-t/\tau}$	[12], №№ 26.17 – 26.23, 26.21, 26.22 [11], №№ 4.41 – 4.45 [4], №№ 3.141 – 3.154 [2], №№ 14.10 – 14.15

2.4. Примеры решения задач

Пример 1. Соленоид длиной 20 см и диаметром 4 см имеет плотную трехслойную обмотку из провода диаметром 0,1 мм. По обмотке соленоида течет ток 0,1 А. Зависимость $B = f(H)$ для материала сердечника приведена на рисунке. Определить: 1) напряженность; 2) индукцию поля в соленоиде; 3) магнитную проницаемость сердечника; 4) индуктивность соленоида; 5) энергию поля соленоида; 6) объемную плотность энергии. (**Уровень 4**).



Решение. Поле внутри соленоида можно считать однородным. В этом случае напряженность поля $H = In$, где $n = \frac{N}{l}$ – число витков, приходящихся на единицу длины соленоида; N – число слоев обмотки; d – диаметр провода.

$$\text{Тогда } H = \frac{IN}{l} = \frac{0,1 \text{ А} \cdot 3}{1 \cdot 10^{-4} \text{ м}} = 3000 \text{ А/м}.$$

По графику $B = f(H)$ находим, что напряженности 3000 А/м соответствует индукция 1,7 Тл.

Используя связь между индукцией и напряженностью $B = \mu\mu_0 H$, определим магнитную проницаемость: $\mu = \frac{B}{\mu_0 H}$.

Индуктивность соленоида $L = \mu\mu_0 n^2 l S$, где l – длина; $S = \frac{\pi D^2}{4}$ – площадь поперечного сечения соленоида.

$$\text{Учитывая, что } n = \frac{N}{l}, \text{ получаем } L = \mu\mu_0 \frac{N^2}{l^2} l \frac{\pi D^2}{4}.$$

$$\text{Объемная плотность энергии магнитного поля } w_m = \frac{BH}{2}.$$

$$\text{Энергия магнитного поля соленоида } W_m = w_m Sl, \quad W = \frac{LI^2}{2}.$$

Проведем вычисления:

$$\mu = \frac{1,7 \text{ Тл}}{12,56 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м} \cdot 3000 \text{ А/м}} = 450;$$

$$L = \frac{450 \cdot 12,56 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м} \cdot 3^2 \cdot 0,2 \text{ м} \cdot 3,14 \cdot 4^2 \cdot 10^2 \text{ м}^2}{4 \cdot 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 128 \text{ Гн};$$

$$w_m = \frac{1,7 \text{ Тл} \cdot 3000 \text{ А/м}}{2} = 2550 \text{ Дж/м}^3; W_m = 128 \text{ Гн} \cdot 10^{-2} \text{ А}^2 \cdot 0,5 = 0,64 \text{ Дж}.$$

Ответ: $H = 3000 \text{ А/м}$; $L = 128 \text{ Гн}$; $\mu = 450$; $w_m = 2550 \text{ Дж/м}^3$; $W_m = 0,64 \text{ Дж}$.

Пример 2. На соленоид (см. условие и решение примера 1) надето изолированное кольцо того же диаметра. Определить: 1) ЭДС индукции в кольце; 2) ЭДС самоиндукции в соленоиде, если за 0,01 с ток в его обмотке равномерно снижается до нуля. (**Уровень 3**).

Решение. По условию за промежуток времени $\Delta t = 0,01$ сила тока в обмотке соленоида равномерно уменьшается от 0,1 А до нуля, поэтому магнитный поток, пронизывающий площадь кольца $S = \frac{\pi D^2}{4}$, уменьшается от $\Phi_1 = BS$ до $\Phi_2 = 0$.

Возникающая в кольце электродвижущая сила индукции

$$\varepsilon_{\text{инд}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta t} = \frac{\Phi_1}{\Delta t} = \frac{B\pi D^2}{4\Delta t}.$$

Электродвижущая сила самоиндукции ε_c , возникающая в соленоиде при выключении тока в нем, $\varepsilon_c = -L \frac{dI}{dt}$. Так как при выключении сила тока уменьшается до нуля равномерно, то

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{I_2 - I_1}{\Delta t} = -\frac{I_1}{\Delta t}.$$

Тогда

$$\varepsilon_c = \frac{LI_1}{\Delta t}.$$

$$\varepsilon_{\text{инд}} = \frac{1,7 \text{ Тл} \cdot 3,14 \cdot 16 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2}{4 \cdot 10^{-2} \text{ с}} = 0,2 \text{ В};$$

$$\varepsilon_c = \frac{128 \text{ Гн} \cdot 0,1 \text{ А}}{0,01 \text{ с}} = 1280 \text{ В}.$$

Ответ: $\varepsilon_{\text{инд}} = 0,2 \text{ В}$, $\varepsilon_c = 1280 \text{ В}$.

Пример 3. Обмотка соленоида имеет сопротивление 10 Ом. Какова его индуктивность, если при прохождении постоянного ($I = \text{const}$) тока за 0,05 с в нем выделяется количество теплоты, эквивалентное энергии магнитного поля соленоида? (**Уровень 2**).

Решение. Энергия магнитного поля соленоида

$$W = \frac{LI^2}{2},$$

а количество теплоты Q определяется по закону Джоуля – Ленца:

$$Q = I^2 R t.$$

Так как $W = Q$, то $\frac{LI^2}{2} = I^2 R t$, откуда

$$L = 2 R t.$$

$$L = 2 \cdot 10 \cdot 0,05 = 1 \text{ Гн}.$$

Ответ: $L = 1 \text{ Гн}$.

Пример 4. В плоскости, перпендикулярной к магнитному полю напряженностью $2 \cdot 10^5 \text{ А/м}$, вращается стержень длиной 0,4 м относительно оси, проходящей через один из его концов. В стержне индуцируется ЭДС 0,2 В. Определить угловую скорость стержня. (**Уровень 4**).

Решение. Электродвижущая сила индукции равна скорости изменения магнитного потока Φ , пересекаемого стержнем при вращении:

$$\epsilon_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{BdS}{dt},$$

где $B = \mu\mu_0 H$ – индукция поля; dS – площадь, пересекаемая стержнем при вращении с угловой скоростью ω .

Стержень при повороте на угол $d\phi$ пересечет площадь магнитного потока $dS = \frac{l^2 d\phi}{2}$.

$$\text{Тогда } |\epsilon_{\text{инд}}| = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = \left| \frac{BdS}{dt} \right| = \frac{\mu\mu_0 H l^2}{2} \frac{d\phi}{dt} = \frac{\mu\mu_0 H l^2 \omega}{2},$$

$$\text{отсюда } \omega = \frac{2|\epsilon_{\text{инд}}|}{\mu_0 H l^2};$$

$$\omega = \frac{2 \cdot 0,2}{12,56 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 0,16^2} = 10 \text{ с}^{-1}.$$

Ответ: $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$.

Пример 5. Соленоид без сердечника длиной 15 см и диаметром 4 см, имеющий 100 витков на 1 см длины, включен в цепь источника тока. За 1 мс сила тока в цепи изменилась на 10 мА. Определить ЭДС самоиндукции, считая, что ток в цепи изменяется равномерно. **(Уровень 2).**

Решение. ЭДС самоиндукции $\varepsilon_c = -L \frac{dI}{dt}$ или $\varepsilon_c = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}$.

Индуктивность соленоида $L = \mu\mu_0 n^2 l S$; $S = \frac{\pi d^2}{4}$.

Тогда

$$L = 12,56 \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-8} \cdot 0,15 \cdot 3,14 \cdot 0,04^2 \cdot \frac{1}{4} \approx 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ Гн}.$$

$$\varepsilon_c = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}; \quad \varepsilon_c = -2,4 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{10^{-2}}{10^{-3}} \approx -0,24 \text{ В}.$$

Ответ: $\varepsilon_c = -0,24 \text{ В}$.

Пример 6. По обмотке соленоида (число витков 1000, длина 0,5 м, диаметр 4 см) течет ток 0,5 А. Определить потокосцепление, энергию, объемную плотность энергии поля соленоида. **(Уровень 3).**

Решение. Напряженность магнитного поля соленоида $H = I \frac{N}{l}$, индукция $B = \mu\mu_0 H = \mu\mu_0 I \frac{N}{l}$, объемная плотность энергии $w_m = \frac{W}{V} = \frac{W}{Sl}$, или через характеристики поля $w_m = \frac{BH}{2}$.

$$w_m = \frac{BH}{2} = \frac{\mu\mu_0}{2} I^2 \frac{N^2}{l^2}; \quad w_m = \frac{1 \cdot 12,56 \cdot 10^{-7} \cdot 0,25 \cdot 10^6}{2 \cdot 0,25} = 0,63 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}.$$

$$W_m = w_m Sl; \quad W_m = 0,63 \frac{3,14 \cdot 4^2 \cdot 10^{-4}}{4} \cdot 0,5 \approx 4 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

Потокосцепление соленоида

$$\psi = BSN = B \frac{\pi d^2}{4} N = \mu\mu_0 I \frac{N}{l} \frac{\pi d^2}{4} N;$$

$$\psi = \frac{1 \cdot 12,56 \cdot 10^{-7} \cdot 0,5 \cdot 10^6 \cdot 3,14 \cdot 4^2 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 0,5} \approx 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ Вб}.$$

Ответ: $\psi = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ Вб}$; $w_m = 0,63 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}$; $W_m = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}$.

Пример 7. Однородное магнитное поле, объемная плотность энергии которого $0,4 \text{ Дж/м}^3$, действует на проводник с током, расположенный перпендикулярно к линиям индукции, с силой $0,1 \text{ мН}$ на 1 см его длины. Определить силу тока в проводнике. (**Уровень 2**).

Решение. На проводник с током I длиной l , помещенный в магнитное поле с индукцией B , действует сила Ампера F_A :

$$F_A = BIl \sin \alpha, \text{ откуда, т.к. } \sin \alpha = \sin 90^\circ = 1,$$

$$B = \frac{F_A}{Il}.$$

Объемная плотность энергии

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}; \quad w_m = \frac{F_A^2}{2\mu\mu_0 I^2 l^2}, \text{ откуда } I = \frac{F_A}{l} \sqrt{\frac{1}{2\mu\mu_0 w_m}}.$$

$$I = \frac{10^{-3}}{10^{-2}} \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 0,4 \cdot 12,56 \cdot 10^{-7} \cdot 1}} = 100 \text{ А}.$$

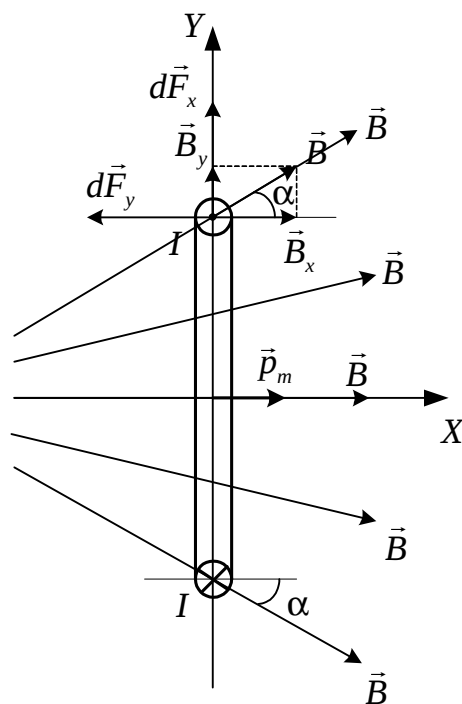
Ответ: $I = 100 \text{ А}$.

Пример 8. В неоднородном магнитном поле находится тонкое кольцо радиусом 10 см , по которому течет ток так, как показано на рисунке, силой $0,1 \text{ А}$. В плоскости кольца в точках, где находится кольцо, вектор $\vec{B}$ направлен под углом 45° к плоскости кольца, а его модуль равен $0,1 \text{ Тл}$. Найти силу, которая определяет движение кольца с током. (**Уровень 5**).

Решение. Рассмотрим взаимодействие элемента кольца dl с компонентами магнитного поля B_x и B_y . Компонента B_x действует на элемент dl с силой dF_x , которая направлена для каждого элемента кольца перпендикулярно к $\vec{B}_x$ от центра кольца,

$$dF_x = IB_x dl.$$

Так как каждому элементу кольца dl найдется диаметрально противоположный элемент dl с обратным направлением тока, то все силы dF_x для кольца в целом взаимно уравниваются и не могут вызвать его движения (случай симметрии кольца относительно силовых линий поля, как показано на рисунке).



Компонента B_y обеспечивает силу dF_y , действующую на элемент кольца dl ,

$$dF_y = IB_y dl,$$

направленную в область магнитного поля с большим значением $\vec{B}$ (справа налево). Действующая на кольцо полная сила

$$F_y = \oint_l dF_y = IB_y 2\pi R.$$

Поскольку $B_y = B \sin \alpha$, следовательно,

$$F_y = 2\pi RIB \sin \alpha.$$

Так как по условию задачи $\alpha = 45^\circ$, то, подставив числовые значения, получаем

$$F_y = 6,28 \cdot 0,1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0,1 \cdot 0,1 = 4,46 \cdot 10^6 \text{ Н}.$$

Силу F_y можно связать с магнитным моментом кольца p_m , сонаправленным с $\vec{B}$ в центре кольца площадью $S_k = \pi R^2$,

$$p_m = IS_k = I\pi R^2; \quad F_y = \frac{2B_y p_m}{R}.$$

Из решения задачи следует: если некоторый объект (например, атом вещества), обладающий магнитным моментом (парамагнетики и ферромагнетики), поместить в неоднородное магнитное поле, то вначале произойдет ориентация объекта (p_m его станет сонаправленным с $\vec{B}$), затем объект начнет перемещаться в область с большей индукцией магнитного поля.

Ответ: $F_y = 4,46 \cdot 10^6 \text{ Н}.$

Пример 9. Определить магнитную восприимчивость χ_m и молярную восприимчивость χ_m^μ висмута, если удельная магнитная восприимчивость $\chi_m^{y0} = -1,3 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3/\text{кг}$. (**Уровень 6**).

Решение. Магнитная восприимчивость χ_m определяется соотношением

$$\chi_m = \frac{J}{H},$$

где J – намагниченность, H – напряженность магнитного поля.

Намагниченность J , в свою очередь, определяется следующей формулой:

$$J = |J| = \frac{\sum_{i=1}^{N_0} p_{mj}^a}{V},$$

где $\sum_{i=1}^{N_0} p_{mj}^a$ – суммарный магнитный момент всех N_0 молекул в объеме V (магнетик предполагается однородным).

Соответственно, вводя понятие *молярной намагниченности*

$$J_{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{N_0} p_{mj}^a}{V},$$

молярную восприимчивость определим как

$$\chi_m^{\mu} = \frac{J_m}{H} = \frac{\sum_{i=1}^{N_0} p_{mj}^a}{HV}.$$

Вводя понятие *удельной намагниченности*

$$J_{y\partial} = \frac{\sum_{i=1}^{N_0} p_{mj}^a}{m},$$

удельную восприимчивость определим как

$$\chi_m^{y\partial} = \frac{J_{y\partial}}{H} = \frac{\sum_{i=1}^{N_0} p_{mj}^a}{Hm},$$

где m – масса вещества.

Для определения удельной магнитной восприимчивости воспользуемся соотношением

$$\frac{\chi_m}{\chi_m^{y\partial}} = \frac{J}{J_{y\partial}} = \frac{m}{V} = \rho,$$

откуда

$$\chi_m = \rho \chi_{y\partial},$$

где ρ – плотность.

Произведем вычисления, учитывая, что плотность висмута $\rho = 9,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$:

$$\chi_m = 9,8 \cdot 10^3 \cdot (-1,3 \cdot 10^{-9}) \approx -1,3 \cdot 10^{-5}.$$

Для определения молярной магнитной восприимчивости воспользуемся соотношением

$$\frac{\chi_m^\mu}{\chi_m^{y\partial}} = \frac{J_\mu}{J_{y\partial}} = \frac{m}{v} = \mu,$$

где μ – молярная масса.

Тогда

$$\chi_m^\mu = \mu \chi_m^{y\partial}.$$

Молекулярная масса висмута $M_r = 209$.

$\mu = 209$ г/моль = 0,209 кг/моль. Произведем вычисления:

$$\chi_m^\mu \approx -2,7 \cdot 10^{-10} \text{ м}^3/\text{моль}.$$

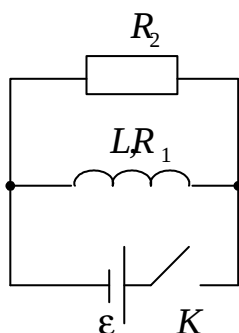
Ответ: $\chi_m^\mu \approx -2,7 \cdot 10^{-10} \text{ м}^3/\text{моль}.$

Примечание. Пример 9 следует рассматривать как пример решения сложных задач, которые не являются типовыми (экзаменационными), но показывают взаимосвязь характеристик вещества и их связь с параметрами магнитного поля.

2.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Соленоид диаметром $d = 4$ см, имеющий $N = 500$ витков, помещен в магнитное поле, индукция которого изменяется со скоростью 1 мТл/с. Ось соленоида составляет с вектором магнитной индукции угол $\alpha = 45^\circ$. Определите ЭДС индукции, возникающей в соленоиде. [444 мкВ; **уровень 1**].
2. В магнитное поле, индукция которого меняется по закону $B = B_0 \cos \omega t$ ($B_0 = 0,1$ Тл; $\omega = 4 \text{ с}^{-1}$), помещена квадратная рамка со стороной $a = 50$ см, причем нормаль к рамке образует с направлением поля угол $\alpha = 45^\circ$. Определите ЭДС индукции, возникающую в рамке в момент времени $t = 5$ с. [64 мВ; **уровень 2**].
3. Кольцо из алюминиевого провода ($\rho = 26$ нОм·м) помещено в однородное магнитное поле перпендикулярно к линиям магнитной индукции. Диаметр кольца $D = 30$ см, диаметр провода $d = 2$ мм. Определите скорость изменения индукции магнитного поля, если ток в кольце $I = 1$ А. [0,11 Тл/с; **уровень 4**].
4. Плоскость проволочного витка площадью $S = 100 \text{ см}^2$ и сопротивлением $R = 5$ Ом, находящегося в однородном магнитном поле напряженностью $H = 10$ кА/м, перпендикулярна к линиям магнитной индукции. При повороте витка на некоторый угол гальванометр, замкнутый на виток, показал $Q = 12,6$ мкКл. Определите угол поворота витка. [60°; **уровень 5**].

5. В катушке длиной $l = 0,5$ м, диаметром $d = 5$ см с числом витков $N = 1500$ сила тока равномерно увеличивается на $0,2$ А за одну секунду. На катушку надето кольцо из медной проволоки ($\rho = 17$ нОм·м) площадью сечения $S_k = 3$ мм². Определите силу тока в кольце. [1,66 мА; **уровень 4**].
6. Катушка диаметром $d = 2$ см, содержащая один слой плотно прилегающих друг к другу $N = 500$ витков алюминиевого провода сечением $S = 1$ мм², помещена в магнитное поле. Ось катушки параллельна линиям индукции. Магнитная индукция поля равномерно изменяется со скоростью 1 мТл/с. Определите тепловую мощность, выделяющуюся в катушке, если ее концы замкнуть накоротко. Удельное сопротивление алюминия $\rho = 26$ нОм·м. [0,302 мкВт; **уровень 3**].
7. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,02$ Тл равномерно вращается вокруг вертикальной оси горизонтальный стержень длиной $l = 0,5$ м. Ось вращения проходит через конец стержня параллельно линиям магнитной индукции. Определите число оборотов в секунду, при котором на концах стержня возникает разность потенциалов $U = 0,1$ В. [6,37 с⁻¹; **уровень 4**].
8. В однородном магнитном поле ($B = 0,2$ Тл) равномерно с частотой $n = 600$ мин⁻¹ вращается рамка, содержащая $N = 1200$ витков, плотно прилегающих друг к другу. Площадь рамки $S = 100$ см². Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна к линиям магнитной индукции. Определите максимальную ЭДС, индуцируемую в рамке. [151 В; **уровень 2**].
9. Катушка длиной $l = 50$ см и диаметром $d = 5$ см содержит $N = 200$ витков. По катушке течет ток $I = 1$ А. Определите: 1) индуктивность катушки; 2) магнитный поток, пронизывающий площадь ее поперечного сечения. [1) 197 мкГн; 2) 985 нВб; **уровень 2**].
10. Катушку индуктивностью $L = 0,6$ Гн подключают к источнику тока. Определите сопротивление катушки, если за время $t = 3$ с сила тока через катушку достигает 80 % предельного значения. [322 мОм; **уровень 3**].
11. Соленоид диаметром $d = 3$ см имеет однослойную обмотку из плотно прилегающих друг к другу витков алюминиевого провода ($\rho' = 26$ нОм·м) диаметром $d = 0,3$ мм. По соленоиду течет ток $I_0 = 0,5$ А. Определите заряд Q , который переместится по соленоиду, если его концы закоротить. [42,7 мкКл; **уровень 4**].



12. Катушка индуктивностью $L = 1,5$ Гн сопротивлением $R_1 = 15$ Ом и резистор сопротивлением $R_2 = 150$ Ом соединены параллельно и подключены с помощью ключа к источнику, электродвижущая сила которого $\varepsilon = 60$ В (см. рисунок). Определите напряжение на зажимах катушки через $t_1 = 0,01$ с и $t_2 = 0,1$ с после размыкания цепи. [$U_1 = 200$ В; $U_2 = 0,01$ В; **уровень 5**].
13. Два соленоида ($L_1 = 0,64$ Гн, $L_2 = 1$ Гн) одинаковой длины и практически равных сечений вставлены один в другой. Определите взаимную индуктивность соленоидов. [$0,8$ Гн; **уровень 3**].
14. Торойд с воздушным наполнением содержит 20 витков на 1 см. Определите объемную плотность энергии в тороиде, если по его обмотке протекает ток 3 А. [$22,6$ Дж/м³; **уровень 2**].
15. Принимая, что электрон в невозбужденном атоме водорода движется по круговой орбите радиусом $r = 52,8$ пм, определите: 1) магнитный момент $\vec{p}_m$ эквивалентного кругового тока; 2) орбитальный механический момент $\vec{L}_l$ электрона; 3) исходя из полученных числовых значений, найдите гиромантическое отношение орбитальных моментов, доказав, что оно совпадает со значением, определяемым универсальными постоянными ($e/2m$ и m). [1) $p_m = 9,25 \cdot 10^{-24}$ А·м²; 2) $L_e = 1,05 \cdot 10^{-34}$ кг·м²/с; 3) $87,8$ ГКл/кг; **уровень 3**].
16. По обмотке соленоида индуктивностью $L = 3$ мГн, находящегося в диамагнитной среде, течет ток $I = 0,4$ А. Соленоид имеет длину $l = 45$ см, площадь поперечного сечения $S = 10$ см², и число витков $N = 1000$. Определите внутри соленоида: 1) магнитную индукцию, 2) намагниченность. [1) $1,2$ мТл; 2) 66 А/м; **уровень 4**].
17. Напряженность магнитного поля в меди равна 10^6 А/м. Определить намагниченность J меди и магнитную индукцию B , если известно, что удельная магнитная восприимчивость $\chi_m^{y0} = -1,1 \cdot 10^{-9}$ м³/кг. [$-9,8$ А/м; $1,26$ Тл; **уровень 4**].
18. Прямоугольный ферромагнитный брусок объемом $V = 10$ см³ приобрел в магнитном поле напряженностью $H = 800$ А/м магнитный момент $p_m = 0,8$ А·м². Определить магнитную проницаемость μ ферромагнетика. [101 ; **уровень 5**].

УЧЕБНЫЙ БЛОК 3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАКСВЕЛЛА

Этот блок содержит краткие базовые сведения об **обобщенной теории электромагнетизма Максвелла**, построенной на основе системы уравнений Максвелла.

Уравнения Максвелла являются основными законами классической макроскопической электродинамики. Как и основные законы любых физических теорий, они не выводятся, а постулируются на основе обобщения экспериментальных данных. В учении об электричестве и магнетизме эти данные формулировались первоначально в виде частных законов: закона полного тока, теорем Остроградского – Гаусса для электрических и магнитных полей, закона электромагнитной индукции. Максвеллом эти частные законы были обобщены так, что они стали выражать в компактной форме все содержание классической макроскопической электродинамики.

Уравнения Максвелла – наиболее общие уравнения для электрических и магнитных полей в покоящихся средах. Они играют в учении об электромагнетизме такую же роль, как законы Ньютона в механике.

Содержание блока рассматривается как основа для более глубокого теоретического изучения теории электромагнитных явлений.

При изучении материала данного блока студенты должны **иметь представление:**

- о вихревых и индукционных токах;
- об основных законах магнетизма;
- об основных законах электростатики;
- о криволинейных и поверхностных интегралах;
- о дифференциальных уравнениях в частных производных;

обладать навыками:

- применения законов электромагнитной индукции, теоремы Остроградского – Гаусса, закона полного тока;
- использования интегральных и дифференциальных характеристик векторных полей (поток вектора, циркуляции вектора, градиента, дивергенции и ротора).

Учебная программа блока

Содержание блока	Форма подготовки	Литература
Гипотеза Максвелла о вихревом электрическом поле. Первое уравнение Максвелла Ток смещения. Второе уравнение Максвелла Третье и четвертое уравнения и полная система уравнений Максвелла для электромагнитного поля	лекция	[3], [5] – [10], [18]

Цели обучения

Студент должен знать	Студент должен уметь
– основные закономерности электромагнитных явлений; – два основных положения теории Максвелла; – сущность явления электромагнитной индукции (гипотезу Максвелла); – систему уравнений Максвелла для электромагнитного поля	– определять зависимость тока смещения; – записывать систему уравнений Максвелла в интегральной и дифференциальной формах и объяснять физический смысл каждого из уравнений

3.1. Краткое содержание теоретического материала

Анализируя связь между величинами электрического и магнитного полей и обобщая результаты опытов Эрстеда и Фарадея, Максвелл создал **теорию электромагнитного поля**. Теория Максвелла позволяет объяснить с единой точки зрения свойства электрических и магнитных полей. Основные закономерности электромагнитных явлений описываются **уравнениями Максвелла**, они составляют основу как электротехники и радиотехники, так и теории любых электромагнитных явлений.

В теории электромагнитного поля решена основная задача электродинамики – по заданному распределению зарядов и токов определяются характеристики создаваемых ими электрических и магнитных полей. Уравнения Максвелла не раскрывают механизма взаимодействия среды и поля. Влияние среды учитывается с помощью трех величин: диэлектрической проницаемости ϵ , магнитной проницаемости μ и удельной электрической проводимости γ . Теория Максвелла – теория близкодействия, согласно которой электрические и магнитные взаимодействия распространяются с конечной скоростью, равной скорости света в данной среде. В основе теории лежат *два положения*:

- 1) *всякое переменное электрическое поле порождает вихревое магнитное поле;*
- 2) *всякое переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле.*

Исследования явления электромагнитной индукции показали, что переменное магнитное поле порождает в проводниках индуцированные ЭДС и токи. Если магнитное поле постоянно, то индуцированных токов и ЭДС не возникает. Отсюда следует, что заряды в проводниках и сами проводники не являются обязательным условием возникновения индуцированного электрического поля, как в случае электростатического поля. Силовые линии индуцированного электрического поля не начинаются и не заканчиваются на зарядах, а замкнуты сами на себя, подобно силовым ли-

ниям магнитного поля. Это означает, что *индуцированное электрическое поле*, подобно магнитному, является *вихревым*.

Если неподвижный проводник поместить в переменное магнитное поле, то в нем индуцируется ЭДС. Электроны приводятся в направленное движение электрическим полем, индуцированным переменным магнитным полем, возникает индуцированный электрический ток. В этом случае проводник является лишь индикатором индуцированного электрического поля. Индуцированное электрическое поле приводит в движение свободные электроны в проводнике и тем самым обнаруживает себя. Максвелл выдвинул гипотезу, что *индуцированное электрическое поле возникает в области переменного магнитного поля и в отсутствии вещественных зарядоносителей*. Согласно этой гипотезе сущность явления электромагнитной индукции заключается не столько в появлении индуцированного тока, сколько в возникновении вихревого электрического поля. Эта фундаментальная гипотеза электродинамики сформулирована Максвеллом как обобщение законов электромагнитной индукции Фарадея.

В отличие от электростатического поля индуцированное электрическое поле не является потенциальным, так как работа, совершаемая в индуцированном электрическом поле при перемещении единичного положительного заряда по замкнутому контуру, равна ЭДС индукции, а не нулю.

Направление вектора напряженности вихревого электрического поля устанавливается в соответствии с **законом электромагнитной индукции Фарадея** и правилом Ленца

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где $\Phi = \int_S \vec{B}_n dS$ – поток магнитной индукции $\vec{B}$ сквозь площадь S , ограниченную рассматриваемым контуром L (рис. 3.1).

Согласно определению электродвижущей силы $\varepsilon = \int_L \vec{E}_{cm} d\vec{l}$, где $\vec{E}_{cm}$ – напряженность поля сторонних сил.

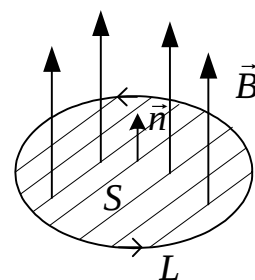


Рис. 3.1

При проявлении электромагнитной индукции этой величиной является напряженность вихревого электрического поля, поэтому

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\oint_L \vec{E}_{cm} d\vec{l} = -\oint_L (\vec{E}_{cm} + \vec{E}_k) d\vec{l} = -\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\oint_L E_l dl, \quad (1)$$

где $\vec{E}_k$ – вектор напряженности электростатического (потенциального) поля, $\vec{E}$ – вектор результирующего поля.

Уравнение (1) выражает количественную связь между изменяющимся вихревым магнитным полем $\vec{B}$ и вихревым электрическим полем $\vec{E}$.

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dS. \quad (2)$$

Циркуляция вектора напряженности электрического поля по любому замкнутому контуру (правая часть (1)) пропорциональна скорости приращения магнитного потока сквозь любую поверхность, ограниченную данным контуром.

При этом циркуляция электрического поля и скорость приращения магнитного потока имеют противоположные знаки.

Уравнение (2) отображает в интегральной и более детализированной форме уравнение (1) и является **первым уравнением Максвелла**.

Его физический смысл состоит в том, что всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле.

При рассмотрении постоянного и переменного токов в проводнике имеют место физические эффекты, которые, как правило, отличаются друг от друга. Например, когда по проводнику проходит постоянный ток, то линии тока всегда замкнуты. Обратимся к процессу прохождения переменного тока по цепи, содержащей конденсатор.

Заряды в конденсаторе не могут перемещаться с одной пластины на другую. Это приводит к тому, что линии тока обрываются у поверхности пластин конденсатора, в результате чего ток проводимости, текущий по проводнику, соединяющему обкладки конденсатора, оказывается разомкнутым. До сих пор мы исходили из представления, что электрические токи

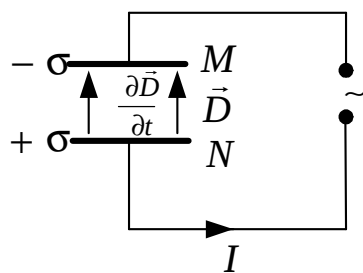


Рис. 3.2

представляют собой движение электрических зарядов по проводникам и что плотность силы тока определяется электропроводимостью проводника. В конденсаторе одна из его обкладок имеет положительный заряд с поверхностной плотностью $(+\sigma)$, другая – отрицательный с поверхностной плотностью $(-\sigma)$ (рис. 3.2). При разрядке конденсатора через проводник, соединяющий обкладки, ток течет от обкладки N к M.

Плотность тока j внутри обкладки конденсатора определяется производной по времени от плотности электрического заряда

$$j = \frac{d\sigma}{dt}. \quad (3)$$

Ток такой плотности течет от обкладки N конденсатора. Обратимся теперь к тому, что происходит в это время между обкладками конденсатора. Как известно, электрическое смещение (индукция) поля связано с напряженностью соотношением

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}, \quad (4)$$

а напряженность поля внутри конденсатора

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}. \quad (5)$$

Объединяя формулы (4) и (5), мы получаем, что электрическая индукция между обкладками конденсатора определяется выражением

$$D = \sigma. \quad (6)$$

При разрядке конденсатора со временем изменяется поверхностная плотность σ заряда пластин конденсатора. В соответствии с формулой (6) изменяется и электрическая индукция D ,

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{d\sigma}{dt}. \quad (7)$$

Отметим, что D в общем случае – функция не только времени, но и координат, т.е. $D = D(x, y, z, t)$, скорость изменения D определяется частной производной $\left(\frac{\partial D}{\partial t} \right)$.

Так как вектор электрического смещения поля направлен от положительно заряженной пластины N к отрицательно заряженной пластине M , то при разрядке конденсатора быстрота изменения электрической индукции отрицательна и направлена в сторону, противоположную вектору $\vec{D}$.

Из сказанного следует, что направление вектора $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ совпадает с направлением тока в цепи, в которую включен конденсатор. Как видно из уравнений (3) и (7), плотность электрического тока j и величина $\frac{\partial D}{\partial t}$ равны между собой.

Максвелл назвал величину $\frac{\partial D}{\partial t}$ *плотностью тока смещения*:

$$j_{см} = \frac{\partial D}{\partial t}.$$

Таким образом, *ток смещения* – это скорость изменения электрического смещения, определяемого по формуле

$$D = \epsilon_0 E + P,$$

где E – напряженность электрического поля; P – поляризованность диэлектрика в конденсаторе.

Плотность тока смещения можно записать в виде

$$j_{см} = \frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t},$$

где $\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$ – плотность тока смещения в вакууме; $\frac{\partial P}{\partial t}$ – плотность тока поляризации, т.е. упорядоченного движения электрических зарядов в диэлектрике.

Так как в силу непрерывности тока числовые значения плотности тока смещения $j_{см}$ и плотности тока проводимости j равны, то линии плотности тока проводимости внутри проводника (естественно, включая и пластины конденсатора) непрерывно переходят в линии плотности тока смещения между обкладками конденсатора. Чтобы ток был замкнут, вводится понятие *полного тока*, который включает в себя сумму тока проводимости и тока смещения, т.е. *плотность полного тока*

$$\vec{j}_{полн} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Таким образом, ток смещения (по сути – переменное электрическое поле), подобно току проводимости, порождает магнитное поле, силовые линии которого замкнуты.

Максвелл, обобщая закон полного тока, $\oint_L H_l dl = \int_S j_{полн,n} dS$ (где

$j_{полн,n}$ – проекция вектора $\vec{j}_{полн}$ на нормаль к площадке dS) и вводя в правую часть кроме тока проводимости также ток смещения, записал уравнение, получившее название **второго уравнения Максвелла**:

$$\oint_L H_l dl = \int_S \left(j + \frac{\partial D_n}{\partial t} \right) dS, \quad (8)$$

где H_l – проекция вектора $\vec{H}$ на направление вектора $d\vec{l}$; D_n и j_n – проекции векторов $\vec{D}$ и $\vec{j}$ на нормаль к dS .

Это **обобщенная теорема о циркуляции вектора $\vec{H}$** , физический смысл которой состоит в том, что магнитное поле создается не только токами проводимости (например, ток в проводнике), но и переменным электрическим полем.

Таким образом, переменное электрическое поле создает магнитное поле, а переменное магнитное поле создает электрическое поле. Такая система неразрывно друг с другом связанных и непрерывно друг друга порождающих переменных электрического и магнитного полей называется **электромагнитным полем**. В общем случае электрическое и магнитное поля уже не являются самостоятельными полями, а выступают как взаимосвязанные и взаимообусловленные компоненты единого электромагнитного поля. Рассмотренные уравнения Максвелла, выражая законы взаимного создания полей, отражают тем самым физическую структуру электромагнитного поля.

В систему уравнений Максвелла кроме двух описанных выше входят также теоремы Гаусса для электрического и магнитного полей.

Теорема Гаусса для электрического поля с индукцией $\vec{D}$ имеет вид:

$$\oint_S D_n dS = q. \quad (9)$$

В случае распределенного заряда внутри замкнутой поверхности с объемной плотностью ρ уравнение (9) примет вид

$$\oint_S D_n dS = \int_V \rho dV. \quad (10)$$

Теорема Гаусса для магнитного поля с индукцией $\vec{B}$ имеет вид

$$\oint_S B_n dS = 0. \quad (11)$$

Полная система уравнений Максвелла в интегральной форме – это система фундаментальных уравнений электродинамики в покоящихся средах в отсутствие диэлектриков и магнетиков. Из уравнений Максвелла вытекает, что источниками электрического поля могут быть либо электрические заряды, либо изменяющиеся во времени магнитные поля, а магнитные поля могут возбуждаться либо движущимися электрическими зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями. Итак, **полная система уравнений Максвелла** в интегральном виде:

$$\begin{aligned} \oint_L E_l dl &= - \int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dS; & \oint_S D_n dS &= \int_V \rho dV; \\ \oint_L H_l dl &= \int_S \left(j_n + \frac{\partial D_n}{\partial t} \right) dS; & \oint_S B_n dS &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Обычно к системе уравнений Максвелла присоединяют три уравнения (их называют **материальными соотношениями**), выражающие связь между $\vec{E}$ и $\vec{D}$, $\vec{B}$ и $\vec{H}$, $\vec{j}$ и $\vec{E}$:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}; \quad \vec{j} = \gamma \vec{E}, \quad (13)$$

где ϵ_0 и μ_0 – соответственно электрическая и магнитная постоянные; ϵ и μ – соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости; γ – удельная проводимость вещества.

Для того чтобы система уравнений (12) совместно с (13) была разрешима, необходимо дополнить эти уравнения граничными условиями, которым должны удовлетворять магнитные и электрические поля на границах раздела сред.

Из уравнений Максвелла следует, что:

- источниками электрического поля являются либо электрические заряды, либо изменяющиеся во времени магнитные поля;
- магнитные поля могут возбуждаться либо движущимися электрическими зарядами (электрическими токами), либо переменными магнитными полями;
- переменное магнитное поле всегда связано с порождаемым им электрическим полем, а переменное электрическое поле всегда связано с порождаемым им магнитным, т.е. электрическое и магнитное поля неразрывно связаны друг с другом – они образуют единое электромагнитное поле.

Для *стационарных полей* ($E = \text{const}$ и $B = \text{const}$) уравнения Максвелла имеют вид

$$\oint_L E_l dl = 0; \quad \oint_S D_n dS = q; \quad \oint_L H_l dl = I; \quad \oint_S B_n dS = 0.$$

В этом случае электрические и магнитные поля *независимы друг от друга*, что позволяет изучать отдельно постоянные электрические и магнитные поля (это рассматривается в разделах «Электростатика» и «Магнитостатика»).

Воспользуемся известными из векторного анализа **теоремами Стокса и Гаусса**

$$\oint_L \vec{A} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S};$$

$$\oint_S \vec{A} d\vec{l} = \int_V \text{div } \vec{A} dV.$$

По определению *дивергенцией* и *ротором* векторного поля $\vec{A}$ в данной точке M называют следующие производные по объему:

$$\operatorname{div} \vec{A}(M) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{A} d\vec{S}}{V}; \quad \operatorname{rot} \vec{A}(M) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S [\vec{A} \times d\vec{S}]}{V},$$

где интегралы $\oint_S A_n dS$ и $\oint_S [\vec{A} \times d\vec{S}]$ – соответственно *скалярный* и *векторный потоки* векторного поля через замкнутую поверхность S , которая окружает данную точку M , охватывая область с объемом V .

Дивергенция – это мера источников поля. Если в некоторой области дивергенция равна нулю, то векторное поле этой области свободно от источников. Те источники поля, в которых дивергенция положительна, называются *источниками* поля, а в которых отрицательна – *стоками* векторного поля.

Используя теоремы Стокса и Гаусса, можно представить полную **систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме** (характеризующих поле в каждой точке пространства):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho; \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0. \end{aligned}$$

Уравнения Максвелла не симметричны относительно электрического и магнитного полей. Это связано с тем, что в природе существуют электрические заряды, но нет зарядов магнитных.

Так, например, уравнение $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$ явно демонстрирует, что источниками электрического поля являются положительные электрические заряды, а стоками – отрицательные электрические заряды. Уравнение $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ отражает тот факт, что не существует источников и стоков магнитного поля – «магнитных зарядов».

В случае если заряды и токи распределены в пространстве непрерывно, то обе формы уравнения Максвелла – интегральная и дифференциальная – эквивалентны. Однако если имеются поверхности разрыва – поверхности, на которых свойства среды или полей меняются скачкообразно, то интегральная форма уравнений является более общей.

3.2. Методические указания к лекционным занятиям

Вопросы лекции	Форма изучения	Литература	Вопросы для самоконтроля
Теория Максвелла (электромагнитного поля) Первое уравнение Максвелла Ток смещения. Второе уравнение Максвелла Система уравнений Максвелла. Физическая сущность уравнений Максвелла	лекция	[8], пп. 23.3 – 23.4 [10], пп. 137 – 139 [7], п. 16.5 [5], пп. 2.54 – 2.63	1. Что лежит в основе теории Максвелла для электромагнитного поля? 2. Что называется током смещения? 3. Как определить величину тока смещения? 4. Запишите уравнения Максвелла и поясните их физический смысл.

