Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

С.А. Вабищевич, В.А. Груздев, Г.А. Дубченок

В.Г. Залесский, Г.М. Макаренко

ФИЗИКА

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

для студентов технических специальностей

В двух частях

Часть 1

Новополоцк 2005

УДК 53 (075.8)
ББК 22 я73
В 12

РЕЦЕНЗЕНТЫ:
В.И. Семенов, член.-корр. БИА, канд. техн. наук,
генеральный директор ОАО Полоцкий завод «Проммашремонт»;
Н.В. Ощепкова, доцент кафедры физики, канд. техн. наук;
Л.И. Прокопович, доцент кафедры физики, канд. физ.-мат. наук

Одобрен и рекомендован к изданию методической комиссией
геодезического факультета

В 12 Вабищевич С.А., Груздев В.А., Дубченок Г.А., Залесский В.Г., Макаренко Г.М.
Физика: учебно-методический комплекс для студентов технических специальностей. В 2-х ч. Ч. 1. – Новополоцк: ПГУ, 2005. – 232 с.
ISBN 985-418-322-X (Ч. 1)
ISBN 985-418-324-6

УМК состоит из семи учебно-методических модулей, которые изучаются в течение трех семестров. Первая часть УМК включает три модуля: «Механика материальной точки», «Механика материальных тел. Модель системы материальных точек», «Молекулярно-кинетическая теория. Основы термодинамики». Объединение содержательного материала этих модулей в одну книгу обусловлено рабочей программой дисциплины на один семестр, а также тем, что в основу модуля «Молекулярно-кинетическая теория. Основы термодинамики» положена модель классической механики движения частиц газа.

УДК 53 (075.8)
ББК 22 я73

ISBN 985-418-322-X (Ч. 1)
ISBN 985-418-324-6

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методический комплекс (УМК) разрабатывался как система взаимосвязанных и взаимодополняющих средств и способов обучения, проектируемых в соответствии с учебной программой и выбранным дидактическим процессом, необходимых и достаточных для реализации требований образовательного стандарта [4]. Предполагается, что УМК по учебной дисциплине «Физика» будет способствовать системному решению трех следующих **задач:**

– контроль исходного уровня подготовки учащихся по физике;

– осуществление необходимых, в том числе обусловленных исходным уровнем подготовки, технологий организации процесса обучения;

– организация перманентного контроля результатов обучения, необходимого для своевременной корректировки процесса обучения (обратная связь) и обеспечения требуемых результатов конечного контроля подготовки учащегося.

Для реализации педагогической системы в данный УМК заложены следующие **функции:**

– методическое обеспечение курса физики;

– дидактические средства обучения, объединенные конечными целями обучения;

– адаптация содержания курса физики к образовательному стандарту специальности;

– предъявление новых знаний и развитие новых навыков и умений;

– развитие творческой активности и потенциала учащегося.

Основой УМК является обобщенный для технических специальностей стандарт по курсу физики, как необходимый уровень естественнонаучной подготовки к изучению общеобразовательных и специальных дисциплин.

Для **учащихся** УМК предлагает:

– рекомендации по выбору учебников и методических пособий, необходимых для достижения целей обучения при минимизированном бюджете времени;

– рекомендации по самоорганизации и содержанию самостоятельной работы над курсом, как одной из самых эффективных форм обучения новым навыкам и умениям;

– методические материалы для различных форм учебного процесса;

– перечень требований для самооценки и выбора уровней результатов обучения, что необходимо для реализации индивидуальной «траектории» и результатов обучения.

Для **преподавателей** учебно-методический комплекс может оказаться полезным, во-первых, при адаптации курса физики к учебным программам специальных дисциплин, на чем обычно настаивают профилирующие кафедры; но не удалением «ненужных» разделов и тем, а вариацией уровня изучения тех или иных разделов при сохранении целостности курса физики, как естественнонаучной дисциплины. Во-вторых, УМК может избавить от значительной рутинной работы по подготовке материалов контроля. И, в-третьих, позволяет унифицировать оценку знаний, умений и навыков при контроле, проводимом на разных специальностях и различными преподавателями.

Обычно курс физики для технических специальностей изучается в течение 2 – 3 семестров (250 – 450 часов), поэтому УМК построен по модульно-блочному принципу. Учебный модуль представляет собой единицу курса, единство которой основано на используемой физической модели или на совокупности физических явлений, относимых к единому классу. В свою очередь учебный модуль состоит из учебных блоков, формируемых на тех же принципах, но с большей детализацией. Как и УМК, каждый модуль и блок представляют содержание в виде завершенного элемента в структуре учебного курса; содержат собственные цели обучения; конкретное технологическое и методическое обеспечение обучения; предусматривают текущий и итоговый контроль наряду с элементами самоконтроля. Таким образом, учебный модуль содержит все структурные элементы, рекомендованные в моделях УМК [2, 3].

Настоящее издание охватывает 3 модуля и содержит учебную и методическую программы к этим модулям; перечень рекомендуемой литературы с указанием рекомендуемых разделов; перечень требований к знаниям, умениям и навыкам; краткое содержание теоретического материала; примеры решения типовых задач; задачи для самостоятельного тренинга.

В рамках УМК издание дополняется следующими издаваемыми отдельно брошюрами:

1. Банк задач по каждому модулю для самостоятельной подготовки и текущего контроля обучения. Задачи оценены в баллах в соответствии с уровнем их сложности.

2. Банк тестовых заданий для текущего (рейтингового) контроля успешности обучения. Тестовые задания сгруппированы по темам каждого модуля и уровням сложности, что позволяет использовать банк для контроля с использованием ЭВМ.

3. Методические указания к лабораторному практикуму по каждому модулю.

К выдаче студентам для работы в период обучения предназначены настоящее издание и брошюра с банком задач для самоподготовки.

Вторая часть УМК по курсу «Физика» издается отдельной книгой, содержит 4 модуля, построенных на тех же, что и первая часть, методических и структурных принципах.

Учебно-методический комплекс разработан коллективом преподавателей кафедры физики Полоцкого государственного университета в составе профессора Г.М. Макаренко, доцентов С.А. Вабищевича и В.Г. Залесского, старшего преподавателя Г.А. Дубченка, под общим руководством заведующего кафедрой физики, профессора В.А. Груздева.

Методические указания для учащихся

При изучении курса физики рекомендуется использовать настоящий учебно-методический комплекс следующим образом:

1. По заданной теме необходимо найти соответствующий *модуль* и *блок* учебного материала;

2. Прочитать *краткое содержание* теоретического материала блока, выписать основные (базовые) формулы, к которым относятся формулы-определения и формулы – физические законы. Например: $p = m\upsilon$ (импульс тела) – формула-определение; $\upsilon = \dfrac{dr}{dt}$ (скорость по перемещению) – формула-определение; $a_x = \dfrac{d\upsilon_x}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ (ускорение по координате *x*) – формула-определение. Но $\vec{F} = m\vec{a}$ – закон; $F_y = -kx$ – закон;

3. Выучить (запомнить) *базовые формулы*. Методика запоминания может быть различной, поэтому целесообразно пользоваться наиболее эффективной (привычной) для учащегося;

4. Прочитать раздел «Студент должен знать». Оценить *соответствие* своих знаний требованиям. При необходимости вернуться к «Краткому содержанию» для повторного прочтения;

5. Обратиться к разделу «Вопросы для самоконтроля». Ответить на вопросы. Если возникают затруднения с ответами, вернуться к разделу «Краткое содержание» или к рекомендуемой литературе;

6. После ответов на вопросы для самоконтроля перейти к разделу «Примеры решения задач». Студенты должны изучить приведенные в разделе *примеры решения типовых задач* до полного их понимания;

7. Обратиться к разделу «Студент должен уметь». Проверить соответствие своих умений предъявляемым требованиям. Одним из способов проверки может быть *составление алгоритма* Ваших действий для определения (нахождения) требуемых величин по заданным. В случае возникновения затруднений надо обратиться к примерам решения типовых задач или за консультацией к преподавателю;

8. Приступить к *самостоятельному решению* предложенных для этого задач. При этом рекомендуется следующий порядок:

8.1. Сконцентрируйте данные величины, переведите их в систему СИ;

8.2. Сделайте необходимый *рисунок*, поясняющий физическую суть задачи;

8.3. Попробуйте записать предварительный ответ, т.е. формулу (уравнение) для искомой величины. Если в этой формуле (уравнении) содержатся неизвестные (не данные в условии) величины, то запишите известные Вам формулы для этих неизвестных величин. В результате должно получиться столько формул (уравнений), сколько неизвестных величин они содержат. Полученная система уравнений позволяет найти искомую в задаче величину;

8.4. Получите *решение задачи* в общем виде (без подстановки конкретных значений величин);

8.5. Проверьте полученный ответ *методом анализа размерностей*. После этого можно находить значение искомой величины;

9. После приобретения требуемых знаний и навыков можно приступать к *контрольному тестированию* (по рекомендации преподавателя) успешности обучения в классе ЭВМ или выполнению контрольных заданий. Результаты тестирования или выполнения контрольных заданий сформируют *рейтинговую оценку* Ваших знаний. В случае успешного их выполнения эта оценка будет достаточной для получения **минимальной положительной экзаменационной оценки**. В процессе выполнения экзаменационного задания студент может повысить итоговую экзаменационную оценку до максимальной.

УЧЕБНЫЙ МОДУЛЬ № 1
«МЕХАНИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ»

Введение

В данном учебном модуле рассматриваются основные законы, закономерности и принципы классической механики в упрощенной модели объектов – модели «материальной точки». Эта модель облегчает изучение базовых понятий и законов механики, ограничивая их объем рассмотрением только *поступательного движения*. В то же время модель «материальной точки» позволяет сформировать достаточную базу знаний для описания новых видов движения, присущих системам материальных точек, образующих жидкие и твердые тела: *течение жидкости* и *вращательное движение* твердого тела, *статическое состояние* твердых тел.

Модуль содержит три учебных блока:

1. Кинематика поступательного движения материальной точки.
2. Динамика поступательного движения материальной точки.
3. Колебательное движение материальной точки.

В **первом блоке** рассматриваются общепринятые параметры поступательного движения, связь между параметрами. Вводятся элементы дифференциального и интегрального исчисления для определения для определения параметров поступательного движения. Рассматриваются различные виды поступательного движения и основные закономерности, относящиеся к ним. Поясняются принципы суперпозиции и относительности движения.

Во **втором блоке** рассматриваются контактные и неконтактные взаимодействия материальных точек на основе законов Ньютона. Вводится понятие системы материальных точек и механические параметры системы. Рассматриваются виды механической энергии и принцип эквивалентности работы и энергии, законы сохранения энергии и импульса материальных точек и их систем.