3.3. Методические указания к практическим занятиям

Тема занятий	Тип задач	Рекомендации	Задачи из сборников
Основы теории Максвелла	Задачи с использованием уравнений Максвелла для электромагнитного поля	Анализируя условия задачи, необходимо установить причины возникновения электромагнитного поля. Выяснить свойства среды, в которой распространяется электромагнитное поле. Учесть, что законы распространения электромагнитных волн аналогичны законам распространения упругих волн. Вспомнить закон полного тока, физический смысл теоремы Гаусса для электромагнитного и электрического полей, теорему о циркуляции вектора напряженности электрического поля. Важным при решении задач на определение характеристик электромагнитного поля является учет граничных условий по поверхностям веществ. Часто в условии заданы только токи в проводнике, при этом необходимо помнить, что для тока выполняется уравнение неразрывности	[2], №№ 14.1 – 14.10 [11], №№ 3.230 – 3.238 [1], № 14.9 [12], №№ 24.1 – 24.4

3.4. Примеры решения задач

Пример 1. Напряженность электрического поля в зазоре между обкладками конденсатора площадью 1 см^2 , заполненного диэлектриком с $\epsilon = 1000$, изменяется равномерно со скоростью $0,17 \text{ мВ/м}\cdot\text{с}$. Определить силу тока смещения в таком электрическом поле. **(Уровень 2).**

Решение. По теории Максвелла плотность тока смещения $j_{см}$ равна скорости изменения электрического смещения D : $j_{см} = \frac{\partial D}{\partial t}$. Учитывая, что $D = \epsilon_0 \epsilon E$, где ϵ – диэлектрическая проницаемость среды; ϵ_0 – электрическая постоянная; E – напряженность электрического поля, можно записать:

$$j_{см} = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Плотность тока и ток смещения связаны соотношением

$$j_{см} = \frac{I_{см}}{S},$$

где S – площадь пластины конденсатора.

С учетом этого можно записать: $\frac{I_{см}}{S} = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}$, откуда

$$I_{см} = \epsilon_0 \epsilon S \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Подставляя числовые данные, получим:

$$I_{см} = 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 1,7 \cdot 10^5 \approx 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ А}.$$

Ответ: $I_{см} = 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ А}$.

Пример 2. При разрядке плоского конденсатора, площадь обкладок которого равна 10 см^2 , в подводящих проводах течет ток 1 мкА . Определить скорость изменения напряженности электрического поля в конденсаторе, заполненном диэлектриком с $\epsilon = 10^3$. **(Уровень 4).**

Решение. Сила тока проводимости в подводящих проводах равна силе тока смещения в электрическом поле конденсатора ($I_{пр} = I_{см}$).

Плотность тока смещения $j_{см}$ по определению равна

$$j_{см} = \frac{I_{см}}{S}.$$

С другой стороны, по определению Максвелла

$$j_{см} = \frac{\partial D}{\partial t},$$

где D – электрическое смещение, связанное с напряженностью поля E соотношением $D = \epsilon_0 \epsilon E$.

С учетом этого запишем: $j_{см} = \frac{I_{см}}{S} = \frac{I}{S}$;

$$j_{см} = \frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Приравнивая правые части этих выражений, получим:

$$\frac{I}{S} = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}, \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{I}{\epsilon_0 \epsilon S}.$$

Подставим числовые данные:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{10^{-6}}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}} \approx 1,1 \cdot 10^5 \frac{\text{В}}{\text{м} \cdot \text{с}}.$$

Ответ: $\frac{\partial E}{\partial t} = 1,1 \cdot 10^5 \frac{\text{В}}{\text{м} \cdot \text{с}}.$

Пример 3. При разрядке длинного цилиндрического конденсатора длиной $l = 5$ см и внешним радиусом 0,5 см в подводящих проводах течет ток проводимости силой 0,1 мкА. Определить плотность тока смещения в диэлектрике между обкладками конденсатора. (**Уровень 3**).

Решение. Считаем заряд конденсатора равным q . По теореме Остроградского – Гаусса для вектора электрического смещения $\vec{D}$ поток вектора $\vec{D}$ сквозь замкнутую цилиндрическую поверхность радиусом r равен заряду Q , охватываемому поверхностью интегрирования S :

$$\oint_S D_n dS = q.$$

Поскольку конденсатор цилиндрический, то поток вектора $\vec{D}$ пронизывает боковую цилиндрическую поверхность $S = 2\pi r l$ нормально к ней,

$$\oint_S D_n dS = D 2\pi r l = q, \quad \text{откуда} \quad D = \frac{q}{2\pi r l}.$$

Плотность тока смещения

$$j_{см} = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{2\pi r l} \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{1}{2\pi r l} I_{np}.$$

$$j_{см} = \frac{1 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 3,14 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-2}} \approx 6,4 \cdot 10^{-5} \text{ А/м}^2.$$

Ответ: $j_{см} = 6,4 \cdot 10^{-5} \text{ А/м}^2.$

3.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Длинный цилиндрический конденсатор заряжается от источника ЭДС. Пренебрегая краевыми эффектами, докажите, что сила тока смещения в диэлектрике, заполняющем пространство между обкладками конденсатора, равна силе тока в цепи источника ЭДС. [$I_{см} = I$; **уровень 4**].
2. Докажите с помощью одного из уравнений Максвелла, что переменное во времени магнитное поле не может существовать без электрического поля. [Есть вихревое электрическое поле; **уровень 2**].
3. Докажите, что уравнения Максвелла $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ и $\text{div } \vec{B} = 0$ совместимы, т.е. первое из них не противоречит второму. [**Уровень 3**].
4. Ток, проходящий по обмотке длинного прямого соленоида радиусом R , изменяют так, что магнитное поле внутри соленоида растет со временем по закону $B = At^2$, где A – некоторая постоянная. Определите плотность тока смещения как функцию расстояния r от оси соленоида. Постройте график зависимости $j_{см}(r)$.

$$\left[\begin{array}{l} j_{см} = -\epsilon_0 A r (r < R); \\ j_{см} = \frac{\epsilon_0 A R^2}{r} (r < R); \\ j_{см} = \epsilon_0 A R (r = R). \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{c} \text{График зависимости } j_{см}(r) \text{ от } r. \\ \text{Внутри соленоида } (r < R) \text{ плотность тока смещения пропорциональна } r. \\ \text{Возле поверхности } (r = R) \text{ плотность тока смещения пропорциональна } \frac{1}{r}. \end{array} \right] ; \text{ уровень 5, 6} .$$

УЧЕБНЫЙ МОДУЛЬ 6

ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ И ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

В данном модуле рассмотрены волновые процессы в упругих средах и электромагнитные волны (свет). Особенности распространения электромагнитных (световых) волн составляют суть *волновой оптики* (распространение света в веществе, поляризация света, интерференция и дифракция).

Объединение механических и электромагнитных волн в одном модуле обусловлено возможностью единого подхода к их описанию, несмотря на различие механизмов возбуждения таких волн и их свойств. Это позволяет значительно сократить бюджет времени для изучения волновых процессов.

Модуль содержит четыре учебных блока:

1. Волновые процессы.
2. Геометрическая оптика.
3. Волновая оптика.
4. Поляризация света.

В первом блоке рассматриваются основные параметры волновых процессов в зависимости от их природы, такие как уравнение бегущей волны, энергия, плотность энергии волны и другие. На основе общих подходов представлены некоторые особенности упругих, поверхностных и электромагнитных волн. Рассмотрены некоторые явления, характерные для волновых процессов; интерференция волн и стоячие волны, дифракция, дисперсия, эффект Доплера. Приводятся некоторые сведения об одном из видов волновых процессов – звуке.

Во втором блоке рассматриваются основные законы геометрической оптики: закон прямолинейного распространения света в оптически однородной среде; закон независимости световых пучков; законы отражения и преломления света. Рассматриваются принципы построения изображения в плоских и сферических зеркалах, а также построения изображения с помощью линз. Сведения, представленные в этом блоке, предназначены для восстановления знаний, изученных в школьном курсе физики, и обеспечения достаточного уровня знаний в этой области при самостоятельном изучении материала.

В третьем блоке рассматриваются явления интерференции, дифракции и дисперсии света, а также на ознакомительном уровне – голографии. При изучении интерференции используется теория, представленная в блоке 1, применительно к имеющему практическое значение явлению интерференции в тонких пленках. Дифракция света рассматривается с помощью метода зон Френеля. В блоке также приводятся некоторые сведения о теории дисперсии света, механизмах взаимодействия света с веществом, дифракции на пространственной решетке.

В четвертом блоке показано, что существует ряд явлений, обусловленных поперечностью световых волн ($\vec{E} \perp \vec{v}$). Рассматриваются способы получения поляризованного света и основные закономерности, характерные для света как для поперечной волны.

Учебно-методическая структура модуля

Учебный модуль 6. Волновые процессы и оптические явления			
Учебный блок 1. Волновые процессы	Учебный блок 2. Геометрическая оптика	Учебный блок 3. Волновая оптика	Учебный блок 4. Поляризация света
– распространение упругих колебаний, волна; – дисперсия волн; – энергия упругой волны; – отражение и преломление упругих волн; – стоячие волны; – звуковые волны; – эффект Доплера; – электромагнитные волны	– законы отражения и преломления света; – плоские и сферические зеркала; – линзы	– интерференция света; – дифракция света; – дисперсия света; – понятие о голографии	– естественный и поляризованный свет; – степень поляризации; – закон Малюса; – явление двойного лучепреломления; – дихроизм; – поляризация света при отражении и преломлении на поверхности диэлектриков; закон Брюстера; – вращение плоскости поляризации

Методическая программа модуля

Тема занятия	Цель занятия	Вид занятия	Часы
Распространение колебаний в упругих средах. Распространение электромагнитных колебаний. Параметры волны	Формирование новых знаний	лекция	1
Уравнение волны. Энергия волны, поток энергии. Дисперсия волн	Формирование новых знаний	лекция	2
Волновые процессы	Углубление и систематизация навыков	практ. занятие	2
Геометрическая оптика, оптические элементы	Систематизация знаний и формирование новых знаний	лекция	1
Волновая оптика, интерференция света	Формирование новых знаний	лекция	2
Интерференция света	Формирование новых навыков	практ. занятие	3
Геометрическая и волновая оптика (из перечня лабораторных работ)	Систематизация и формирование новых навыков	лабор. работа	4
Волновая оптика, дифракции Френеля и Фраунгофера	Формирование новых знаний	лекция	2
Дифракция света	Формирование новых навыков	практ. занятие	3
Поляризация света	Формирование новых знаний	лекция	2
Законы Малюса, Брюстера. Вращение плоскости поляризации	Формирование новых навыков	практ. занятие	2
Волновая оптика, поляризация света (из перечня лабораторных работ)	Систематизация и формирование новых навыков	лабор. работа	4

УЧЕБНЫЙ БЛОК 1. ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

В природе существуют процессы, в которых состояние физического объекта, непрерывно изменяясь во времени, периодически повторяется.

Такие механические процессы – механические колебания – были рассмотрены в модулях 1 и 2. Если совершающий колебания физический объект является частью системы взаимодействующих объектов, то в такой системе, например, в веществе (упругой среде) колебания распространяются по всей среде с некоторой скоростью. Этот процесс называется *волновым*.

В данном разделе рассматриваются общие уравнения волновых процессов, а также примеры использования этих уравнений при описании распространения волн и взаимодействия волн с веществом. Независимо от природы волн для описания волновых процессов применяется общая терминология.

При изучении данного блока студенты должны **иметь представление:**

- о способах описания колебательного движения в механике и электромагнетизме;
- об основных механических характеристиках движения и связях между ними;
- о принципе суперпозиции в механике и электромагнетизме;

обладать навыками:

- определения механических характеристик движения (скорости, ускорения, импульса, энергии) по заданному уравнению движения;
- определения параметров результирующего колебания, как результата суперпозиции нескольких колебаний.

Учебная программа блока

Содержание блока	Форма подготовки	Литература
Волновое уравнение. Свет как электромагнитная волна	лекция	[3] [7] [9]
Скорость распространения упругих волн	лекция	
Дисперсия волн	лекция	
Энергия упругой волны	лекция	
Отражение и преломление упругих волн	лекция	
Интерференция и дифракция волн. Стоячие волны	лекция	
Звуковые волны	лекция	
Эффект Доплера	лекция	

Цели обучения

Студент должен знать	Студент должен уметь
– виды волнового уравнения и основные характеристики волны (скорость, длина волны, волновой вектор, энергия, вектор Умова); – причины возникновения упругих волн, их параметры и виды; – причины возникновения дисперсии, физический смысл фазовой и групповой скоростей; – особенности отражения волн от границы раздела; – принцип Гюйгенса	– определять вид волновой поверхности; – определять характеристики волны по заданному уравнению волны; – составлять уравнение волны по заданным характеристикам волны; – определять фазовую и групповую скорости; – определять характеристики волн с учетом эффекта Доплера

1.1. Краткое содержание теоретического материала

Основные характеристики волновых процессов

Рассмотрим упрощенно формирование волны в упругой среде. Пусть имеется линейная система упруго связанных материальных точек, лежащая вдоль оси OX системы координат XOY . Такая система моделирует упругую среду, поскольку материальные точки могут смещаться (колебаться) вдоль оси OY . Пусть материальная точка, лежащая в начале координат, начинает колебания вдоль оси Y в момент $t = 0$ (рис. 1.1).

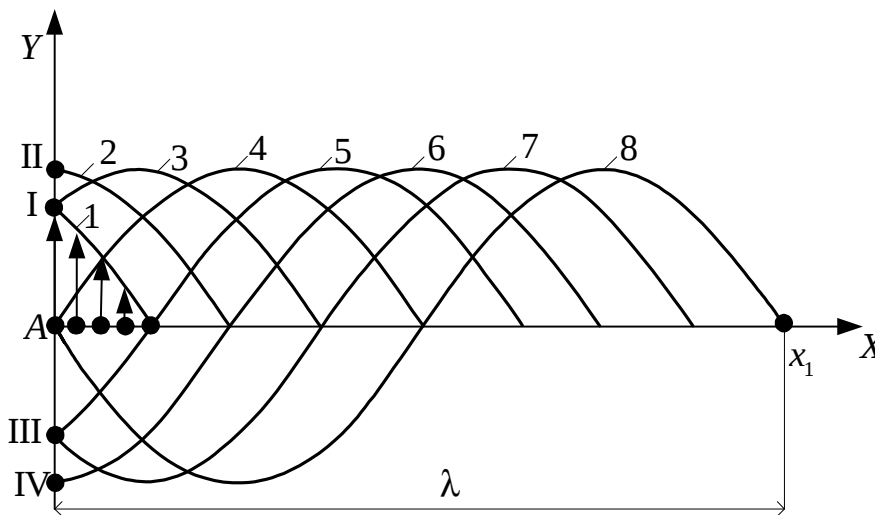


Рис. 1.1

Через некоторое время t_1 точка A перемещается в положение I , смещая вверх лежащие рядом точки среды согласно кривой 1. К моменту времени t_2 точка A оказывается в положении II , а смещение частиц среды ха-

рактизуется кривой 2. Если положение II соответствует амплитуде колебаний точки A , то к моменту времени t_3 точка A сместится в обратном направлении в положение I, а положение точек среды будет характеризоваться кривой 3. Далее точка A смещается в начало координат, а возмущение среды характеризуется кривой 4.

Далее:

- A – в положении III, кривая 5;
- A – в положении IV, кривая 6;
- A – в положении III, кривая 7;
- A – в начале координат, кривая 8.

Таким образом, точка A за промежуток времени T (который называют *периодом*) завершает одно колебание относительно начала координат, и возмущение среды (смещение точек среды относительно оси X) соответствует кривой 8, которая показывает, что процесс колебаний точек среды (по оси Y) за один период T колебаний точки A распространился вдоль оси X на расстояние x_1 . Это расстояние называется *длиной волны* и обозначается λ . При продолжении колебаний точки A рассмотренный взаимосвязанный колебательный процесс распространяется вдоль OX .

Очевидно, что возмущение среды, если она объемная, будет распространяться во всех направлениях. Однако рассмотренного упрощенного примера достаточно для понимания механизма возбуждения волны в упругой среде. Из примера также ясно, что частицы среды, в которой распространяется волна, не вовлекаются в поступательное движение вдоль направления распространения волны, а лишь совершают колебания относительно своих положений равновесия (невозмущенных состояний).

В зависимости от направления колебаний частиц среды относительно направления распространения волны можно выделить два типа волн: *поперечные* (см. рис. 1.1) и *продольные*. В продольной волне частицы совершают колебания вдоль направления распространения волны (в рассмотренном примере – вдоль оси OX).

Геометрическое место точек в пространстве, до которых распространяется возмущение среды к моменту времени t (например, точка x_1 на рис. 1.1), называется *фронтом волны* (*волновым фронтом*). Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется *волновой поверхностью*. Волновой фронт является частным случаем волновой поверхности. Если волновые поверхности имеют вид плоскости, волна называется *плоской*. Если волновая поверхность – сфера, то волна называется *сферической*. Волно-

вые поверхности могут иметь различную форму, которая зависит от упругих свойств среды в различных направлениях, т.е. от *анизотропии* (зависимости от направления в упругой среде) упругих свойств среды.

Упругие поперечные волны могут возникать лишь в средах, обладающих сопротивлением сдвигу. Поэтому поперечные и продольные волны могут возникать в твердых телах. В жидких и газообразных средах возникают только продольные волны. В жидких средах возможно также образование *поверхностных волн* на границе раздела сред.

Для получения волнового уравнения введем некоторые количественные характеристики волны. Так, *длина волны* λ , период T и скорость распространения волны v связаны соотношением

$$\lambda = vT$$

или (с учетом того, что $T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$, где ν – частота колебаний; ω – циклическая частота)

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{2\pi v}{\omega}.$$

Пусть в некоторой точке среды с координатой $x = 0$ происходит гармоническое колебательное движение с частотой ω ,

$$\xi = a \cos \omega t,$$

где a – амплитуда колебания; ξ – отклонение точки среды от равновесия в момент t .

Другая точка среды, отстоящая от первой на расстоянии x , вовлечется в данное колебательное движение спустя время $\tau = \frac{x}{v}$, поэтому отклонение этой точки от положения равновесия можно определить по формуле, для x можно записать

$$\xi = a \cos \omega(t - \tau) = a \cos \omega\left(t - \frac{x}{v}\right). \quad (1)$$

Выражение (1) представляет собой **уравнение плоской монохроматической волны**, распространяющейся вдоль оси x . Величина $\varphi = \omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$ (или $2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$) называется *фазой волны*. С учетом начальной фазы φ_0 фазу волны можно записать в виде $\varphi = \omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0$. Начальная фаза φ_0 определяется так же, как и для колебаний осциллятора – ис-

точника волны. Часто для упрощения описания волны начало отсчета времени и начало отсчета координаты выбирают так, чтобы фаза φ_0 была равна нулю (если это позволяет сделать условие задачи).

Как следует из (1), в волновом процессе отклонение точек среды от положения равновесия является функцией двух аргументов – t и x . Поэтому в частных производных можно записать:

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = -a\omega^2 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]; \quad \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{a\omega^2}{v^2} \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right].$$

Исключив тригонометрическую функцию из обоих уравнений, получим **дифференциальное уравнение волнового процесса**

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Волновое уравнение (2) описывает некоторую волну, распространяющуюся вдоль оси x со скоростью v , причем уравнение (1) является решением (2). Величина v характеризует скорость распространения фазы волны и носит название *фазовой скорости*: $v = \frac{dx}{dt}$ (скорость перемещения фронта волны или волновой поверхности).

Введем параметр k (*волновое число*):

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}, \text{ соответствующий ему волновой вектор}$$

$$\vec{k} = \frac{\omega}{v} \vec{n}, \quad (3)$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор, нормальный к волновой поверхности. Поэтому уравнение (1) запишем в более общем виде:

$$\xi = a \cos(\omega t - kx). \quad (4)$$

При распространении волны в поглощающей энергию среде амплитуда волны с удалением от источника колебаний постепенно уменьшается, т.е. происходит затухание волны.

Уравнение плоской затухающей волны имеет вид

$$\xi = a_0 e^{-\beta x} \cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

где a_0 – амплитуда в точке $x = 0$; β – коэффициент затухания, зависящий от свойств среды.

Наряду с плоскими волнами большое практическое значение имеют сферические волны. Фаза колебаний на расстоянии $\vec{r}$ от центра пульсирующего шара радиусом R (источника волны) будет отставать от фазы колебаний на поверхности шара на величину $\frac{r-R}{v}$. Если колебания шара происходят по гармоническому закону с частотой ω , то фаза φ на волновой поверхности с радиусом $r \rightarrow R$ будет равна

$$\varphi = \omega \left(t - \frac{r-R}{v} \right) + \varphi_0 = \omega \left(t - \frac{r}{v} \right) + \varphi_0. \quad (5)$$

Амплитуда колебаний сферической волны убывает не только за счет затухания волн в среде, но и в результате увеличения площади поверхности (так как площади dS , на которые опирается телесный угол (рис. 1.2), в котором распространяется доля энергии колебаний, с увеличением r растут). Поэтому уравнение сферической волны без учета затухания имеет вид

$$\xi = \frac{a}{r} \cos \left(\omega \left(t - \frac{r}{v} \right) + \varphi_0 \right). \quad (6)$$

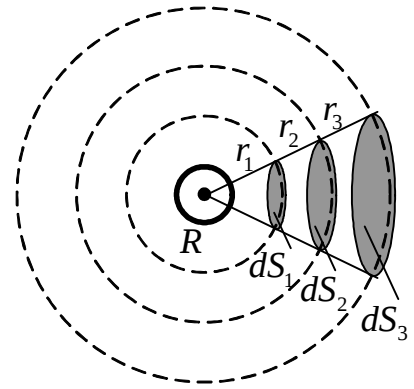


Рис. 1.2

Волновое уравнение для волн, распространяющихся в упругой изотропной среде, имеет вид

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (7)$$

Решением уравнения (7) является выражение

$$\xi = a \cos \left[\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0 \right], \quad (8)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, который характеризует точку пространства, которой достигла волна к промежутку времени t , причем выполняются равенства

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{v^2}; \quad \vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z. \quad (9)$$

Определим скорость распространения поперечной волны в струне. Выделим элемент струны $\Delta l \ll \lambda$. Для него равнодействующая $\vec{F}_p$ сил натяжения $\vec{F}$ и $\vec{F}^*$ направлена вниз и по модулю равна $\sim F \Delta \alpha$ ($\Delta \alpha$ – малый угол, причем $\Delta l = \Delta \alpha R$, где R – радиус кривизны струны в данный момент времени) (рис. 1.3). Элемент струны Δl испытывает действие центростреми-

тельной силы $\vec{F}_p$, которую можно определить через центростремительное ускорение $\frac{v_{\perp}^2}{R}$, которое имеет элемент Δl массой $\Delta m = \rho S \Delta l$ (ρ – плотность

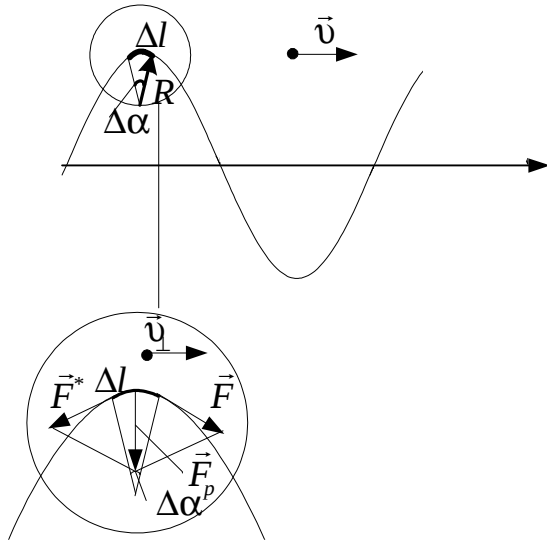


Рис. 1.3

материала струны; S – площадь поперечного сечения струны).

Согласно второму закону Ньютона

$$F \Delta \alpha = \rho S \Delta l \frac{v^2}{R}.$$

Отсюда *скорость распространения поперечной упругой волны* определим соотношением

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{F}{\rho S}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}, \quad (10)$$

где $\sigma = \frac{F}{S}$ – механическое напряжение в струне (модуль сдвига).

Так как в поперечной волне колебания частиц среды осуществляются в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны, любое направление колебаний можно разложить на две волны с взаимно перпендикулярными направлениями колебаний частиц среды.

Выражение для *скорости распространения продольных волн в стержне*

$$v_{\parallel} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (11)$$

где E – модуль Юнга.

В изотропном твердом теле по любому направлению могут распространяться продольная упругая волна со скоростью $v_{\parallel} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ и две попе-

речные волны со скоростью $v_{\perp} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$.

Скорость поперечных волн меньше скорости продольных волн ($v_{\perp} < v_{\parallel}$). Так, для стали $v_{\parallel} \approx 6000$ м/с, $v_{\perp} \approx 3000$ м/с. Эти различия в скоростях используют, например, для определения положения эпицентра землетрясений (в сейсмографах).

В жидкостях возможно распространение лишь продольных волн. Скорость их распространения определяется формулой

$$v_{\parallel} = \sqrt{\frac{k}{\rho}}, \quad (12)$$

где k – модуль всестороннего сжатия; ρ – плотность жидкости (например, в воде $v_{\parallel} \approx 1450$ м/с).

Скорость распространения продольных волн в газообразной среде (звук) определяется выражением

$$v_{\parallel} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}, \quad (13)$$

где $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ – отношение теплоемкости газа при постоянном давлении к теплоемкости газа при постоянном объеме (показатель адиабаты); p и ρ – давление и плотность невозмущенного газа.

С учетом уравнения Менделеева – Клапейрона $\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{\mu}$ (μ – молярная масса газа; T – абсолютная температура; R – универсальная газовая постоянная) выражение (13) принимает вид

$$v_{\parallel} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}} = \langle v \rangle \sqrt{\frac{\pi \gamma}{8}}, \quad (14)$$

где $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}$ – средняя скорость теплового движения молекул газа.

В воздухе при нормальных условиях скорость звука $v_{\parallel} \approx 340$ м/с.

Отдельную группу представляют волны на поверхности жидкости. Распространение таких волн обусловлено действием сил тяжести и сил поверхностного натяжения. Роль этих сил различна для волн разной длины: для достаточно коротких волн, когда кривизна поверхности жидкости велика, преобладающими являются силы поверхностного натяжения, а в случае длинных волн этими силами можно пренебречь. В первом случае волны на воде называются *капиллярными*. Во втором случае волны называются *гравитационными*.

Для определения скорости капиллярных волн v_{σ} воспользуемся **методом анализа размерности**. Физическими величинами, от которых может зависеть скорость таких волн, являются коэффициент поверхностного на-

тяжения $\sigma \left[\frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2} \right]$, плотность воды $\rho \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]$, длина волны $\lambda \left[\text{м} \right]$. Связь этих величин со скоростью капиллярной волны выразим в виде уравнения

$$v_\sigma = C \sigma^n \rho^m \lambda^s,$$

где C – некоторый коэффициент пропорциональности; n, m, s – показатели степени, которые должны согласовать размерности левой и правой частей уравнения;

$$\frac{\text{м}}{\text{с}} = \left[\frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2} \right]^n \cdot \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]^m \cdot \text{м}^s;$$

$$n = \frac{1}{2}; \quad m = s = -\frac{1}{2}.$$

Поэтому запишем:

$$v_\sigma = C \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \lambda}}.$$

Точный расчет дает:

$$C = \sqrt{2\pi};$$

$$v_\sigma = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho \lambda}}. \quad (15)$$

При рассмотрении гравитационных поверхностных волн предположим, что скорость их распространения v_g зависит от объема воды, вовлеченного в волновой процесс (от глубины водоема h), ускорения свободного падения g и, возможно, – от соотношения глубины и длины волны (C_1 – коэффициент пропорциональности). Метод размерности дает выражение

$$v_g = C \sqrt{g \lambda}.$$

Параметр C нельзя определить из анализа размерностей. Параметр C_1 учитывает тот факт, что на очень «глубокой» воде, когда $\lambda \ll h$, скорость волны не может зависеть от глубины водоема, т.е. волна не возмущает глубинные слои воды. На очень «мелкой» воде, когда $h \ll \lambda$, скорость распространения волны не должна зависеть от длины волны.

Точный расчет позволяет получить следующие выражения:

для «глубокой» воды, когда $\lambda \ll h$,

$$v_g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{g \lambda},$$

для «мелкой» воды, когда $h \ll \lambda$,

$$v_g = \sqrt{gh}.$$

Капиллярные волны на поверхности воды – это рябь с длиной волны менее 1 см. Поэтому обычные волны, которые мы наблюдаем на поверхности воды, имеют гравитационную природу. Причем, поскольку скорость их распространения зависит от глубины водоема, то в открытом океане (где глубина достигает нескольких километров) скорость их распространения может достигать сотен метров в секунду (т.е. волна бежит со скоростью самолета).

Скорость волны зависит от того, в какой среде распространяется волна. Если существует зависимость между скоростью распространения волны в среде и длиной волны, то такую среду называют *дисперсирующей*, а явление, обусловленное этой зависимостью, носит название **дисперсии**. Рассмотрим распространение в дисперсирующей среде двух волн, λ и $\lambda + \Delta\lambda$ (такие волны образуют *волновой пакет*). Фазовые скорости этих волн равны v и $v + \Delta v$ соответственно. Пусть в некоторый момент времени в некоторой точке среды (на расстоянии x_0) фазы волн совпадают (рис. 1.4), т.е. точки P и P_1 колеблются синфазно и одновременно достигают максимального отклонения. Если для этого момента времени осуществить сложение волн (в соответствии с принципом суперпозиции) в направлениях распространения и обратном, то за счет разности длин волн сдвиг фаз волн в некоторых точках оси OX (например, на расстоянии x_1 , слева от точки P_1) слева и справа от x_0 достигает величины π . В этом случае смещения точек среды от равновесного положения будут складываться в противофазе и результирующее смещение будет минимальным (например, в точке x_1). В то же время в точке x_0 результирующее смещение будет максимальным. Подобная группа может сформироваться и в недисперсирующей среде.

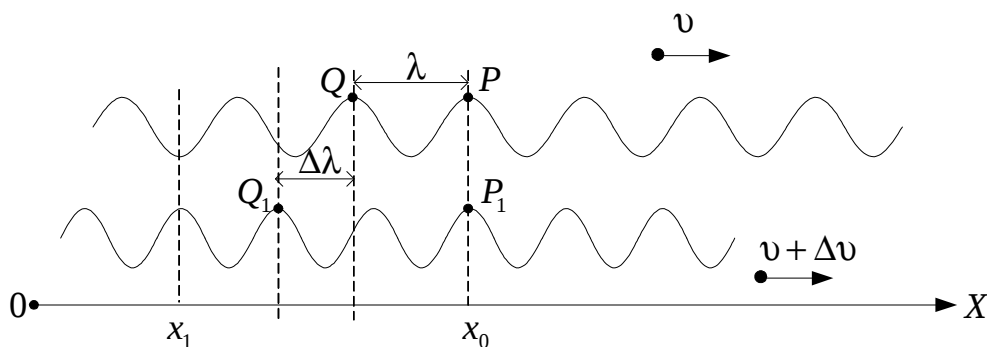


Рис. 1.4

Так как волна с длиной $(\lambda + \Delta\lambda)$ распространяется с большей скоростью $(v + \Delta v)$, как мы приняли, через время τ фаза точки P обгоняет фазу точки P_1 . Пусть при этом совпадут фазы точек Q и Q_1 . Такую ситуацию можно рассматривать как формирование новой волновой группы с центром в точке Q_1 . Это означает, что центр волновой группы сместится за время τ на длину волны λ . Поэтому скорость перемещения u центра волновой группы (*групповая скорость*) меньше фазовой скорости v на λ/τ :

$$u = v - \frac{\lambda}{\tau}.$$

Время τ , в течение которого точка Q_1 догоняет Q , равно $\frac{\Delta\lambda}{\Delta v}$. Поэтому выражение для групповой скорости при $\Delta\lambda \rightarrow 0$ принимает вид

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \quad (16)$$

В данном случае производная $\frac{dv}{d\lambda}$ описывает **дисперсию**, причем знак производной может быть любым. Различают *нормальную* ($du/d\lambda > 0$) и *аномальную* ($du/d\lambda < 0$) дисперсии.

В качестве примера определим групповую скорость гравитационных волн на «глубокой» воде

$$\frac{dv_g}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} (C_1 \sqrt{g\lambda}) = \frac{1}{2} C_1 \sqrt{\frac{g}{\lambda}} = \frac{1}{2} \frac{v_g}{\lambda}; \quad u = v_g - \frac{1}{2} v_g = \frac{1}{2} v_g.$$

Скорость распространения центра группы гравитационных волн на «глубокой» воде оказывается вдвое меньше скорости отдельных волн.

Таким образом, при наличии дисперсии группа как целое движется с иной скоростью, чем входящие в ее состав отдельные волны («горбы» и «впадины»). Это возможно потому, что в процессе распространения группа волн «живет»: на одном конце группы возникают новые «горбы», а на другом «горбы» угасают.

При распространении волн происходит перенос энергии без переноса вещества. Энергия волны в упругой среде состоит из кинетической энергии частиц вещества, совершающих небольшие колебания, и из потенциальной энергии упругой деформации среды. Связь энергии с пара-

метрами волнового процесса и среды рассмотрим на примере волны, распространяющейся вдоль упругого стержня. Такая «бегущая» волна описывается уравнением

$$\xi(t, x) = a \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right).$$

Выделим в стержне малый элемент длины между плоскостями x и $x + \Delta x$ так, что $\Delta x \ll \lambda$. В этом элементе скорости $\frac{d\xi}{dt}$ частиц стержня можно считать одинаковыми,

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\omega a \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right).$$

Масса выделенного элемента стержня Δm равна $\rho S \Delta x$ (где S – площадь сечения стержня; ρ – плотность материала стержня), поэтому его кинетическая энергия $K_{\Delta x}$ в момент времени t

$$K_{\Delta x} = \frac{1}{2} \Delta m \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho S \Delta x \omega^2 a^2 \sin^2 \left(\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right).$$

Плотность кинетической энергии в точке x в момент времени t

$$w_K = \frac{K_{\Delta x}}{S \Delta x} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 a^2 \sin^2 \left(\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right).$$

Поскольку длина выделенного элемента стержня мала по сравнению с длиной волны, то вызываемую волной деформацию элемента можно считать однородной. Поэтому потенциальную энергию деформации $\Pi_{\Delta x}$ можно записать как

$$\Pi_{\Delta x} = \frac{1}{2} k (\Delta l)^2 = \frac{1}{2} S \Delta x E \left(\frac{\Delta l}{\Delta x} \right)^2,$$

где Δl – удлинение рассматриваемого элемента стержня Δx , вызванное проходящей волной; E – модуль Юнга.

Для Δl в момент времени t_1 можно записать:

$$\Delta l = \xi(t_1, x + \Delta x) - \xi(t_1, x), \quad \text{тогда} \quad \frac{\Delta l}{\Delta x} = \frac{\xi(t_1, x + \Delta x) - \xi(t_1, x)}{\Delta x}.$$

Поэтому, переходя к пределу $\Delta x \rightarrow 0$, получаем производную

$$\frac{\Delta l}{\Delta x} \rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\omega}{v} a \sin \left(\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right).$$

Тогда выражение для потенциальной энергии

$$П_{\Delta x} = \frac{1}{2} S \Delta x E \left(\frac{\omega}{v} a \right)^2 \sin^2 \left(\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right),$$

а плотность потенциальной энергии в точке x в момент времени t

$$w_{II} = \frac{П_{\Delta x}}{S \Delta x} = \frac{1}{2} E \frac{\omega^2}{v^2} a^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right].$$

Поскольку скорость распространения продольных волн

$$v_{||} = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

то

$$w_{II} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 a^2 \sin^2 \left(\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right).$$

Суммарная плотность энергии (рис. 1.5)

$$w = w_{II} + w_K = \rho \omega^2 a^2 \sin^2 \left(\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right),$$

а среднее значение вдоль направления распространения волны

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho \omega^2 a^2.$$

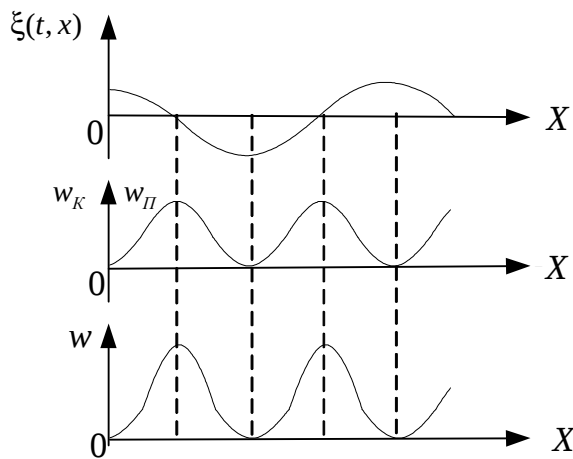


Рис. 1.5

Необходимо отметить, что в отличие от локализованных колебаний (например, осциллятора), где кинетическая и потенциальная энергия изменяются в противофазе, в бегущей волне колебания потенциальной и кинетической энергии происходят в одинаковой фазе. Это

общее свойство бегущих волн, распространяющихся в определенном направлении. Такое утверждение справедливо также для поперечных волн.

Энергия бегущей волны переносится вместе с волной со скоростью v (частицы среды при этом колеблются около своих положений равновесия). Определим *поток энергии* $\Delta\Phi$, переносимой волной за единицу времени через площадку ΔS , перпендикулярную к направлению распространения волны:

$$\Delta\Phi = wv\Delta S.$$

Величина $j = \frac{d\Phi}{dS} = wv$ носит название *плотности потока энергии волны*. Поскольку скорость v – векторная величина, то плотность потока энергии волны – также векторная величина, которая получила название **вектора Умова**:

$$\vec{j} = w\vec{v}. \quad (17)$$

Среднее значение модуля вектора Умова

$$\langle j \rangle = \langle w \rangle v = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 v = I.$$

При произвольной ориентации площадки dS (единичного вектора $\vec{n}$, нормального к плоскости площадки) относительно вектора Умова $\vec{j}$ поток через нее будет равен

$$d\Phi = \vec{j} \cdot d\vec{S} = j\Delta S \cos \alpha.$$

Полный поток через поверхность S определяется интегралом

$$\Phi = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_S j_n dS, \quad (18)$$

где j_n – проекция вектора Умова на нормаль $\vec{n}$ к площадке dS ($d\vec{S} = dS\vec{n}$).

Для примера определим поток энергии через сферическую поверхность S , переносимый сферической волной, распространяющейся из центра сферы. В этом случае во всех точках поверхности величина j_n одинакова и равна j . Поэтому

$$\Phi = j4\pi r^2,$$

где r – радиус сферической поверхности S . Подставим вместо j среднее значение $\frac{1}{2} \rho a(r)^2 \omega^2 u$:

$$\Phi = \frac{1}{2} \rho a(r)^2 \omega^2 u 4\pi r^2,$$

где учтено, что амплитуда колебаний a зависит от расстояния r , т.е. $a = a(r)$.

Поскольку полный поток энергии через сферу любого радиуса не должен зависеть от радиуса, то из последнего соотношения можно определить вид зависимости амплитуды сферической волны от расстояния от источника колебания.

Итак, $\Phi = \text{const}$, поэтому $r^2 a(r)^2 = \text{const}$ или $a(r) = \frac{\text{const}}{r}$, т.е. амплитуда сферической волны обратно пропорциональна радиусу волновой поверхности, что соответствует соотношению (6).

Основные закономерности волновых явлений

Каждая точка пространства, до которой дошел фронт волны, сама становится источником вторичной сферической волны с параметрами, соответствующими параметрам первичной волны. В этом суть **принципа Гюйгенса – Френеля**, который лежит в основе теории, описывающей волновые явления.

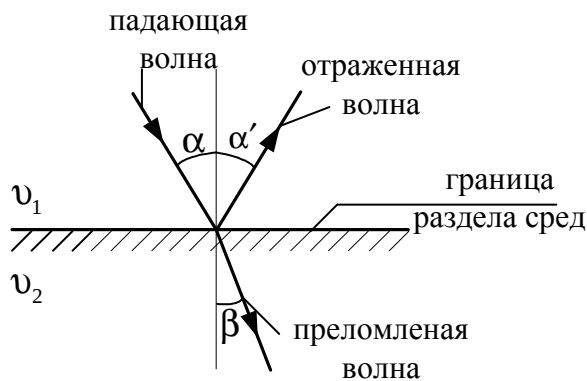


Рис. 1.6

При распространении упругой волны в неоднородной среде направление ее распространения, вообще говоря, меняется. В простейшем случае двух однородных сред, отделенных одна от другой плоской границей раздела, волна частично отражается, частично преломляется на этой границе (рис. 1.6). В результате

возникает две новые волны – *отраженная* и *преломленная*, направления которых отличаются от направления падающей волны. На основе принципа Гюйгенса могут быть получены

закон отражения:

$$\alpha = \alpha'$$

и закон преломления:

$$v_1 \sin \beta = v_2 \sin \alpha, \quad (19)$$

где α – угол падения; α' – угол отражения; β – угол преломления; v_1 и v_2 – скорости волны в первой и второй средах соответственно.

Отражение волны от границы раздела сред требует отдельного рассмотрения. При нормальном падении плоской монохроматической волны на границу раздела возникает также плоская волна, распространяющаяся в обратном направлении с такой же по модулю скоростью v . Запишем уравнение падающей волны

$$\xi = a \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right)$$

и уравнение отраженной волны $\xi' = a \cos \left(\omega \left(t + \frac{x}{v} \right) + \delta \right)$, где δ – дополнительная разность фаз, возникающая в результате отражения.

Колебания любой точки среды – это результат сложения гармонических колебаний, вызываемых падающей и отраженной волнами (рис. 1.7). Если среда, в которой распространяется падающая волна, оказывается менее плотной, чем среда, от которой происходит отражение (см. рис. 1.7, а) (например, конец струны закреплен), то складываемые колебания в точке закрепления должны погасить друг друга.