В **третьем блоке** рассматриваются колебания материальной точки под действием упругих (квазиупругих) сил, виды колебательных движений. Показана эквивалентность дифференциального уравнения Ньютона и уравнений с гармоническими функциями для резонанса колебательных систем. На основе принципа суперпозиции движений представлены вопросы сложения колебаний при различных условиях. Вводятся понятия поляризации, интерференции, когерентности, векторных диаграмм.

Для приобретения запланированных в модуле навыков в каждом учебном блоке даны примеры решения типовых задач.

Учебно-методическая структура модуля

Модуль № 1. «Механика материальной точки»		
1. Учебный блок «Кинематика материальной точки»	2. Учебный блок «Динамика поступательного движения»	3. Учебный блок «Колебательное движение»
– системы координат; – кинематические характеристики; – средняя и мгновенная скорости; – среднее и мгновенное ускорения; – движение по окружности; – принцип относительности	– законы Ньютона; – силы в природе; – центр масс системы; – работа и энергия; – поле сил; – взаимодействие материальных точек	– две формы уравнения колебаний; – энергия при колебательном движении; – затухающие колебания; – вынужденные колебания; – резонанс; – сложение колебаний

Методическая программа модуля

Тема занятия	Тип занятия	Вид занятия	Часы
1. Механика материальной точки	формирование новых знаний	вводная лекция	1
2. Кинематика поступательного движения материальной точки	формирование новых знаний	лекция	1
3. Механика материальной точки (диагностические тесты)	занятие-проверка результатов обучения	практическое занятие	1
4. Прямолинейное движение материальной точки	углубление и систематизация навыков	практическое занятие	1
5. Кинематика криволинейного движения материальной точки	формирование новых знаний	лекция	2
6. Криволинейное движение материальной точки	углубление и систематизация навыков	практика	2
7. Динамика поступательного движения. Основные понятия и законы	формирование новых знаний	лекция	2
8. Силы в природе. Законы Ньютона. Импульс силы, импульс материальной точки	углубление и систематизация навыков	практическое занятие	2
9. Законы сохранения в механике материальной точки	формирование новых знаний	лекция	2
10. Работа и энергия в механике. Силовое поле	углубление и систематизация навыков	практическое занятие	2
11. Колебательное движение материальной точки	формирование новых знаний	лекция	2

Окончание табл.

12. Две формы уравнения колебаний	углубление и систематизация навыков	практическое занятие	2
13. Виды колебаний. Сложение колебаний. Резонанс	формирование новых знаний	лекция	2
14. Механика материальной точки (по графику из списка лабораторных работ)	формирование новых знаний	лабораторное занятие	4
15. Вынужденные и затухающие колебания. Сложение колебаний	формирование новых знаний	практическое занятие	1
16. Механика материальной точки	занятие-проверка результатов обучения	итоговое занятие	1

1. УЧЕБНЫЙ БЛОК «КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ»

Введение

Кинематика – раздел механики, в котором изучается движение тел, но не рассматриваются причины, вызывающие это движение. Любое сложное движение может быть представлено совокупностью простейших движений: поступательного, колебательного и вращательного. При поступательном и в ряде случаев колебательного движений формой и размерами тела можно пренебречь, так как от них не зависят закономерности движения. В этом случае тела заменяются их моделью – *материальной точкой*, т.е. объектом, не имеющим размеров, но обладающим массой. В настоящем учебном блоке рассматриваются закономерности поступательного движения, поэтому они рассматриваются с использованием модели материальной точки (м.т.).

Представление движущегося тела материальной точкой возможно только в случае, когда все его элементы движутся по одинаковым траекториям. Это является признаком (критерием) поступательного движения.

Для описания движения используются *системы координат*. Программа данного учебного блока предусматривает получение навыков использования *прямоугольной* (декартовой) и *сферической* систем координат. *Критерием* выбора той или иной системы координат являются наибольшая простота получаемых уравнений движения и наименьшее их количество.

Для успешного изучения учебного материала данного блока учащийся должен в рамках программы средней школы

иметь представление:

– об основных кинематических характеристиках движения;

обладать навыками:

– использования прямоугольной системы координат;
– сложения и вычитания векторов;
– дифференцирования и интегрирования простейших функций.

Учебная программа блока

Содержание блока	Форма подготовки	Литература
1. Система сферических и прямоугольных координат. Связь систем координат	лекция, самост.	[4]
2. Траектория, путь, перемещение, уравнение траектории	самост.	[3], [4]
3. Скорость: средняя, мгновенная	самост.	[3]

Окончание табл.

4. Ускорение: среднее, мгновенное	самост.	[3]
5. Криволинейное движение. Угловая скорость и угловое ускорение. Нормальное, тангенциальное, полное ускорения	самост., лекция	[3], [4]
6. Принцип относительности и суперпозиция движений. Сложение скоростей и ускорений	лекция	[2], [3], [4]

Цели обучения

студент должен **знать**	студент должен **уметь**
– способы задания положения материальной точки в декартовой и сферической системах координат; – основные кинетические величины, характеризующие движение материальной точки: траектория, перемещение, пройденный путь, скорость и ускорение материальной точки; – основные кинематические величины, характеризующие движение материальной точки по окружности: угловое перемещение, угловая скорость, угловое ускорение; – связь между линейными и угловыми кинематическими величинами; – принципы относительности и суперпозиции движений: сложение перемещений, скоростей, ускорений.	– определять координаты точки по ее радиус-вектору; – определять радиус-вектор точки по ее координатам; – находить значение скорости и ускорения материальной точки по известной зависимости от времени ее радиус-вектора; – рассчитывать величину перемещения и пройденного пути; – получать уравнение траектории движения материальной точки; – использовать принцип независимости движений при решении задач по движению тела; – находить тангенциальное, нормальное, полное ускорения тела и радиус кривизны траектории при криволинейном движении; – находить угловую скорость, угловое, нормальное, тангенциальное и полное ускорения при круговом движении по зависимости от времени угла поворота радиус-вектора

1.1. Краткое содержание теоретического материала

Положение материальной точки в пространстве в данный момент времени задается с использованием *системы координат* относительно некоторой *точки* (тела) *отсчета*, которая является началом системы координат. Отрезок, соединяющий точку отсчета O (рис. 1.1) и материальную точку (м.т.) и направленный к м.т., называется *радиус-вектором* ($\vec{r}$).

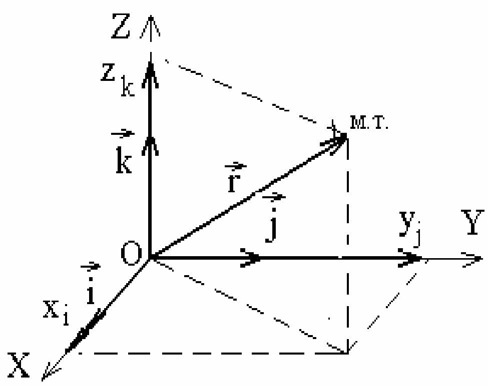


Рис. 1.1

Хотя $\vec{r}$ определяет положение м.т., описать это положение с его помощью невозможно, т.к. для этого необходимо описать направление $\vec{r}$. Поэтому для описания положения м.т. используют системы координат, в частности *прямоугольную* (см. рис. 1.1). В этой системе проекции $\vec{r}$ на взаимноперпендикулярные оси координат x, y, z полностью определяют модуль и направление $\vec{r}$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\ , \tag{1}$$

если выбраны (заданы) орты (единичные векторы) системы координат.

В скалярной форме (1) запишется через координаты в виде

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ . \tag{2}$$

В ряде случаев, например – движения м.т. по сферической поверхности, удобно использовать сферическую систему координат, в которой параметрами являются модуль радиус-вектора – r, азимутальный угол – β и полярный угол – α (рис. 1.2).

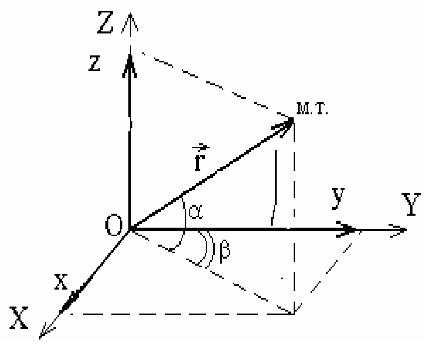


Рис. 1.2

При этом параметры прямоугольной и сферической систем координат связаны соотношением (2) и (3).

$$\beta = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \tag{3}$$

$$\alpha = \arccos\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r}$$

или

$$\alpha = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{4}$$

Таким образом в любой *выбранной* системе координат достаточно трех параметров для описания положения материальной точки. Сферическая система координат в дальнейшем будет привлекаться только в тех случаях, где она более удобна, чем прямоугольная.

При движении материальной точки ее координаты и радиус-вектор изменяются со временем, а сама материальная точка (конец $\vec{r}$) описывает в пространстве линию, которая называется ее **траекторией**.

Законом движения или *уравнением траектории в векторной форме* называется зависимость радиус-вектора материальной точки от времени

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\ , \tag{5}$$

Это уравнение эквивалентно трем уравнениям для координат

$$x = x(t); \qquad y = y(t); \qquad z = z(t). \tag{6}$$

Для получения **уравнения траектории** материальной точки в явном виде из системы (6) необходимо исключить время t, т.е. получить зависимость координат друг от друга. По форме траектории бывают **прямолинейными** и **криволинейными**. Если при движении материальная точка находится все время в одной плоскости, то такое движение называется *плоским.* При этом можно использовать неполную систему координат, например xoy, xoz или zoy.

Вектор перемещения и отрезок пути материальной точки. Скалярную величину ΔS, равную расстоянию вдоль траектории, пройденному точкой за данный промежуток времени, называют **отрезком пути** материальной точки (**путем**). Путь положителен всегда и в процессе движения может только возрастать.

Пусть за время Δt материальная точка переместилась из точки M в точку M^*, пройдя вдоль траектории отрезок пути ΔS (рис. 1.3). Вектор $\Delta\vec{r}$, проведенный из начальной точки M в конечную точку M^*, называется **вектором перемещения** материальной точки за время Δt

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t),$$

или

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}, \tag{7}$$

где $\Delta x = x^/ - x$; $\Delta y = y^/ - y$; $\Delta z = z^/ - z$.