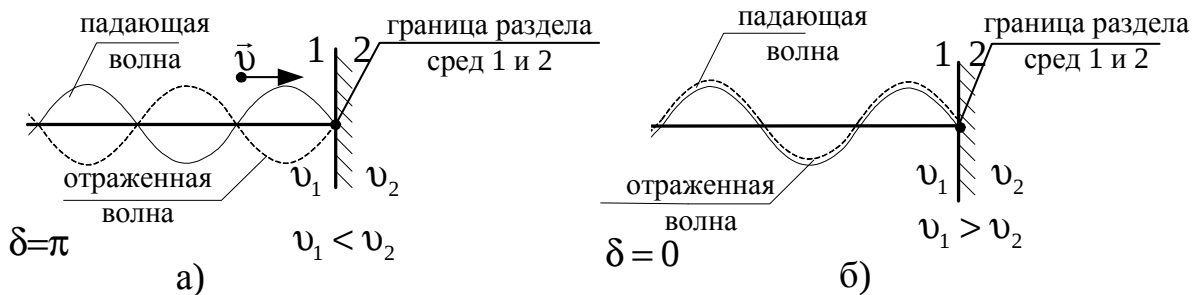


Рис. 1.7

В этом случае колебания среды происходят в противофазе, т.е. $\delta = \pi$, а уравнение отраженной волны

$$\xi' = -a \cos \left(\omega \left(t + \frac{x}{u} \right) \right).$$

Если конец струны свободен (см. рис. 1.7, б) (плотность среды 1, в которой распространяется падающая волна, выше, чем плотность среды 2 за границей раздела), в точке закрепления частицы среды совершают полное колебание, как и другие точки среды 1. Таким образом, в этом случае отраженная и падающая волны имеют одинаковые фазы ($\delta = 0$).

Законы отражения и преломления справедливы только при условии, что протяженность границы раздела значительно превышает длину волны λ . Если это условие не выполняется, то существенную роль начинает играть **дифракция волн**, которая проявляется в огибании волнами препятствия.

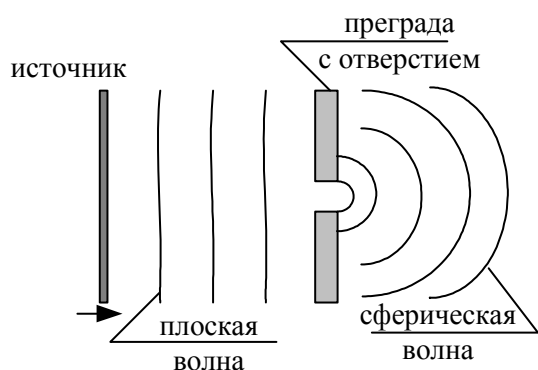


Рис. 1.8

Представим, что плоская волна приближается к преграде, имеющей небольшое отверстие, которое можно считать точечным (рис. 1.8). Максимумы приходящей волны производят периодическое возмущение в отверстии преграды. Это возмущение порождает сферическую волну согласно принципу Гюйгенса. Волновая картина, возникающая за преградой, состоит из набора сферических волн, расходящихся от

отверстия, причем длина волны и частота у них такие же, как и у падающей волны (если скорости распространения с обеих сторон преграды одинаковы).

При сложении волн с одинаковой частотой, т.е. с постоянной разностью фаз возникает явление **интерференции**, заключающееся в том, что колебания в одних точках усиливаются, а в других точках ослабляются. Таким образом, результатом интерференции является *перераспределение энергии* упругих волн в пространстве. Волны, для которых возможно наблюдать интерференцию, носят название *когерентных волн* – это волны, которые имеют одинаковую частоту и постоянную во времени разность фаз. Проще всего найти результат сложения таких колебаний с помощью векторных диаграмм. Пусть в искомой точке пространства складываемые колебания имеют вид

$$\xi_1(t) = a_1 \cos(\omega t + \varphi_0); \quad \xi_2(t) = a_2 \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Амплитуду a и начальную фазу φ_0 результирующего колебания можно найти с помощью рис. 1.9. По теореме косинусов

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\varphi_{01} - \varphi_{02}), \quad (20)$$

а для $\operatorname{tg} \varphi$ справедливо выражение

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_1 \sin \varphi_{01} + a_2 \sin \varphi_{02}}{a_1 \cos \varphi_{01} + a_2 \cos \varphi_{02}}. \quad (21)$$

Поскольку энергия колебаний (интенсивность волны I) пропорциональна квадрату амплитуды (a^2), то из выражения (20) видно, что энергия результирующего колебания в общем случае не равна сумме энергий складываемых колебаний (I_1 и I_2), т.е. $I \neq I_1 + I_2$.

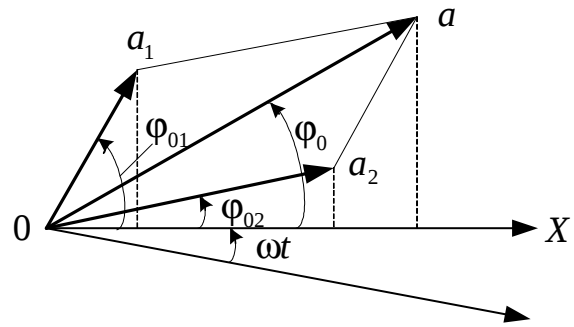


Рис. 1.9

Выражение (20) можно переписать в виде

$$I = I_1 + I_2 + 2I_1I_2 \cos(\varphi_{01} - \varphi_{02}).$$

Максимальная интенсивность наблюдается при

$$\varphi_{01} - \varphi_{02} = 2\pi m, \quad \text{где } m = 0, 1, 2, \dots,$$

а минимальная интенсивность – при

$$\varphi_{01} - \varphi_{02} = \pi + 2\pi m = (2m + 1)\pi, \quad \text{где } m = 0, 1, 2, \dots$$

Особым случаем интерференции является наложение двух встречных когерентных плоских волн с одинаковой амплитудой. Такой случай возникает при отражении волны от границы раздела сред (см. рис. 1.7).

Возникающий в результате волновой процесс называют *стоячей волной*. Запишем уравнения двух плоских волн:

для падающей волны

$$\xi = a \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right);$$

для отраженной волны

$$\xi' = a \cos \left(\omega \left(t + \frac{x}{u} \right) + \delta \right).$$

Амплитуда результирующего колебания ξ_p зависит от скачка фазы δ на границе раздела.

Рассмотрим два случая:

1. Фаза не меняется на границе раздела, дополнительная разность фаз $\delta = 0$,

$$\xi_p = \xi + \xi' = 2a \cos \left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right) \cos \omega t, \quad (22)$$

то есть амплитуда результирующего колебания $A = 2a \cos \frac{2\pi x}{\lambda}$ и в точках,

где $2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm m\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), амплитуда колебаний достигает максимального значения $2a$ (*пучность стоячей волны*). Координаты пучностей (рис. 1.10)

$$x_{\text{пучн}} = \pm \frac{1}{2} m \lambda.$$

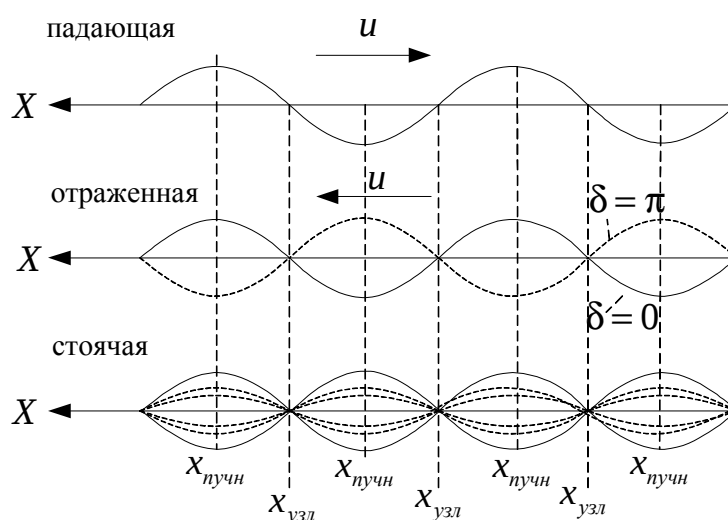


Рис. 1.10

В точках, где $2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$), амплитуда результирующего колебания обращается в нуль (*узлы стоячей волны*).

Координаты узлов (см. рис. 1.10)

$$x_{\text{узел}} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}.$$

Расстояние между соседними пучностями и соседними узлами равно $\frac{\lambda}{2}$ (*длина стоячей волны*), пучности и узлы друг относительно друга смещены на $\frac{\lambda}{4}$. При этом расположение узлов и пучностей в стоячей волне не меняется со временем. В этом состоит главное отличие *стоячей волны от бегущей*.

Из выражения (22) и рис. 1.9 следует, что стоячая волна может существовать при условии кратности протяженности среды распространения x (от источника волны до отражающей границы) половине длины волны

$$x = m \frac{\lambda}{2}. \quad (23)$$

2. Фаза волны меняется на границе раздела на δ ($\delta = \pi$),

$$\xi'_p = \xi + \xi' = 2a \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \sin \omega t, \quad (24)$$

то есть амплитуда результирующих колебаний

$$A = 2a \sin \frac{2\pi x}{\lambda}.$$

Подставив в данное выражение для амплитуды условие возникновения стоячей волны (24), получим, что для этого случая A всегда равна нулю, т.е. падающая и отраженная волны взаимно подавляются.

Продифференцировав уравнение (22) по t и по x , получим выражения для скорости смещения частиц среды $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ и деформации среды $\frac{\partial \xi}{\partial x}$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -2\omega a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin \omega t \quad \text{и} \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = -2 \frac{2\pi}{\lambda} a \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos \omega t.$$

Первое уравнение описывает *стоячую волну скорости смещения частиц среды*, второе – *стоячую волну деформации*. Соответственно дважды за период происходит превращение энергии стоячей волны то полностью в потенциальную, то полностью в кинетическую.

Если упругие волны, распространяющиеся в воздухе, имеют частоту в пределах от 16 до 20000 Гц, то, достигнув человеческого уха, они вызывают ощущение звука. В соответствии с этим упругие волны в любой среде, имеющие частоту, заключенную в указанных пределах, называют *звуковыми волнами* или просто *звуком*. Упругие волны с частотами меньше 16 Гц называют *инфразвуком*; волны с частотами, превышающими 20000 Гц, называют *ультразвуком*. Инфра- и ультразвук человеческое ухо не слышит.

Воспринимаемые звуки люди различают по *высоте, тембру и громкости*. Каждой из этих субъективных оценок соответствует определенная физическая характеристика звуковой волны.

Набор частот колебаний, присутствующих в данном звуке, называется его акустическим спектром. Если в звуке присутствуют колебания всех частот в некотором интервале от ν' до ν'' , то спектр называется *сплошным*.

Если звук состоит из колебаний дискретных частот ν_1, ν_2, ν_3 и т.д., то спектр называется *линейчатым*. Сплошным акустическим спектром обладают *шумы*. Колебания с линейчатым спектром вызывают ощущение звука с более или менее определенной высотой. Такой звук называется *тональным* (музыка).

Высота тонального звука определяется основной частотой. Под *интенсивностью звука* понимают среднее по времени значение плотности потока энергии, которую несет с собой звуковая волна. Для того чтобы вызвать звуковое ощущение, волна должна обладать некоторой минимальной интенсивностью, которая называется *порогом слышимости*.

Субъективно оцениваемая громкость звука возрастает гораздо медленнее, чем интенсивность звуковых волн. Экспериментально можно установить, что при возрастании интенсивности в геометрической прогрессии громкость возрастает приблизительно в арифметической прогрессии, т.е. линейно. На этом основании уровень громкости L определяется как логарифм отношения интенсивности данного звука I к интенсивности I_0 , принятой за исходную,

$$L = \lg \frac{I}{I_0}. \quad (25)$$

Исходная интенсивность I_0 принимается равной 10^{-12} Вт/м, так что порог слышимости при частоте порядка 1000 Гц лежит на нулевом уровне ($L = 0$). Единица уровня громкости L , определяемого формулой (24), называется *белом* (Б). Обычно пользуются в 10 раз меньшими единицами – *децибелами* (дБ). Значение L в децибелах определяется формулой

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0}.$$

Отношение двух интенсивностей, I_1 и I_2 , также может быть выражено в децибелах (см. табл.):

$$L = 10 \lg \frac{I_1}{I_2}.$$

Звук	Уровень громкости, дБ
Тиканье часов	20
Шепот на расстоянии 1 м	30
Тихий разговор	40
Речь средней громкости	60
Громкая речь	70
Крик	80
Шум самолетного мотора:	
– на расстоянии 5 м;	120
– на расстоянии 3 м	130

Пусть в газе или жидкости на некотором расстоянии от источника волн располагается воспринимающее колебания среды устройство (приемник). Если источник и приемник неподвижны относительно среды, в которой распространяется волна, то частота колебаний, воспринимаемых приемником, равна частоте ν_0 колебаний источника. Если же источник или приемник, или оба одновременно движутся относительно среды, то частота ν , воспринимаемая приемником, оказывается отличной от ν_0 . Это явление называется **эффектом Доплера**.

Предположим, что источник и приемник движутся вдоль соединяющей их прямой. Скорость источника $v_{ист}$ будем считать положительной, если источник движется по направлению к приемнику, и отрицательной, если источник движется в направлении от приемника. Аналогично скорость приемника $v_{пр}$ будем считать положительной, если приемник движется по направлению к источнику, и отрицательной, если приемник движется в направлении от источника.

Если источник неподвижен и генерирует в среде колебания с частотой ν_0 , то через 1 секунду, когда источник будет завершать ν_0 -е колебание, порожденный первым колебанием «гребень» волны успеет пройти в среде путь v (v – скорость распространения волны относительно среды). Следовательно, порождаемые источником за секунду ν_0 «гребней» и «впадин» волны уложатся на длине v . Если же источник движется относительно среды со скоростью $v_{ист}$, то через 1 секунду, когда источник будет завершать ν_0 -е колебание, «гребень», порожденный первым колебанием, будет находиться от источника на расстоянии $(v - v_{ист})$ (рис. 1.11). Это следует из того, что скорость волны зависит только от параметров среды. Следовательно, ν_0 «гребней» и «впадин» уложатся на длине $v - v_{ист}$, так что длина волны будет равна

$$\lambda = \frac{v - v_{ист}}{\nu_0}. \quad (26)$$

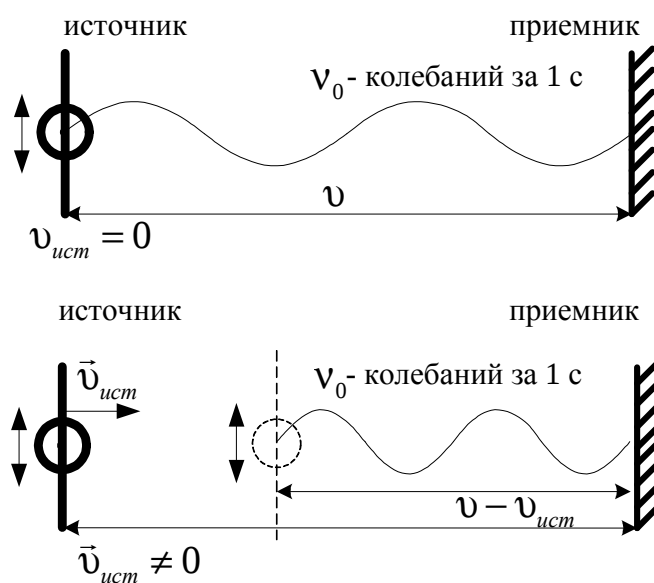
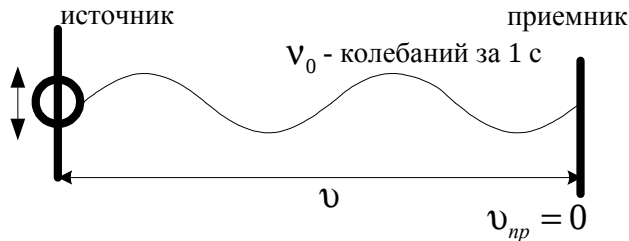


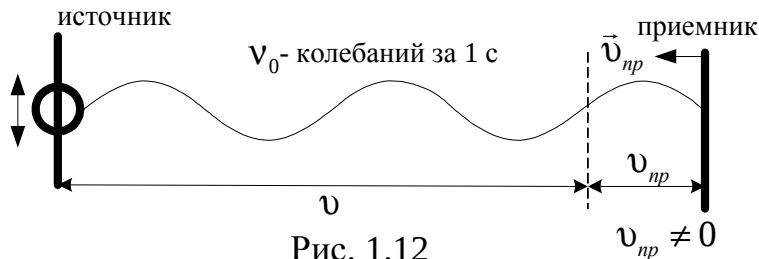
Рис. 1.11

Рассмотрим другой случай (рис. 1.12). Если приемник движется со скоростью v_{np} , то в конце длящегося 1 с промежутка времени он будет воспринимать «впадину», которая в начале этого промежутка отстояла от его теперешнего положения на расстоянии, численно равном v . Таким образом, приемник воспримет за секунду колебания, отвечающие «гребням» и «впадинам», укладывающимся на длине, численно равной $v + v_{np}$ (рис. 1.12), и зафиксируется частота колебаний



$$v = \frac{v + v_{np}}{\lambda}. \quad (27)$$

Подставим в эту формулу выражение (26) для λ :



$$v = v_0 \frac{v + v_{np}}{v - v_{ист}}. \quad (28)$$

Из формулы (28) вытекает, что при таком движении источника и приемника, при котором

расстояние между ними уменьшается, воспринимаемая приемником частота v оказывается больше частоты источника v_0 .

Если расстояние между источником и приемником увеличивается, v будет меньше, чем v_0 .

$$v = v_0 \frac{v - v_{np}}{v + v_{ист}}. \quad (29)$$

Если направления скоростей $v_{ист}$ и $v_{пр}$ не совпадают с проходящей через источник и приемник прямой, вместо $v_{ист}$ и $v_{пр}$ в формуле (28) нужно брать проекции векторов $v_{ист}$ и $v_{пр}$ на направление указанной прямой.

Из формулы (28) следует, что эффект Доплера для звуковых волн определяется скоростями движения источника и приемника относительно среды, в которой распространяется звук. Для световых волн также наблюдается эффект Доплера, однако формула для изменения частоты имеет иной вид, чем (28). Это обусловлено тем, что для световых волн не существует вещественной среды, колебания которой представляли бы собой «свет». Поэтому скорости источника и приемника света относительно «среды» не имеют смысла. Рассмотрение этого вопроса выходит за рамки программы.

Электромагнитные волны

В разделе, касающемся электромагнитной индукции и самоиндукции, было показано, что переменные электрическое и магнитное поля взаимно порождают друг друга. Поэтому колебание напряженности электрического поля в некоторой точке пространства приводит к возникновению соответствующих колебаний напряженности магнитного поля (и наоборот) и распространению электромагнитного поля в пространстве. Взаимосвязь параметров электрической и магнитной компонент электромагнитного поля описывается уравнениями Максвелла (см. модуль 5, блок 4), которые в области пространства, не содержащей свободных электрических зарядов и макроскопических токов, имеют вид

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{и} \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \vec{D} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad (30)$$

с учетом материальных соотношений $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$ и $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$ получаем

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \text{и} \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (31)$$

Используя математическое равенство для некоторого вектора $\vec{V}$

$$\Delta \vec{V} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{V} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{V},$$

получим волновые уравнения для векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$

$$\Delta \vec{E} = \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{и} \quad \Delta \vec{H} = \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}, \quad (32)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Введя обозначение $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$, уравнения (32) можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}; \quad (33)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}. \quad (34)$$

Уравнения (33) и (34) – волновые уравнения электрической и магнитной компонент электромагнитной волны (распространяющегося в пространстве электромагнитного поля). Фазовая скорость электромагнитной волны

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (35)$$

В вакууме ($\epsilon \approx 1$ и $\mu \approx 1$) скорость электромагнитных волн совпадает со скоростью света в пустоте c . Поскольку вектор скорости перпендикулярен к вектору напряженности электрического поля и вектору напряженности магнитного поля, то электромагнитные волны – *поперечные волны*.

Электромагнитные волны переносят энергию. Плотность потока энергии можно получить, умножив плотность энергии на скорость волны. Плотность энергии электромагнитного поля w складывается из плотности энергии электрического поля w_e и плотности энергии магнитного поля w_m

$$w = w_e + w_m = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}. \quad (36)$$

В данной точке пространства векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ изменяются в одинаковой фазе, поэтому соотношение между амплитудными значениями E и H справедливо и для их мгновенных значений. Отсюда следует, что плотности энергии электрического и магнитного полей волны каждый момент времени одинаковы: $w_e = w_m$. Поэтому

$$w = 2w_e = \epsilon\epsilon_0 E^2. \quad (37)$$

Воспользовавшись тем, что $E\sqrt{\epsilon\epsilon_0} = H\sqrt{\mu\mu_0}$, выражению (35) можно придать вид

$$w = \sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0} EH = \frac{1}{v} EH,$$

где v – скорость электромагнитной волны.

Умножив найденное выражение для w на скорость волны v , получим **модуль вектора плотности потока энергии**

$$S = wv = EH. \quad (38)$$

Векторы E и H взаимно перпендикулярны и образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему. Поэтому направление вектора $[\vec{E} \times \vec{H}]$ совпадает с направлением переноса энергии, а модуль

этого вектора равен EH . Следовательно, вектор плотности потока электромагнитной энергии можно представить как векторное произведение E и H :

$$\vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}]. \quad (39)$$

Вектор $\vec{S}$ называется **вектором Пойнтинга (Умова – Пойнтинга)**.

Скалярная величина I , равная модулю среднего значения вектора Умова – Пойнтинга, называется *интенсивностью волны*,

$$I = \left\langle \vec{S} \right\rangle.$$

По аналогии с (18) поток Φ электромагнитной энергии через некоторую поверхность площадью $d\Omega$ можно найти интегрированием:

$$\Phi = \int_{\Omega} S d\Omega. \quad (38)$$

Простейшей системой, излучающей электромагнитные волны, является *колеблющийся электрический диполь*. Примером диполя может служить система, образованная неподвижным точечным зарядом $+q$ и колеблющимся около него точечным зарядом $-q$. Дипольный электрический момент этой системы изменяется со временем по гармоническому закону.

Как показывает теория, в точках пространства, отстоящих от диполя на расстоянии r , значительно превышающих длину излучаемой волны, $r \gg \lambda$, интенсивность излучения диполя

$$I \sim \frac{\sin^2 \theta}{r^2},$$

где θ – угол между осью диполя и направлением излучения.

Зависимость $I(\theta)$ (рис. 1.13) называют *полярной диаграммой направленности излучения диполя* (индикатрисой излучения). Из этой диаграммы видно, что сильнее всего излучает диполь в направлениях, перпендикулярных к его оси $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$. В направлениях, совпадающих с осью ($\theta = 0$ и $\theta = \pi$), диполь не излучает.

Диаграмма направленности позволяет формировать излучения с определенными пространственными характеристиками и используется при конструировании антенн.

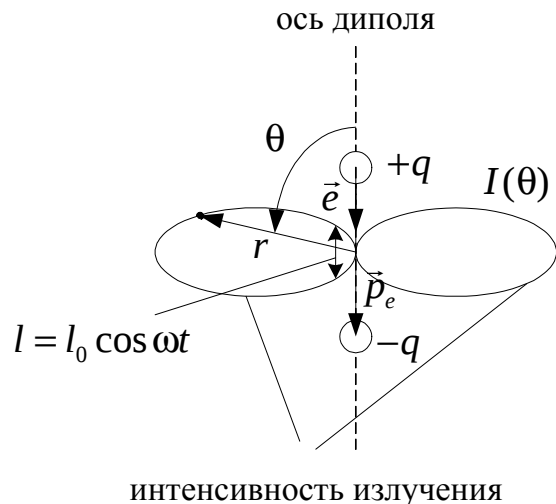


Рис. 1.13

1.2. Методические указания к лекционным занятиям

Вопросы лекции	Форма изучения	Литература	Вопросы для самоконтроля
Волновые процессы: – волновое уравнение; – свет как электромагнитная волна; – скорость распространения упругих волн; – дисперсия волн; – энергия упругой волны; – отражение и преломление упругих волн; – интерференция и дифракция волн; – стоячие волны	лекция	[8], пп. 9.1 – 9.6 [10], пп. 153 – 160 [7], пп. 19.1 – 19.8 [5], пп. 3.15 – 3.32	Вопросы для самоконтроля 1. Что такое волновая поверхность и фронт волны? В чем их отличие? 2. В каких средах могут распространяться продольные, а в каких – поперечные волны? 3. Укажите основные характеристики волны. 4. В чем состоит явление дисперсии? 5. Какова особенность энергии бегущей волны? 6. Каковы причины возникновения стоячих волн? 7. В чем заключается особенность отражения волн от поверхности раздела сред различной плотности? 8. От чего зависит частота и интенсивность излучения диполя?

1.3. Методические указания к практическим занятиям

Тема занятия	Задачи	Рекомендации	Задачи из сборников
Волновые процессы	1. Определение волнового уравнения по известным параметрам волны. 2. Определение параметров волны по известному волновому уравнению. Фазовая и групповая скорости. 3. Определение частот звуковых колебаний в соответствии с эффектом Доплера. Определение фазовой и групповой скорости по заданной функции (дисперсии)	1. При определении волнового уравнения необходимо помнить, что волновой процесс – это колебание, которое распространяется в пространстве, поэтому при определении параметров волны по известному уравнению необходимо зафиксировать координату и рассмотреть колебания в данной точке пространства, или зафиксировать время и рассмотреть распространение точек, колеблющихся в одинаковой фазе. 2. Эффект Доплера для акустических волн описывается соотношениями (26) – (28), где скорость звука зависит от свойств среды, в которой он распространяется. 3. Определение групповой скорости осуществляется по заданной зависимости фазовой скорости от частоты или длины волны. При этом зависимость от частоты может быть преобразована в зависимость от длины волны с помощью соотношения, связывающего скорость, длину волны и частоту	[12], №№ 7.1 – 7.26 [1], №№ 17.4, 17.5 [11], №№ 4.116 – 4.156 [12], №№ 7.28 – 7.36 [12], №№ 7.37 – 7.48

1.4. Примеры решения задач

Пример 1. Плоская синусоидальная волна распространяется вдоль прямой, совпадающей с положительным направлением оси x , в среде, не поглощающей энергию, со скоростью $v = 15$ м/с. Две точки, находящиеся на прямой на расстоянии $x_1 = 5$ м и $x_2 = 5,5$ м от источника колебаний, колеблются с разностью фаз $\Delta\varphi = \pi/5$. Амплитуда волны $A = 4$ см. Определить: 1) длину волны; 2) уравнение волны; 3) смещение ξ_1 первой точки в момент времени $t = 3$ с. (**Уровень 2**).

Решение:

1. Разность фаз двух колеблющихся точек волны $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$, где $\Delta x = x_2 - x_1$ – расстояние между этими точками. Тогда $\lambda = \frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\Delta\varphi}$, откуда $\lambda = 5$ м.

2. Циклическая частота $\omega = \frac{2\pi}{T}$, но $T = \lambda/v$, поэтому $\omega = 2\pi v/\lambda$. Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси x ,

$$\xi(t, x) = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (vt - x) = 0,04 \cos \left(6\pi t - \frac{2\pi}{5} x \right).$$

3. Подставив значение $t = 3$ с и $x_1 = 5$ м, получим

$$\xi_1(t, x) = 0,04 \cos \left(6\pi t - \frac{2\pi}{5} x \right) = 4 \text{ см.}$$

$$\text{Ответ: } \lambda = 5 \text{ м; } \xi_1(t, x) = 0,04 \cos \left(6\pi t - \frac{2\pi}{5} x \right) = 4 \text{ см.}$$

Пример 2. Неподвижный приемник при приближении источника звука, излучающего волны с частотой $\nu_0 = 360$ Гц, регистрирует звуковые колебания с частотой $\nu = 400$ Гц. Принимая температуру воздуха $T = 290$ К, его молярную массу $M = 0,029$ кг/моль, определите скорость движения источника звука. (**Уровень 2**).

Решение. В акустике при покоящемся приемнике ($v_{np} = 0$) и приближающемся со скоростью $v_{ист}$ источнике частота звука определяется выражением (эффект Доплера)

$$v = v_0 \frac{v + v_{np}}{v - v_{ист}} = v_0 \frac{v}{v - v_{ист}},$$

где v – скорость звука.

Тогда скорость источника

$$v_{ист} = v \left(1 - \frac{v_0}{v} \right).$$

Скорость распространения звуковых волн в газах определяется как $v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$, где для воздуха $\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{7}{5}$. После подстановки численных данных получаем $v_{ист} = 34,1$ м/с.

Ответ: $v_{ист} = 34,1$ м/с.

Пример 3. Определите разность фазовой и групповой скоростей волны, частота которой $\nu = 800$ Гц, если фазовая скорость задается выражением

$v = \frac{a_0}{\sqrt{\nu + b}}$, где $a_0 = 24 \frac{\text{м}}{\text{с}^{3/2}}$; $b = 100$ Гц. (**Уровень 4**).

Решение. Выражение для групповой скорости имеет вид

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}.$$

Скорость волны связана с частотой и длиной волны выражением $v = \lambda \nu$, поэтому, подставив $v = \frac{a_0}{\sqrt{\nu + b}}$, можно получить функцию

$\lambda(\nu) = \frac{v^3}{a_0^2 - b\nu^2}$. Продифференцируем это выражение по скорости

$$\frac{d\lambda}{d\nu} = \frac{\nu^2(3a_0^2 - b\nu^2)}{(a_0^2 - b\nu^2)^2}.$$

Перевернув дробь, получим выражение для искомой производной (дисперсии)

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{(a_0^2 - b\nu^2)^2}{\nu^2(3a_0^2 - b\nu^2)}.$$

Разность скоростей определяется выражением

$$v - u = \lambda \frac{d\nu}{d\lambda}.$$

После подстановки $v = \frac{a_0}{\sqrt{v+b}}$ с учетом $\lambda = \frac{v}{v}$ получим

$$v - u = \frac{a_0 v}{(3v + 2b)\sqrt{v+b}}, \quad \text{т.е.} \quad v - u = 0,246 \text{ м/с}.$$

Ответ: $v - u = 0,246 \text{ м/с}$.

Пример 4. В незатухающей бегущей волне задана точка M , отстоящая от источника колебаний на расстоянии $y = \lambda/12$ в направлении распространения волны. Амплитуда колебаний $A = 0,050$ м. Считая в начальный момент времени смещение точки P , находящейся в источнике, максимальным, определить смещение от положения равновесия точки M для момента $t = T/6$, а также разность фаз колебаний точек M и P . (Уровень 3).

Решение. Смещение точки M можно найти с помощью уравнения бегущей волны. Используя условие задачи, преобразуем это уравнение так, чтобы в него вошли длина волны λ и период T колебаний. Учитывая соотношение $\omega = 2\pi/T$, получим

$$x = A \sin \left(2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y}{vT} \right) + \varphi_0 \right) = A \sin \left(2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y}{\lambda} \right) + \varphi_0 \right). \quad (1)$$

Чтобы найти начальную фазу φ_0 , воспользуемся начальными условиями задачи: если $t = 0$, $y = 0$, то $x = A$. При этих значениях t , y , x из уравнения (1) имеем: $\sin \varphi_0 = 1$, откуда $\varphi_0 = \pi/2$.

Подставив числовые значения величин A , t/T , y/λ , φ_0 в (1), получим

$$x = 0,050 \sin \left(2\pi \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12} \right) + \frac{\pi}{2} \right) = 0,050 \cdot 0,87 \text{ м} = 0,044 \text{ м}.$$

Для вычисления разности фаз $\varphi_M - \varphi_P$ колебаний точек M и P учтем, что для точки P координата $y = 0$. Следовательно, в любой момент t фаза точки P , т.е. аргумент синуса в (1) равна $\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0$. Тогда

$$\varphi_M - \varphi_P = \left(2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y}{\lambda} \right) + \varphi_0 \right) - \left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi_0 \right) = -2\pi \frac{y}{\lambda}. \quad (2)$$

Этот же результат можно получить сразу, если задать: $y_1 - y_2 = -y$.

Подставив в (2) числовое значение отношения y/λ , найдем

$$\varphi_M - \varphi_P = -2\pi(1/12) = -\pi/6.$$

Таким образом, колебания точки M отстают по фазе от колебаний источника на угол $\pi/6$.

Ответ: $x = 0,044$ м; $\varphi_M - \varphi_P = -\pi/6$.

Пример 5. Показатель преломления сероуглерода для света с длинами волн 509, 534 и 589 нм равен соответственно 1,647; 1,640 и 1,630. Вычислить фазовую и групповую скорости света вблизи длины волны 534 нм. (Уровень 5).

Решение. Групповая скорость u связана с фазовой скоростью v света в среде соотношением

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \quad (1)$$

Учитывая, что $v = c/n$ и $n = n(\lambda)$, из (1) получаем: $u = v \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right)$.

Полагая, что зависимость $n = n(\lambda)$ в условии задачи в данном диапазоне длин волн близка к линейной, можем записать:

$$u = v \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{\Delta n}{\Delta \lambda} \right), \quad (2)$$

где $\Delta n / \Delta \lambda$ – изменение показателя преломления с увеличением длины волны.

Для $\lambda = 534$ нм и $n = 1,640$ находим численное значение выражения в скобках (2)

$$\frac{\lambda_{cp}}{n_{cp}} \frac{\Delta n}{\Delta \lambda} = \frac{534 \text{ нм} (1,647 - 1,630)}{1,640 (509 - 589) \text{ нм}} = -0,069,$$

где $\lambda_{cp} = 534$ нм и $n_{cp} = 1,640$ – среднее значение зависимости $n = n(\lambda)$.

Из соотношения (2) определяем

$$\frac{u}{v} = \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{\Delta n}{\Delta \lambda} \right) = (1 - 0,069) = 0,931; \quad (3)$$

$$u = 0,931v.$$

Учитывая, что $v = c/n$, находим значение фазовой скорости вблизи $\lambda = 534$ нм (т.к. показатель преломления при этом равен 1,640)

$$v = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{1,640} = 1,83 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

По формуле (3) вычислим групповую скорость:

$$u = 0,931 \cdot 1,83 \cdot 10^8 \text{ м/с} = 1,70 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Ответ: $v = 1,83 \cdot 10^8 \text{ м/с}$; $u = 1,70 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

1.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Задано уравнение плоской волны $\xi(t, x) = A \cos(\omega t - kx)$, где $A = 0,5 \text{ см}$; $\omega = 628 \text{ с}^{-1}$; $k = 2 \text{ м}^{-1}$. Определить: 1) частоту колебаний ν и длину волны λ ; 2) фазовую скорость v ; 3) максимальные значения скорости $\xi'_{\max}$ и ускорения $\xi''_{\max}$ колебаний частиц среды. [1) 100 Гц; 3,14 м; 2) 314 м/с; 3) 0,314 м/с; 197 м/с²; **уровень 2**].
2. Плоская звуковая волна возбуждается источником колебаний с частотой $\nu = 200 \text{ Гц}$. Амплитуда A колебаний источника равна 4 мм. Задание: 1) написать уравнение колебаний источника $\xi(t, 0)$, если в начальный момент смещение точек источника максимально; 2) найти смещение $\xi(t, x)$ точек среды, находящихся на расстоянии $x = 100 \text{ см}$ от источника в момент $t = 0,1 \text{ с}$. Скорость v звуковой волны принять равной 300 м/с. Затуханием пренебречь. [1) $\xi(t, 0) = A \cos 2\pi \nu t$; 2) -2 мкм ; **уровень 3**].
3. Звуковые колебания, имеющие частоту $\nu = 0,5 \text{ кГц}$ и амплитуду $A = 0,25 \text{ мм}$, распространяются в упругой среде. Длина волны $\lambda = 70 \text{ см}$. Найти: 1) скорость v распространения волн; 2) максимальную скорость $\xi'_{\max}$ частиц среды. [1) 350 м/с; 2) 0,79 м/с; **уровень 2**].
4. Волна с периодом $T = 1,2 \text{ с}$ и амплитудой колебаний $A = 2 \text{ см}$ распространяется со скоростью $v = 15 \text{ м/с}$. Чему равно смещение $\xi(t, x)$ точки, находящейся на расстоянии $x = 45 \text{ м}$ от источника волн, в тот момент, когда от начала колебаний источника прошло время $t = 4 \text{ с}$? [$-1,73 \text{ см}$; **уровень 2**].
5. Две точки находятся на расстоянии $x = 50 \text{ см}$ друг от друга на прямой, вдоль которой распространяется волна со скоростью $v = 50 \text{ м/с}$. Период T колебаний равен 0,05 с. Найти разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний в этих точках. [1,26 рад; **уровень 2**].

6. Волна распространяется в упругой среде со скоростью $v = 100$ м/с. Наименьшее расстояние Δx между точками среды, фазы колебаний которых противоположны, равно 1 м. Определить частоту колебаний. [50 Гц; **уровень 2**].
7. Определить максимальное и минимальное значения длины λ звуковых волн, воспринимаемых человеческим ухом, соответствующие граничным частотам $\nu_1 = 16$ Гц и $\nu_2 = 20$ кГц. Скорость v звука принять равной 340 м/с. [21 м; 17 мм; **уровень 1**].
8. Скорость v звука в некотором газе при нормальных условиях равна 308 м/с. Плотность ρ газа равна $1,78 \text{ кг/м}^3$. Определить отношение c_p / c_v для данного газа. [1,67; **уровень 1**].
9. Определить длину λ бегущей волны, если в стоячей воде расстояние l : 1) между первой и седьмой пучностями равно 15 см, 2) между первым и четвертым узлом равно 15 см. [5 см; 10 см; **уровень 3**].
10. В трубе длиной $l = 1,2$ м находится воздух при температуре $T = 300$ К. Определить минимальную частоту $\nu_{\min}$ возможных колебаний воздушного столба в двух случаях: 1) труба открыта; 2) труба закрыта. [144 Гц; 72 Гц; **уровень 3**].
11. Стальной стержень длиной $l = 1$ м, закрепленный посередине, натирают суконкой, посыпанной канифолью. Определить частоту ν возникающих при этом собственных продольных колебаний стержня. [2,52 кГц; **уровень 3**].
12. Когда поезд проходит мимо неподвижного наблюдателя, высота тона звукового сигнала меняется скачком. Определить относительное изменение частоты $\Delta \nu / \nu$, если скорость v поезда равна 54 км/ч. [0,09; **уровень 2**].
13. На шоссе сближаются две автомашины со скоростями $u_1 = 30$ м/с и $u_2 = 20$ м/с. Первая из них подает звуковой сигнал частотой $\nu_1 = 600$ Гц. Найти кажущуюся частоту ν_2 звука, воспринимаемого водителем второй автомашины, в двух случаях: 1) до встречи, 2) после встречи. Изменится ли ответ (если изменится, то как) в случае подачи сигнала второй машиной? [699 Гц; 517 Гц; **уровень 3**].

14. По цилиндрической трубе диаметром $d = 20$ см и длиной $l = 5$ м, заполненной сухим воздухом, распространяется звуковая волна со средней за период интенсивностью $I = 50$ мВт/м². Найти энергию W звукового поля, заключенного в трубе. [23,7 мкДж; **уровень 4**].
15. Найти мощность P точечного изотропного источника звука, если на расстоянии $r = 25$ м от него интенсивность I звука равна 20 мВт/м². Какова средняя объемная плотность энергии на этом расстоянии? [157 Вт; 60,2 мкДж/м³; **уровень 4**].
16. На расстоянии $r_1 = 24$ м от точечного изотропного источника звука уровень его интенсивности $L_p = 32$ дБ. Найти уровень интенсивности L_p звука этого источника на расстоянии $r_2 = 16$ м. [35,5 дБ; **уровень 3**].
17. Звуковая волна прошла через перегородку, вследствие чего уровень интенсивности L_p звука уменьшился на 30 дБ. Во сколько раз уменьшилась интенсивность звука? [в 1000 раз; **уровень 1**].
18. На расстоянии $r = 100$ м от точечного изотропного источника звука уровень громкости L_N при частоте $\nu = 500$ Гц равен 20 дБ. Определить мощность P источника звука. [40 мкВт; **уровень 4**].
19. На какую длину волны λ будет резонировать контур, состоящий из катушки индуктивностью $L = 4$ мкГн и конденсатора электроемкостью $C = 1,11$ нФ? [126 м; **уровень 2**].
20. Для демонстрации опытов Герца с преломлением электромагнитных волн иногда берут большую призму, изготовленную из парафина. Определить показатель преломления парафина, если его диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 2$ и магнитная проницаемость $\mu = 1$. [1,4; **уровень 1**].
21. Два параллельных провода, погруженных в глицерин, индуктивно соединены с генератором электромагнитных колебаний частотой $\nu = 420$ МГц. Расстояние l между пучностями стоячих волн на проводах равно 7 см. Найти диэлектрическую проницаемость ϵ глицерина. Магнитную проницаемость μ принять равной единице. [2,6; **уровень 3**].

УЧЕБНЫЙ БЛОК 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

Оптикой называется раздел физики, в котором изучаются явления и закономерности, связанные с возникновением, распространением и взаимодействием с веществом световых электромагнитных волн.

В **геометрической оптике** рассматриваются законы распространения света в прозрачных средах на основе представлений о свете как о совокупности световых лучей – линий, вдоль которых распространяется энергия световых электромагнитных волн. В геометрической оптике не учитываются волновые свойства света и связанные с ним дифракционные явления. *Общий критерий применимости геометрической оптики:* $D \gg \sqrt{l\lambda}$, где D – линейный размер препятствия, на котором происходит дифракция; l – расстояние от препятствия до экрана.