Из рис. 1.3 видно, что при криволинейном движении отрезок пути ΔS не равен величине вектора перемещения

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

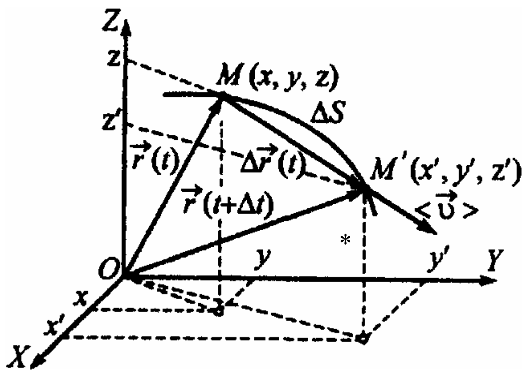


Рис. 1.3

Вектором средней скорости за время Δt называется отношение вектора перемещения материальной точки ко времени, за которое оно совершено

$$<\vec{\upsilon}> = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k} = <\upsilon_x>\vec{i} + <\upsilon_y>\vec{j} + <\upsilon_z>\vec{k}. \tag{8}$$

Направление вектора $<\vec{\upsilon}>$ совпадает с $\Delta\vec{r}$ (рис. 1.3), а абсолютная величина равна

$$|<\vec{\upsilon}>|=\frac{|\Delta\vec{r}\,|}{\Delta t}=\sqrt{<\upsilon_x>^2+<\upsilon_y>^2+<\upsilon_z>^2}=\sqrt{\left\{\frac{\Delta x}{\Delta t}\right\}^2+\left\{\frac{\Delta y}{\Delta t}\right\}^2+\left\{\frac{\Delta z}{\Delta t}\right\}^2}. \quad (9)$$

Средней путевой скоростью за время Δt называется отношение отрезка пути ΔS к Δt:

$$\upsilon_{cp}=\frac{\Delta S}{\Delta t}. \quad (10)$$

Средняя путевая скорость является *скалярной* величиной.

Так как ΔS = $|\Delta\vec{r}\,|$ только в случае движения с неизменной по направлению скоростью, то в общем случае средняя путевая скорость не совпадает с модулем вектора средней скорости: $\upsilon_{cp}\neq|<\vec{\upsilon}>|$.

Вектор скорости материальной точки $\vec{\upsilon}(t)$ в данный момент времени t определяется как предел, к которому стремится вектор средней скорости $<\vec{\upsilon}>$ за время от t до t + Δt при безграничном уменьшении промежутка времени Δt

$$\vec{\upsilon}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}<\vec{\upsilon}>=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\vec{r}^{\,/}(t),$$

где штрих означает производную по времени, которую принято записывать в виде

$$\vec{\upsilon}(t)=\vec{r}^{\,/}(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (11)$$

где $d\vec{r}$ – перемещение материальной точки за бесконечно малый промежуток времени dt.

Заметим, что при $\Delta t\to 0$ вектор $\Delta\vec{r}\to d\vec{r}$ и направлен в сторону движения по касательной к траектории материальной точки в момент времени t, а по абсолютной величине

$$|d\vec{r}\,|=dS. \quad (12)$$

$$\vec{\upsilon}(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i}+\frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}+\frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}\right\}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}=\upsilon_x\vec{i}+\upsilon_y\vec{j}+\upsilon_z\vec{k}, \quad (13)$$

где проекции вектора скорости на оси декартовой системы координат

$$\upsilon_x=\frac{dx}{dt},\qquad \upsilon_y=\frac{dy}{dt},\qquad \upsilon_z=\frac{dz}{dt}, \quad (14)$$

а модуль вектора скорости

$$\upsilon=|\vec{\upsilon}|=\sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2}=\sqrt{\left\{\frac{dx}{dt}\right\}^2+\left\{\frac{dy}{dt}\right\}^2+\left\{\frac{dz}{dt}\right\}^2}. \quad (15)$$

Таким образом вектор скорости материальной точки $\vec{\upsilon}(t)$ направлен по касательной к траектории в сторону движения, его проекции на оси OX, OY, OZ определяются соотношениями (14), а абсолютная величина – выражением (15).

Модуль вектора скорости (используя (12)) также можно определить с помощью выражения

$$\upsilon = |\vec{\upsilon}| = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{dS}{dt}, \tag{16}$$

т.е., взяв производную от пути по времени.

Пусть материальная точка, перемещаясь по своей траектории (рис. 1.4), находилась в момент времени t в точке M, а в момент времени $t + \Delta t$ – в точке M^*. Векторы скорости $\vec{\upsilon}(t)$ и $\vec{\upsilon}(t+\Delta t)$ в точках M и M^* направлены по касательным к траектории. Если движение материальной точки криволинейное, то, очевидно, направления $\vec{\upsilon}(t)$ и $\vec{\upsilon}(t+\Delta t)$ не совпадают. Перенесем начало вектора $\vec{\upsilon}(t+\Delta t)$, не изменяя его направления, в точку M и соединим вектором $\Delta\vec{\upsilon}$ конец вектора $\vec{\upsilon}(t)$ с концом перенесенного вектора $\vec{\upsilon}(t+\Delta t)$

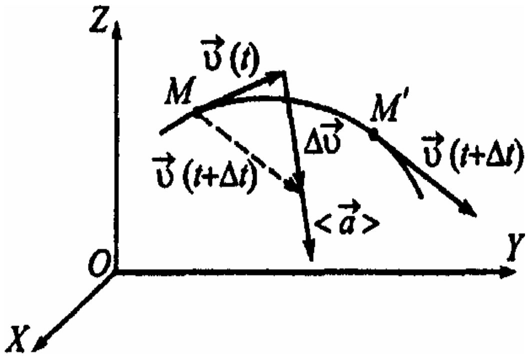


Рис. 1.4

$$\Delta\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(t+\Delta t) - \vec{\upsilon}(t). \tag{17}$$

Вектором среднего ускорения за время Δt называют отношение приращения вектора скорости $\Delta\vec{\upsilon}$ ко времени, за которое оно совершено

$$<\vec{a}> = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}. \tag{18}$$

Направление вектора $<\vec{a}>$ совпадает с направлением $\Delta\vec{\upsilon}$ (см. рис. 1.4).