Этот блок основан, в основном, на материале, который изучался в школьном курсе физике. Однако, поскольку инженерная подготовка требует навыков работы с оптическими приборами, то данный раздел вынесен для самостоятельного изучения (повторения).

При изучении данного блока студенты должны

иметь представление:

- об основных законах геометрической оптики и их проявлениях;
- об основных способах построения изображений в линзах и зеркалах;

обладать навыками:

- решения задач на основе формулы тонкой линзы;
- применения геометрических способов решения задач на построение изображений в линзах и зеркалах.

Учебная программа блока

Содержание блока	Форма подготовки	Литература
Законы геометрической оптики	самост.	[9] [7]
Сферические зеркала	самост.	
Линзы	самост.	

Цели обучения

Студент должен знать	Студент должен уметь
– приемы построения изображений в различных оптических приборах; – законы геометрической оптики; – основные характеристики линз и зеркал; – принцип Ферма и его следствия	– строить изображения различных объектов в линзах, зеркалах и оптических системах из них; – определять параметры световых лучей в результате их отражения и преломления

2.1. Краткое содержание теоретического материала

Действительный путь распространения монохроматического луча света – это путь, для прохождения которого требуется минимальное время по сравнению с любым другим возможным ближайшим путем между двумя точками. Этот принцип (**принципа Ферма**) лежит в основе математического описания оптических явлений.

Среда *оптически однородная*, если показатель преломления ее везде одинаков.

В оптически однородной среде лучи прямолинейны – в такой среде свет распространяется *прямолинейно* (**закон прямолинейного распространения света**). Это под-

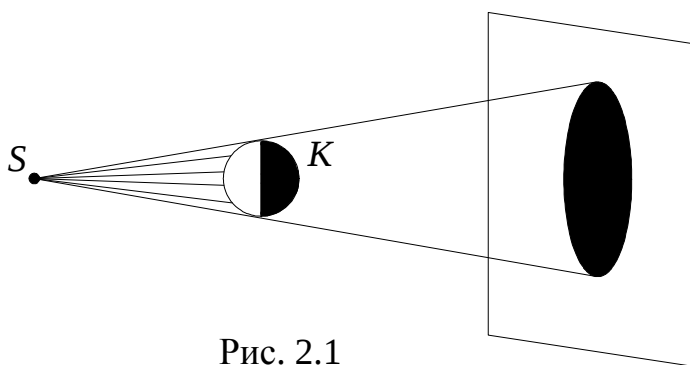


Рис. 2.1

тверждается явлением образования тени (рис. 2.1). Пучки световых лучей, пересекаясь, распространяются после пересечения независимо друг от друга (**закон независимости световых пучков**).

Отношение скорости света в вакууме к скорости света v в данной среде

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon\mu}$$

называется *абсолютным показателем преломления* этой среды. Здесь ϵ и μ – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, $\mu \approx 1$ для неферромагнитных сред. Для любой среды, кроме вакуума, $n > 1$. Величина n зависит от частоты света и состояния среды (ее плотности и температуры). Для газов при нормальных условиях $n \approx 1$. В анизотропных средах n зависит от направления распространения света и его поляризации.

Относительным показателем преломления n_{21} второй среды относительно первой называется соотношение скоростей света v_1 и v_2 соответственно в первой и второй средах:

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

где n_1 и n_2 – абсолютные показатели преломления первой и второй сред.

Если $n_{21} > 1$, то вторая среда называется *оптически более плотной*, чем первая среда.

При падении световых лучей на идеально плоскую границу раздела двух сред, размеры которой значительно превышают длину волны, происходят явления преломления и отражения света. Направление распространения света изменяется при переходе его во вторую среду, за исключением случая перпендикулярного падения лучей на границу раздела.

Углом падения i называется угол между падающим лучом и перпендикуляром к границе раздела, восстановленным в точке падения. *Углом отражения i'* называется угол между отраженным лучом и тем же перпендикуляром (рис. 2.2). *Углом преломления r* называется угол между преломленным лучом и тем же перпендикуляром.

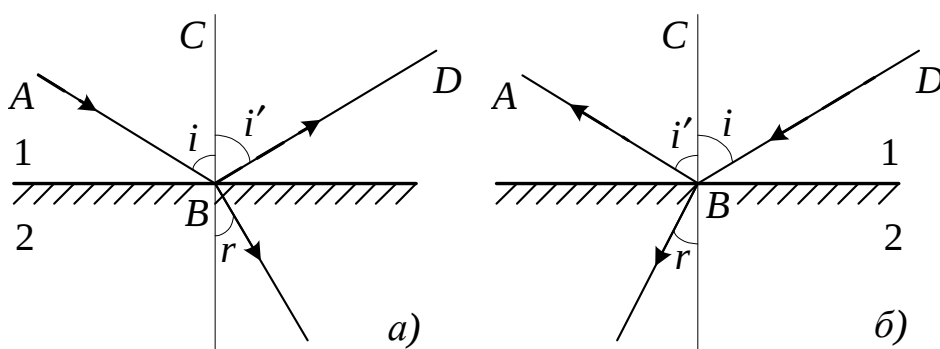


Рис. 2.2

Законы отражения света:

а) падающий луч, отраженный луч и перпендикуляр к границе раздела двух сред, восстановленный в точке падения луча, лежат в одной плоскости;

б) угол падения равен углу отражения: $i = i'$ (см. рис. 2.2, а).

Законы отражения справедливы при обратном направлении хода световых лучей. Луч, распространяющийся по пути отраженного, отражается по пути падающего луча (**обратимость хода световых лучей**) (см. рис. 2.2, б).

Отражение света, удовлетворяющего этим законам, называется *зеркальным*. Если условие зеркальности отражения не выполняется, то законы отражения несправедливы, и отражение света называется *диффузным*.

Законы преломления света:

а) падающий луч, преломленный луч и перпендикуляр к границе раздела двух сред, восстановленный в точке падения луча, лежат в одной плоскости;

б) отношение синусов углов падения и преломления – постоянная величина, равная отношению показателю преломления двух данных сред:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}.$$

Падающий и преломленный лучи *взаимно обратимы*: если падающий луч пущен по линии преломленного луча, то луч преломленный пойдет по линии падающего (см. рис. 2.2, б).

Законы отражения и преломления света справедливы для однородных изотропных сред в отсутствие поглощения света.

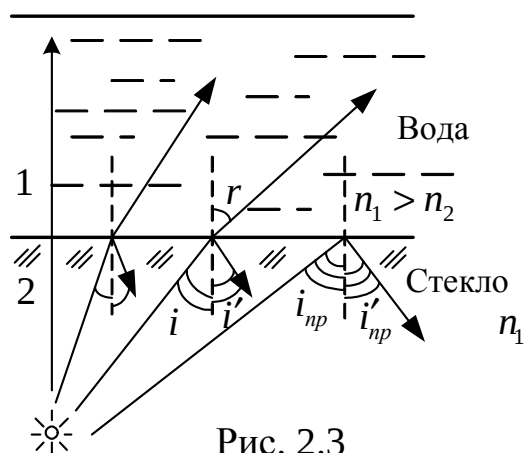
Если световые лучи из оптически более плотной среды 2 падают на границу раздела с оптически менее плотной средой 1, например, из стекла в воду, то при углах падения $i \geq i_{np}$, где $\sin i_{np} = n_{21}$, преломленный луч в среде с показателем преломления $n_2 < n_1$ отсутствует (рис. 2.3). При условии $i = i_{np}$ угол преломления $r = \pi/2$, $\sin r = 1$ и луч скользит вдоль границы раздела сред. Это явление называется

полным внутренним отражением. Угол i_{np} называется *предельным углом полного отражения*. Если свет переходит из вещества с абсолютным показателем преломления $n_1 = n$ в воздух, где $n_2 \approx 1$, то условие полного отражения примет вид

$$\sin i_{np} = \frac{1}{n}.$$

Каждая точка S источника света в геометрической оптике считается центром расходящегося пучка лучей, который называется *гомоцентрическим*. Если после отражений и преломлений в различных средах пучок остается гомоцентрическим, то его центр S' называется изображением точки S в оптическом пространстве.

Изображение S' называется *действительным*, если в точке S' пересекаются сами лучи пучка, и *мнимым*, если в ней пересекаются продолжения этих лучей. В точке, где возникает действительное изображение, происходит



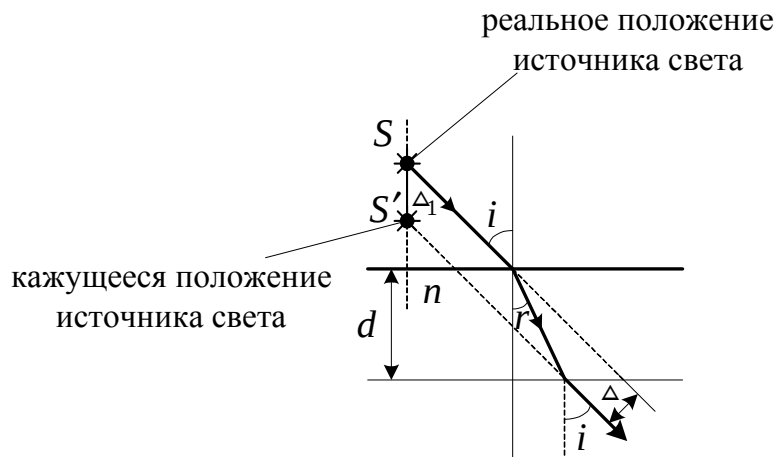


Рис. 2.4

концентрация световых лучей, и это может быть обнаружено, например, фотозлементом или светочувствительной бумагой. При мнимом изображении этого не происходит – световые лучи как бы выходят из точки, в которой обнаружить

энергию нельзя. Однако существенно, что и при мнимом изображении сетчатка глаза фиксирует лучи света, продолжение которых формирует мнимое изображение.

После прохождения плоскопараллельной пластинки лучи выходят под тем же углом i , под которым на нее падают (рис. 2.4). Пластика смещает луч света параллельно самому себе на расстояние (положение S' , см. рис. 2.4)

$$\Delta = d \sin i \left(1 - \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}} \right),$$

где d – толщина пластинки; i – угол падения лучей; n – показатель преломления материала пластинки по отношению к окружающей среде.

Светящаяся точка S источника света или предмета кажется приближенной к поверхности пластинки на расстояние

$$\Delta_1 = d \left(1 - \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}} \right).$$

При нормальном падении лучей $i = 0$ и, соответственно, $\Delta = 0$, однако $\Delta_1 = d \frac{n-1}{n}$.

В призме, сечение которой изображено на рис. 2.5, луч света, падающий в плоскости сечения, после преломления на гранях AC и CB отклоняется к основанию. Угол отклонения луча $\varphi = i_1 + r_2 - \alpha$, где i_1 – угол падения луча на

грань AC ; r_2 – угол преломления на грани BC ; α – угол между гранями AC и CB , называемый *преломляющим углом призмы*.

При условии $r_2 = i_1$ угол отклонения лучей φ – наименьший ($\varphi = \varphi_{\min}$). При таком расположении призмы относительно источника света (установка под *углом наименьшего отклонения*)

$$\sin \frac{\varphi_{\min} + \alpha}{2} = n \sin \frac{\alpha}{2},$$

где n – показатель преломления материала призмы по отношению к окружающей среде.

К зеркалам относятся оптические элементы, изображение предметов в которых формируется отраженными лучами.

Оптической осью зеркальной поверхности является прямая, перпендикулярная к поверхности и проходящая через центр *кривизны* зеркальной поверхности.

Для плоского зеркала радиус кривизны равен бесконечности. На рис. 2.6 показано построение изображения точки S для плоского зеркала с поверхностью AA . Лучи 1, исходящие из точки S (предмета), – падающие, лучи 2 – отраженные лучи от зеркальной поверхности AA . Эти лучи воспринимаются (например, глазом) как исходящие из точки S' , которая является изображением точки – предмета S . Из треугольников SBO и $S'BO$ следует, что расстояние предмета от зеркальной поверхности SO равно расстоянию изображения до зеркальной поверхности $S'O$.

Изображение протяженного предмета SC показано для плоского зеркала на рис. 2.7.

Сферическое зеркало имеет форму сферического сегмента (рис. 2.8). Центр C сферической поверхности, из которой вырезан сегмент, называется *оптическим центром* зеркала; вершина O сферического сегмента – *полусом* зеркала. Любая прямая, проходящая

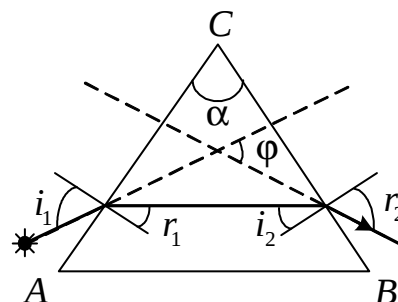


Рис. 2.5

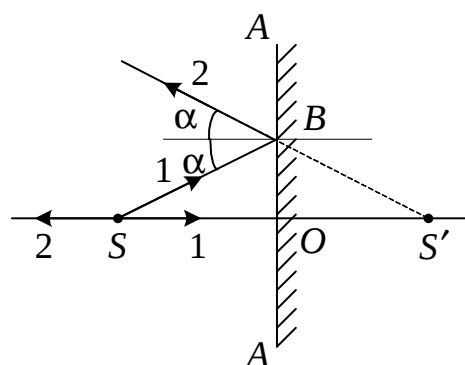


Рис. 2.6

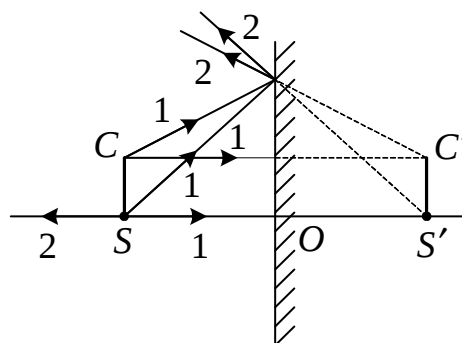


Рис. 2.7

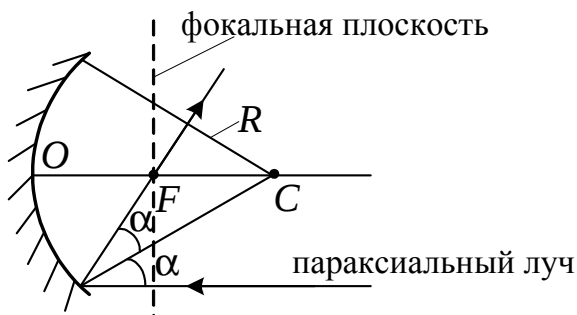


Рис. 2.8

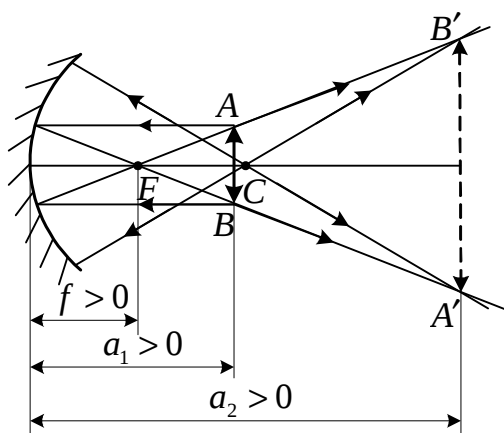


Рис. 2.9

На рис. 2.9 и 2.10 показаны примеры построения изображения в случаях: $a_1 > f$ (см. рис. 2.9) и $a_1 < f$ (см. рис. 2.10), где a_1 – расстояние от точек предмета AB до зеркала по главной оптической оси. Расстояние a_2 – расстояние от точек изображения $A'B'$ по главной оптической оси.

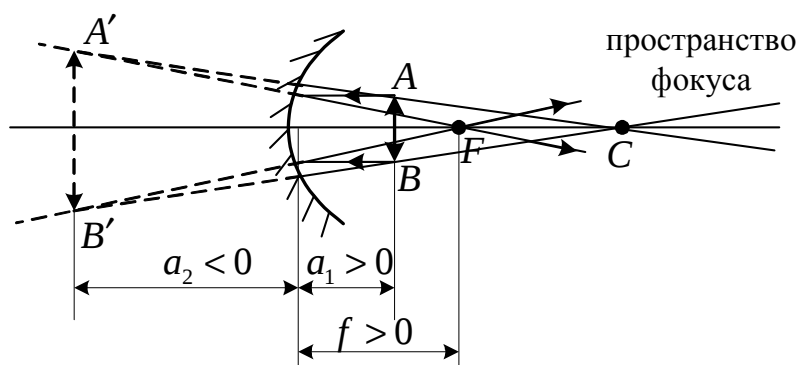


Рис. 2.10

Когда предмет и его изображение находятся по разные стороны зеркала (см. рис. 2.10), изображение в зеркале мнимое.

через оптический центр зеркала C , называется *оптической осью зеркала*. Оптическая ось CO , проходящая через оптический центр зеркала и его полюс, называется *главной оптической осью*.

Параксиальные лучи, параллельные главной оптической оси, после отражения от зеркала пересекаются в одной точке F , называемой *фокусом (главным фокусом)* зеркала. Расстояние $OF = f$ от полюса до фокуса зеркала называется *фокусным расстоянием*: $f = R/2$, где R – радиус кривизны зеркала. Плоскость, проходящая через фокус перпендикулярно к главной оптической оси, называется *фокальной плоскостью*.

Изображение в сферическом зеркале действительное, если предмет и его изображение находятся по одну сторону от зеркала (см. рис. 2.9).

Изображение в сферическом зеркале действительное, если предмет и его изображение находятся по одну сторону от зеркала (см. рис. 2.9).

Условие действительности или мнимости изображения в вогнутом зеркале можно записать в виде

$$\frac{a_1}{f} \begin{cases} > 1 - \text{действительное;} \\ < 1 - \text{мнимое.} \end{cases}$$

Из геометрических построений изображения можно получить формулу сферического зеркала

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{f} = \frac{2}{R}.$$

При этом в формуле необходимо учитывать знаки a_1 и a_2 ; $f > 0$, если предмет находится внутри сферического зеркала (в пространстве фокуса на рис. 2.10); $a_1 > 0$, если предмет также расположен в пространстве фокуса; a_2 получаем отрицательным, если изображение мнимое (см. рис. 2.10), и a_2 получаем положительным, если изображение действительное.

Отношение линейных размеров изображения $h_{\text{изобр}}$ и предмета $h_{\text{пр}}$, расположенных перпендикулярно к главной оптической оси, называется *линейным (поперечным) увеличением*

$$\Gamma = \pm \frac{h_{\text{изобр}}}{h_{\text{пр}}}.$$

Знак «плюс» ($\Gamma > 0$) соответствует *прямому изображению* (см. рис. 2.10), а знак минус ($\Gamma < 0$) – *обратному (перевернутому) изображению* (см. рис. 2.9).

Прозрачное тело, ограниченное с двух сторон криволинейными поверхностями, называется *линзой*. Линза считается *тонкой (тонкая линза)*, если ее толщина много меньше, чем радиусы кривизны R_1 и R_2 обеих поверхностей.

Прямая, проведенная через центры кривизны C_1 и C_2 обеих поверхностей, называется *главной оптической осью* линзы (рис. 2.11). В тонкой линзе точки O_1 и O_2 пересечения главной оптической оси с обеими поверхностями можно считать сливающимися в одну точку O , которая называется *оптическим центром линзы*.

Плоскость, проходящая через оптический центр перпендикулярно к главной оптической оси, называется *оптической плоскостью линзы*. *Побочными оптическими осями* называются прямые, проходящие через оптический центр линзы и не совпадающие с главной оптической осью (при условии, что точки O_1 и O_2 совпадают). Луч света, который распространяется по любой из оптических осей, проходит сквозь линзу без преломления.

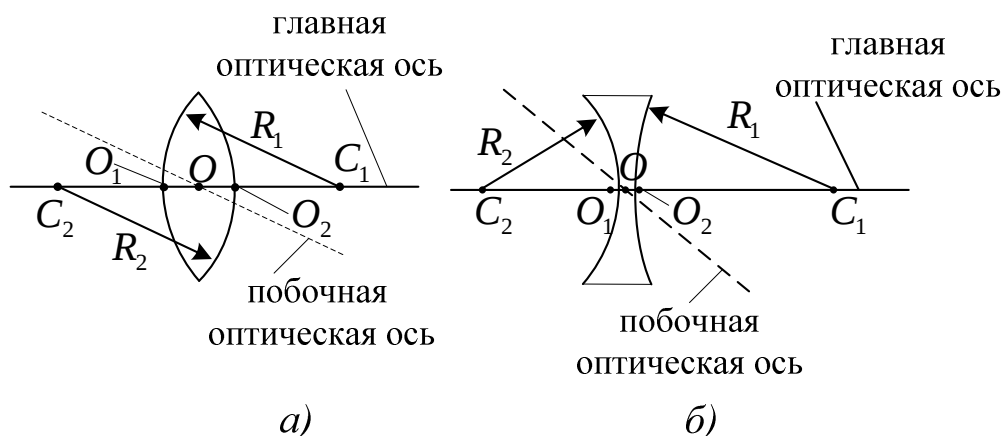


Рис. 2.11

Параксиальные лучи пересекаются в точке, лежащей на этой оси и называемой *фокусом линзы (главным фокусом)*. У всякой линзы имеются два фокуса по обе стороны от нее (рис. 2.12).

Плоскость MN , проведенная через фокус линзы перпендикулярно к главной оптической оси, называется *фокальной плоскостью* (см. рис. 2.12). Лучи, падающие на тонкую линзу параллельно любой побочной оптической оси, после преломления в линзе пересекаются в точке пересечения фокальной плоскости побочной оптической осью. У тонкой линзы имеются две фокальные плоскости, расположенные по обе стороны от нее. Точки пересечения побочных оптических плоскостей с фокальными плоскостями линзы называют *побочными фокусами линзы* (точка F' на рис. 2.13).

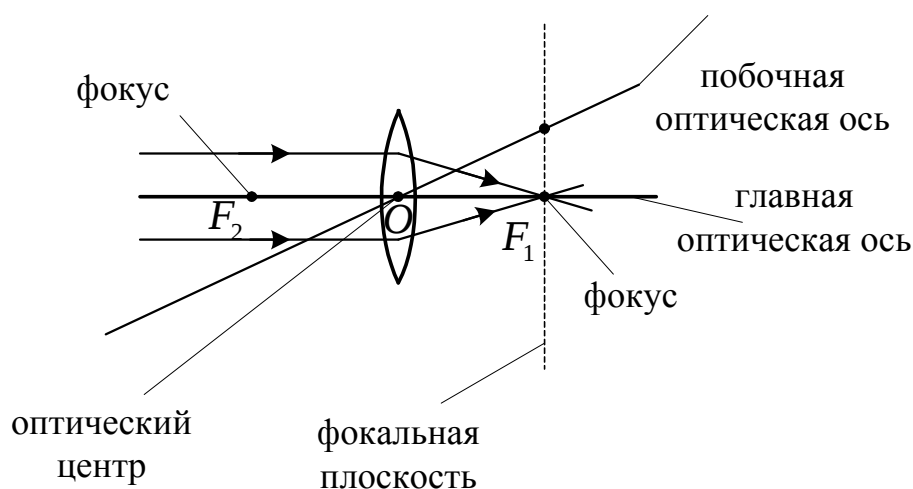


Рис. 2.12

Расстояние $OF = f$ от оптического центра линзы до ее фокусов называется *фокусным расстоянием линзы*,

$$f = \frac{1}{(n_{21} - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)},$$

где $n_{21} = n_2 / n_1$; n_2 и n_1 – абсолютные показатели преломления для материала линзы и окружающей среды; R_1 и R_2 – радиусы кривизны поверхностей линзы для пространства предмета и пространства изображения.

Линза называется *собирающей*, если $f > 0$, т.е. при $n_2 > n_1$ ее поверхности выпуклые (см. рис. 2.11, а) и *рассеивающей*, если $f < 0$, т.е. при $n_2 < n_1$ ее поверхности вогнутые (см. рис. 2.11, б).

Геометрическое построение изображения предмета с помощью линз основывается на использовании лучей, ход которых априори известен:

1) лучи, идущие по главной и побочным оптическим осям, не преломляются;

2) лучи, идущие через фокус линзы в пространстве предмета, в пространстве изображения параллельны главной оптической оси;

3) лучи, идущие в пространстве предмета параллельно главной оптической оси, проходят через фокус линзы в пространстве изображения (или линия хода таких лучей проходит через фокус пространства изображения для рассеивающей линзы);

4) лучи, построенные с помощью побочной оптической оси (см. рис. 2.12), проводят по правилам, приведенным в пп. 2, 3.

При построении изображения предмета изображение каждой его точки является точкой пересечения двух из упомянутых лучей, исходящих из каждой (любой) точки предмета. Примеры построения изображения показаны на рис. 2.13, 2.14, 2.15.

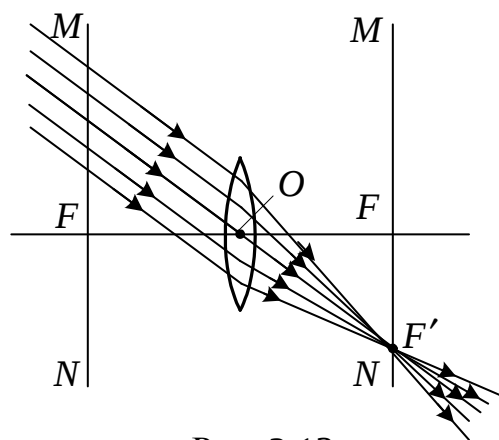


Рис. 2.13

На рис. 2.13 собирающая линза дает действительное перевернутое изображение $A'B'$ предмета AB . На рис. 2.14 собирающая линза дает мнимое изображение $A'B'$ предмета AB . На рис. 2.15 рассеивающая линза дает мнимое изображение $A'B'$ предмета AB .

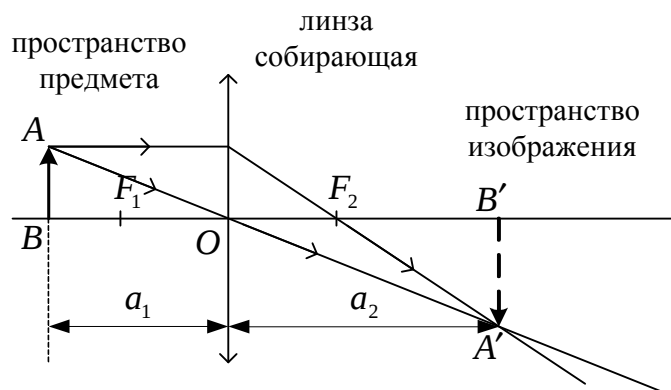


Рис. 2.14

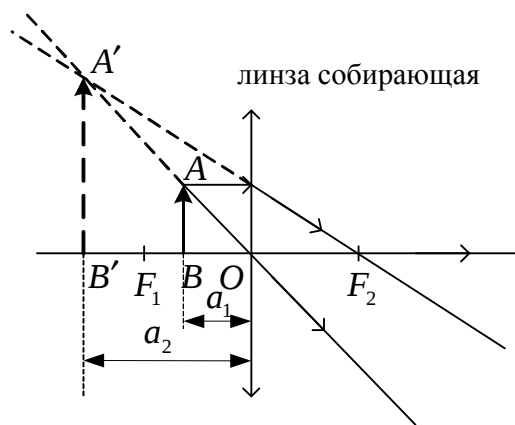


Рис. 2.15

Из приведенных примеров построения изображения в тонких линзах можно вывести формулу тонких линз

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{f},$$

где f — фокусное расстояние линзы.

При этом для рассеивающей линзы величины f и a_2 имеют отрицательный знак, так как, относясь к пространству изображения, лежат в пространстве предмета. Величина $D = 1/f$ называется *оптической силой линзы*.

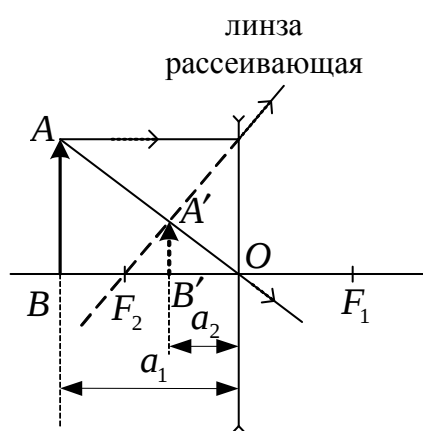


Рис. 2.16

Если линза состоит из нескольких (N) плотно прилегающих элементов, то $D = D_1 + D_2 + \dots + D_N$. В системе СИ оптическая сила измеряется в диоптриях ($D = 1$ дптр при $f = 1$ м).

Вопросы искажения оптических изображений, получаемых с помощью линз, рассматриваются в специальных (прикладных) курсах по конструированию оптических приборов.

2.2. Методические указания к лекционным занятиям

Вопросы лекции	Форма изучения	Литература	Вопросы для самоконтроля
Законы геометрической оптики: – сферические зеркала; – линзы	самост.	[8], пп. 24.1 – 24.3 [10], пп. 165 – 168 [13], пп. 16.1 – 16.18 [7], пп. 20.1 – 20.8	1. Сформулируйте понятие фокуса и фокальной плоскости. В чем их отличие? 2. Поясните смысл величин, входящих в формулу тонкой линзы. 3. Укажите основные оптические характеристики среды. 4. В чем состоит явление полного внутреннего отражения? 5. Сформулируйте основные законы геометрической оптики. 6. В чем заключается особенность отражения волн от сферической поверхности? 8. В каком случае отражения и преломления энергии волны переносится, а в каком нет?

2.3. Методические указания к практическим занятиям

Тема занятия	Задачи	Рекомендации	Задачи из сборников
Волновые процессы Законы геометрической оптики	Применение законов отражения и преломления	1. Задачи о плоском, вогнутом и выпуклом зеркалах: а) сделать чертеж, изобразив зеркало, главную оптическую ось, фокус и центр, а также предмет, изображение которого требуется найти; б) построить изображение предмета. Для этого обычно достаточно найти изображение двух его крайних точек. Изображение точек предмета строят при помощи двух характерных лучей: – луч, идущий от точки предмета параллельно какой-либо оптической оси; после отражения он проходит через фокус, лежащий на этой оси; – луч, проходящий через оптический центр зеркала; после отражения он идет по тому же направлению назад. Отметим, что ход отраженного луча, падающего под произвольным углом на сферическое зеркало, можно определить и с помощью побочной оптической оси. Для этого параллельно падающему лучу надо начертить побочную оптическую ось, найти на ней побочный фокус (точку пересечения фокальной поверхности с осью) и через него провести отраженный луч; в) записать расчетные уравнения на основе формулы зеркала и формулы увеличения. Особое внимание следует уделить знакам перед a_1, a_2 и f; г) решить полученные уравнения относительно искомой величины.	[11], №№ 5.8 – 5.15 [12], №№ 28.1 – 28.19

Тема занятия	Задачи	Рекомендации	Задачи из сборников
Волновые процессы Законы геометрической оптики	Построение изображений в зеркалах и линзах	2. Задачи на построение и расчет систем зеркал Здесь все расчеты и построения основываются на том, что в силу обратимости хода лучей изображение, даваемое первым зеркалом, нужно рассматривать как предмет для второго, изображение, даваемое вторым, – как предмет для первого. Следует при этом учитывать, что промежуточный предмет – изображение для следующего зеркала – может быть как действительным, так и мнимым. 3. Задачи на преломление света на границе раздела двух сред: а) сделать чертеж, изобразив ход лучей, переходящих из одной среды в другую. В точке падения луча на границу раздела провести нормаль, отметить углы падения и преломления, учитывая при этом, в какую среду, более или менее оптически плотную, переходит луч; б) записать закон преломления для каждого перехода луча из одной среды в другую, записать вспомогательные соотношения, связывающие углы и расстояния, исходя из геометрии задачи; в) решить полученную систему уравнений и найти неизвестные величины. 4. Задачи на построение и расчет изображений в одиночных линзах: а) сделать чертеж, отметив типичные точки линзы – фокус F и двойной фокус $2F$, расстояния от линзы до предметов; б) построить изображение предмета. Для этого удобнее брать характерные лучи, упомянутые в предыдущем разделе: параллельные главной оптической оси и лучи, проходящие через оптический центр линзы. Необходимо отметить, что для того чтобы определить ход лучей из точек, расположенных на главной оптической оси, используются побочные оптические оси. Такую ось проводят через оптический центр линзы параллельно интересующему нас лучу и находят точку пересечения этой оси с фокальной плоскостью. Это и будет побочный фокус, в который и попадет после преломления луч; в) записав формулы фигурирующих в задаче линз, решают полученную систему уравнений	[11], №№ 5.16 – 5.30 [12], №№ 28.20 – 28.30
	Определение параметров изображения и предмета на основе формул тонкой линзы и формулы сферического зеркала		[11], №№ 5.31 – 5.38 [12], №№ 28.36 – 28.52

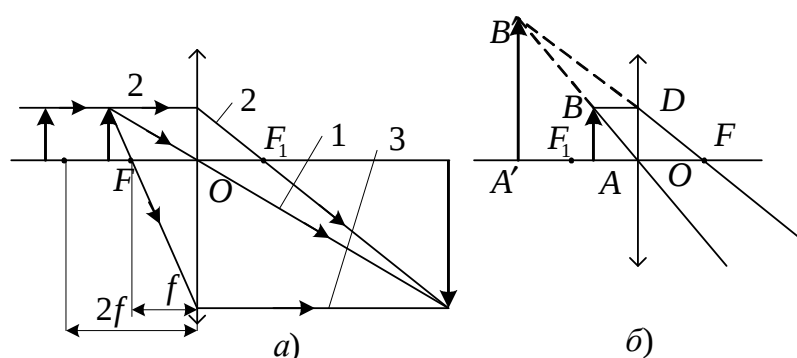
Продолжение

Тема занятия	Задачи	Рекомендации	Задачи из сборников
Волновые процессы Законы геометрической оптики	Определение параметров изображения и предмета на основе формул тонкой линзы и формулы сферического зеркала	5. Оптические системы: – <i>системы, состоящие из сложенных вплотную линз</i> Сначала находят фокусное расстояние двух линз, сложенных вместе; если их фокусные расстояния равны f_1 и f_2, то фокусное расстояние такой системы f связано с ними формулой $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad \text{или} \quad D = D_1 + D_2;$ – <i>системы, состоящие из нескольких отстоящих друг от друга линз:</i> а) сделать рисунок, отметив линзы, их характерные точки, предмет и заданные расстояния; б) построить изображение предмета в первой линзе, игнорируя остальные; в) используя формулу линзы и формулу увеличения (если необходимо), найти расстояние от изображения до первой и второй линз. При этом следует сразу же вычислять значения этих расстояний, что позволит судить о расположении этого изображения относительно второй линзы; г) считая первое изображение предметом для второй линзы, аналогичным образом находят положение и размер второго изображения. При необходимости процедура повторяется нужное число раз. Если на вторую линзу лучи падают расходящимся пучком, то изображение точки нужно рассматривать как действительный предмет для второй линзы, а если на нее падает сходящийся пучок – как мнимый предмет. Важен выбор знаков перед a_2 и f. Если при составлении формул знаки были учтены, то при расчетах в полученные соотношения следует подставлять модули входящих в них величин; – <i>системы, состоящие из линзы и зеркала</i> В них преобразование света происходит трижды, причем независимо от того, состоят ли они из сложенных объектов или отстоящих друг от друга на некоторое расстояние. Ход лучей здесь таков: источник $\rightarrow$ линза; преломление в ней $\rightarrow$ зеркало; отражение в нем $\rightarrow$ линза; повторное преломление $\rightarrow$ окончательное изображение. Изображение может быть действительным и мнимым. Порядок расчета в таких системах такой же, как и в системах, составленных только из линз	[11], №№ 5.31 – 5.38 [12], №№ 28.36 – 28.52

2.4. Примеры решения задач

Построение изображения в тонких линзах

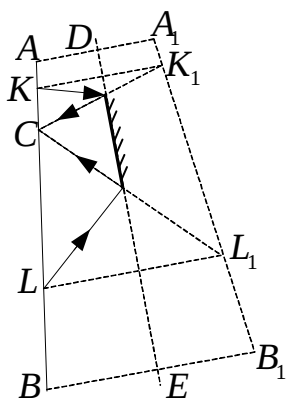
Изображение любой точки предмета в линзе находится в точке пересечения двух лучей (или их продолжений), вышедших из этой точки предмета и прошедших через линзу. Обычно для построения изображения используются два из трех лучей (см. рисунок, *а*): луч 1, проходящий без преломления через оптический центр линзы; луч, падающий параллельно главной оптической оси; после преломления в линзе этот луч (или его продолжение)



проходит через задний (относительно предмета) главный фокус; луч (или его продолжение), который проходит через передний главный фокус и после преломления идет параллельно главной оптической оси.

Ход луча 2 одинаков во всех двух случаях, а луч 1 идет или под большим углом к оси (если расстояние от центра линзы до предмета меньше $2f$, но больше f), или под меньшим (если расстояние больше $2f$). Изображение получается действительное, перевернутое и либо уменьшенное, либо увеличенное.

Если предмет (стрелка AB на рисунке, *б*) расположен между фокусом и линзой, то лучи BDF и BO не пересекаются. Поэтому нужно строить пересечение их продолжений (см. пунктир на рисунке, *б*). Изображение $A'B'$ мнимое (пересекаются не лучи, а их продолжения), увеличенное, прямое.



Пример 1. Человек смотрит в зеркало, висящее на стене с небольшим наклоном. Постройте изображение человека в зеркале. Какую часть своего тела будет видеть человек? При построении можно изобразить человека в виде отрезка AB , расположив глаз в точке C . (**Уровень 2**).

Решение. Построим (см. рисунок) изображение крайних точек человека A и B . Для этого на плоскость зеркала опускаем перпендикуляры AD и BE и

продолжаем их за зеркало на расстояния, равные соответственно $A_1D = AD$ и $B_1E = BE$ (A_1B_1 – мнимое изображение человека AB). Человек увидит только ту часть тела, лучи от которой после отражения попадут в глаз C , т.е. $K_1L_1 = KL$.

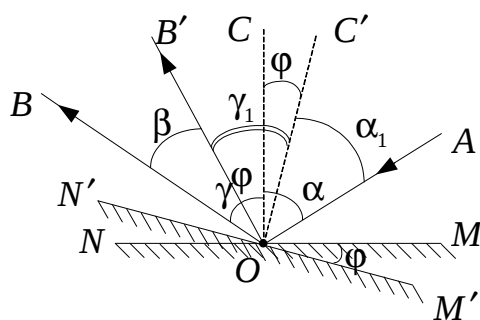
Ответ: $K_1L_1 = KL$.

Пример 2. На сколько градусов отклонится отраженный от зеркала луч, если зеркало повернуть на 15° ? (Уровень 2).

Решение. Пусть AO – падающий луч, MN – плоское зеркало. Угол $AOC = \alpha$ – угол падения луча, угол $COB = \gamma$ – угол отражения. По закону отражения $\gamma = \alpha$. Следовательно, $\angle AOB = 2\alpha$.

Повернем зеркало вокруг точки O на угол ϕ . $M'N'$ – новое положение зеркала. OC' – перпендикуляр к зеркалу. Углы $C'OC$ и MOM' – углы с соответственно перпендикулярными сторонами. Следовательно, $\angle C'OC = \phi$. После поворота зеркала $\angle AOC' = \alpha_1$ – угол падения, $\angle C'OB' = \gamma_1$ – угол отражения, $\alpha_1 = \gamma_1$. Из рисунка видно, что $\alpha_1 = \alpha - \phi$. Следовательно, $\angle AOB' = 2\alpha_1 = 2(\alpha - \phi)$. Искомый угол $\beta = \angle B'OB = 2\alpha - 2\alpha_1 = 2\alpha - 2(\alpha - \phi) = 2\phi$; $\beta = 30^\circ$.

Ответ: $\beta = 30^\circ$.

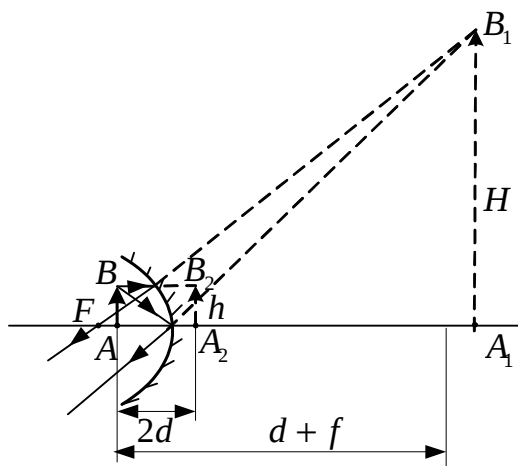


Пример 3. Чему равен радиус вогнутого зеркала, находящегося на расстоянии 2,0 м от предмета, если его прямое изображение в полтора раза больше, чем в плоском зеркале, находящемся на том же расстоянии от предмета? (Уровень 3).

Решение. Так как изображение, даваемое вогнутым зеркалом, прямое и увеличенное, то предмет AB находится между фокусом и полюсом зеркала. Запишем формулу сферического зеркала:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F} = \frac{2}{R} \quad (1)$$

На рисунке A_1B_1 – изображение предмета в сферическом зеркале; A_2B_2 – в плоском зеркале.



Линейное увеличение сферического зеркала

$$\Gamma_1 = \frac{H}{h} = \frac{f}{d}. \quad (2)$$

Размеры изображения в плоском зеркале всегда равны размерам предмета, т.е. $\Gamma_2 = 1$. Следовательно, $\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \Gamma_1 = 1,5$.

Тогда $f = \Gamma_1 d$.