Выражение (18) при Δt, стремящемся к нулю, определяет **вектор ускорения** материальной точки в момент времени t (мгновенное ускорение)

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \vec{\upsilon}^{/}(t) = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}, \tag{19}$$

где $d\vec{\upsilon}$ – приращение вектора скорости за бесконечно малый промежуток времени dt.

Выражение (19) можно записать в виде

$$\vec{a} = \frac{d\upsilon_x}{dt}\vec{i} + \frac{d\upsilon_y}{dt}\vec{j} + \frac{d\upsilon_z}{dt}\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}. \tag{20}$$

Следовательно, проекции вектора ускорения на координатные оси

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt}; \quad a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt}; \quad a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt}, \tag{21}$$

а модуль вектора ускорения

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\left\{\frac{d\upsilon_x}{dt}\right\}^2 + \left\{\frac{d\upsilon_y}{dt}\right\}^2 + \left\{\frac{d\upsilon_z}{dt}\right\}^2}. \tag{22}$$

Следует отметить, что понятие, аналогичное υ_{cp} (10), для ускорения не используется. Если речь идет о среднем ускорении, то имеется в виду *вектор среднего ускорения* $<\vec{a}>$ (18).

Если траектория материальной точки лежит в плоскости *XOY*, то вектор ускорения $\vec{a}$ всегда можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие (рис. 1.5)

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau, \tag{23}$$

где $\vec{a}_n$ – **нормальное** (или центростремительное) и $\vec{a}_\tau$ – **тангенциальное** (или касательное) **ускорения** материальной точки. Вектор $\vec{a}_n$ всегда направлен к центру кривизны траектории 0' в точке *M*, а вектор $\vec{a}_\tau$ лежит на касательной к траектории в точке М и может быть направлен как в сторону движения, так и в противоположную сторону. Такое разложение вектора ускорения $\vec{a}$ часто необходимо в связи с тем, что вектор скорости материальной точки $\vec{\upsilon}$ может изменяться как по направлению, так и по абсолютной величине. Нормальное ускорение $\vec{a}_n$ характеризует быстроту изменения направления вектора скорости материальной точки. Тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$ характеризует быстроту изменения модуля скорости материальной точки.

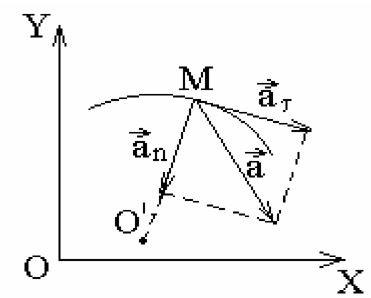


Рис. 1.5

Можно показать, что абсолютные значения $a_n = |\vec{a}_n|$ и $a_\tau = |\vec{a}_\tau|$ определяются соотношениями

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}; \tag{24}$$

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}, \tag{25}$$

где $\upsilon = |\vec{\upsilon}|$ – модуль скорости материальной точки; *R* – радиус кривизны траектории в данный момент времени.

Из (24) – (25) видно, что $a_n \geq 0$ (причем $a_n = 0$ при прямолинейном движении: $R \to \infty$), $a_\tau > 0$ при ускоренном движении материальной точки, $a_\tau < 0$, если материальная точка движется замедленно, и $a_\tau = 0$ при равномерном движении.

Из (23) и рис. 1.5 следует, что абсолютные значения величин a, a_n, a_τ связаны между собой соотношением

$$a = \left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}. \qquad (26)$$

Понятия скорости и ускорения являются относительными и зависят от выбора системы координат. Пусть имеется неподвижная система отсчета *K* и система отсчета *K′*, движущаяся поступательно (углы между осями *OX* и *O′X′*, *OY* и *O′Y′*, *0Z* и *O′Z′* остаются все время постоянными) относительно *K* (рис. 1.6).

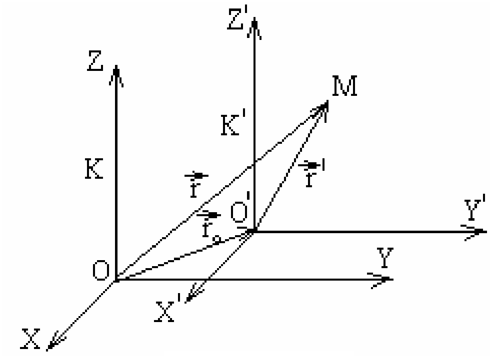


Рис. 1.6

Положение материальной точки *M* в системах отсчета *K* и *K′* в один и тот же момент времени определяется радиус-векторами $\vec{r}$ и $\vec{r}^{\,\prime}$ соответственно. Из рис. 1.6 видно, что

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}^{\,\prime}, \qquad (27)$$

где $\vec{r}_0$ – радиус-вектор начала координат *O′* системы *K′* в системе *K*. Взяв производную по времени от левой и правой частей уравнения (27), получим

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}^{\,\prime}}{dt} \quad \text{или} \quad \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{\upsilon}^{\,\prime}, \qquad (28)$$

где $\vec{\upsilon}$ – скорость материальной точки относительно неподвижной системы отсчета *K*; $\vec{\upsilon}^{\,\prime}$ – скорость материальной точки относительно движущейся системы отсчета *K′* – **относительная скорость**, $\vec{\upsilon}_0$ – скорость поступательного движения системы отсчета *K′* относительно системы *K* – **переносная скорость**.