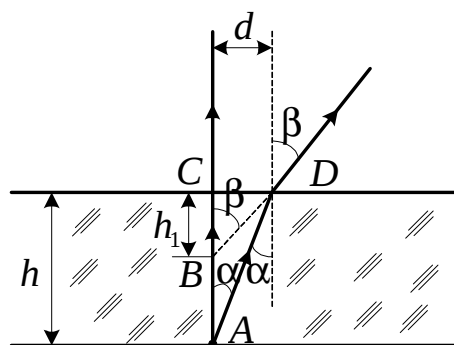
Подставив значение f в формулу сферического зеркала, получим

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{\Gamma_1 d} = \frac{2}{R}.$$

Откуда $R = \frac{2\Gamma_1 d}{\Gamma_1 - 1} = 12$ м.

Ответ: $R = 12$ м.

Пример 4. На нижнюю грань плоскопараллельной стеклянной пластинки ($n_c = 1,5$) нанесена царапина. Наблюдатель, глядя сверху, видит царапину на расстоянии 4 см от верхней грани пластинки. Какова толщина пластинки? (Уровень 4).



Решение. Пусть царапина находится в точке A нижней поверхности стеклянной пластинки. Построим изображение точки A , которое видит наблюдатель. Для этого рассмотрим два луча: AC – луч, падающий перпендикулярно на верхнюю поверхность пластинки; AD – луч, падающий на верхнюю поверхность под малым углом α . Из рисунка видно, что точка B будет мнимым изображением точки A .

Рассмотрим $\triangle ACD$: $AC = \frac{CD}{\operatorname{tg} \alpha}$, или, поскольку $AC = h$ и $CD = d$, то

$$h = \frac{d}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Отрезок d найдем из $\triangle BCD$: $CD = CB \operatorname{tg} \beta$, или, учитывая, что $CD = d$ и $CB = h_1$, имеем: $d = h_1 \operatorname{tg} \beta$.

Тогда $h = h_1 \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}$.

Поскольку углы α и β малы, отношение тангенсов этих углов можно заменить отношением их синусов, т.е. $\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \approx \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$.

Следовательно, $h = h_1 \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$.

Но по закону преломления $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_g}{n_c} = \frac{1}{n_c}$, так как абсолютный показатель преломления воздуха $n_g = 1$.

Тогда $h = h_1 n_c$; $h = 0,06$ м.

Ответ: $h = 0,06$ м.

Пример 5. Луч света падает на переднюю грань трехгранной призмы с преломляющим углом φ . После преломления он попадает на заднюю грань призмы и выходит в воздух. Определите угол отклонения светового луча Φ , если угол падения луча на переднюю грань равен α , а абсолютный показатель преломления материала призмы n . (**Уровень 4**).

Решение. Ход луча в призме показан на рисунке. Как внешний угол к $\triangle AEC$ угол отклонения

$$\Phi = (i_1 - r_1) + (r_2 - i_2). \quad (1)$$

Кроме того, $\angle ABC = \angle ADK = \varphi$ как углы, образованные взаимно перпендикулярными сторонами. Угол ADK является внешним углом к $\triangle ADC$, поэтому

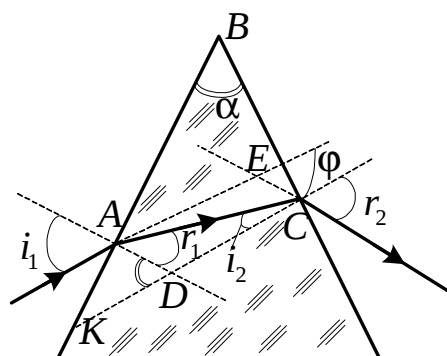
$$\alpha = i_2 + r_1. \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) получим

$$\Phi = i_1 - \alpha + r_2. \quad (3)$$

Согласно закону преломления можно записать:

$$\frac{\sin i_1}{\sin r_1} = n; \quad \frac{\sin i_2}{\sin r_2} = \frac{1}{n}. \quad (4)$$



Из уравнения (2) $i_2 = \alpha - r_1$, поэтому

$$\sin r_2 = n \sin(\varphi - \beta) = n(\sin \alpha \cos r_1 - \sin r_1 \cos \alpha).$$

Подставим в эту формулу значение $\sin r_1$ из (4):

$$\sin r_1 = \frac{\sin i_1}{n} \quad \text{и} \quad \cos r_1 = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i_1}{n^2}}.$$

Тогда

$$\sin r_2 = \sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} - \cos \alpha \sin i_1. \quad (5)$$

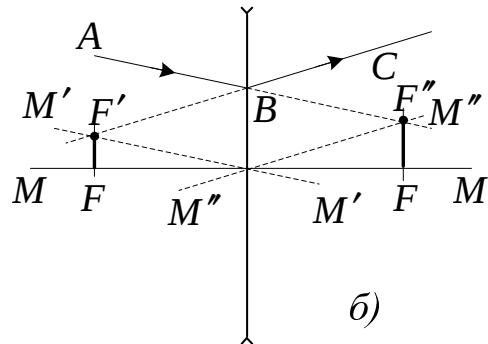
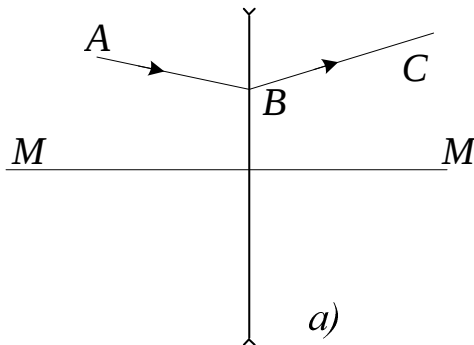
С учетом уравнений (3) и (5) получаем выражение для угла δ :

$$\varphi = i_1 - \alpha + \arcsin(\sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} - \cos \alpha \sin i_1).$$

Ответ: $\varphi = i_1 - \alpha + \arcsin(\sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} - \cos \alpha \sin i_1).$

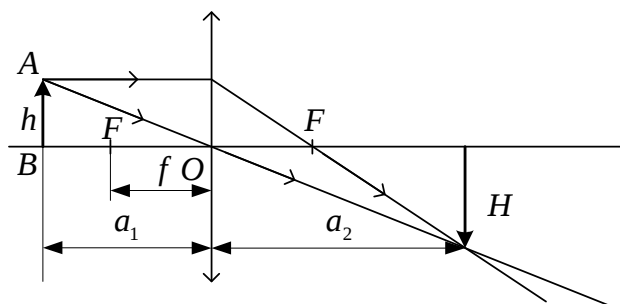
Пример 6. На рисунке (а) показан ход луча до и после его преломления в рассеивающей линзе. Найдите построением положение главных фокусов линзы. (**Уровень 2**).

Решение. Проведем побочную ось $M'M'$ (см. рисунок, б), параллельную падающему лучу AB . В рассеивающей линзе все лучи, параллельные оси $M'M'$, после преломления пойдут так, что их продолжения пересекутся в одной точке – побочном фокусе F' . Следовательно, если продолжим преломленный луч BC до пересечения с побочной оптической осью $M'M'$, то найдем побочный фокус F' . Проведем через него фокальную плоскость, перпендикулярную к главной оптической оси MM , и точка пересечения этой плоскости с главной осью и есть главный передний фокус линзы F , так как все фокусы лежат в фокальной плоскости, а главный фокус – на главной оптической оси.



Для нахождения заднего фокуса проводим побочную ось $M''M''$, параллельную преломленному лучу BC . Продолжим падающий луч AB до пересечения с осью $M''M''$ и находим соответствующий побочный фокус F'' . Проводим фокальную плоскость и находим задний побочный фокус F .

Пример 7. Предмет высотой 4 м находится на расстоянии 6 м от оптического центра собирающей линзы с фокусным расстоянием 2 м. Определите высоту изображения предмета. Постройте ход лучей. (**Уровень 2**).



Решение. Построение изображения H предмета h приведено на рисунке. Формула тонкой линзы $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{f}$. Откуда $a_2 = \frac{fa_1}{a_1 - f}$, увеличение линзы $\Gamma = \frac{H}{h}$.

С другой стороны, $\Gamma = \frac{a_2}{a_1}$. Следовательно, $\frac{H}{h} = \frac{a_2}{a_1}$.

Подставим сюда найденное значение a_2 , получим $\frac{H}{h} = \frac{f}{a_1 - f}$.

Откуда $H = \frac{hf}{a_1 - f}$; $H = 2$ м.

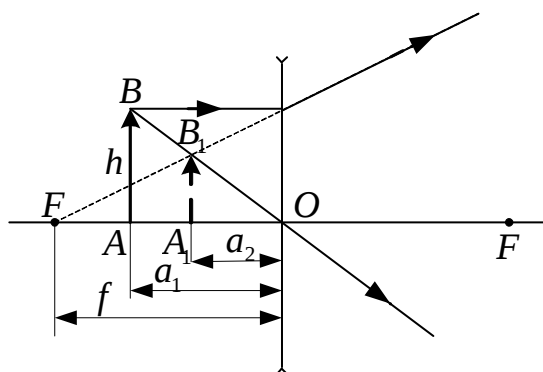
Ответ: $H = 2$ м.

Пример 8. Предмет находится на расстоянии 10 см от линзы с оптической силой -5 дптр. На каком расстоянии человек, глядя через эту линзу, увидит изображение предмета, и каким оно будет? (**Уровень 2**).

Решение. Так как $D < 0$, то линза – рассеивающая (см. рисунок). Для рассеивающей линзы формула тонкой линзы имеет вид

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = -\frac{1}{f} = -D.$$

Отсюда расстояние от линзы до изображения $a_2 = \frac{a_1}{1 + a_1 D}$.



Подставив числовые значения, получим: $a_2 = 6$ см.

Линейное увеличение $\Gamma = \frac{a_2}{a_1}$; $\Gamma = 0,6$.

Ответ: $\Gamma = \frac{a_2}{a_1}$; $\Gamma = 0,6$.

Пример 9. Поместив на расстоянии 20 см от линзы свечу, получили на экране изображение свечи, увеличенное в 10 раз. Какое будет увеличение, если вплотную к имеющейся линзе приложить линзу с оптической силой 2,5 дптр? –2,5 дптр? (**Уровень 4**).

Решение. По формуле тонкой линзы $D_0 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}$, где D_0 – оптическая сила первой линзы.

Линейное увеличение $\Gamma = \frac{a_2}{a_1}$. Отсюда $a_2 = \Gamma a_1$.

Тогда $D_0 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{\Gamma a_1}$.

Оптическая сила двух собирающих линз $D' = D_0 + D_1$. Поэтому $D_0 + D_1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{\Gamma_1 a_1}$.

Подставим вместо D_0 найденное значение:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{\Gamma a_1} + D_1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{\Gamma_1 a_1}.$$

Откуда $\Gamma_1 = \frac{1}{a_1 \left(\frac{1}{\Gamma a_1} + D_1 \right)} = \frac{\Gamma}{1 + \Gamma a_1 D_1}$; $\Gamma_1 = 1,7$.

Оптическая сила во втором случае $D'' = D_0 - D_2$, где D_2 – модуль оптической силы.

Тогда $D'' = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{\Gamma_2 a_1}$; $D_0 - D_2 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{\Gamma_2 a_1}$.

Следовательно, $\Gamma_2 = \frac{\Gamma}{1 + \Gamma a_1 D_1}$; $\Gamma_2 = 2,5$.

Ответ: $\Gamma_1 = 1,7$; $\Gamma_2 = 2,5$.

2.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Два плоских прямоугольных зеркала образуют двугранный угол $\varphi = 179^\circ$. На расстоянии $l = 10$ см от линии соприкосновения зеркал и на одинаковом расстоянии от каждого зеркала находится точечный источник света. Определить расстояние d между мнимыми изображениями источника света в зеркалах [3,5 мм; **уровень 3**].
2. Вогнутое сферическое зеркало дает на экране изображение предмета, увеличенное в 4 раза. Расстояние a_1 от предмета до зеркала равно 25 см. Определить радиус R кривизны зеркала [40 см; **уровень 2**].
3. Радиус R кривизны выпуклого зеркала равен 50 см. Предмет высотой $h = 15$ см находится на расстоянии a , равном 1 м, от зеркала. Определить расстояние a_2 от зеркала до изображения и его высоту H . [–20 см; **уровень 2**].
4. Луч падает под углом $i = 60^\circ$ на стеклянную пластинку толщиной $d = 30$ мм. Определить боковое смещение Δx луча после выхода из пластинки. [15,4 мм; **уровень 2**].
5. Луч света переходит из среды с показателем преломления n_1 в среду с показателем преломления n_2 . Показать, что если угол между отраженным и преломленным лучами равен $\pi/2$, то выполняется условие $\operatorname{tg} i_1 = n_2/n_1$ (i_1 – угол падения). [**Уровень 3**].
6. Преломляющий угол призмы равен 60° . Угол наименьшего отклонения луча от первоначального направления равен 30° . Определить показатель преломления стекла, из которого изготовлена призма. [1,41; **уровень 3**].
7. Двояковыпуклая линза имеет одинаковые радиусы кривизны поверхностей. При каком радиусе кривизны R поверхностей линзы главное фокусное расстояние ее будет равно 20 см? [7,5 см; **уровень 3**].

8. Тонкая линза, размещенная в воздухе, обладает оптической силой $D_1 = 5$ дптр, а в некоторой жидкости – $D_2 = -0,48$ дптр. Определить показатель преломления n_2 жидкости, если показатель преломления n_1 стекла, из которого изготовлена линза, равен 1,52. [1,6; **уровень 4**].
9. В вогнутое сферическое зеркало радиусом $R = 20$ см налит тонким слоем глицерин. Определить главное фокусное расстояние такой системы. [8,1 см; **уровень 3**].
10. Поверх выпуклого сферического зеркала радиусом кривизны $R = 20$ см налили тонкий слой воды. Определить главное фокусное расстояние такой системы. [–8 см; **уровень 3**].
11. Человек без очков читает книгу, располагая ее перед собой на расстоянии $a_1 = 12,5$ см. Какой оптической силы очки ему следует носить? [4 дптр; **уровень 4**].
12. Лупа, представляющая собой двояковыпуклую линзу, изготовлена из стекла с показателем преломления $n = 1,6$. Радиусы кривизны R поверхностей одинаковы и равны 12 см. Определить увеличение лупы [2,5; **уровень 3**].
13. Фокусное расстояние f_1 объектива микроскопа равно 1 см, окуляра $f_2 = 2$ см. Расстояние от объектива до окуляра 23 см. Какое увеличение дает микроскоп? На каком расстоянии от объектива находится предмет? [250; 10,5 мм; **уровень 4**].
14. Расстояние δ между фокусами объектива и окуляра внутри микроскопа равно 16 см. Фокусное расстояние f_1 объектива равно 1 мм. С каким фокусным расстоянием f_2 следует взять окуляр, чтобы получить увеличение 500? [2 см; **уровень 4**].

УЧЕБНЫЙ БЛОК 3. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

Свет – это электромагнитная волна, в которой колеблются в двух взаимно перпендикулярных плоскостях два вектора: $\vec{E}$ – вектор напряженности электрического поля и $\vec{H}$ – вектор напряженности магнитного поля. Взаимодействие света с веществом осуществляется через электрическую компоненту электромагнитного поля $\vec{E}$, которую называют *световым вектором*. Поскольку свет представляет собой электромагнитную волну, то ему присущи все явления, характерные для волновых процессов. Эти явления рассматриваются в данном блоке.

Интерференция света – физическое явление, суть которого заключается в том, что наложение световых потоков при определенных условиях не приводит к увеличению интенсивности света (или освещенности) до величины, равной сумме интенсивности налагающихся потоков, а сопровождается перераспределением интенсивности в пространстве, в результате чего на экране наблюдается интерференционная картина – чередующиеся светлые и темные участки. Условия, при которых реализуется интерференция, можно установить, если рассмотреть наложение световых потоков как сложение волн.

Дифракцией называется совокупность явлений, наблюдаемых при распространении света в среде с резкими неоднородностями и связанных с отклонениями от законов геометрической оптики. Дифракция, в частности, приводит к огибанию световыми волнами препятствий и проникновению света в область геометрической тени. Для наблюдения дифракции световых волн необходимо создание специальных условий. Это обусловлено тем, что масштабы дифракции сильно зависят от соотношения размеров препятствия и длины волны. При длине волны, сравнимой с размерами препятствий, дифракция выражена наиболее сильно. В случае если длина волны значительно меньше размеров препятствий, дифракция выражена слабо.

При изучении данного блока студенты должны

иметь представление:

- о принципе суперпозиции колебаний;
- об интерференции и дифракции упругих волн;
- об основных законах геометрической оптики;
- об особенностях отражения волн от границы раздела различных сред;

обладать навыками:

- геометрического построения изображений с учетом отражения и преломления волн;
- решения тригонометрических уравнений.

Учебная программа блока

Содержание блока	Форма подготовки	Литература
Интерференция света	лекция	[9] [7]
Дифракция света	лекция	
Дисперсия света	лекция	
Понятие о голографии	лекция	

Цели обучения

Студент должен знать	Студент должен уметь
– условия возникновения максимума и минимума интерференционной картины в различных ситуациях; – причины и условия возникновения потери длины волны на границе раздела сред; – условия максимума для дифракции на отверстии и экране (дифракции Френеля); – условие максимума и минимума для дифракции на щели (дифракция Фраунгофера); – условия для максимумов и минимумов для дифракции на дифракционной решетке; – причины возникновения дисперсии; – применение интерференции, дифракции и голографии	– определять ширину и положение интерференционных максимумов и минимумов; – определять толщину пленки в условиях проходящего и отраженного света; – определять общее количество дифракционных максимумов и минимумов; – определять углы дифракции и разрешающую способность дифракционной решетки; – определять параметры зон Френеля

3.1. Краткое содержание теоретического материала

При сложении двух гармонических колебаний, происходящих в одном направлении и с одинаковой частотой ω ,

$$S_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_{01}) \quad \text{и} \quad S_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_{02}),$$

получается гармоническое колебание такой же частоты ω с амплитудой A ,

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\varphi_{01} - \varphi_{02})}, \quad (1)$$

где φ_{01} и φ_{02} – начальные фазы колебаний; a_1 и a_2 – амплитуды колебаний.

Выражение (1) показывает, что величина квадрата амплитуды результирующего колебания зависит от разности фаз $(\varphi_{01} - \varphi_{02})$ исходных колебаний.

Возможны два случая:

1. Разность фаз колебаний $(\varphi_{01} - \varphi_{02})$ в данном месте пространства сохраняется неизменной за время τ , достаточное для наблюдения. Такие колебания называются *когерентными*. Средняя энергия результирующего колебания (пропорциональная квадрату амплитуды) отличается от суммы энергий отдельных колебаний (см. формулу (1)).

2. Разность фаз колебаний беспорядочно меняется за время наблюдений, среднее значение $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ будет при этом равно нулю, а средняя энергия результирующего колебания будет равна сумме средних энергий исходных колебаний. Такие колебания *некогерентны*.

В связи с этим условием наблюдаемой интерференции волн является их **когерентность**, то есть *сохранение постоянной разности фаз в данном месте наблюдения, одинаковая частота колебаний и одинаковое направление колебаний*.

Для получения когерентных световых волн с помощью обычных (не лазерных) источников применяют метод разделения света от одного источника на две или несколько волн. В каждой из них представлено излучение одних и тех же атомов источника, так что из-за общности происхождения эти волны когерентны между собой и интерферируют при наложении. Разделение света на когерентные волны можно осуществить несколькими способами (рис. 3.1):

1) разделением падающего потока на два, например, при пропускания света через два близко расположенных отверстия (щели), как это сделано в опытах Юнга и Ллойда (см. рис. 3.1, а, б);

2) путем отражения или преломления света (плоскопараллельная пластинка или пленка, клин и т.п.) на границе раздела двух сред с разными показателями преломления (см. рис. 3.1, в).

Так как результат интерференции определяется результирующей амплитудой (квадрат которой пропорционален интенсивности света), рассмотрим условия получения максимальной и минимальной интенсивности при наложении двух когерентных волн.

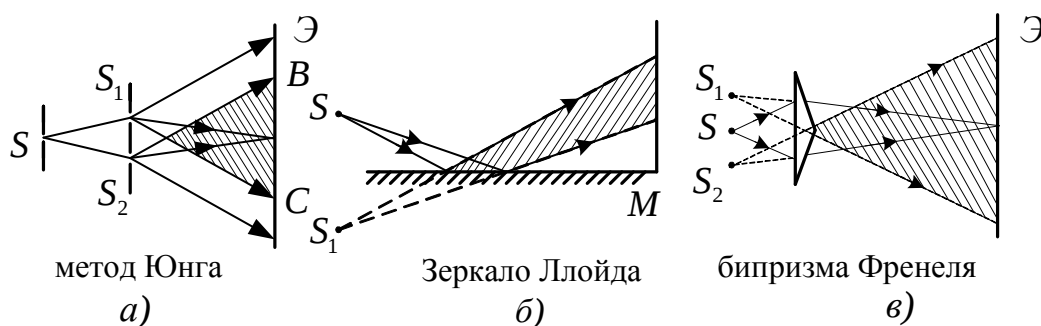


Рис. 3.1

Модуль светового вектора $\vec{E}$ на расстоянии r от источника излучения света с длиной волны λ и частотой $\omega = \frac{2\pi}{T}$ определяется выражением

$$E = A_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda_0} \right), \quad (2)$$

где T – период колебаний; λ_0 – длина волны в вакууме (и в воздухе); r – координата.

При сложении двух когерентных волн с амплитудами A_1 и A_2 результирующая амплитуда колебаний (см. формулу (1))

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda_0}(r_2 - r_1)}. \quad (3)$$

Величина $(r_2 - r_1)$ называется *разностью хода*. Если световые волны 1 и 2 распространяются не в воздухе, а в различных средах с показателями преломления n_1 и n_2 соответственно, то длина световой волны $\lambda_{1,2} = \frac{\lambda_0}{n_{1,2}}$, и разность фаз складываемых колебаний

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(r_2n_2 - r_1n_1). \quad (4)$$

Величина $r_2n_2 - r_1n_1 = \Delta$ называется *оптической разностью хода*.

Максимальная интенсивность I ($I \sim E^2$) при наложении световых волн наблюдается, когда косинус в формуле (3) равен единице, то есть когда $\Delta\varphi = 2m\pi$, где $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ (колебания в одной фазе).

Минимальная интенсивность наблюдается, когда $\Delta\varphi = (2m+1)\pi$, а $\cos \Delta\varphi = -1$ (колебания находятся в противофазе).

Оптическая разность хода Δ при этих условиях

$$\Delta = \Delta\varphi \frac{\lambda_0}{2\pi} = 2m \frac{\lambda_0}{2} \text{ (максимум);} \quad (5)$$

$$\Delta = \pm(2m+1) \frac{\lambda_0}{2} \text{ (минимум).} \quad (6)$$

Выражения (5) и (6) называются *условиями интерференционных максимумов и минимумов* соответственно, а величина m , входящая в них, называется *порядком интерференционного максимума или минимума*.

В опыте Юнга первичным источником света служит ярко освещенная щель S (см. рис. 3.1, а, 3.2). На некотором расстоянии от S находится преграда Π с двумя узкими щелями S_1 и S_2 , параллельными щели S и находящимися на расстоянии $\frac{d}{2}$ от оси SO (ось проходит через щель S и середину экрана, перпендикулярно к преграде Π и экрану $\mathcal{E}$).

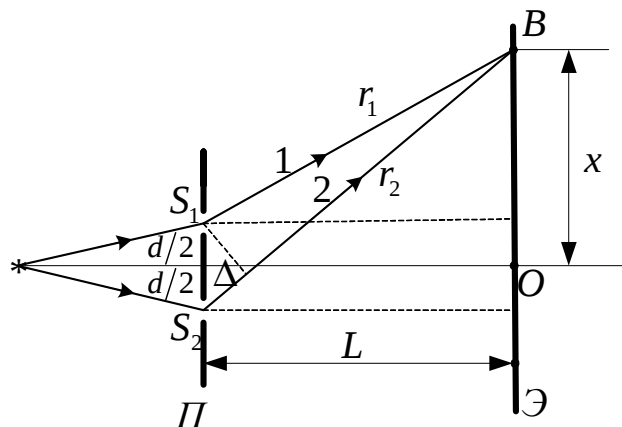


Рис. 3.2

Интерференция наблюдается на экране $\mathcal{E}$ на участке BC (см. рис. 3.1, а), где перекрываются световые лучи от щелей S_1 и S_2 . Расстояние от преграды Π до экрана $\mathcal{E}$ равно L (обязательным условием наблюдения интерференции является условие: $L \gg d$).

Рассмотрим лучи 1 и 2, приходящие в точку B на экране (см. рис. 3.2). Эта точка отстоит от центра экрана на расстоянии $OB = x$. Для простоты рассмотрим случай, когда вся установка находится в воздухе ($n = 1$). Рассчитаем разность хода лучей 1 и 2. Из рис. 3.2 видно, что

$$\begin{cases} r_1^2 = L^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 \\ r_2^2 = L^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 \end{cases}$$

Разность этих выражений

$$r_1^2 - r_2^2 = (r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 = 2xd. \quad (7)$$

Используя условие, что $L \gg d$, можно считать, что $r_1 \approx r_2 \approx L$, т.е. $(r_1 + r_2) \approx 2L$. Тогда разность хода лучей

$$\Delta = r_2 - r_1 = \frac{xd}{L}. \quad (8)$$

Периодически повторяющиеся на экране области с максимальной интенсивностью определяются координатами $x_{\max}$ (см. условие максимума (5):

$$x_{\max} = \frac{\Delta L}{d} = \pm \frac{m\lambda_0 L}{d}, \quad (9)$$

а области с минимальной интенсивностью $x_{\min}$ (см. выражение (6) – координатами

$$x_{\min} = \pm \frac{(2m+1)\lambda_0 L}{2d}. \quad (10)$$

Расстояние между соседними максимумами (светлыми интерференционными полосами на экране) $(m+1)$ -го и m -ного порядка равно

$$\Delta x_{\max} = \frac{(m+1)\lambda_0 L}{d} - \frac{m\lambda_0 L}{d} = \frac{\lambda_0 L}{d}. \quad (11)$$

Расстояние между соседними темными полосами – аналогичное,

$$\Delta x_{\min} = \frac{(2m+2+1)\lambda_0 L}{2d} - \frac{(2m+1)\lambda_0 L}{2d} = \frac{\lambda_0 L}{d}. \quad (12)$$

Таким образом, интерференционная картина на экране представлена чередующимися светлыми и темными полосами, расположенными на равных расстояниях друг от друга.

Из (12) видно, что если расстояние d соизмеримо с расстоянием L , то расстояние между полосами Δx порядка λ_0 , то есть составляет несколько десятых долей микрона (в видимой области $\lambda_0 = (4...7)10^{-7} \text{ м} = (0,4...0,7) \text{ мкм}$). В этом случае отдельные полосы совершенно неразличимы. Для того чтобы интерференционная картина была отчетливой, необходимо выполнение условия $L \gg d$ (о котором упоминалось ранее). Ширина интерференционных полос и расстояние между ними зависят от длины волны λ_0 . Только в центре экрана ($x = 0$) совпадут максимумы всех длин волн. По мере удаления от центра экрана максимумы разных цветов смещаются относительно друг друга. На экране наблюдаются цветные полосы, если источник S излучает белый свет.

При наблюдении интерференции существует такая величина разности хода лучей, начиная с которой исчезает интерференционная картина. Эта величина называется *длиной когерентности*. Поскольку фаза каждого цуга (порции излучения атома за некоторый промежуток времени – *времени когерентности* τ) различна, условие когерентности будет выполняться, если оптическая разность хода меньше пространственной протяженности цуга L (расстояние, на которое распространилось излучение за время когерентности). При большей разности хода будет осуществляться наложение волн различных следующих друг за другом цугов с различными фазами, то есть когерентность взаимодействующих волн нарушается. В этом случае интерференционная картина наблюдаться не будет (она «размывается»). Пространственная протяженность цуга L (длина цуга волн) и время когерентности τ связаны очевидным соотношением: $L = c\tau$ (где c – скорость света).

Пусть на тонкую плоскопараллельную пластинку (пленку) с показателем преломления n падает параллельный пучок света (рис. 3.3). Для простоты возьмем угол падения, равный нулю (пучок падает перпендикулярно к поверхности). На рис. 3.2 угол падения изображен близким к нулю.

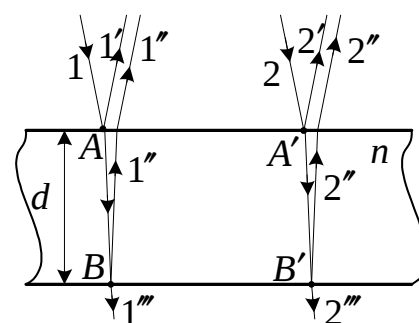


Рис. 3.3

Луч 1 в точке A (см. рис. 3.3) частично отражается ($1'$) и частично проходит в пластинку ($1''$). В точке B опять происходит отражение от нижней границы пленки (луч $1'''$) и преломление (луч $2''$). В результате в области над пластиной получается два луча, один из которых – непосредственно отраженный в точке A – $1'$, а второй – прошедший дважды толщину пластинки d – $1'''$. Эти лучи когерентны и будут интерферировать. Оптическая разность хода лучей $1'$ и $1'''$ (при условии, что лучи падают нормально на поверхность пленки)

$$\Delta = 2nd - \frac{\lambda_0}{2}. \quad (13)$$

Величина $\frac{\lambda_0}{2}$ появляется в оптической разности хода за счет того, что при отражении световой волны от более плотной среды (в точке A) фаза колебаний меняется на π . Это соответствует дополнительной разности хода $\frac{\lambda_0}{2}$ (в этом случае происходит «потеря полуволны» при отражении).

Если эта разность хода Δ равна четному числу полуволн (см. формулу (5), то в результате наложения волн $1'$ и $1'''$ получится усиление света (максимум). Условие максимума запишется как

$$\Delta = 2nd - \frac{\lambda_0}{2} = 2m \frac{\lambda_0}{2}, \quad (14)$$

то есть

$$2nd = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2}. \quad (15)$$

Условие минимума принимает вид

$$\Delta = 2nd - \frac{\lambda_0}{2} = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2}, \quad (16)$$

то есть

$$2dn = (2m + 2) \frac{\lambda_0}{2}. \quad (17)$$

Результат интерференции зависит от толщины пластинки d . *Минимальная толщина пластинки*, при которой может наблюдаться интерференция, задается условием

$$2dn = \frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0), \quad (18)$$

то есть

$$d_{\min} = \frac{\lambda_0}{4n}. \quad (19)$$

При рассмотрении интерференции в тонких пластинках (пленках) следует учитывать, что часть света проходит через пластинку и интерференцию можно наблюдать одновременно и в проходящем свете (см. рис. 3.2, лучи $1'''$ и $2'''$). Причем, если для отраженного света с длиной волны λ при заданной толщине пластинки d будет наблюдаться усиление света, то для проходящего – ослабление (и наоборот).

Результат интерференции зависит и от угла падения α светового луча на поверхность пластинки. Рассмотрим случай, когда световой луч падает на пластинку под углом α (рис. 3.4).

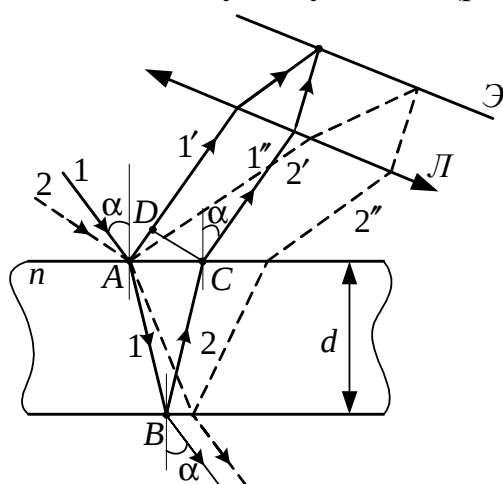


Рис. 3.4

За счет отражения света от верхней и нижней поверхностей пластинки образуются два когерентных пучка $1'$ и $1''$, прошедших разные оптические пути r_1 и nr_2 , где r_1 – длина отрезка AD (пластинка находится в воздухе; $n = 1$); r_2 – суммарная длина отрезков AB и BC ; n – показатель преломления пластинки.

Оптическая разность хода лучей $1'$ и $1''$

$$\Delta = nr_2 - r_1 = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}. \quad (20)$$

Учитывая потерю полуволны $\frac{\lambda_0}{2}$ при отражении луча 2 от более плотной среды в точке A , получим условие *интерференционного максимума в отраженном свете*

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda_0}{2} = 2m \frac{\lambda_0}{2}. \quad (21)$$

Каждая интерференционная полоса образуется лучами, падающими на пластинку под одинаковым углом α (пунктиром на рис. 3.4 показан луч 2 с другим углом падения). Получающиеся в таких условиях интерференционные полосы носят название *полос равного наклона*.

Если пленка имеет переменную толщину (например, мыльная пленка, расположенная вертикально, стеклянный клин и т.д.), то результат интерференции будет зависеть от места падения луча. Каждая интерференционная полоса образуется за счет отражения света от тех мест пластинки, где толщина одинакова. Интерференционные полосы в этом случае называются *полосами равной толщины*.

Явление интерференции в тонких пленках применяется для *просветления оптики*. Если покрыть поверхность линзы тонким слоем прозрачного вещества с показателем преломления, отличным от показателя преломления линзы, то можно так подобрать толщину этого слоя, чтобы для определенной (нужной) длины волны света выполнялось условие минимума интерференции в отраженном свете. Тогда свет этой длины волны полностью будет проходить через линзу, что улучшает ее оптические качества. Кроме того, явление интерференции лежит в основе устройства многих разновидностей интерференционных приборов, называемых *интерферометрами*. Интерферометры можно использовать для определения показателей преломления газообразных веществ (интерферометр Жамена), для точного измерения длин световых волн (интерферометр Майкельсона).

Согласно **принципу Гюйгенса** каждую точку фронта волны можно принять за центр вторичной сферической волны с той же частотой и фазой. Этот принцип был дополнен следующими **положениями Френеля**:

1. Вторичные источники света – точки волновой поверхности – дают когерентное излучение.

2. Волны от этих вторичных источников при наложении друг на друга создают сложную *интерференционную картину* перераспределения интенсивности (квадрата светового вектора).

Эти положения (вместе с принципом Гюйгенса) носят название **принципа Гюйгенса – Френеля**.

В некоторый момент времени (рис. 3.5) световая сферическая волна имеет волновую поверхность SS' с радиусом $ON = a$.

Рассмотрим результат сложения большого количества когерентных волн в некоторой точке M , лежащей на оси OO' . Так как вторичных источников бесконечно много, удобнее разбить волновую поверхность (сферическую) на определенные участки по следующему принципу.

Выделим (виртуально) на волновой поверхности сферические сегменты так, чтобы расстояние от внешнего края каждого сегмента до точки M увеличивалось на $\frac{\lambda}{2}$, например, $BM = b + \frac{\lambda}{2}$, $CM = b + 2\frac{\lambda}{2}$ и т.д. Сферические сегменты разобьют волновую поверхность SS' на кольцевые области, называемые **зонами Френеля**.

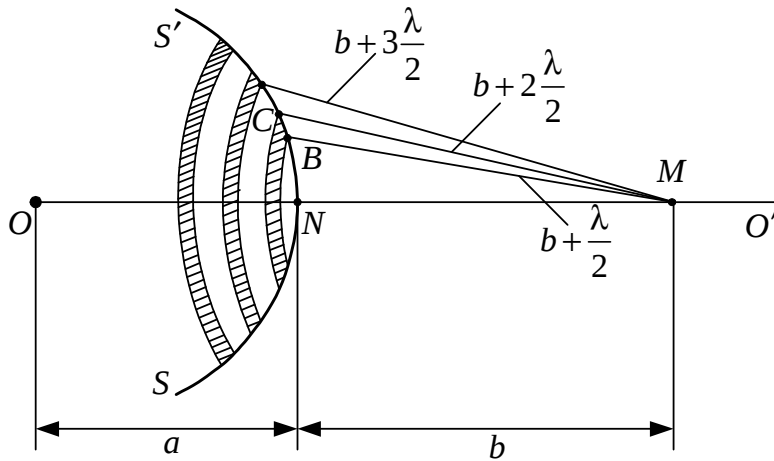


Рис. 3.5

Из построения видно, что вторичные волны от границ двух соседних зон приходят в точку M в противофазе, поскольку имеют разность хода $\frac{\lambda}{2}$.

Расчет показывает, что площади выбранных таким образом кольцевых зон примерно равны.

Тогда число вторичных источников, посылающих волны в точку M от каждой зоны, можно считать одинаковым. Однако амплитуда колебаний A от разных зон убывает с увеличением номера зоны, так как амплитуда обратно пропорциональна расстоянию от исходной до конечной точки:

$$A_1 > A_2 > A_3 > \dots,$$

где A_1, A_2, A_3 – амплитуды колебаний от первой, второй, третьей зон соответственно. Приближенно для такого убывающего ряда можно считать, что

$$A_m \approx \frac{A_{m+1} + A_{m-1}}{2}, \quad (22)$$

где A_m – амплитуда колебаний от m -ной зоны.

Так как из соседних зон колебания приходят в точку M в противофазе, амплитуда результирующего колебания в точке M будет равна

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots \quad (23)$$

Это выражение можно переписать следующим образом:

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots +$$

$$+ \begin{cases} \left(\frac{A_{m-2}}{2} - A_{m-1} + \frac{A_m}{2} \right) + \frac{A_m}{2} & \text{если } (m - \text{нечетное}); \\ \left(\frac{A_{m-3}}{2} - A_{m-2} + \frac{A_{m-1}}{2} \right) + \frac{A_{m-1}}{2} - A_m & \text{если } (m - \text{четное}). \end{cases} \quad (24)$$

Учитывая условие (22), можно приравнять к нулю все выражения в скобках (24).

В результате получится

$$A = \frac{A_1}{2} \pm \frac{A_m}{2}, \quad (25)$$

где знак «плюс» берется для нечетных m , а «минус» – для четных.

Таким образом, используя принцип Гюйгенса – Френеля, можно рассчитать результирующую амплитуду (и интенсивность света) от различных участков сферической волны. Действие всей волны (полностью открытая волновая поверхность) сведется к тому, что результирующая амплитуда будет равна $\frac{A_1}{2}$ (так как для большого числа $m \rightarrow \infty$ амплитуда $A_m \rightarrow 0$), то есть

распространение света от источника O к точке M происходит так, как если бы световой поток шел внутри узкого канала вдоль OM , то есть прямолинейно.

Если на пути волны поставить непрозрачный экран с небольшим отверстием, картина будет меняться в зависимости от размеров отверстия.

Рассмотрим дифракцию света на круглом отверстии при условии, что источник S не слишком удален от препятствия (**дифракция Френеля**). Пусть на пути световых лучей на расстоянии a от источника S (рис. 3.6) находится непрозрачная преграда Π с малым круглым отверстием радиусом r . На расстоянии b от центра отверстия находится непрозрачный экран $\mathcal{E}$.

Если из точки M построить на отверстии зоны Френеля, то число зон, укладывающихся на отверстии радиусом r , выразится формулой (в этом можно убедиться самостоятельно, решив геометрическую задачу, см. рис. 3.6)

$$m = \frac{r^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right). \quad (26)$$

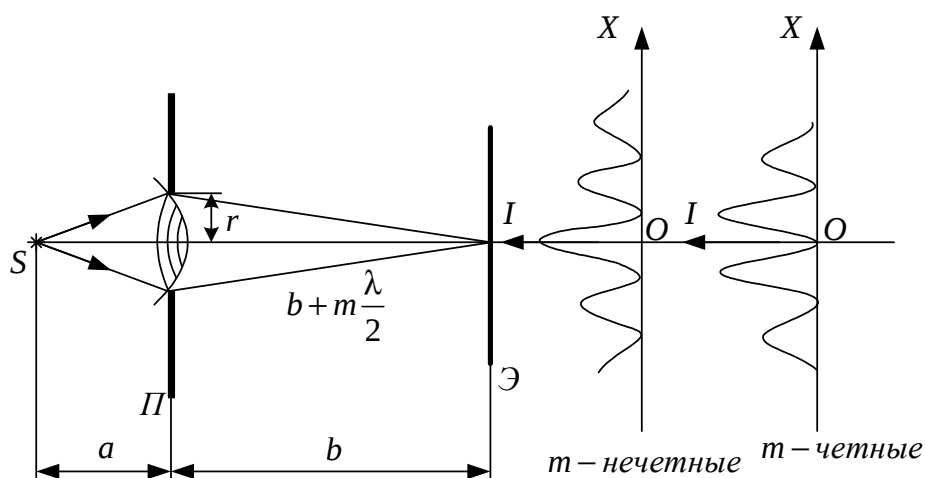


Рис. 3.6

Расстояние от края отверстия до центра экрана M (см. рис. 3.6) согласно построению Френеля равно $\left(b + m\frac{\lambda}{2}\right)$. Число зон Френеля m на отверстии зависит от радиуса отверстия, поэтому чем меньше r , тем меньше зон укладывается на этом отверстии (при заданных расстояниях a и b).

Предположим, что величины r , a и b подобраны так, что число $m = 1$ (одна зона Френеля в отверстии). В этом случае результирующая амплитуда световых колебаний в точке M равна A_1 , а интенсивность света $I \sim A_1^2$.

При $m = 2$ (см. (25)) $A = \frac{A_1}{2} - \frac{A_2}{2}$, то есть много меньше, чем в предыдущем случае. При увеличении размера отверстия число m увеличивается, величина A_m (амплитуда от m -ной зоны) стремится к нулю, а результирующая амплитуда – к $\frac{A_1}{2}$ (интенсивность $\frac{A_1^2}{4}$). Таким образом, отверстие малого радиуса может давать в центре экрана интенсивность в четыре раза большую в сравнении с отверстием большого радиуса (что явно противоречит законам прямолинейного распространения света). Если при заданных a и b в отверстии укладывается нечетное число зон, то в точке M наблюдается усиление света; при четном числе – ослабление. Так как число зон m на отверстии зависит от расстояния b до экрана, то, удаляя экран от отверстия, можно наблюдать различную дифракционную картину. Если рассматривать другие точки экрана при неизменном b и для них провести построение зон Френеля в отверстии, то в зависимости от расположения точек на экране b будет разным и в отверстии будет укладываться разное число зон Френеля. Поэтому в исследуемой точке на экране будет либо свет, либо темнота. Дифракционная картина на экране будет иметь вид чередующихся темных и светлых концентрических колец с центром в точке M (геометрическое место точек на экране, для которых строится данное число зон – окружности).

Если на пути световой волны поставить вместо отверстия малый круглый непрозрачный диск радиусом r , который закрывает m первых зон Френеля, то в центре получится светлое пятно (**пятно Пуассона**). Это объясняется тем, что результирующая амплитуда колебаний в этом случае, согласно формулам (23) и (24), будет равна

$$A = \frac{A_{m+1}}{2}, \quad (27)$$

и чем меньше размеры диска, тем ярче картина в центре экрана.

Если источник света немонохроматический, то при дифракции от круглого отверстия на экране будут наблюдаться кольца различного цвета с белым пятном (если m – нечетное) или с темным пятном (если m – четное) в центре. При дифракции на круглом диске в центре дифракционной картины наблюдается светлое пятно, яркость которого зависит от размеров диска.

Наибольший практический интерес представляют дифракционные явления, наблюдаемые при падении параллельных лучей света на узкую щель (или на совокупность щелей –

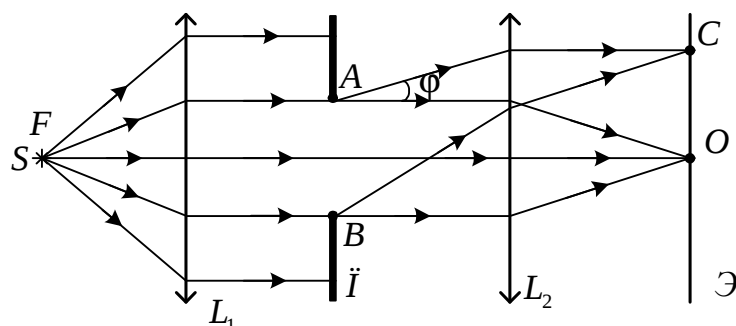


Рис. 3.7

дифракционную решетку) – **дифракция Фраунгофера** (рис. 3.7). Если после точечного источника света S поместить на расстоянии, равном фокусному, линзу L_1 , то щель AB освещается параллельным пучком. Щель AB должна иметь размеры меньше размера линзы (то есть меньше размера пучка). Каждая точка волновой поверхности в щели, согласно принципу Гюйгенса – Френеля, становится вторичным точечным источником когерентных волн. На щель световые лучи падают под углом $\varphi = 0$ (φ – угол между направлением луча и перпендикуляром к плоскости щели), а после щели, вследствие дифракции, направление световых лучей будет различным (угол φ может иметь значения от 0° до $\pi/2$). Так как вторичные точечные источники когерентны, то световые лучи при наложении будут интерферировать. Для того чтобы сложить параллельные лучи, после щели ставят вторую линзу L_2 , которая соберет в определенную точку C своей фокальной плоскости лучи, выходящие из щели под одинаковым углом φ .

Рассмотрим распределение интенсивности света от узкой щели с помощью построения Френеля (рис. 3.8). Лучи, идущие от щели шириной $MN = a$ (см. рис. 3.8, a) под углом φ (угол φ – угол между направлением падающих на щель лучей и выбранным направлением луча после щели – называется *углом дифракции*), имеют разность хода от крайних точек щели M и N

$$NF = a \sin \varphi, \quad (28)$$

(линза не вносит дополнительной разности хода).

Если разность NF равна четному числу полуволен ($2m\frac{\lambda}{2}$), значит, для данного направления щель может быть разбита на $2m$ зон Френеля, то есть от щели идет $2m$ когерентных пучков. Каждая пара соседних пучков имеет разность хода $\frac{\lambda}{2}$ (то есть они приходят в точку наблюдения в противофазе), и они взаимно ослабляют друг друга. В результате сложения $2m$ таких пучков получается минимум освещенности экрана Э. Условие **дифракционного минимума** запишется в виде

$$a \sin \varphi = 2m \frac{\lambda}{2}, \quad (29)$$

где $m = 1, 2, 3 \dots$ – порядок дифракционного минимума.

Если разность хода между крайними лучами равна нечетному числу

полуволен $(2m+1)\frac{\lambda}{2}$, то весь пучок в данном направлении делится

на нечетное число пучков и в месте наложения этих пучков на экране будет наблюдаться максимум интенсивности. Условие **дифракционного максимума** света

$$a \sin \varphi = (2m+1) \frac{\lambda}{2}, \quad (30)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$

Если угол $\varphi = 0$, то в этом направлении разность хода лучей равна нулю (независимо от длины волны) и наблюдается максимум для всех длин волн (центральный максимум в точке B , см. рис. 3.8, $a, б$).

Основная часть светового потока (см. рис. 3.8, $б$) сосредото-

чена в центральной дифракционной полосе между минимумами первого порядка ($m = \pm 1$), то есть в пределах углов $-\varphi_1 < \varphi < \varphi_1$. Угол φ_1 определяется из тригонометрического уравнения

$$\sin \varphi_1 = \frac{\lambda}{2}. \quad (31)$$

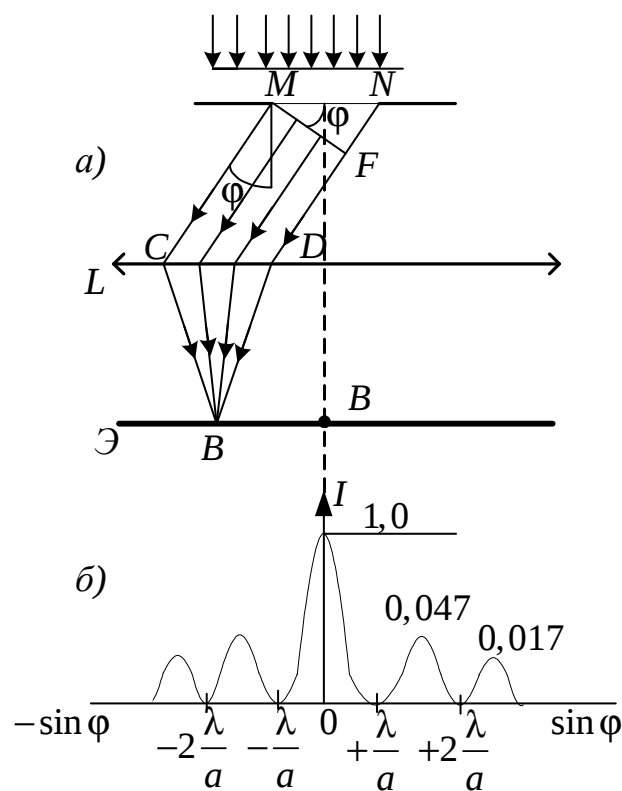


Рис. 3.8

Рассмотрим дифракцию Фраунгофера на дифракционной решетке (*дифракционная решетка* – это система, состоящая из большого числа одинаковых по ширине a и параллельных друг другу щелей, лежащих в одной плоскости и разделенных непрозрачными промежутками шириной b). Величина $(a + b) = d$ называется *постоянной* (или периодом) *дифракционной решетки*.

Пусть на решетку ($ДР$), содержащую N щелей, падает параллельный пучок монохроматического света (рис. 3.9). Каждую щель можно рассматривать как источник света, причем все щели – когерентные источники света. После решетки свет распространяется во всех направлениях, и на экране $\mathcal{E}$, расположенном в фокальной плоскости линзы L , будет наблюдаться интерференционная картина. Эта картина является результатом дифракции света на каждой щели решетки и интерференции когерентных световых пучков, идущих от всех щелей.

Разобьем открываемую каждой из щелей часть волновой поверхности на узкие параллельные щелям зоны Френеля (для j -той щели число зон Френеля n_j). Вектор амплитуды колебания, создаваемого в точке B экрана (см. рис. 3.9) i -той зоной j -той щели, обозначим $\Delta \vec{A}_{ij}$. Тогда вектор амплитуды результирующего колебания $\vec{A}$ равен

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^{n_1} \Delta \vec{A}_{i1} + \sum_{i=1}^{n_2} \Delta \vec{A}_{i2} + \dots + \sum_{i=1}^{n_N} \Delta \vec{A}_{iN} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \dots + \vec{A}_N = \sum_{j=1}^N \vec{A}_j, \quad (32)$$

где $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_N$ – векторы амплитуд колебаний, создаваемых первой, второй, N -ной щелями соответственно.

Для направлений, удовлетворяющих условию (29), все векторы $\vec{A}_{ij}$ равны нулю и $\vec{A} = 0$, то есть **условие минимума для одной щели является таким же условием минимума и для всех щелей решетки**. Если разность хода лучей от соседних и всех щелей $CF = d \sin \varphi$ (см. рис. 3.9), то волны от каждой щели будут иметь одинаковую фазу и при сложении дадут на экране максимум. Для тех направлений (углов φ), для которых выполняются условия (30) и

$$d \sin \varphi = m\lambda, \quad (33)$$

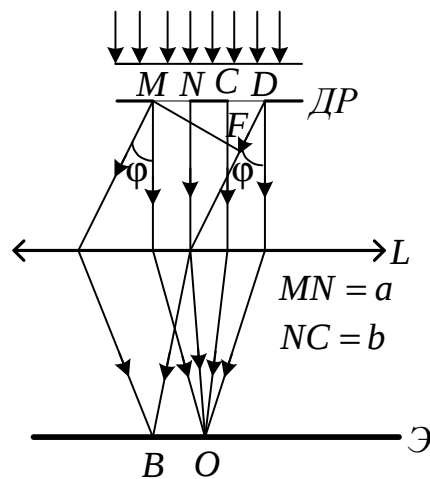


Рис. 3.9

(где $m = 0, 1, 2, \dots$), колебания от отдельных щелей взаимно усиливают друг друга (разность фаз $\Delta\varphi = 2\pi m$), вследствие чего амплитуда светового вектора в соответствующей точке экрана равна

$$A_{\max} = NA_{\varphi}, \quad (34)$$

где A_{φ} – амплитуда светового вектора от одной щели для лучей под углом φ .

Таким образом, формула (33) определяет *положения максимумов* интенсивности освещенности экрана, называемых *главными*.

Интенсивность главных максимумов

$$I_{\max} = N^2 I_{\varphi}. \quad (35)$$

Кроме минимумов, определяемых условием (29), в промежутках между главными максимумами имеется по $(N - 1)$ -ному добавочному минимуму. Эти минимумы возникают в тех направлениях, для которых световые векторы от отдельных щелей взаимно гасят друг друга. Между дополнительными минимумами располагаются слабые вторичные максимумы. Соответствующий расчет показывает, что интенсивность вторичных максимумов не превышает $\frac{1}{23}$ интенсивности ближайшего главного максимума.

На рис. 3.10 представлена картина распределения интенсивности I на экране для решетки с числом щелей $N = 4$ ($d = 3a$). Пунктирная кривая, проходящая через вершины главных максимумов, изображает распределение интенсивности от одной щели, умноженную на N^2 (см. формулу (35)).

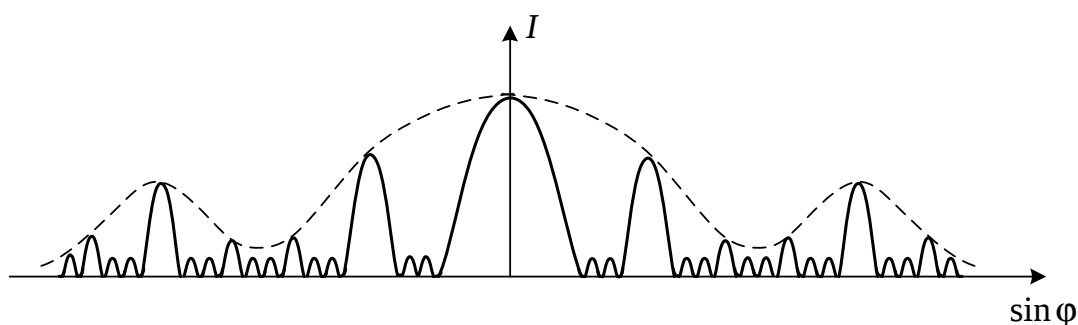


Рис. 3.10

Положение главных максимумов (см. формулу (34)) зависит от длины волны λ . Поэтому при пропускании через решетку белого света лучи с разными длинами волн дифрагируют под разными углами и все максимумы ($m = 1, 2, \dots$), кроме центрального ($m = 0$), представляют собой спектр, фиолетовая область которого обращена к центру дифракционной картины, а красная – наружу.

Если на решетку падают два луча с близкими длинами волн λ_1 и λ_2 , то возможность разрешения (т.е. раздельного восприятия дифракционных полос) для этих длин волн зависит не только от разности длин волн $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, но и от ширины дифракционного максимума (см. рис. 3.10).

Согласно **критерию Рэлея** изображения двух близлежащих одинаковых точечных источников или двух близлежащих спектральных линий с равными интенсивностями и одинаковыми симметричными контурами считаются разрешенными (разделенными для восприятия), если центральный максимум дифракционной картины от одного источника совпадает с первым минимумом дифракционной картины от другого (рис. 3.11, а). При этом интенсивность «провала» между максимумами составляет 80 % интенсивности в максимуме. Этого достаточно для разрешения линий λ_1 и λ_2 . Если критерии Рэлея не выполняются, то наблюдается одна линия (см. рис. 3.11, б).

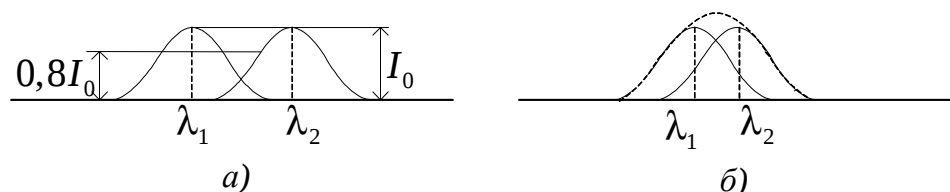


Рис. 3.11

Разрешающей силой дифракционной решетки называют безразмерную величину $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$, которая зависит от номера дифракционного максимума m и от числа щелей N в этой решетке, т.е.

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN. \quad (36)$$

Для увеличения разрешающей способности решетки увеличивают число щелей N . Использовать для разделения λ_1 и λ_2 дифракционные максимумы m высоких порядков не имеет смысла, так как они имеют малую интенсивность (см. рис. 3.8).

Дифракцию можно наблюдать и на трехмерных структурах, то есть пространственных образованиях, обнаруживающих периодичность по трем не лежащим в одной плоскости направлениям. Подобными структурами являются все кристаллические тела. Однако их период (порядка 10^{-9} м) слишком мал для того, чтобы можно было наблюдать дифракцию в видимом свете. Условие $d \geq \lambda$ выполняется в случае кристаллов только для рентгеновских лучей ($\lambda = 10^{-8} \dots 6 \cdot 10^{-12}$ м). Если на кристалл направить пучок монохроматических рентгеновских лучей, то частицы, находящиеся в узлах кристаллической решетки, рассеивают (отражают) их. Возникшие вторичные волны интерферируют, и на фотопластине возникает дифракционная картина.

Пространственную структуру (кристаллическую решетку) можно представить как совокупность линейных цепочек из структурных элементов (атомов), расположенных вдоль одной из координатных осей. Рассмотрим действие отдельной линейной цепочки, параллельной, например, оси OX (рис. 3.12). Пусть на кристаллическую решетку падает пучок параллельных лучей, образующих с осью X угол $\theta = 90 - \varphi$.

Если падающая на кристалл волна плоская, то огибающая вторичных волн, рассеянных атомами, лежащими в кристаллографической плоскости, тоже плоскость. Тогда суммарное действие атомов, лежащих в одной плоскости, можно представить в виде плоской волны, отраженной от атомов по обычным законам отражения. Отраженные волны когерентны и могут интерферировать между собой подобно волнам, посылаемым в заданном направлении щелями дифракционной решетки. Разность хода Δ лучей, отразившихся от соседних атомных плоскостей (см. рис. 3.12),

$$\Delta = 2d \sin \theta = 2d \cos \varphi, \quad (37)$$

где d – расстояние между двумя соседними атомными плоскостями, θ – *угол скольжения луча* (угол скольжения – угол, дополнительный к углу падения луча). Согласно условию максимума интенсивности при интерференции разность хода лучей 1 и 2 Δ равна целому числу длин волн

$$2d \sin \theta = m\lambda \quad \text{или} \quad 2d \cos \varphi = m\lambda, \quad (38)$$

где $m = 0, 1, 2, 3$. Соотношения (38) выражают **формулу Вульфа – Брэггов**.

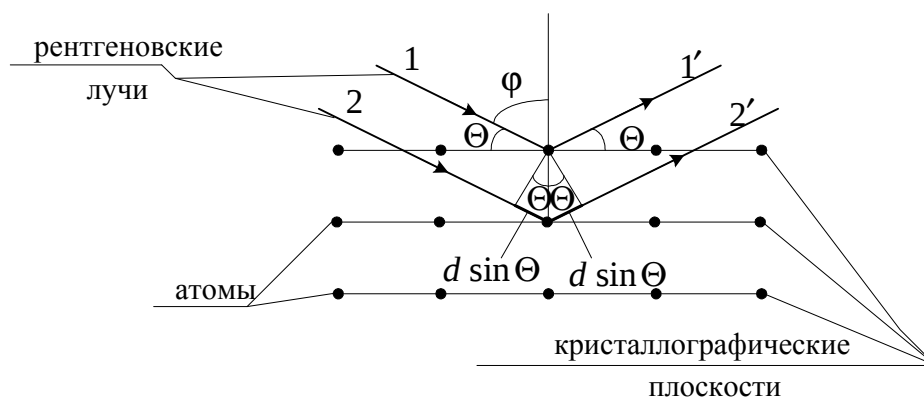


Рис. 3.12

Дифракция рентгеновских лучей от кристаллов широко используется на практике для рентгеновской спектроскопии и рентгеновского структурного анализа.

Дисперсией света называется зависимость скорости распространения световых волн от частоты колебаний (или длины волны). Вследствие этого абсолютный показатель преломления данного вещества также зави-

сит от частоты или длины волны проходящего через него света, т.е. дисперсия света в веществе определяется видом функции $n = n(\nu)$ или $n = n(\lambda)$. В различных участках спектра дисперсия характеризуется тем изменением показателя преломления, который приходится на единичный интервал длин волн. Эта величина $\Delta n / \Delta \lambda$ называется *средней дисперсией* для участка спектра $\lambda \dots \lambda + \Delta \lambda$; величина $dn/d\lambda$ (ее называют *дисперсией*) – это скорость изменения показателя преломления в данном месте спектра для конкретной длины волны λ .

Зависимость $n = n(\lambda)$ в оптической области спектра имеет сложный характер (рис. 3.13). Для всех прозрачных веществ показатель преломления уменьшается с увеличением длины волны (области I и III на рис. 3.13) и $\frac{dn}{d\lambda} < 0$. Такая *дисперсия* называется *нормальной*. Зависимость показателя преломления от длины волны при нормальной дисперсии можно с удовлетворительной точностью представить в виде **формулы Коши**:

$$n = n_0 + \frac{a}{\lambda^2} + \frac{b}{\lambda^4} \quad \text{или} \quad n \approx n_0 + \frac{a}{\lambda^2}, \quad (39)$$

где n_0 , a и b – некоторые постоянные (положительные) для данного вещества величины, причем при $\lambda \rightarrow \infty$, $n \rightarrow n_0$

$$\frac{dn}{d\lambda} \approx -\frac{2a}{\lambda^3}.$$

Вблизи линий сильного поглощения ($\lambda \approx \lambda_0$) кривая $n(\lambda)$ имеет обратный вид (участок АВ на рис. 3.13) и $\frac{dn}{d\lambda} > 0$. Такая *дисперсия* называется *аномальной*.

Согласно **электромагнитной теории дисперсии Лоренца** аномальная дисперсия наблюдается при резонансе между колебаниями светового вектора E падающей волны и собственными колебаниями электрических зарядов (электронов на электронных оболочках) в атомах и молекулах вещества. Поэтому по измеренным частотам областей аномальной дисперсии можно определять частоты собственных колебаний в атомах и молекулах вещества. Кроме того, при резонансе должна наблюдаться также интенсивная передача энергии от электромагнитной волны к атомам и молекулам вещества, т.е. должно иметь место интенсивное поглощение энергии проходящего электромагнитного излучения.

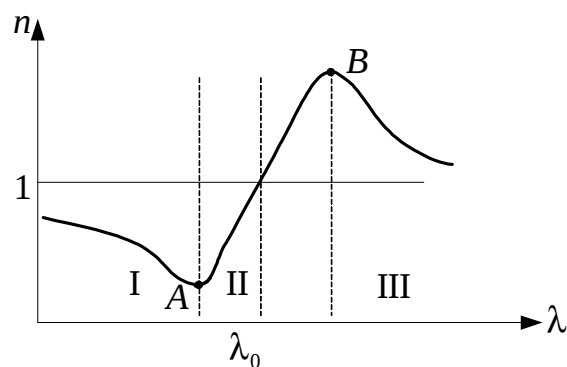


Рис. 3.13

Допустим, что оптическое излучение, несущее энергию W , проходит через тонкий слой среды толщиной dx и теряет энергию dW . Полагая, что dW прямо пропорционально энергии W и толщине слоя dx (такое предположение допустимо для бесконечно малых dx) и имея в виду, что dW отрицательно, так как это означает потерю энергии, можем записать:

$$-dW = \mu W dx,$$

где коэффициент μ учитывает *поглощательную способность среды*.

Из этого соотношения получаем

$$\frac{dW}{W} = -\mu dx; \quad \ln W = -\mu x + \text{const.}$$

Поскольку при $x = 0$ $W = W_0$, следовательно, $\text{const} = \ln W_0$. Подставляя это значение постоянной интегрирования в формулу, получим **закон Бугера**:

$$W = W_0 e^{-\mu x}.$$

Коэффициент поглощения μ различных веществ зависит от длины волны. Некоторые вещества обнаруживают селективное поглощение, т.е.

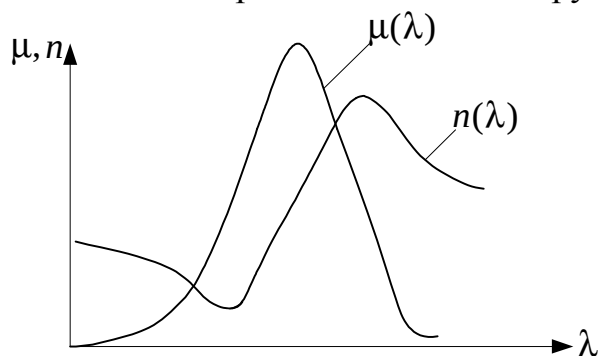


Рис. 3.14

имеют очень большой коэффициент поглощения для некоторой (часто очень узкой) области спектра. Например, серебро очень сильно поглощает ультрафиолетовое излучение с $\lambda = 0,316$ мкм. Измерения показали, что в области аномальной дисперсии кривая зависимости коэффициента поглощения от длины волны имеет резкий максимум (рис. 3.14).

Голография — это способ записи и последующего восстановления световых волн, основанный на явлениях интерференции когерентных пучков света. Схемы получения голограммы протяженного объекта и восстановления с ее помощью рассеянной объектом волны показаны на рис. 3.15, *а* и *б*. Плоская монохроматическая волна от лазера падает на полупрозрачную пластинку *В* и разделяется на две когерентные волны (см. рис. 3.15, *а*).

Отраженная от *В* волна падает на фотопластинку *С* и играет роль опорной волны. Прошедшая сквозь *В* волна освещает объект *А*, каждая точка которого становится источником вторичных сферических волн. Рассеянные объектом волны также падают на фотопластинку *С*, где фиксируется результат их интерференции с опорной волной. Для получения интерференционной картины на фотопластинке необходимо, чтобы время когерентности используемого света было большим: протяженность цуга волн должна быть больше разности хода между опорной волной и волной, рас-

сеянной предметом. Именно поэтому необходимо использовать лазер. При восстановлении рассеянной волны (см. рис. 3.15, б) на голограмму падает та же опорная волна, которая использовалась при записи. Если расположить глаз (или фотоаппарат) позади голограммы, как указано на рис. 3.15, б, то, воспринимая пучок расходящихся лучей от дифрагированной на голограмме опорной волны, наблюдатель увидит сквозь голограмму объект A' (его мнимое изображение) в том месте, где он находился при записи голограммы. Разумеется, здесь, как и в рассмотренном выше случае точечного источника, кроме расходящихся волн будут также присутствовать прошедшая без отклонения волна и сходящиеся волны, которые да-

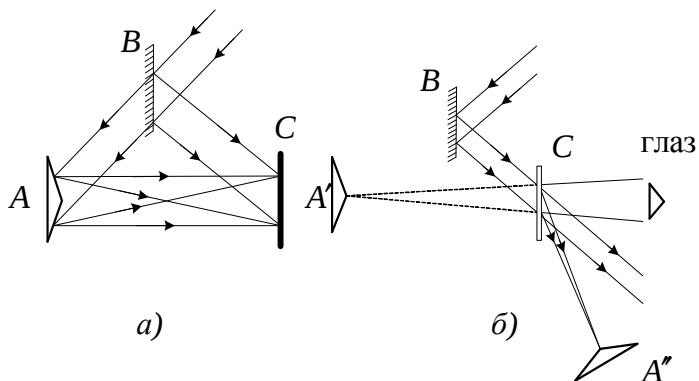


Рис. 3.15

ют действительное изображение объекта A'' . Использование наклонного падения опорной волны приводит, как видно из рис. 3.15, б, к хорошему пространственному разделению всех трех волн, благодаря чему можно сквозь голограмму рассматривать мнимое изображение объекта A' без помех со стороны других пучков. В отличие от обычной фотографии здесь не используются ни линзы, ни другие устройства, формирующие изображения.

Система расходящихся волн, дающая мнимое изображение, неотличима от волн, исходящих от самого объекта. Благодаря этому голограмма полностью восстанавливает объемную структуру объекта и передает не только видимое пространственное расположение предметов, но и эффект параллакса, заключающийся в изменении видимого взаимного расположения предметов при перемещении точки наблюдения. Это обусловлено тем, что любой участок голограммы содержит информацию обо всем объекте, в то время как различные участки обычной фотографии передают информацию только об отдельных его частях. Действительно, при записи голограммы на любую часть пластинки падают волны, рассеянные всеми частями объекта. Объем информации, содержащийся на голограмме, значительно больше, чем на фотографии того же объекта. Если объект состоит из нескольких предметов, находящихся друг за другом на разных расстояниях, то при фотографировании можно получить четкое изображение, строго говоря, только для одного из них. В случае голограммы при ее восстановлении для такого объекта все предметы будут наблюдаться вполне четкими при соответствующей аккомодации (настройке, фокусировке) глаза.

3.2. Методические указания к лекционным занятиям

Вопросы лекции	Форма изучения	Литература	Вопросы для самоконтроля
Интерференция света: – условия наблюдения интерференции; – получение когерентных волн; – оптическая разность хода; – расчет интерференционной картины; – интерференция в тонких пленках (пластинках)	лекция	[8], п. 25.1 [10], гл. 170 – 175 [7], гл. 21.1 – 21.4 [5], гл. 3.33 – 3.35	1. Какие волны считаются когерентными? 2. Почему для наблюдения интерференции необходимым условием является когерентность? 3. Что такое оптическая разность хода? 4. Сформулируйте условия интерференционных максимумов и минимумов. 5. Почему для наблюдения интерференции в опытах разделяют световой пучок? 6. Для наблюдения четкой картины интерференции в опыте Юнга необходимым условием является, чтобы расстояние от щелей до экрана было много больше расстояния между щелями. Объясните, почему. 7. От чего зависит ширина интерференционной полосы на экране в опыте Юнга? 8. Какой вид имеет интерференционная картина в опыте Юнга при освещении щелей: 1) монохроматическим светом? 2) белым светом? 9. От чего зависит ширина интерференционных полос при интерференции в тонких пленках? 10. Привести примеры применения явления интерференции в практических целях
Дифракция электромагнитных волн: – принцип Гюйгенса; са – Френеля; – дифракция Френеля на круглом отверстии и круглом диске; – дифракция Фраунгофера; – дифракция рентгеновских лучей	лекция	[8], п. 25.2 [10], гл. 176 – 184 [7], гл. 22.1 – 22.9 [5], гл. 3.36 – 3.43	1. Какими положениями дополнил Френель принцип Гюйгенса? 2. Что такое зона Френеля? Как проводится построение такой зоны для определения точки наблюдения дифракции? 3. Чему равна результирующая амплитуда от полностью открытого фронта сферической волны? 4. Как меняется интенсивность света на экране при ограничении фронта волны? 5. Какой вид имеет картина на экране при дифракции Френеля: 1) на круглом отверстии? 2) на круглом диске? 6. Какая картина получается на экране при дифракции света на узкой щели, если свет: 1) монохроматический? 2) белый? 7. Сформулировать условия максимумов и минимумов дифракции на щели. 8. Что такое дифракционная решетка? Как определить постоянную (период) решетки? 9. Какова картина распределения интенсивности на экране при дифракции Фраунгофера на решетке? 10. Сформулировать условия главных максимумов и главных минимумов интенсивности при дифракции на решетке. 11. Какую величину называют разрешающей силой решетки? От чего она зависит? 12. В чем особенность дифракции рентгеновских лучей? Как используется это явление?

3.3. Методические указания к практическим занятиям

Тема занятия	Задачи	Рекомендации	Задачи из сборников
Интерференция света	Поиск параметров оптического объекта (пластинка, пленка), при которых достигается условие максимума или минимума Определение параметров интерференционной картины	Интерференция возможна лишь в случае когерентных волн. Так как два любых независимых источника света не являются когерентными, то интерференция света возникает лишь в тех случаях, когда световая волна, испускаемая одним источником, разделяется некоторой оптической системой на две части. Соответствующие две волны, пройдя различные пути, взаимодействуют на экране (или на сетчатке глаза), создавая интерференционную картину. Последнюю нередко удается объяснить, заменив данную оптическую систему другой, эквивалентной, считая при этом, что имеется не один, а два когерентных источника. Задачи на интерференцию света делятся в основном на две группы: задачи, связанные с интерференцией волн от двух когерентных источников, и задачи на интерференцию в тонких пластинках (пленках). При решении задач на интерференцию света необходимо: - обязательно построить рисунок, поскольку правильно построенный рисунок позволяет определить цель поиска и сформулировать алгоритм решения; - все задачи этой темы, как правило, сводятся к поиску оптической разности хода. Поэтому необходимо учитывать, в какой среде распространяется данный пучок света (см. понятие «<i>оптическая длина</i>»). Далее задача становится чисто геометрической; - если условия распространения света меняются (добавили пластинку или поменяли среду), то необходимо не просто поменять показатели преломления, но и учесть, как изменилась геометрическая длина волны (добавить стеклянную пластинку можно только удалив воздушную того же размера); - важным моментом является учет потери полдлины волны на границе раздела с оптически более плотной средой. При этом необходимо учесть все средь, окружающие пластинку; - при рассмотрении интерференции в проходящем свете действуют точно так же, как и в случае интерференции в отраженном свете	[12], №№ 30.1 – 30.38 [11], №№ 5.41 – 5.66 [1], №№ 18.1 – 18.10

Тема занятия	Задачи	Рекомендации	Задачи из сборников
Дифракция света	Определение условия максимума или минимума для дифракции на круглом диске или отверстия (дифракция Френеля) Определение результатов дифракции от одной щели Дифракция на дифракционной решетке	В явлении дифракции световые волны огибают оптические неоднородности, встречающиеся на пути их распространения. Падая на экран, волны дают распределение освещенности на нем, отличное от того, которое должно быть согласно законам геометрической оптики. Для дифракции на круглом отверстии задача сводится к поиску количества зон Френеля, которые укладываются в отверстие (или остаются не закрытыми экраном). Обратная задача сводится к поиску одного из параметров через известное выражение для размеров зон Френеля. Необходимо помнить, что зоны Френеля условны, и поэтому под разными углами наблюдения мы должны выделить в отверстия различные по площади (и количеству) зоны Френеля. Поэтому результат дифракции в данной точке на экране будет зависеть от угла (и расстояния), под которым мы видим отверстие (угла дифракции). Определение результата дифракции от одной щели в конечном итоге сводится к определению числа зон Френеля. Результатом являются известные выражения (30) и (31). Дифракционная решетка дает картину как результат сложения дифракционных картин большого количества щелей. При этом необходимо учитывать отличия: – минимум от одной щели всегда даст минимум от всей щелей (главный минимум); – максимум достигается только при условии, что соседние щели создают синфазные вторичные волны (главные максимумы); – промежуточные максимумы и минимумы возникают при наложении волн от различных щелей под разными углами дифракции (для одних выполняется условие максимума, для других минимума). При изучении дифракции света следует обратить внимание на тот факт, что здесь рассматривается наложение бесконечно большого числа когерентных волн, создаваемых непрерывным рядом точек на волновой поверхности, создающей преграды (отверстие, щель, решетка и т.п.)	[12], №№ 31.1 – 31.33 [11], №№ 5.68 – 5.112 [1], №№ 19.1 – 19.10

3.4. Примеры решения задач

Пример 1. В опыте Юнга на пути одного из интерферирующих лучей помещалась тонкая стеклянная пластинка C , вследствие чего центральная световая полоса смещалась в положение, первоначально занятое пятой светлой полосой (не считая центральной). Луч падает на пластинку перпендикулярно. Показатель преломления пластинки 1,5. Длина световой волны $\lambda_0 = 600$ нм. Какова толщина пластинки h ? (Уровень 4).

Решение. Рассмотрим схему опыта Юнга (см. рисунок). В некоторой точке A , где складываются колебания световых лучей 1 и 2, будет наблюдаться световое пятно (m -ный максимум), если оптическая разность хода лучей равна $m\lambda_0$.

Луч 1 проходит через воздух – его оптическая длина пути равна геометрической длине пути l_1 . Луч 2 проходит часть пути в стеклянной пластинке толщиной h . Его оптическая длина пути будет равна $(l_2 - h) + hn$. Оптическая разность хода лучей 1 и 2 в этом случае равна

$$\Delta' = (l_2 - h) + hn - l_1. \quad (1)$$

Если стеклянную пластинку C убрать, то оптическая разность хода выбранных лучей

$$\Delta = l_2 - l_1. \quad (2)$$

По условию задачи интерференционная картина при наличии пластинки C смещается на пять полос, то есть, если

$$\Delta = l_2 - l_1 = m\lambda_0, \quad (3)$$

то

$$\Delta' = (l_2 - h) + hn - l_1 = (m + 5)\lambda_0. \quad (4)$$

Вычитая из (4) выражение (3), получим

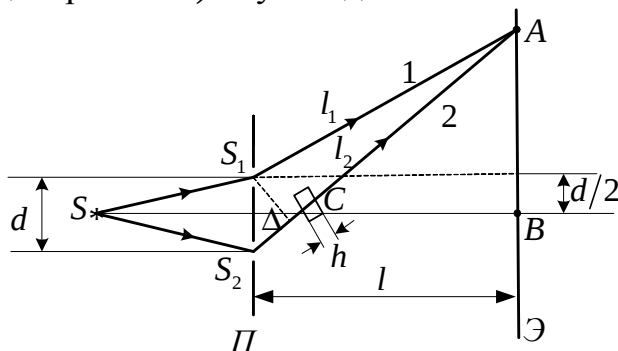
$$\Delta' - \Delta = (l_2 - h) + hn - l_1 - (l_2 - l_1) = (m + 5)\lambda_0 - m\lambda_0,$$

или

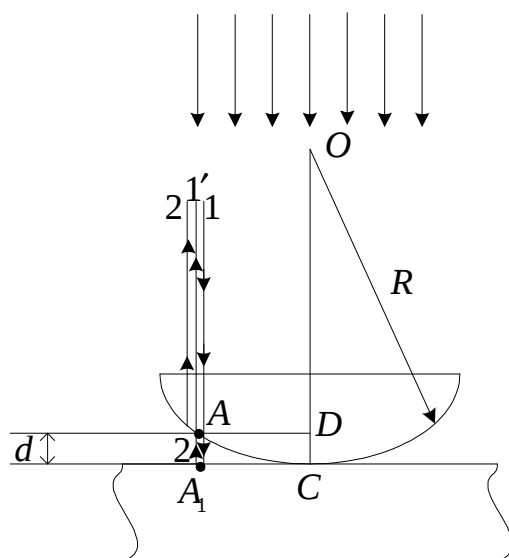
$$(n - 1)h = 5\lambda_0 \quad \text{и} \quad h = \frac{5\lambda_0}{n - 1}.$$

Толщина пластинки h равна 6 микронметрам. Эта задача иллюстрирует один из возможных способов определения толщины светопрозрачных материалов.

Ответ: $h = 6$ мкм.



Пример 2. Для наблюдения колец Ньютона плосковыпуклая линза положена выпуклой стороной на стеклянную пластинку. Найти радиус кривизны линзы, если радиусы четвертого и одиннадцатого темных колец, наблюдаемых в отраженном свете, равны соответственно 0,15 мм и 6,7 мм. Длина световой волны $\lambda_0 = 700$ нм. **(Уровень 4).**



блюдаемых в отраженном свете, равны соответственно 0,15 мм и 6,7 мм. Длина световой волны $\lambda_0 = 700$ нм. **(Уровень 4).**

Решение. Рассмотрим схему наблюдения интерференционной картины (см. рисунок). Световые лучи падают на плосковыпуклую линзу перпендикулярно к поверхности MN . Наблюдая интерференционную картину в отраженном свете, можно видеть набор светлых и темных концентрических колец (в проходящем свете их также возможно наблюдать). Разделение светового пучка (луч 1) на два происходит за счет того, что часть светового

потока (луч 1') отражается от границы линза – воздух (точка A на рисунке), а вторая часть пучка проходит через воздушный интервал AA_1 и отражается от границы воздух – стекло (точка A_1 – см. рисунок). Так как радиус кривизны линз в таких схемах порядка нескольких метров, а зазор между линзой и пластинкой достаточно мал (несколько миллиметров), то лучи, отраженные от точек A и A_1 , пойдут по одной прямой. Оптическая разность хода этих лучей

$$\Delta = 2AA_1 + \frac{\lambda_0}{2} = 2d + \frac{\lambda_0}{2}, \quad (1)$$

где d – величина зазора AA_1 (см. рисунок), и учитывается дополнительная разность хода $\frac{\lambda_0}{2}$, так как при отражении от более плотной среды (в точке A_1) один луч теряет половину длины волны.

Предположим, что при наложении лучей, отраженных от точек A и A_1 , наблюдается m -тый минимум. Тогда расстояние AD (см. рисунок) или A_1C – это радиус m -ного темного кольца r_m . Из треугольника AOD , учитывая, что $AO = R$ (радиус кривизны линзы), получим:

$$r_m^2 = R^2 - (R - d)^2 = 2Rd - \frac{d^2}{4}.$$

Так как $d \ll R$ (таковы требования к этой схеме получения интерференционной картины), величиной $\frac{d^2}{4}$ можно пренебречь, как очень малой.

Учитывая это, получим:

$$r_m^2 = 2Rd \quad \text{и} \quad d = \frac{r_m^2}{2R}. \quad (2)$$

Подставляя формулу (2) в (1), получим оптическую разность хода интерферирующих лучей

$$\Delta = \frac{r_m^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2}.$$

Если эта оптическая разность хода равна нечетному числу полуволен, получим условие m -ного минимума

$$\Delta = \frac{r_m^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2} = (2m+1) \frac{\lambda_0}{2} \quad \text{или} \quad \frac{r_m^2}{R} = m\lambda_0.$$

Тогда для четвертого и одиннадцатого темных колец получим условия:

$$\frac{r_4^2}{R} = 4\lambda_0; \quad (3)$$

$$\frac{r_{11}^2}{R} = 11\lambda_0. \quad (4)$$

Вычитая из уравнения (4) выражение (3), получим

$$\frac{r_{11}^2 - r_4^2}{R} = 7\lambda_0 \quad \text{или} \quad R = \frac{r_{11}^2 - r_4^2}{7\lambda_0}. \quad (5)$$

Подставляя в формулу (5) данные в системе СИ, получим

$$R = \frac{\left[(6,7 \cdot 10^{-3})^2 - (0,15 \cdot 10^{-3})^2 \right] \text{ м}^2}{7 \cdot 7 \cdot 10^{-7} \text{ м}} = 9,1 \text{ м}.$$

Ответ: $R = 9,1 \text{ м}.$

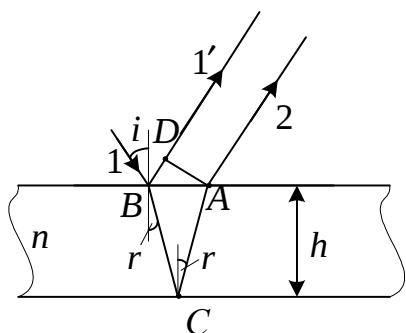
Пример 3. На мыльную пленку падает белый свет под углом $i = 45^\circ$ к поверхности пленки. При какой наименьшей толщине пленки отраженные лучи будут окрашены в желтый цвет ($\lambda_0 = 600 \text{ нм}$)? Показатель преломления мыльной воды $n = 1,33$. (**Уровень 3**).