Продифференцировав (28) еще раз по времени, получим

$$\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\vec{\upsilon}_0}{dt} + \frac{d\vec{\upsilon}^{\,\prime}}{dt} \text{ или } \vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}^{\,\prime}, \qquad (29)$$

где $\vec{a}$ – ускорение материальной точки в системе *K*; $\vec{a}^{\,\prime}$ – ее ускорение в системе *K′*, $\vec{a}_0$ – ускорение системы отсчета *K′* относительно *K*. Соотношение (28) представляет собой правило сложения скоростей.

Из полученных правил сложения скоростей (28) и ускорений (29), в частности, следует, что если материальная точка участвует в нескольких движениях со скоростями, $\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2, \vec{\upsilon}_3, ...$ и ускорениями $\vec{a}_{1,} \vec{a}_2, \vec{a}_3, ...$, то результирующие скорость $\vec{\upsilon}$ и ускорение $\vec{a}$ материальной точки относительно неподвижной системы отсчета K определяются выражениями

$$\vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2 + \vec{\upsilon}_3 + ...; \tag{30}$$

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + ... \; . \tag{31}$$

Кинематика движения материальной точки по окружности

Пусть материальная точка совершает движение по окружности радиусом R. Выберем систему координат, плоскость XOY которой совпадает с плоскостью движения материальной точки, а начало координат совпадает с центром окружности, описываемой материальной точкой (рис. 1.7). Скорость движения материальной точки $\vec{\upsilon}$, направленная по касательной к траектории, всегда перпендикулярна радиус-вектору материальной точки $\vec{r}$, а величина радиус-вектора $|\vec{r}| = R$ не меняется со временем.

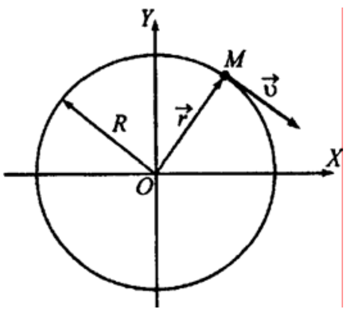


Рис. 1.7

При движении материальной точки по окружности, кроме скорости $\vec{\upsilon}$, которую часто называют **линейной скоростью**, удобно использовать понятие **угловой скорости материальной точки** ω.

Средней угловой скоростью $<\omega>$ материальной точки на данном участке движения называется величина, равная отношению угла поворота $\Delta\varphi$ радиус-вектора точки за некоторый промежуток времени Δt к этому промежутку времени:

$$<\omega> = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$

а угловую скорость ω определим, как предел, к которому стремится $<\omega>$ при $\Delta t \to 0$:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} <\omega> = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}, \tag{32}$$

где $d\varphi$ – угол, на который поворачивается радиус-вектор материальной точки $\vec{r}$ за бесконечно малый промежуток времени dt.

Легко найти связь между угловой скоростью ω и модулем линейной скорости υ материальной точки. За время dt материальная точка пройдет путь dS по дуге окружности радиусом R (см. рис. 1.7), причем

$$dS = Rd\varphi. \tag{33}$$

Очевидно, что, независимо от характера движения, путь ΔS, пройденный точкой за промежуток времени Δt, будет равен $\Delta S = R\Delta\varphi$, где $\Delta\varphi$ – угол поворота радиус-вектора точки за этот промежуток времени.

Поскольку величина линейной скорости (см. (16))

$$\upsilon = \frac{dS}{dt}, \tag{34}$$

то, подставив (33) в (34) с учетом (32), получим

$$\upsilon = \frac{Rd\varphi}{dt} = R\omega. \tag{35}$$

Угловым ускорением ε материальной точки называется величина, равная пределу, к которому стремится отношение приращения угловой скорости $\Delta\omega$ за промежуток времени Δt к этому промежутку времени при стремлении последнего к нулю

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}, \tag{36}$$

т.е. производной от угловой скорости по времени.

Из (36) видно, что $\varepsilon > 0$, если угловая скорость материальной точки ω увеличивается со временем, $\varepsilon < 0$, если угловая скорость уменьшается со временем, и $\varepsilon = 0$, если $\omega = \text{const}$.

Используя соотношения (35) – (36), можно найти нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения материальной точки при ее движении по окружности радиусом R

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R; \tag{37}$$

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon. \tag{38}$$

Тогда полное ускорение материальной точки

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \tag{39}$$

1.2. Методические указания к лекционным занятиям

Вопросы лекции	Форма изучения	Литература	Вопросы для самоконтроля студентов
1. Кинематика поступательного движения материальной точки 1.1. Система сферических и прямоугольных координат. Связь систем координат. 1.2. Скорости: средняя, мгновенная. 1.3. Ускорение: среднее, мгновенное. 1.4. Траектория, путь, уравнение траектории, перемещение	 лекция + самост. самост. самост. лекция + самост.	 [4, § 2] [3, § 1.3], [4, § 3] [3, § 1.3], [4, § 7] [3, § 1.2] [4, § 1, 8]	1. Что такое «материальная точка»? Приведите примеры 2. Что называется системой отсчета? 3. Как, зная закон изменение координаты точки, определить законы изменения ее скорости и ускорения вдоль заданного направления? 4. Как определить векторы скорости и ускорения материальной точки, если известен закон изменения ее радиус-вектора относительно начала координат? 5. Как можно получить уравнение траектории, если известен закон изменения радиус-вектора материальной точки? 6. Чему равно расстояние между двумя точками в пространстве? Как определить расстояние в данный момент времени между двумя движущимися материальными точками, если известны законы изменения их скоростей в одной и той же системе отсчета?
2. Кинематика криволинейного движения материальной точки 2.1. Криволинейное движение. 2.2. Угловая скорость и угловое ускорение. 2.3. Нормальное, тангенциальное, полное ускорения. 2.4. Принцип относительности и суперпозиция движений. 2.5. Сложение скоростей и ускорений	 лекция лекция + самост. лекция + самост. лекция лекция	 [3, § 4.7], [4, § 10] [3, § 1.4], [4, § 9] [3, § 1.5], [4, § 9] [3, § 1.2], [4, § 17] –	1. Что называется угловым перемещением материальной точки? 2. Как, зная закон изменения углового ускорения материальной точки, найти ее угловую скорость и угловое смещение в данный момент времени? 3. Как рассчитать угловое перемещение и угловую скорость при равномерном вращательном движении? 4. Какая связь существует между линейными и угловыми характеристиками движения материальной точки? 5. В чем состоит принцип независимости движения? 6. Какие составляющие ускорения называют нормальной и тангенциальной? Как они направлены? Какое изменение скорости они характеризуют? 7. Чему равно полное ускорение при движении тела, брошенного под углом к горизонту? 8. Что называют кривизной траектории? Чему равен радиус кривизны?