Решение. По условию отраженные лучи окрашены в желтый цвет. Это означает, что максимум отражения наблюдается в желтой части спектра. Максимум отражения наблюдается, когда световые волны, отраженные от обеих поверхностей пластинки, усиливают друг друга. Для этого оптическая разность хода Δ пучков 1 и 2 должна быть равна целому числу m длин волн:

$$\Delta = \frac{\lambda_0}{2} + n(AC + BC) - AD = m\lambda_0.$$

Слагаемое $\frac{\lambda_0}{2}$ учитывает, что при отражении пучка 1 в точке В (см. рисунок) от оптически более плотной среды фаза колебаний электромагнитного поля изменяется на противоположную, т.е. возникает такое же изменение фазы, как при прохождении пути $\frac{\lambda_0}{2}$. Множитель n учитывает уменьшение скорости света в среде – на пути s в среде возникает такое же изменение фазы $\Delta\phi$, как на пути ns в вакууме,

$$\Delta\phi = \frac{2\pi ns}{\lambda_0} = \frac{2\pi\Delta}{\lambda_0}.$$



Используя соотношения

$$AC = BC = \frac{h}{\cos r}; \quad AD = 2h \sin i - \text{tgr},$$

а также применяя закон преломления, получаем

$$\left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda_0 = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2 i},$$

откуда

$$h = \frac{(m - 1/2)\lambda_0}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}.$$

При $m = 1$ минимальная толщина пленки $h_{\min} = 0,13 \cdot 10^{-6}$ м.

Ответ: $h_{\min} = 0,13 \cdot 10^{-6}$ м.

Пример 4. На поверхность стеклянного объектива ($n_1 = 1,5$) нанесена тонкая пленка, показатель преломления которой $n_2 = 1,2$ (просветляющая пленка). При какой наименьшей толщине d этой пленки произойдет максимальное ослабление отраженного света в средней части видимого спектра ($\lambda_0 \approx 552$ нм)? (Уровень 3).

Решение. Из световой волны, падающей на пленку, выделим узкий пучок SB . В точках B и C падающий пучок частично отражается и частично преломляется. Отраженные пучки света 1 и 2 падают на собирающую линзу, пересекаются в ее фокусе и интерферируют между собой. Так как показатель преломления воздуха ($n = 1$) меньше показателя преломления вещества пленки (n_2), который, в свою очередь, меньше показателя преломления стекла (n_1), то в обоих случаях (в точках B и C) отражение происходит от среды оптически более плотной, чем та среда, в которой идет падающая волна.

Поэтому фаза колебания пучка света 1 при отражении в точке B изменяется на π и точно так же на π изменяется фаза колебаний пучка света 2 при отражении в точке C . Следовательно, результат интерференции этих пучков света при пересечении в фокусе линзы будет такой же, как если бы никакого изменения фазы колебаний ни у того, ни у другого пучка не было. Условие максимального ослабления света при интерференции в тонких пленках состоит в том, что оптическая разность хода Δ интерферирующих волн должна быть равна нечетному числу полуволин:

$$\Delta = (2m + 1) \left(\frac{\lambda_0}{2} \right).$$

Как видно из рисунка, оптическая разность хода

$$\Delta = l_2 n_2 - l_1 n = (|BC| + |CA|) n_2 - |AD| n.$$

Следовательно, условие минимума интенсивности света примет вид

$$(|BC| + |CA|) n_2 - |AD| n = (2m + 1) \left(\frac{\lambda_0}{2} \right).$$

Если угол падения i будет уменьшаться, стремясь к нулю, то $AD \rightarrow 0$ и $|BC| + |CA| \rightarrow 2d$, где d – толщина пленки. В пределе при $i = 0$ получим

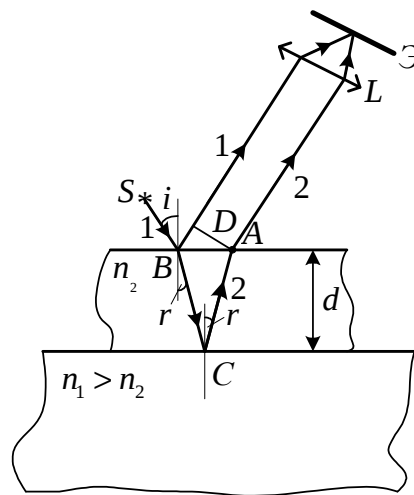
$$\Delta = 2dn_2 = (2m + 1) \left(\frac{\lambda_0}{2} \right),$$

откуда искомая толщина пленки

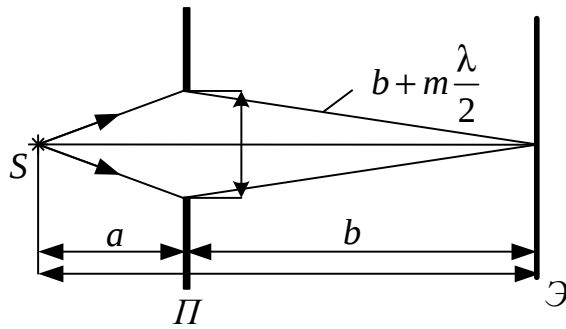
$$d = \frac{(2m + 1) \lambda_0}{4n_2}.$$

Минимальное значение $d_{\min}$ соответствует значению $m = 0$. Подставляя числовые данные, получим $d_{\min} = 115 \cdot 10^{-9}$ м.

Ответ: $d_{\min} = 115 \cdot 10^{-9}$ м.



Пример 5. Точечный источник света, излучающий свет длиной $\lambda = 550$ нм, освещает экран, расположенный на расстоянии $l = 11$ м от источника. Между источником и экраном на расстоянии $b = 5$ м помещена ширма (преграда Π) с круглым отверстием диаметром $d = 4,2$ мм. В каком случае (с ширмой или без нее) интенсивность в центре экрана будет больше? (Уровень 3).



Решение. Рассмотрим дифракцию Френеля на круглом отверстии. Оценим интенсивность в центре экрана (точка P – см. рисунок) в случае, когда ширма Π убрана, то есть волновая поверхность световой волны полностью открыта. Рассчитаем результирующую амплитуду колебаний в точке P . Учитывая монотонное убывание амплитуды с увеличением номера зоны m , можно считать, что результирующая амплитуда колебаний A в центре экрана согласно (26)

$$A = \frac{A_1}{2} \pm \frac{A_m}{2} \approx \frac{A_1}{2} \quad (1)$$

(так как $\frac{A_m}{2} \approx 0$ для бесконечно большого числа m).

В этом случае интенсивность I в центре экрана будет равна

$$I \sim A^2 = \frac{A_1^2}{4}. \quad (2)$$

Если на пути световой волны поставить ширму с круглым отверстием, то число зон Френеля, открытых отверстием, можно рассчитать по формуле (27) (см. выше). По условию $b = 5$ м, $a = l - b = 6$ м. Подставив данные задачи в формулу (27), получим

$$m = \frac{(4,2)^2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \cdot 11 \text{ м}}{4 \cdot 5,5 \cdot 10^{-7} \text{ м} \cdot 5 \text{ м} \cdot 6 \text{ м}} = 2,94 \approx 3.$$

Число зон Френеля, открытых отверстием, равно трем. Пользуясь формулой (26), оценим амплитуду A и интенсивность I в центре экрана:

$$A = \frac{A_1}{2} + \frac{A_3}{2}; \quad (3)$$

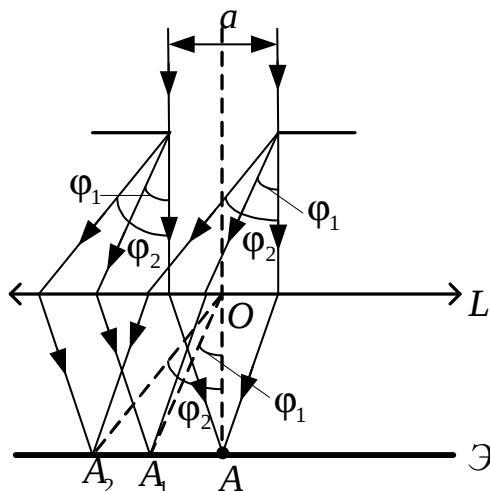
$$I \sim A^2 = \left(\frac{A_1}{2} + \frac{A_3}{2} \right)^2. \quad (4)$$

Сравнивая формулы (4) и (2), делаем вывод, что интенсивность в центре экрана будет больше в случае, когда на пути световой волны стоит ширма с круглым отверстием.

Ответ: интенсивность в центре экрана будет больше в случае, когда на пути световой волны стоит ширма с круглым отверстием.

Пример 6. На щель шириной $a = 30$ мкм нормально падает белый свет. Спектр проецируется на экран с линзой с фокусным расстоянием $f = 195$ см. Определить ширину спектра десятого порядка, если границы видимого спектра лежат от 400 нм до 780 нм. (Уровень 4).

Решение. Обозначим углы дифракции для минимальной и максимальной длин волн в спектре десятого порядка, соответственно, как φ_1 и φ_2 (см. рисунок).



Условие минимума m -ного порядка для границ видимого спектра (от λ_1 до λ_2) можно записать:

$$a \sin \varphi_1 = m\lambda_1; \quad (1)$$

$$a \sin \varphi_2 = m\lambda_2. \quad (2)$$

Так как экран стоит в фокальной плоскости линзы (расстояние $OA = f$) (см. рисунок), то лучи с длиной волны λ_1 , дифрагирующие под углом φ_1 , соберутся в точке A_1 , а лучи с длиной волны λ_2 – в точке A_2 .

Расстояния от центра экрана A до соответствующих точек A_1 и A_2 можно рассчитать как

$$AA_1 = f \operatorname{tg} \varphi_1; \quad (3)$$

$$AA_2 = f \operatorname{tg} \varphi_2. \quad (4)$$

Если углы φ_1 и φ_2 малы, то $\operatorname{tg} \varphi$ можно заменить на $\sin \varphi$. Тогда искомое расстояние A_1A_2 (ширина спектра m -ного порядка), используя формулы (1) – (4),

$$A_1A_2 = f (\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1) = f (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) = f \frac{m}{a} (\lambda_2 - \lambda_1). \quad (5)$$

Подставляя данные задачи в формулу (5), получим

$$A_1A_2 = \frac{1,95 \text{ м} \cdot 10 \cdot 3,8 \cdot 10^{-7} \text{ м}}{3 \cdot 10^{-5} \text{ м}} = 25 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 2,5 \text{ см}.$$

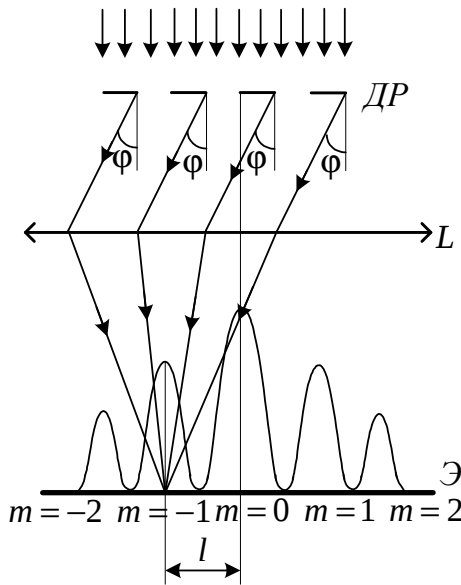
Для сравнения можно подсчитать ширину спектра первого порядка, она будет в десять раз меньше, то есть 2,5 см.

Задачу можно решить точнее, рассчитав $\operatorname{tg}\varphi_1$ и $\operatorname{tg}\varphi_2$ по формулам

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\sin \varphi_1}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi_1}} = \frac{m\lambda_1}{\sqrt{a^2 - m^2\lambda_1^2}} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\sin \varphi_{21}}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi_{21}}} = \frac{m\lambda_2}{\sqrt{a^2 - m^2\lambda_2^2}}.$$

В этом случае ширина спектра получается равной 26 см (погрешность порядка 4 % для приближенного расчета величины A_1A_2).

Ответ: $A_1A_2 = 25$ см.



Пример 7. На дифракционную решетку D нормально падает монохроматический свет с длиной волны 0,65 мкм. На экране $\mathcal{E}$, расположенном параллельно решетке и отстоящем от нее на расстоянии 0,5 м, наблюдается дифракционная картина (см. рисунок). Расстояние между дифракционными максимумами первого порядка равно 10 см. Определить постоянную дифракционной решетки и общее число главных максимумов, получаемых с помощью этой решетки. (Уровень 3).

Решение. Запишем условие главных максимумов дифракционной решетки:

$$d \sin \varphi = m\lambda, \quad (1)$$

где d – постоянная дифракционной решетки; φ – угол отклонения лучей от нормального направления распространения света; m – порядок главного дифракционного максимума; λ – длина волны падающего на решетку монохроматического света.

По условию задачи $m = 1$. Учитывая, что $l/2 \ll L$,

$$\sin \varphi \approx \operatorname{tg}\varphi = l/(2L). \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$\frac{dl}{2L} = \lambda \quad \text{или} \quad d = \frac{2\lambda L}{l}. \quad (3)$$

Подставляя в (3) числовые значения величин, находим

$$d = \frac{2 \cdot 0,65 \cdot 10^{-6} \text{ м} \cdot 0,5 \text{ м}}{0,1 \text{ м}} = 6,5 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 0,65 \text{ мкм}.$$

Для определения общего числа главных максимумов, даваемых дифракционной решеткой, исходим из условия, что максимальный угол отклонения лучей от нормального направления распространения не может превышать 90° , т.е. $\sin 90^\circ = 1$, тогда формула (1) примет вид $m_{\max} = d/\lambda$.

Производим вычисления: $m_{\max} = 6,5 \cdot 10^{-6} \text{ м} / 0,65 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 10$.

Общее число максимумов $n = 2m_{\max} + 1$, т.е. влево и вправо от центрального максимума будут наблюдаться по $m_{\max}$ максимумов:

$$n = 2 \cdot 10 + 1 = 21.$$

Ответ: $n = 21$.

Пример 8. При каком минимальном числе штрихов дифракционной решетки с периодом $d = 2,9$ мкм можно разрешить компоненты дублета желтой линии натрия ($\lambda_1 = 5890 \text{ А}$ и $\lambda_2 = 5896 \text{ А}$)? (**Уровень 3**).

Решение. Число штрихов N решетки связано с ее разрешающей силой R и порядком спектра m , причем $N = R/m$. Минимальному значению $N_{\min}$ соответствует минимальное значение $R_{\min}$ и максимальное число m , т.е.

$$N_{\min} = R_{\min} / m_{\max}. \quad (1)$$

Минимальная разрешающая сила решетки $R_{\min}$, необходимая для разрешения дублета (двух составляющих) желтой линии натрия, выражается через две величины, λ_1 и λ_2 , по формуле

$$R_{\min} = \lambda_1 / (\lambda_2 - \lambda_1). \quad (2)$$

Число $m_{\max}$ найдем из формулы дифракционной решетки, если допустим, что $\sin \varphi = 1$ и $\lambda = \lambda_2$ (последнее соотношение гарантирует, что обе компоненты дублета с порядковым номером $m_{\max}$ будут видны). Учитывая при этом, что m — целое число и введя функцию $E(x)$, выделяющую целую часть числа x , получим

$$m_{\max} = E\left(\frac{d}{\lambda_2}\right) = E\left(\frac{2,9 \cdot 10^4 \text{ А}}{5896 \text{ А}}\right) = E(4,9) = 4. \quad (3)$$

Подставив значения $R_{\min}$ из (2) и $m_{\max}$ из (3) в соотношение (1), найдем

$$N_{\min} = \frac{\lambda_1}{4(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{5890}{4 \cdot 6} = 2,5 \cdot 10^2.$$

Ответ: $N_{\min} = 2,5 \cdot 10^2$.

3.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти все длины волн видимого света (от 0,76 до 0,38 мкм), которые будут: 1) максимально усилены; 2) максимально ослаблены при оптической разности хода Δ интерферирующих волн, равной 1,8 мкм. [1] 0,6 и 0,45 мкм; 2) 0,72; 0,51 и 0,4 мкм; **уровень 3**].
2. В опыте Юнга расстояние d между щелями равно 0,8 мм, длина волны $\lambda = 640$ нм. На каком расстоянии l от щелей следует расположить экран, чтобы ширина интерференционной полосы оказалась равной 2 мм? [2,5 м; **уровень 2**].
3. В опыте с зеркалами Френеля расстояние d между мнимыми изображениями источника света равно 0,5 мм, расстояние l от них до экрана равно 3 м. Длина волны $\lambda = 0,6$ мкм. Определить ширину b полос интерференции на экране. [3,6 мм; **уровень 3**].
4. Пучок монохроматических ($\lambda = 0,6$ мкм) световых волн падает под углом $i = 30^\circ$ на находящуюся в воздухе мыльную пленку ($n = 1,3$). При какой наименьшей толщине d пленки отраженные световые волны будут максимально ослаблены интерференцией? [0,25 мкм; 0,125 мкм; **уровень 3**].
5. На тонкий стеклянный клин в направлении нормали к его поверхности падает монохроматический свет ($\lambda = 600$ нм). Определить угол θ между поверхностями клина, если расстояние b между соседними интерференционными минимумами в отраженном свете равно 4 мм. [10,3"; **уровень 5**].
6. Диаметры d_i и d_k двух светлых колец Ньютона соответственно равны 4 и 4,8 мм. Порядковые номера колец не определялись, но известно, что между двумя измеренными кольцами расположено три светлых кольца. Кольца наблюдались в отраженном свете ($\lambda = 500$ нм). Найти радиус кривизны плосковыпуклой линзы, взятой для опыта. [880 мм; **уровень 4**].
7. Между стеклянной пластинкой и лежащей на ней плосковыпуклой стеклянной линзой налита жидкость, показатель преломления которой меньше показателя преломления стекла. Радиус восьмого темного кольца Ньютона при наблюдении в отраженном свете ($\lambda = 700$ нм) равен 2 мм. Радиус R кривизны выпуклой поверхности линзы равен 1 м. Найти показатель преломления n жидкости. [1,4; **уровень 5**].

8. Кольца Ньютона наблюдаются с помощью двух одинаковых плосковыпуклых линз радиусом кривизны R , равным 1 м, сложенных вплотную выпуклыми поверхностями (плоские поверхности линз параллельны). Определить радиус r_2 второго светлого кольца, наблюдаемого в отраженном свете ($\lambda = 660$ нм) при нормальном падении света на поверхность верхней линзы. [0,704 мм; **уровень 6**].
9. Радиус четвертой зоны Френеля для плоского волнового фронта равен 3 мм. Определить радиус шестой зоны Френеля. [3,69 мм; **уровень 2**].
10. Плоская световая волна ($\lambda = 0,5$ мкм) падает нормально на диафрагму с круглым отверстием диаметром 1 см. На каком расстоянии от отверстия должна находиться точка наблюдения, чтобы отверстие открывало: 1) одну зону Френеля? 2) две зоны Френеля? [1) 50 м; 2) 25 м; **уровень 3**].
11. Плоская световая волна ($\lambda = 0,7$ мкм) падает нормально на диафрагму с круглым отверстием радиусом 1,4 мм. Определить расстояния b_1 , b_2 , b_3 от диафрагмы до трех наиболее удаленных от нее точек, в которых наблюдаются минимумы интенсивности. [1,4 м; 0,7 м; 0,47 м; **уровень 4**].
12. На щель шириной 0,1 мм падает нормально монохроматический свет ($\lambda = 0,5$ мкм). За щелью помещена собирающая линза, в фокальной плоскости которой находится экран. Что будет наблюдаться на экране, если угол φ дифракции равен: 1) $17'$; 2) $43'$. [1) первый дифракционный минимум; 2) дифракционный максимум, соответствующий $m = 2$; **уровень 4**].
13. Дифракционная картина получена с помощью дифракционной решетки длиной $l = 1,5$ см и периодом $d = 5$ мкм. Определить, в спектре какого наименьшего порядка этой картины получатся отдельные изображения двух спектральных линий с разностью длин волн $\Delta\lambda = 0,1$ нм, если линии лежат в крайней красной части спектра ($\lambda \approx 760$ нм). [3; **уровень 5**].
14. Параллельный пучок рентгеновского излучения падает на грань кристалла. Под углом $\theta = 65^\circ$ к плоскости грани наблюдается максимум первого порядка. Расстояние d между атомными плоскостями кристалла 280 пм. Определить длину волны λ рентгеновского излучения. [506 пм; **уровень 2**].

УЧЕБНЫЙ БЛОК 4. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

Тепловое излучение от нагретых тел является совокупностью электромагнитных волн (ЭМВ), излучаемых электромагнитными гармоническими осцилляторами нагретого тела. Ориентация световых векторов ЭМВ в потоке теплового излучения (света) равновероятна в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения ЭМВ, а их амплитуды для каждого из направлений колебаний световых векторов практически одинаковы. Такой свет называется *естественным, неполяризованным*.

При взаимодействии света с веществом ЭМВ может существенно терять свою энергию в результате взаимодействия электрической компоненты ЭМВ с зарядами вещества (среды). Для некоторых веществ (оптических структур) величины теряемой ЭМВ энергии и снижения амплитуды светового вектора зависят от ориентации светового вектора. В результате для одних ЭМВ в световом потоке амплитуда светового вектора значительно снижается, а для других существенно не изменяется. Это явление получило название *поляризации света* при взаимодействии с веществом, и его основные закономерности составляют предмет изучения данного учебного блока.

При изучении данного раздела студенты должны

иметь представление:

- об основных законах геометрической оптики;
- о принципе суперпозиции колебаний одинакового направления;
- об интерференции и дифракции упругих волн;
- об особенностях отражения и поглощения ЭМВ;

обладать навыками:

- геометрического построения изображений с учетом отражения и преломления волн;
- решения тригонометрических уравнений.

Учебная программа блока

Содержание блока	Форма подготовки	Литература
Естественный и поляризованный свет	лекция	[9]
Степень поляризации	лекция	[9]
Закон Малюса	лекция	[7]
Поляризация света при двойном лучепреломлении	лекция	[9]
Дихроизм	лекция	[9]
Интенсивность отраженных и преломленных лучей	лекция	[9]
Поляризация света при отражении и преломлении на поверхности диэлектриков. Явление и закон Брюстера	лекция	[9]
Вращение плоскости поляризации	лекция	[9]

Цели обучения

Студент должен знать	Студент должен уметь
– отличие естественного света от поляризованного; – способы получения поляризованного света (дихроизм, двойное лучепреломление и др.); – законы Малюса и Брюстера; – причины возникновения поворота плоскости поляризации; – применение поляризованного света	– определять степень поляризации света; – определять результат прохождения света через систему поляризаторов; – определять угол поворота плоскости поляризации, угол Брюстера и др.

4.1. Краткое содержание теоретического материала

Моделью излучателя элементарной ЭМВ может служить периодически колеблющийся диполь. Поле линейно колеблющегося диполя представляет собой переменное электромагнитное поле, характеризуемое двумя взаимно перпендикулярными векторами: напряженности электрического поля $\vec{E}$ и напряженности магнитного поля $\vec{H}$. Колебания светового вектора происходят в плоскости, образуемой осью диполя и направлением распространения ЭМВ. Эту плоскость называют *плоскостью колебания светового вектора* (ПК) (рис. 4.1). Плоскость, в которой колеблется вектор $\vec{H}$, называют *плоскостью поляризации* (ПП).

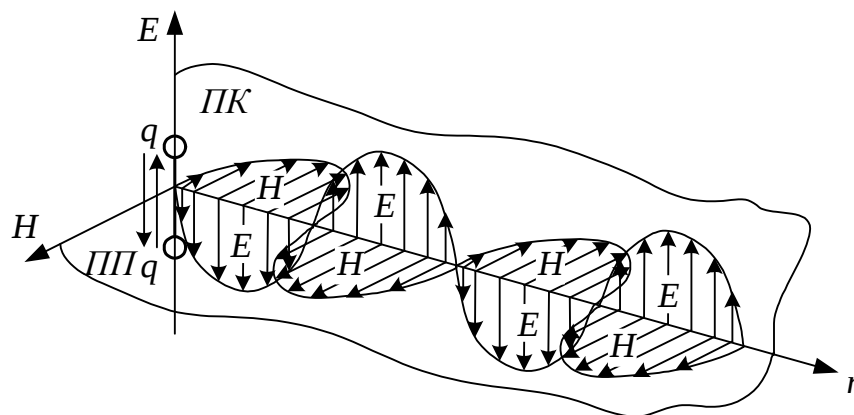


Рис. 4.1

Очевидно, что ЭМВ, излучаемая каким-либо отдельно взятым осциллятором в единичном акте излучения, имеет одну плоскость колебаний светового вектора. Но источники света состоят из огромного числа таких излучателей (атомов, молекул). Пространственная ориентация ПК для каждого из них в момент излучения может иметь любые направления. Поэтому в

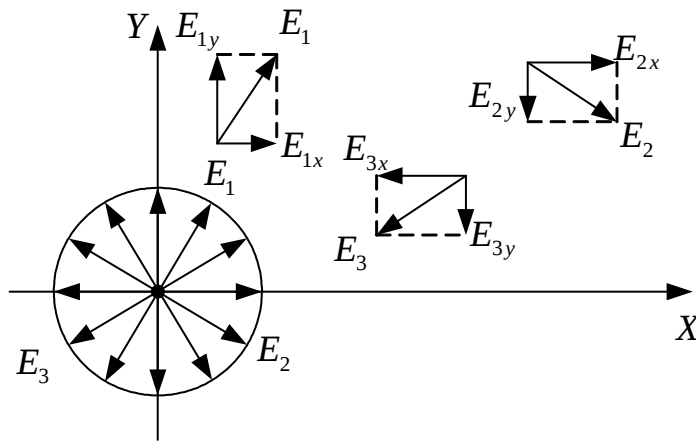


Рис. 4.2

общем потоке излучения множества осцилляторов для каждой ориентации ПК суммарный световой вектор $\vec{E}_\Sigma$ в среднем имеет одну и ту же амплитуду. Диаграмма световых векторов для теплового излучения может быть представлена, как показано на рис. 4.2. Такое излучение получило название

естественного света, света с круговой поляризацией, неполяризованного света. При этом каждый световой вектор можно представить как сумму двух составляющих – взаимно перпендикулярных световых векторов E_x и E_y (см. рис. 4.2):

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y. \quad (1)$$

Это означает, что естественный свет можно представить как суперпозицию двух световых потоков, плоскости колебаний светового вектора которых взаимно перпендикулярны. При этом можно считать, что усредненные амплитуды составляющих $\vec{E}_{x0}$ и $\vec{E}_{y0}$ одинаковы:

$$E_{x0} = E_{y0}, \quad (2)$$

то есть

$$E_{\Sigma 0}^2 = E_{x0}^2 + E_{y0}^2 = 2E_{x0}^2 = 2E_{y0}^2, \quad (3)$$

где индекс «0» означает круговую поляризацию.

Интенсивность I_0 волны пропорциональна квадрату светового вектора, то есть для естественного света

$$I_0 \sim E_0^2, \quad (4)$$

$$\text{откуда следует, что } I_0 = I_x + I_y; I_x = I_y = I_0/2. \quad (5)$$

Поляризованным называется свет, в котором колебания светового вектора каким-либо образом упорядочены. Рассмотрим в некоторой произвольной точке пространства колебания взаимно перпендикулярных световых векторов двух волн, $\vec{E}_x$ и $\vec{E}_y$, распространяющихся вдоль оси OZ (рис. 4.3).

Колебания вектора $\vec{E}_x$ происходят вдоль оси OX , при этом модуль вектора

$$E_x = A_1 \cos(\omega t - kz), \quad (6)$$

а колебания вектора $\vec{E}_y$ происходят вдоль оси OY , и для модуля можем записать

$$E_y = A_2 \cos(\omega t - kz + \varphi_0), \quad (7)$$

где A_1 и A_2 – амплитуды колебаний; φ_0 – начальная фаза, не зависящая от времени и одина-

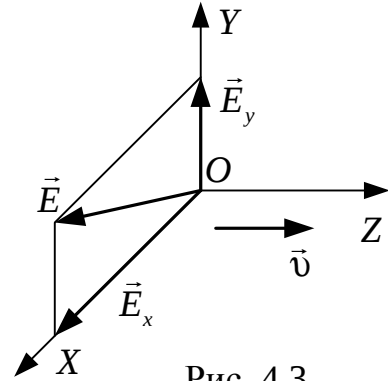


Рис. 4.3

ковая для всех точек пространства; ω – частота, k – волновое число $\left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$.

Рассматриваемые волны когерентны. Световой вектор результирующей волны $\vec{E}$ равен векторной сумме $\vec{E}_x$ и $\vec{E}_y$: $\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y$.

Определим вид траектории, которую описывает конец вектора $\vec{E}$ в процессе колебаний. Для этого исключим из (6) и (7) время t :

$$\begin{aligned} \frac{E_y}{A_2} &= \cos(\omega t - kz + \varphi_0) = \cos(\omega t - kz) \cos \varphi_0 - \sin(\omega t - kz) \sin \varphi_0 = \\ &= \cos(\omega t - kz) \cos \varphi_0 \mp \sqrt{1 - \cos^2(\omega t - kz)} \sin \varphi_0. \end{aligned}$$

Подставив $\cos(\omega t - kz)$ из (6), получим

$$\frac{E_y}{A_2} = \frac{E_x}{A_1} \cos \varphi_0 \mp \sqrt{1 - \frac{E_x^2}{A_1^2}} \sin \varphi_0$$

или, после несложных преобразований,

$$\frac{E_y^2}{A_2^2} - 2 \frac{E_y E_x}{A_1 A_2} \cos \varphi_0 + \frac{E_x^2}{A_1^2} = \sin^2 \varphi_0. \quad (8)$$

Равенство (8) в любой момент времени связывает между собой проекции E_x и E_y вектора $\vec{E}$. Из вида (8) следует, что траектория конца вектора $\vec{E}$ представляет собой эллипс, оси которого, вообще говоря, не совпадают с осями координат OX и OY . Уравнение (8) не зависит от z , следовательно, траектория конца вектора $\vec{E}$ одинакова во всех точках пространства, где имеются рассматриваемые волны.

Таким образом, при сложении двух когерентных волн (6) и (7), вектора которых колеблются во взаимно перпендикулярных плоскостях, возникает *эллиптически поляризованная волна*.

Если $\varphi_0 = 0$, то из (7) получим

$$E_y = \frac{A_2}{A_1} E_x, \quad (9)$$

т.е. в этом случае траекторией вектора $\vec{E}$ результирующего колебания является прямая (рис. 4.4, а).

Если $\varphi_0 = \pi$, то из (8) получаем

$$E_y = -\frac{A_2}{A_1} E_x. \quad (10)$$

Прямая, описываемая уравнением (10), показана на рис. 4.4, б.

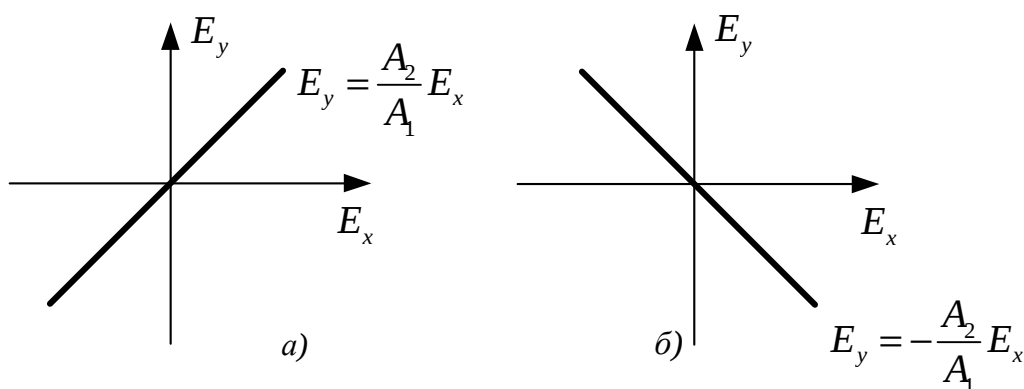


Рис. 4.4

Каждое из уравнений (9) и (10) представляет собой уравнение плоскости в пространстве, положение которой не зависит от времени. Таким образом, если разность фаз φ_0 когерентных волн, световые вектора которых колеблются во взаимно перпендикулярных плоскостях, равна нулю или π , то при наложении этих волн возникает *плоскополяризованная (линейно поляризованная) волна*.

Итак, в плоскополяризованном (линейно поляризованном) свете колебания светового вектора осуществляются в одной определенной плоскости. В эллиптически поляризованном и поляризованном по кругу свете конец светового вектора описывает эллипс или окружность соответственно. При этом различают *правозэллиптическую* поляризацию и *левозэллиптическую* поляризацию в зависимости от направления вращения светового вектора. В *естественном свете* колебания светового вектора осуществляются

во всевозможных направлениях, перпендикулярных к вектору скорости распространения волны, причем направления колебаний быстро и беспорядочно сменяют друг друга.

Частично поляризованным называется свет, в котором колебания светового вектора одного направления преобладают по амплитуде над колебаниями всех других направлений. Частично поляризованный свет можно рассматривать как смесь естественного и плоскополяризованного (рис. 4.5).

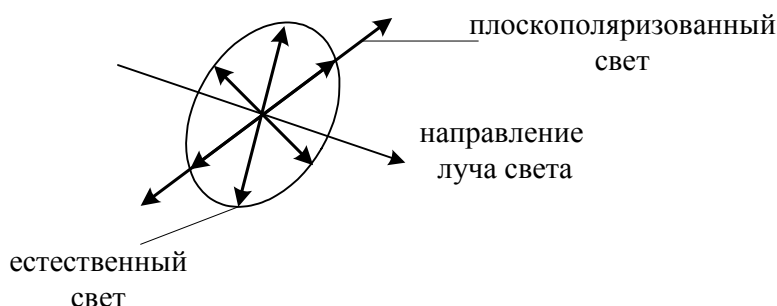


Рис. 4.5

Устройство, преобразующее естественный световой поток в линейно поляризованный свет, называют *поляризатором* или *поляроидом*. Плоскость, в которой световой вектор выходящего из поляроида плоскополяризованного потока максимален, называют *оптической плоскостью поляроида* (ОПП). Согласно (5) интенсивность выходящего из идеального поляроида плоскополяризованного светового потока составляет *половину интенсивности входящего в поляроид естественного света*.

Если на пути плоскополяризованного света поставить еще один поляроид так, что его оптическая плоскость совпадет с плоскостью колебаний светового вектора входящего луча, то второй поляроид (его называют *анализатором*) пропустит свет без изменения интенсивности (рис. 4.6).

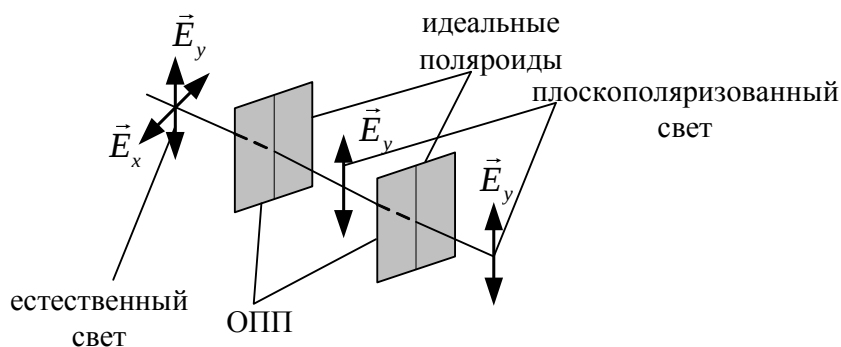


Рис. 4.6

Реальные поляроиды отчасти пропускают и составляющую потока, световой вектор которой перпендикулярен к оптической плоскости поляроида. Поэтому из поляроида выходит свет, в котором колебания светового вектора одного направления преобладают над колебаниями перпендикулярного направления, т.е. *частично поляризованный свет* (рис. 4.7).

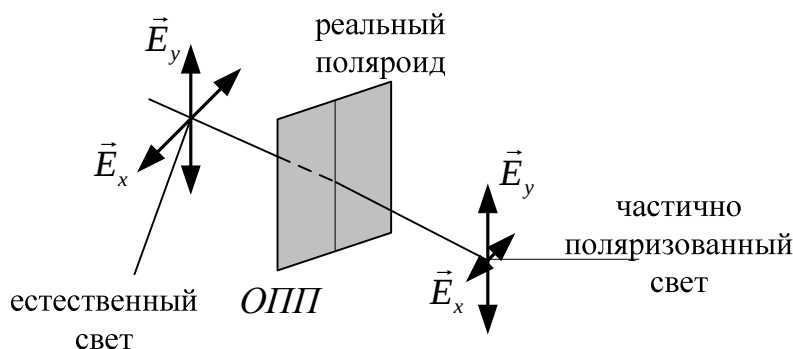


Рис. 4.7

Показателем «качества» поляризованного света или мерой его поляризованности является соотношение

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (11)$$

называемое *степенью поляризации*. Очевидно, для идеально плоскополяризованного света $I_{\min} = 0$ и $P = 1$, а для естественного света ($I_{\max} = I_{\min}$) $P = 0$. Частично поляризованный свет имеет промежуточное между 0 и 1 значение степени поляризации.

При падении плоскополяризованного света на поляроид в общем случае плоскость колебания светового вектора может не совпадать с оптической плоскостью (ОПП) этого поляроида. В этом случае на выходе поляроида интенсивность светового потока понизится, а при некоторых углах между плоскостью колебаний светового вектора падающего потока и ОПП поляроид не пропускает поляризованный свет.

Световой вектор плоскополяризованного света, возникающего после прохождения поляроида Π_1 и падающего на анализатор Π_2 , представим суммой двух векторов, один из которых колеблется в ОПП и определяется как проекция светового вектора на ОПП (рис. 4.8):

$$E'_y = E_y \cos \varphi.$$

Световой вектор E'_x соответствует задерживаемой в поляроиде Π_2 компоненте светового потока. На выходе Π_2 интенсивность света

$$I = I'_y \sim (E_y)^2 = E_y^2 \cos^2 \varphi$$

или $I = I'_y = I_y \cos^2 \varphi$.

Итак, если естественный свет с интенсивностью I_0 проходит через поляризатор и анализатор, то на выходе его интенсивность составит

$$I = \frac{I_0}{2} \cos^2 \varphi, \quad (12)$$

где φ – угол между оптическими плоскостями поляроида и анализатора.

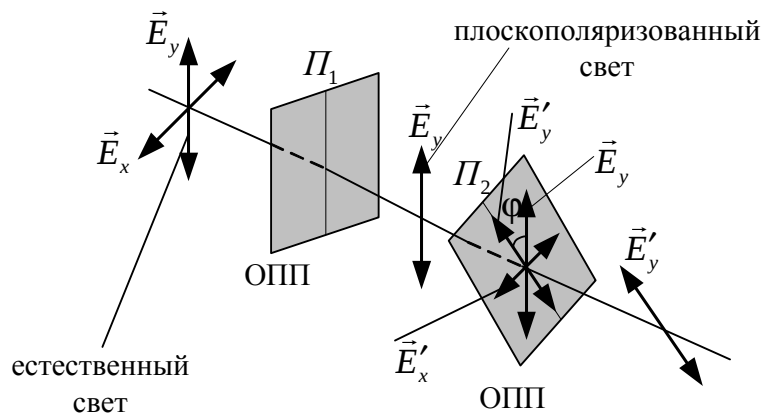


Рис. 4.8

Соотношение (12) является математической формулировкой **закона Малюса** – закона изменения интенсивности поляризованного света I , прошедшего через поляризатор (анализатор), в зависимости от угла φ между плоскостями колебаний светового вектора плоскополяризованного света и оптической плоскостью поляроида.

При прохождении света через некоторые прозрачные кристаллы наблюдается явление **двойного лучепреломления**: упавший на кристалл луч разделяется внутри кристалла на два луча, распространяющихся с различными скоростями и в различных направлениях. Соответствующие лучам волны полностью поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях. На рис. 4.9 разделившиеся внутри кристалла лучи обозначены через o и e . Двойное лучепреломление объясняется *анизотропией* (зависимостью

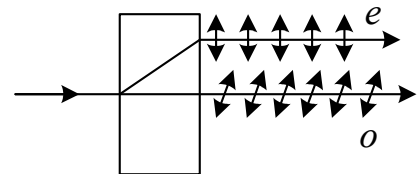


Рис. 4.9

свойств, в частности оптических, от направления распространения света в кристалле) кристаллов. Для находящегося в электрическом поле с напряженностью $\vec{E}$ изотропного кристалла связь между поляризованностью $\vec{P}$, электрической индукцией $\vec{D}$ и напряженностью поля $\vec{E}$ устанавливается соотношениями

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad \text{и} \quad \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}, \quad (13)$$

где χ_e – диэлектрическая восприимчивость; $\epsilon = 1 + \chi_e$ – диэлектрическая проницаемость вещества.

Соотношения (13) выполняются для произвольной ориентации вектора $\vec{E}$ в кристалле (в этом заключается *изотропность* кристалла в отношении электрических свойств), причем векторы $\vec{P}$ и $\vec{D}$ сонаправлены с вектором $\vec{E}$.

В анизотропных кристаллах, помещенных в электрическое поле, векторы $\vec{P}$ и $\vec{D}$, вообще говоря, не коллинеарны (не находятся в параллельных плоскостях) с вектором $\vec{E}$. Связь между ними следующая:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \vec{E}.$$

Здесь элементами матрицы являются компоненты ϵ_{ij} так называемого *тензора диэлектрической проницаемости*. Всегда можно направить оси Ox , Oy и Oz декартовой системы координат таким образом, что матрица станет диагональной

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}.$$

Такие направления координатных осей x , y и z в кристалле, для которых матрица тензора диэлектрической проницаемости является диагональной, называют *главными направлениями*.

Если вектор $\vec{E}$ совпадает с одним из главных направлений, то вектора $\vec{D}$ и $\vec{E}$ коллинеарны, например, для направленного вдоль оси Ox вектора $\vec{E} = E\vec{i}$ ($\vec{i}$ – единичный вектор вдоль оси Ox) вектор $\vec{D}$ представляется в виде $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_x E \vec{i}$.

Трем компонентам ϵ_x , ϵ_y и ϵ_z для диагонального тензора диэлектрической проницаемости соответствуют три *главных показателя прелом-*

ления $n_x = \sqrt{\epsilon_x}$, $n_y = \sqrt{\epsilon_y}$ и $n_z = \sqrt{\epsilon_z}$. Кристаллы, для которых все три главных показателя преломления различны, называют *двухосными* (например, слюда). Кристаллы, для которых $n_x = n_y$, но $n_x \neq n_z$, называют *одноосными* (например, кварц, турмалин, исландский шпат). В одноосном кристалле ось OZ называется *оптической осью кристалла*. Ей соответствует отличный от двух других одинаковых главных показателей преломления n_x и n_y главный показатель преломления n_z . Главный показатель преломления n_z обозначается символом n_e – показатель преломления для распространяющихся в кристалле волн, у которых колебания светового вектора $\vec{E}$ происходят параллельно оптической оси.

Два других одинаковых главных показателя преломления $n_x = n_y$ обозначают символом n_0 – показатель преломления для волн в кристалле, у которых колебания светового вектора $\vec{E}$ происходят в перпендикулярном к оптической оси направлении. *Положительными* называют кристаллы, у которых $n_e > n_0$, отрицательными – кристаллы, у которых $n_e < n_0$. Для кварца, например, $n_e - n_0 \approx 0,001$, для исландского шпата $n_e - n_0 \approx -0,2$.

Главным сечением кристалла называют плоскость, в которой лежат оптическая ось и световой луч. Если вектор $\vec{E}$ волны принадлежит главному сечению, волна называется *необыкновенной*, соответствующий луч называется *необыкновенным* и обозначается буквой «e» (см. рис. 4.7). Волна, в которой колебания вектора $\vec{E}$ происходят в направлении, перпендикулярном к главному сечению, называется *обыкновенной*, а соответствующий луч (*обыкновенный*) обозначается буквой «o».

Обыкновенный и необыкновенный лучи поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях. Обыкновенный луч распространяется по всем направлениям кристалла с одинаковой скоростью $v_0 = \frac{c}{n_0}$. Необыкновенные лучи распространяются по различным направлениям с разными скоростями $v_e = \frac{c}{n_e}$. Показатель преломления n_e необыкновенного луча является переменной величиной, зависящей от направления луча, поскольку для разных направлений необыкновенных лучей направления колебаний вектора $\vec{E}$ образуют с оптической осью разные углы. Скорости обыкновенного и необыкновенного лучей одинаковы, если они распространяются вдоль оптической оси.

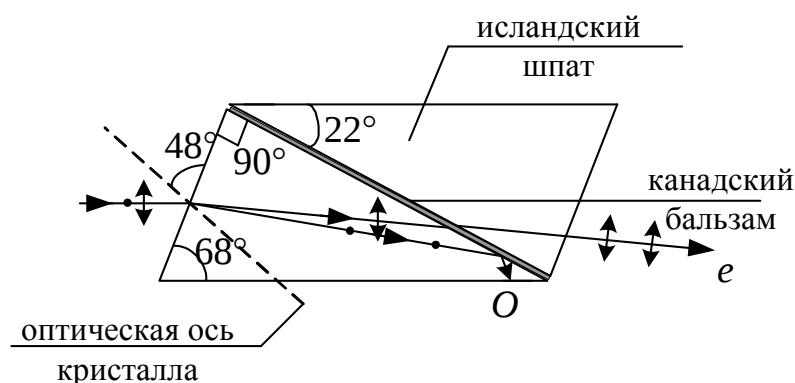


Рис. 4.10

Явление двойного лучепреломления используется при изготовлении поляризационных приспособлений – поляризационных призм и поляроидов. Например, в *призме Николя* (рис. 4.10) – двойной призме из исландского шпата, склеенной вдоль *AB* канадским бальзамом ($n = 1,55$) обыкновенный луч ($n_0 = 1,66$) испытывает

полное внутреннее отражение, т.к. канадский бальзам для него оптически менее плотный, а плоскополяризованный необыкновенный луч ($n_e = 1,51$) выходит из призмы практически не преломляясь.

Обыкновенный и необыкновенный лучи по-разному поглощаются в веществе. Луч, колебания светового вектора которого «раскачивают» молекулярные диполи вещества до большой амплитуды, поглощается сильнее, т.е. его энергия уже на малой толщине слоя вещества переходит в энергию теплового хаотического колебания молекул. При достаточной толщине слоя такого вещества в проходящем световом потоке остается один плоскополяризованный луч со степенью поляризации, близкой к единице. Такое избирательное поглощение световых потоков называется *дихроизмом*.

Примерами дихроичных веществ являются турмалин, герпатит. Они используются при производстве плоских поляроидов – тонких пластиковых пленок, в которые вкраплены кристаллики веществ с сильно выраженным дихроизмом – такие пленки уже при толщине 0,1 мм полностью поглощают обыкновенные лучи в видимой области спектра (герпатит).

В оптически изотропных веществах можно индуцировать *искусственную оптическую анизотропию* под воздействием: 1) одностороннего сжатия или растяжения; 2) электрического поля (эффект Керра); 3) магнитного поля (эффект Коттона – Муттона). При этом индуцированная оптическая ось совпадает с направлением деформации электрического или магнитного полей.

Эффект Керра – оптическая анизотропия веществ под воздействием электрического поля – объясняется различной поляризуемостью молекул вещества по разным направлениям. Если приложить разность потенциалов

к ячейке Керра – кювете с исследуемой жидкостью, которая размещена между скрещенными поляризатором Π_1 и анализатором Π_2 и в которую помещены пластины конденсатора, то жидкость становится двоякопреломляющей и свет проходит через анализатор. Разность показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей

$$n_e - n_0 = B\lambda_0 E^2,$$

где λ_0 – длина волны света в вакууме; E – напряженность электрического поля; B – постоянная Керра, которая зависит от температуры, длины волны света и природы вещества.

Эффект Коттона – Муттона – магнитный аналог эффекта Керра – возникновение оптической анизотропии у некоторых изотропных веществ при помещении их в сильное магнитное поле. При этом

$$n_e - n_0 = C\lambda_0 H^2,$$

где H – величина напряженности внешнего магнитного поля; C – постоянная Коттона – Муттона, которая зависит от температуры, длины волны света и природы вещества.

Если естественный свет падает на границу раздела двух диэлектриков, то отраженный и преломленный лучи являются частично поляризованными.

В отраженном луче преобладают колебания, перпендикулярные к плоскости падения, а в преломленном – колебания, лежащие в плоскости падения.

Согласно волновой теории Гюйгенса – Френеля и электромагнитной теории световых волн отраженный и преломленный на поверхности вещества луч – это результат переизлучения молекулярными диполями вещества поглощенной (первичной) световой волны. Световой вектор первичной волны задает направление колебательного движения зарядов диполей, а оси диполей определяют ориентацию светового вектора переизлученных (вторичных) волн (рис. 4.11).

Если световой вектор падающего луча колеблется в плоскости падения (общей с отраженным лучом), то найдется такой угол падения i_B ,

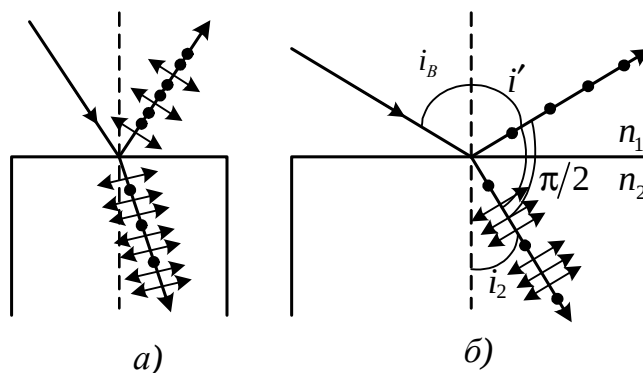


Рис. 4.11

для которого направление отраженного луча совпадает с осями колеблющихся диполей отражающего вещества. Из теории излучения линейного диполя известно, что в направлении его оси электромагнитная волна не излучается. Это означает, что энергия падающего под углом i_B поляризованного света со световым вектором в плоскости падения луча преобразуется в энергию только преломленного луча, то есть такой луч не отражается от поверхности диэлектрика.

Для падающего на поверхность диэлектрика естественного света при углах падения, отличных от i_B , как в отраженном, так и в преломленном потоках присутствуют лучи с обеими ориентациями световых векторов – как перпендикулярной к плоскости падения, так и параллельной ей (см. рис. 4.9, а). Если же угол падения естественного света равен i_B , то в отраженном свете будет присутствовать только луч, световой вектор которого перпендикулярен к плоскости падения (см. рис. 4.9, б). Отражение полностью линейно поляризованного света от поверхности диэлектрика называется **явлением Брюстера**, а соответствующий угол падения – *углом Брюстера* (см. рис. 4.9, в).

При полной поляризации отраженного света угол между отраженным и преломленными лучами $\frac{\pi}{2}$, то есть

$$i_B + i_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Согласно законам преломления и отражения $i_B = i'$,

$$n = \frac{\sin i_B}{\sin i_2} = \frac{\sin i'}{\cos i_B} = \operatorname{tg} i_B.$$

Окончательно получаем

$$\operatorname{tg} i_B = n. \quad (14)$$

Выражение (14) – математическая формулировка **закона Брюстера**, утверждающего, что *для каждого диэлектрика найдется такой угол падения света, что отраженный луч оказывается плоскополяризованным.*

Степень поляризации отраженного и преломленного света при различных углах падения можно рассчитать из уравнений Максвелла, если учесть граничные условия для электромагнитного поля на границе раздела двух диэлектриков.

Явление поляризации света при отражении и преломлении объясняется с помощью **формул Френеля** и полученных с использованием этих формул коэффициентов отражения и пропускания света.

Каждую из волн – падающую, отраженную и преломленную можно представить в виде суперпозиции двух некогерентных волн, поляризованных в направлении, параллельном плоскости падения, и в направлении, перпендикулярном к плоскости падения.

Интенсивности этих составляющих в падающей волне обозначим $I_{\parallel}$ и $I_{\perp}$, в отраженной $I'_{\parallel}$ и $I'_{\perp}$, а в преломленной $I''_{\parallel}$ и $I''_{\perp}$. Интенсивность падающей волны

$$I_0 = I_{\parallel} + I_{\perp}, \quad \text{при этом} \quad I_{\parallel} = I_{\perp} = \frac{1}{2} I_0.$$

Коэффициенты отражения $\rho_{\parallel}$ и $\rho_{\perp}$ для рассматриваемых волн вычисляются с помощью **формул Френеля**

$$\rho_{\parallel} = \frac{I'_{\parallel}}{I_{\parallel}} = \frac{\operatorname{tg}^2(i - r)}{\operatorname{tg}^2(i + r)}; \quad (15)$$

$$\rho_{\perp} = \frac{I'_{\perp}}{I_{\perp}} = \frac{\sin^2(i - r)}{\sin^2(i + r)}. \quad (16)$$

Если свет падает на границе раздела под углом Брюстера $i = i_B$, то, как следует из (15), коэффициент отражения $\rho_{\parallel}$ равен нулю. Это означает, что отраженная волна полностью поляризована, в ней колебания светового вектора перпендикулярны к плоскости падения.

Интенсивности преломленной и падающей волн связаны коэффициентом пропускания

$$\tau_{\parallel} = \frac{I''_{\parallel}}{I_{\parallel}} = 1 - \rho_{\parallel}; \quad (17)$$

$$\tau_{\perp} = \frac{I''_{\perp}}{I_{\perp}} = 1 - \rho_{\perp}. \quad (18)$$

С помощью соотношений (15) – (18) можно определить поляризацию P света при отражении и преломлении от поверхности диэлектрика, т.к. при падении света под углом Брюстера i_B степень поляризации преломленного луча определяется формулой

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{\rho_{\perp}}{2 - \rho_{\perp}}. \quad (19)$$

С учетом закона Брюстера $\operatorname{tg} i_B = n$ и $i_B + r = \frac{\pi}{2}$, выражение для коэффициента отражения $\rho_{\perp}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_{\perp} &= \frac{\sin^2(i_B - r)}{\sin^2(i_B + r)} = \sin^2(i_B - r) = \sin^2\left(2i_B - \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \cos^2 2i_B = \left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2 i_B}{1 + \operatorname{tg}^2 i_B}\right)^2 = \left(\frac{1 - n^2}{1 + n^2}\right)^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Окончательно подставив (20) в (19), получаем

$$P = \frac{(1 - n^2)^2}{1 + 6n^2 + n^4}. \quad (21)$$

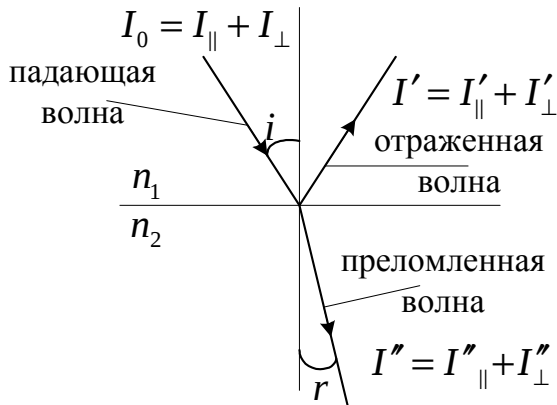


Рис. 4.12

Оптическая активность вещества (кварц, сахар, скипидар) проявляется в повороте плоскости колебания вектора $\vec{E}$ поляризованного света, проходящего через это вещество, на угол φ . Оптическую активность проявляют вещества, молекулы которых не имеют и не образуют ни плоскостей, ни центров сим-

метрии, или кристаллы, которые не имеют элементарных ячеек кристаллической решетки. Опытным путем установлена связь между углом φ и длиной пути l света в оптически активном веществе:

$$\varphi = \alpha l, \quad (22)$$

где постоянная α называется *удельным вращением*.

При взаимодействии поляризованного света с оптически активным веществом наблюдается *дисперсия* – зависимость α от длины волны света (λ).

Обычно α снижается с увеличением λ так, что $\alpha \sim \frac{1}{\lambda_0^2}$ (**закон Био**), где

λ_0 – длина волны света в вакууме. Для некоторых длин волн у ряда веществ α достигает значительных величин: десятки градусов при l порядка миллиметра.

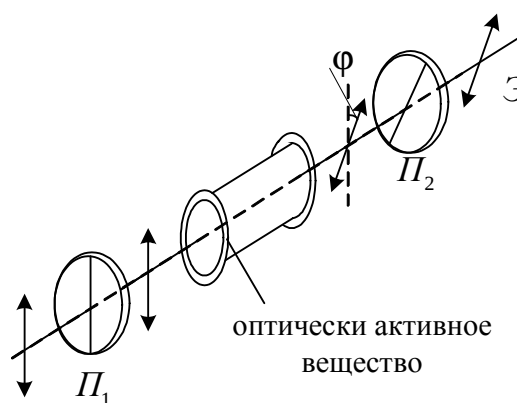
Оптическую активность проявляют и водные растворы некоторых (органических) веществ, для которых

$$\varphi = \alpha^* cl, \quad (23)$$

где c – концентрация вещества в растворе; α^* – удельная постоянная вращения.

Таким образом, явление оптической активности может быть использовано для определения концентрации вещества в водном растворе.

Если между скрещенными поляризатором P_1 и анализатором P_2 поместить оптически активное вещество (рис. 4.13), то поле зрения на экране или в окуляре оптического прибора меняет свою освещенность. Поворачивая анализатор, можно определить угол φ , при котором поле зрения вновь становится светлым (темным) – угол поворота плоскости поляризации оптически активным веществом. В зависимости от направления вращения оптически активные вещества разделяются на *право-* и *лево-вращающие*. В первом случае плоскость поляризации, если смотреть навстречу лучу, смещается *по часовой стрелке*, во втором – *против*.



Вращение плоскости поляризации возможно и в оптически неактивных веществах, помещенных во внешнее магнитное поле (**эффект Фарадея**). Угол поворота плоскости поляризации оптически активного вещества, помещенного в магнитное поле, определяется соотношением $\varphi = V H l$, где H – напряженность внешнего поля; V – *постоянная Верде*, зависящая от природы вещества и длины волны.

4.2. Методические указания к лекционным занятиям

Вопросы лекции	Форма изучения	Литература	Вопросы для самоконтроля
Поляризация света: – естественный и поляризованный свет; – степень поляризации; – закон Малюса; – поляризация света при двойном лучепреломлении; – дихроизм; – наведенная анизотропия; – поляризация света при отражении и преломлении на поверхности диэлектриков. Явление и закон Брюстера; – вращение плоскости поляризации	лекция	[8], п. 25.4 [10], пп. 190 – 196 [7], пп. 23.1 – 23.6 [5], пп. 3.31 – 3.47	1. Какой свет называют поляризованным? 2. Дайте понятие светового вектора и плоскости его колебаний. 3. Почему световой вектор естественного луча хаотически изменяется по величине и направлению? 4. Какие световые потоки называют поляризованными? 5. Что такое плоскополяризованный свет? 6. Как соотносятся амплитуды световых векторов и интенсивности лучей, составляющих поток естественного света? 7. Что такое оптическая плоскость поляроида? 8. Какой свет называется частично поляризованным? Каковы причины этого? 9. С помощью какой количественной характеристики можно оценить поляризованность света? 10. Что происходит в общем случае с плоскополяризованным светом, проходящим сквозь поляроид? 11. При каком угле между оптическими плоскостями двух поляроидов естественный свет задерживается в них полностью? 12. Чем отличается естественная анизотропия от наведенной оптической? 13. Что необыкновенного в «необыкновенном» луче? 14. В каком направлении колеблющийся линейный диполь не излучает? 15. Может ли степень поляризации отраженного от диэлектрика света быть равной 1? 0? 16. Как изменяется плоскость поляризации света при прохождении слоя оптически активного вещества?

4.3. Методические указания к практическим занятиям

Тема занятия	Задачи	Рекомендации	Задачи из сборников
Поляризация света	Определение параметров отраженного и преломленного на поверхности диэлектрика света	1. Задачи, в которых рассматривается поляризация света при отражении и преломлении на границе двух диэлектриков, решаются с помощью формул Френеля. Их частным случаем является закон Брюстера. Обратите внимание: в формуле, выражающей закон Брюстера, n – относительный показатель преломления двух диэлектриков, на границе которых происходит отражение света. Для расчета величин $I'_\perp$, $I'_\parallel$ по формулам необходимо знать углы падения i и преломления r. При падении света на границу двух сред со стороны оптически более плотной среды может случиться, что вычисления дадут для угла преломления $\sin r = (\sin i)/n > 1$. Так как угол r, удовлетворяющего этому неравенству, не существует, такой результат должен означать, что свет не будет преломляться на данной границе, т.е. возникнет полное внутреннее отражение. В этом случае $I'_\perp = I_\perp$; $I'_\parallel = I_\parallel$, и полная интенсивность отраженного луча $I' = I'_\perp + I'_\parallel$ равна интенсивности падающего луча $I = I_\perp + I_\parallel$.	[1], №№ 20.1 – 20.10
	Определение интенсивности поляризованного света после системы поляризаторов	2. Оптической плоскостью (главным направлением) поляризатора в ПП называют плоскость, в которой происходят колебания световых векторов в плоскополяризованном луче, выходящем из прибора. Анализатор представляет собой тот же прибор, что и поляризатор, но служит для анализа поляризованного света. Следовательно, величина ϕ в законе Малюса является одновременно углом между плоскостями, в которых колеблются световые векторы двух плоскополяризованных лучей – падающего на анализатор и выходящего из него. При решении такого типа задач необходимо помнить, что интенсивность света, прошедшего через поляризатор, составляет свет с интенсивностью $I_0/2$, поскольку на поляризатор падает естественный свет I_0.	[11], №№ 5.150 – 5.163 [12], №№ 32.1 – 32.18 [11], №№ 5.139 – 5.148 [12], №№ 32.15 – 32.18
	Задачи с учетом вращения плоскости поляризации	3. Вращение плоскости поляризации происходит как в кристаллах, так и в растворах. В задачах этого типа требуется, как правило, используя анализатор (возможно виртуально, даже если этого не упоминается в условии задачи), определить толщины слоев таких веществ или их концентрацию. Поэтому задачи при этом сводятся к задачам второго типа (см. п. 2)	[11], № 5.168 [12], №№ 32.19 – 32.22

4.4. Примеры решения задач

Пример 1. Во сколько раз отличаются составляющие светового вектора частично поляризованного потока со степенью поляризации 0,5? (Уровень 2).

Решение. Поскольку интенсивность прямо пропорциональна квадрату амплитуды, то

$$\frac{E_{\max}^2}{E_{\min}^2} = \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = k.$$

В выражении для степени поляризации P разделим числитель и знаменатель на $I_{\min}$:

$$P = \frac{I_{\max}/I_{\min} - 1}{I_{\max}/I_{\min} + 1} = \frac{k - 1}{k + 1}.$$

$$\text{Отсюда } k = \frac{1 + P}{1 - P}; \quad \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \sqrt{k} = \sqrt{\frac{1 + P}{1 - P}} = \sqrt{3}.$$

Ответ: $k = 3$.

Пример 2. Оптическая плоскость анализатора повернута относительно ОП поляризатора на некоторый угол φ_0 . Повернув анализатор из этого положения на 30° , мы уменьшили тем самым интенсивность проходящего светового потока еще в 4 раза. Определить φ_0 . (Уровень 3).

Решение. Начальная интенсивность света на выходе анализатора $I_{\text{вых.1}}$, согласно закону Малюса, связана с интенсивностью входящего потока $I_{\text{вх}}$ соотношением

$$I_{\text{вых.1}} = I_{\text{вх}} \cos^2 \varphi_0.$$

Для нового положения анализатора

$$I_{\text{вых.2}} = I_{\text{вх}} \cos^2 (\varphi_0 + 30^\circ) = \frac{1}{4} I_{\text{вх}} \cos^2 \varphi_0.$$

Сокращая $I_{\text{вх}}$, получаем тригонометрическое уравнение

$$4 \cos^2 (\varphi_0 + 30^\circ) = \cos^2 \varphi_0,$$

откуда

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}(\sqrt{3} - 1) \approx 33^\circ.$$

Ответ: $\varphi_0 = 33^\circ$.

Пример 3. Относительная диэлектрическая проницаемость двояко-преломляющего кристалла варьируется по направлениям от $\varepsilon_1 = 3,24$ до $\varepsilon_2 = 5,76$. На какой максимальный угол $\Delta\beta$ расходятся в кристалле обыкновенный и необыкновенный лучи при падении естественного света под углом $\alpha = 60^\circ$? (**Уровень 3**).

Решение. $\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1$. Согласно закону преломления $\sin\beta_1 = \frac{\sin\alpha}{n_1}$,

$$\sin\beta_2 = \frac{\sin\alpha}{n_2}, \text{ где, учитывая, что } n_1 = \sqrt{\varepsilon_1} = 1,8; n_2 = 2,4; \sin 60^\circ \approx 0,864.$$

Итак, $\beta_1 = \arcsin 0,48 \approx 29^\circ$; $\beta_2 = \arcsin 0,36 \approx 22^\circ$ и $\Delta\beta = 7^\circ$.

Ответ: $\Delta\beta = 7^\circ$.

Пример 4. На поверхность стекла с $n = 1,5$ падает под углом $\alpha = 45^\circ$ пучок естественного света. Определить интенсивности отраженного и преломленного лучей в долях интенсивности I_0 падающего света, а также степени поляризации этих лучей. (**Уровень 4**).

Решение. Роли $I_{\max}$ и $I_{\min}$ при определении степени поляризации P играют: для отраженного луча $I'_{\parallel}$ и $I'_{\perp}$, для преломленного $I''_{\parallel}$ и $I''_{\perp}$. Их попарные суммы составят интенсивности соответствующих лучей. Очевидно, что для падающего света $I_{\parallel} = I_{\perp} = I_0/2$. По закону преломления определяем угол преломления r :

$$r = \arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right) = 28,125^\circ.$$

По формулам Френеля получаем:

$$I'_{\parallel} = I_{\parallel} \frac{\operatorname{tg}^2(i - r)}{\operatorname{tg}^2(i + r)} = \frac{I_0}{2} \frac{\operatorname{tg}^2(45^\circ - 28,125^\circ)}{\operatorname{tg}^2(45^\circ + 28,125^\circ)} = 0,00424I_0;$$

$$I''_{\parallel} = I_{\parallel} - I'_{\parallel} = (0,5 - 0,0424)I_0 = 0,49576I_0;$$

$$I'_{\perp} = I_{\perp} \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} = \frac{I_0}{2} \frac{\sin^2 16,875^\circ}{\sin^2 73,125^\circ} = 0,046 I_0;$$

$$I''_{\perp} = I_{\perp} - I'_{\perp} = 0,454 I_0;$$

$$I' = I'_{\parallel} + I'_{\perp} = 0,05024 I_0;$$

$$I'' = I''_{\parallel} + I''_{\perp} = 0,94976 I_0;$$

$$P' = \frac{I'_{\perp} - I'_{\parallel}}{I'_{\perp} + I'_{\parallel}} = \frac{0,046 - 0,00424}{0,05024} = 0,832;$$

$$P'' = \frac{I''_{\parallel} - I''_{\perp}}{I''_{\parallel} + I''_{\perp}} = \frac{0,49576 - 0,454}{0,94976} = 0,044.$$

Ответ: $I' = 0,05024 I_0$; $I'' = 0,94976 I_0$; $P' = 0,832$, $P'' = 0,044$.

Пример 5. Шлиф (специально подготовленная для исследования пластинка) двоякопреломляющего материала толщиной 6,75 мкм вдоль и поперек оптической плоскости имеет показатели преломления 2,48 и 2,64. В какой цвет окрасится поле зрения на выходе шлифа, если его осветить плоскополяризованным белым светом? (**Уровень 3**).

Решение. Цвет в поле зрения определяется длиной световой волны, для которой выполняется условие максимума интерференции

$$\Delta = 2k \frac{\lambda}{2} = k\lambda,$$

где $k = 1, 2, 3, 4 \dots$

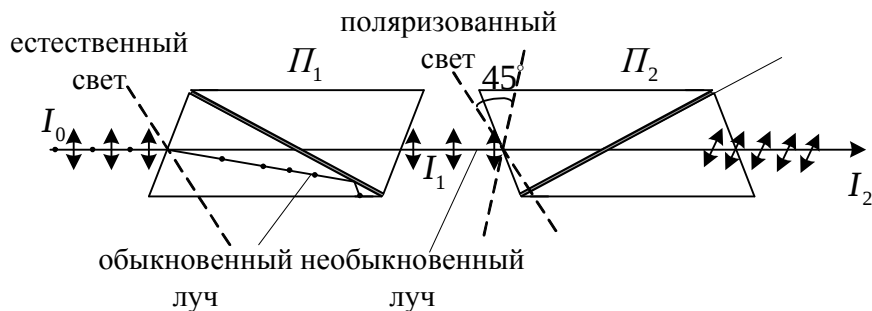
Учитывая, что возникшая разность хода зависит от разности показателей преломления в различных направлениях, можно записать:

$$d(n_1 - n_2) = k\lambda; \quad \lambda = \frac{d(n_1 - n_2)}{k} = \frac{1,08 \cdot 10^{-6}}{k} (\text{м}).$$

Если $k = 1$, то $\lambda_2 = 504$ нм (зеленый цвет); при $k = 3$ $\lambda_3 = 360$ нм (ультрафиолетовое свечение). Итак, шлиф в поле зрения поляризационного исследовательского прибора будет выглядеть зеленым. На практике приходится решать обратную задачу – по цвету определять толщины пластинок или находить n_1 и n_2 и тем самым идентифицировать вещество.

Ответ: зеленый.

Пример 6. Определить, во сколько раз уменьшится интенсивность естественного света, прошедшего через два николя, плоскости поляризации которых составляют угол 45° . Каждый николь поглощает 8 % света, падающего на него (см. рисунок). (**Уровень 4**).



Решение. В результате двойного лучепреломления естественный луч света, попадая в призму P_1 – поляризатор, раздваивается на обыкновенный и необыкновенный лучи. Оба луча поляризованы, но во взаимно перпендикулярных плоскостях. Обыкновенный луч, подчиняясь закону преломления, преломляется и, подойдя к слою канадского бальзама в николе, испытывает полное отражение и поглощается зачерненной боковой гранью призмы. Необыкновенный луч проходит через призму без отклонения, интенсивность его уменьшается из-за поглощения света призмой на величину kI_0 .

Интенсивность света, прошедшего через поляризатор, равна

$$I_1 = 0,5(1 - k)I_0, \quad (1)$$

где $k = 0,08$ (т.е. 8 %) – коэффициент поглощения света в призме; I_0 – интенсивность естественного света, падающего на поляризатор.

Поляризованный свет, войдя во второй николь – анализатор P_2 , опять поглощается, и интенсивность его уменьшается на величину kI_1 . Интенсивность поляризованного света из-за несовпадения плоскостей поляризации поляризатора и анализатора согласно закону Малюса

$$I_2 = I_1(1 - k)\cos^2 \varphi, \quad (2)$$

где φ – угол между плоскостями поляризации поляризатора P_1 и анализатора P_2 ; k – коэффициент поглощения; I_1 – интенсивность поляризованного света, падающего на анализатор; I_2 – интенсивность поляризованного света, прошедшего через анализатор.

Подставляя выражение (1) в (2), имеем

$$I_2 = 0,5(1-k)^2 I_0 \cos^2 \varphi. \quad (3)$$

Из соотношения (3) следует:

$$\frac{I_2}{I_0} = 0,5(1-k)^2 \cos^2 \varphi; \quad \frac{I_0}{I_2} = \frac{1}{0,5(1-k)^2 \cos^2 \varphi}.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$\frac{I_2}{I_0} = 0,5(1-0,08)^2 \cos^2 45^\circ = 0,2; \quad \frac{I_0}{I_2} = \frac{1}{0,2} = 5.$$

Ответ: $\frac{I_0}{I_2} = 5.$

Пример 7. На пути частично поляризованного пучка света поместили николю. При повороте николя на угол $\varphi = 60^\circ$ из положения, соответствующего максимальному пропусканию света, интенсивность прошедшего света уменьшилась в $\delta = 3,0$ раза. Найти степень поляризации падающего света. (**Уровень 5**).

Решение. Частично поляризованный свет можно рассматривать как смесь плоскополяризованного света с интенсивностью I_n и естественного с интенсивностью I_0 . Николь всегда пропускает половину падающего на него естественного света (превращая его в плоскополяризованный). Степень пропускания поляризованного света, падающего на николю, согласно закону Малюса зависит от взаимной ориентации главных плоскостей поляризатора и анализатора. Поэтому полная интенсивность света, прошедшего через николю,

$$I = 0,5I_0 + I_n \cos^2 \varphi, \quad (1)$$

где I_0 , I_n – интенсивности естественной и поляризованной составляющих света, падающего на николю.

При этом

$$I_{\max} = 0,5I_0 + I_n; \quad (2)$$

$$I_{\min} = 0,5I_0. \quad (3)$$

По условию $I_{\max} = \delta I$ или, согласно формулам (1) – (3),

$$I_{\max} = \delta \left[I_{\min} + (I_{\max} - I_{\min}) \cos^2 \varphi \right]. \quad (4)$$

Уравнение (4) содержит два неизвестных: $I_{\max}$, $I_{\min}$. Достаточно найти их отношение $\alpha = I_{\max} / I_{\min}$, так как степень поляризации P можно также выразить через величину α :

$$P = (1 - \alpha) / (1 + \alpha). \quad (5)$$

Разделив обе части уравнения (4) на $I_{\max}$, имеем

$$1 = \delta \left[\alpha + (1 - \alpha) \cos^2 \varphi \right].$$

Выразив отсюда α и подставив в (5), получим ответ:

$$P = \frac{\delta - 1}{1 + \delta(1 - 2 \cos^2 \varphi)} = 0,8.$$

Ответ: $P = 0,8$.

4.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Пучок света, идущий в воздухе, падает на поверхность жидкости под углом $i = 54^\circ$. Определить угол преломления r пучка, если отраженный пучок полностью поляризован [36° ; **уровень 2**].
2. Пучок естественного света, идущий в воде, отражается от грани алмаза, погруженного в воду. При каком угле падения i отраженный свет полностью поляризован? [$61^\circ 12'$; **уровень 3**].
3. Угол Брюстера i_B при падении света из воздуха на кристалл каменной соли равен 57° . Определить скорость света в этом кристалле. [194 Мм/с ; **уровень 1**].
4. Анализатор в $\delta = 2$ раза уменьшает интенсивность света, приходящего к нему от поляризатора. Определить угол φ между плоскостями пропускания поляризатора и анализатора. Потерей интенсивности света в анализаторе пренебречь. [45° ; **уровень 2**].

5. Во сколько раз ослабляется интенсивность света, проходящего через два николя, плоскости пропускания которых образуют угол $\varphi = 30^\circ$, если в каждом из николей в отдельности теряется 10 % интенсивности падающего света? [в 3,3 раза; **уровень 3**].
6. Степень поляризации частично поляризованного света равна 0,5. Во сколько раз отличается максимальная интенсивность света, пропускаемого через анализатор, от минимальной? [в 3 раза; **уровень 5**].
7. На николь падает пучок частично поляризованного света. При некотором положении николя интенсивность света, прошедшего через него, стала минимальной. Когда плоскость пропускания николя повернули на угол $\varphi = 45^\circ$, интенсивность света возросла в $\delta = 1,5$ раза. Определить степень поляризации света [0,348; **уровень 5**].
8. Пластинку кварца толщиной $d_1 = 2$ мм, вырезанную перпендикулярно к оптической оси, поместили между параллельными николями, в результате чего плоскость поляризации света повернулась на угол $\varphi = 53^\circ$. Определить толщину d_2 пластинки, при которой данный монохроматический свет не проходит через анализатор. [3,4 мм; **уровень 4**].
9. Раствор глюкозы с массовой концентрацией 280 кг/м^3 , содержащийся в стеклянной трубке, поворачивает плоскость поляризации монохроматического света, проходящего через этот раствор, на угол $\varphi_1 = 32^\circ$. Определить массовую концентрацию глюкозы в другом растворе, налитом в трубку такой же длины, если он поворачивает плоскость поляризации на угол $\varphi_2 = 24^\circ$. Удельное вращение сахара $\alpha^* = 1,17 \cdot 10^{-2} \text{ рад} \cdot \text{м}^3 / (\text{м} \cdot \text{кг})$. [0,21 г/см³; **уровень 5**].
10. Угол φ поворота плоскости поляризации желтого света натрия при прохождении через трубку с раствором сахара равен 40° . Длина трубки $d = 15$ см. Удельное вращение сахара $\alpha^* = 1,17 \cdot 10^{-2} \text{ рад} \cdot \text{м}^3 / (\text{м} \cdot \text{кг})$. Определить плотность раствора. [0,4 г/см³; **уровень 6**].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Удельное сопротивление проводников и изоляторов

Проводник	Удельное сопротивление (при 20 °С) ρ , нОм·м	Температурный коэффициент α , $\cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$	Изолятор	Удельное сопротивление ρ , нОм·м
Алюминий	26	3,6	Бумага	10
Вольфрам	55	4,8	Парафин	10^6
Графит	3900	–0,8	Слюда	10^4
Железо	98	6,2	Фарфор	10^4
Золото	20	4,0	Шеллак	10^5
Медь	17	4,2	Эбонит	10^5
Никелин	400	–	Янтарь	10^8
Нихром	1100	0,4		
Свинец	205	4,2		
Серебро	16	4,1		
Висмут	1065	4,0		
Индий	90	4,7		
Кадмий	76	4,2		
Кобальт	62	6,6		
Молибден	57	4,3		
Никель	973	6,2		
Ниобий	180	–		
Олово	120	4,2		
Платина	105	3,8		
Ртуть	958	0,9		
Тантал	135	3,5		
Титан	420	–		
Хром	140	–		
Цинк	59	3,7		
Цирконий	410	–		

Относительная диэлектрическая проницаемость

Жидкий диэлектрик	ϵ	Твердый диэлектрик	ϵ
Бензин	2,0	Воск	7,8
Вода	81	Винипласт	3,5
Воздух	1,00058	Гетинакс	8,0
Глицерин	43	Парафин	2,0
Керосин	2,0	Слюда	7,5
Масло касторовое	4,5	Стекло	6,0
Масло трансформаторное	5,0	Фарфор	6,0
Скипидар	2,3	Эбонит	2,6
		Плексиглас	3,5
		Полиэтилен	2,3

Относительная магнитная проницаемость

Парамагнетик	μ	Диамагнетик	μ
Алюминий	1,000023	Висмут	0,999824
Ванадий	1,000343	Вода	0,999991
Вольфрам	1,000176	Водород	0,9999988
Кислород	1,0000019	Золото	0,999961
Магний	1,0000174	Медь	0,9999897
Марганец	1,00100	Свинец	0,9999841
Олово	1,0000022	Серебро	0,999981
Платина	1,000250	Цинк	0,999988

Магнитные восприимчивости пара- и диамагнетиков

Парамагнетики	$\chi, 10^{-6}$	Диамагнетики	$\chi, 10^{-6}$
Азот	0,013	Водород	-0,063
Алюминий	23	Бензол	-7,5
Воздух	0,38	Висмут	-176
Вольфрам	176	Вода	-9,0
Жидкий кислород	3400	Каменная соль	-12,6
Кислород	1,9	Кварц	-15,1
Марганец	121	Медь	-10,3
Платина	360	Стекло	-12,3
Эбонит	14		

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Ветрова, В.Т. Сборник задач по физике с индивидуальными заданиями: учеб. пособие для вузов / В.Т. Ветрова. – Минск: Выш. шк., 1991. – 386 с.
2. Волькенштейн, В.С. Сборник задач по общему курсу физики / В.С. Волькенштейн. – М.: Наука, 1993.
3. Детлаф, А.А. Курс физики: учеб. пособие для вузов / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М.: Высш. шк., 1989.
4. Иродов, И.Е. Задачи по общей физике / И.Е. Иродов. – М.: Наука, 1988.
5. Курс физики: учебник для вузов. В 2 т. – 2-е изд., испр. / под ред. В.Н. Лозовского. – СПб.: Изд-во «Лань», 2001. Т. 1. – 576 с. Т. 2. – 592 с.
6. Леденев, А.Н. Физика. В 5 кн. Кн. 1 и 2 / А.Н. Леденев. – М.: Физматлит, 2005.
7. Макаренко, Г.М. Курс общей физики: учеб. пособие для вузов / Г.М. Макаренко – Минск: ДизайнПРО, 2003. – 640 с.
8. Наркевич, И.И. Физика: учебник / И.И. Наркевич, Э.И. Волмянский, С.И. Лобко. – Минск: Новое знание, 2004. – 680 с.
9. Савельев, И.В. Курс общей физики. В 3 т. / И.В. Савельев. – М.: Наука, 1973.
10. Трофимова, Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. / Т.И. Трофимова. – М.: Высш. шк., 1990. – 478 с.
11. Трофимова, Т.И. Сборник задач по курсу физики для вузов. – 3-е изд. / Т.И. Трофимова. – М.: ОНИКС XXI век, Мир и образование, 2003. – 384 с.
12. Чертов, А.Г. Задачник по физике / А.Г. Чертов, А.А. Воробьев. – М.: Высш. шк., 2003.

Дополнительная

13. Аксенович, Л.А. Физика в средней школе. Теория. Задания. Тесты: учеб. пособие / Л.А. Аксенович, Н.Н. Ракина, К.С. Фарино. – Минск: Адукацыя і выхаванне, 2004. – 720 с.
14. Астахов, А.В. Курс физики. В 3 т. / А.В. Астахов. – М.: Наука, 1977.
15. Варикаш, В.М. Руководство по решению задач по общей физике / В.М. Варикаш, М.С. Цедрик. – Минск: Выш. шк., 1999.
16. Зисман, Г.А. Курс общей физики. В 3 т. / Г.А. Зисман, О.М. Тодес. – М.: Наука, 1972.
17. Иродов, И.Е. Сборник задач по общей физике / И.Е. Иродов, И.В. Савельев, О.И. Замша. – М.: Наука, 1975.
18. Ландсберг, Г.С. Элементарный учебник физики. В 3 т. / Г.С. Ландсберг. – М.: Наука, 1992.
19. Фирганг, Е.В. Руководство к решению задач по курсу общей физики / Е.В. Фирганг. М.: Высш. шк., 1977.

Учебное издание

ФИЗИКА

В двух частях

Часть 2

Редактор *Т.В. Булах*

Дизайн обложки *В.А. Виноградовой*

Подписано в печать 25.09.2009. Формат 60х84 1/16. Гарнитура Таймс. Бумага офсетная
Ризография. Усл. печ. л. 16,71. Уч.-изд. л. 15,5. Тираж 520 экз. Заказ 1628

Издатель и полиграфическое исполнение –
учреждение образования «Полоцкий государственный университет»
ЛИИ № 02330/0548568 от 26.06.2009 ЛП № 02330/0494256 от 27.05.2009
211440 г. Новополоцк, ул. Блохина, 29