1.3. Методические указания к практическим занятиям

Тема занятия	Задачи	Рекомендации	Задачи из сборников
Прямолинейное движение материальной точки	1. Определение кинематических характеристик движения (скорость, ускорение, путь, перемещение)	1. Необходимо помнить, что эти величины – векторные, т.е. для их определения требуется найти модуль (длину вектора) и направление в выбранной системе координат. $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, $\upsilon_x = \frac{dx}{dt}, \upsilon_y = \frac{dy}{dt}, \upsilon_z = \frac{dz}{dt}$, $\lvert\vec{\upsilon}\rvert = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}$, $\vec{\upsilon} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k}$, $a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt}, a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt}, a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt}$, $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$. 2. Путь положителен при любом направлении движения и может только возрастать: – в случае прямолинейного равномерного движения путь можно определить как модуль разности координат $\Delta S = \lvert x(t) - x(t_0)\rvert$; – если движение неравномерное, то при определении пути поступают по алгоритму: – определить закон изменения скорости и ускорения; – определить время t_i, когда скорость обращается в ноль (точка разворота) определить отрезки пути соответствующие промежуткам времени $[t_1 - t_0]$, $[t_2 - t_1]$, $[t_3 - t_2]$ … – определить общий путь как сумму отрезков пути; – $\Delta S = \lvert x(t_1) - x(t_0)\rvert + \lvert x(t_2) - x(t_1)\rvert + \ldots$ или $\Delta S = \int_{t_0}^{t_1} \upsilon_x(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} \upsilon_x(t)dt + \ldots$ 3. Средняя путевая скорость является скалярной величиной равной отношению пути, пройденного материальной точкой за время Δt ко времени, затраченному на этот путь $\upsilon_{cp} = \frac{\Delta S_1 + \Delta S_2 + \ldots}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \ldots}$.	[1, № 1.8 – 1.10, 1.27 – 1.32]
	2. Определение уравнения движения по известным кинематическим характеристикам	1. Выбор системы отсчета может быть произвольным. Начало отсчета удобно совмещать с положением точки в начальный момент времени, а направление осей удобно совмещать с направлением одного из векторов скорости и/или ускорения. 2. Уравнение движения может задаваться неявно $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Исключив время, можно получить уравнение траектории $f(x, y, z)$	[1, № 1.27 – 1.32]

Окончание табл.

Криволинейное движение материальной точки	1. Определение кинематических характеристик криволинейного движения	1. Задачи на определение кинематических характеристик криволинейного движения принципиально не отличается от соответствующих задач поступательного движения. 2. Удобно такие задачи решать в системе координат, точка отсчета которой совпадает с центром кривизны траектории – мгновенным центром кривизны. Все движение рассматривается как ряд последовательных вращений вокруг мгновенных центров кривизны. 3. Тангенциальное и нормальное ускорения определяются как $\vec{a}_\tau = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$, $\vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{R}\vec{n}$, где $\vec{n}$ – единичный вектор, направленный к центру кривизны траектории. При этом полное ускорение $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$ и полное ускорение часто бывает известно (например, ускорение свободного падения). 4. Соотношение между этими ускорениями и скоростью можно найти геометрически из рис. 1.3	[1, № 1.41, 1.43, 1.45 – 1.50]
	2. Определение относительной скорости и траектории в выбранной системе координат	1. Если известны скорости двух тел $\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2$ относительно некоторой системы отсчета, связав движущуюся систему отсчета с одним из тел, относительную скорость в этой системе можно определить из соотношения $\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_2 + \vec{\upsilon}_{отн}$ или $\vec{\upsilon}_{отн} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2$. При этом, для одной и той же неподвижной системы отсчета, где $\vec{\upsilon}_{отн1} = -\vec{\upsilon}_{отн2}$, где $\vec{\upsilon}_{отн1}$ – скорость второго тела относительно первого и $\vec{\upsilon}_{отн2}$ – скорость первого тела относительно второго. 2. Траектория движения в данной системе координат определяется радиус-вектором $\vec{r}_i$. 3. Изменение системы отсчета на другую систему, движущуюся относительно данной равномерно и прямолинейно приведет к изменению $\vec{\upsilon}_{отн}$, $\vec{r}_i$, но ускорение $\vec{a}_i$ сохранится.	[1, № 1.16 – 1.25]
	3. Решение задач на принцип суперпозиции движения. Определение экстремальных параметров движения	1. Сложное (криволинейное) движение в плоскости $y = f(x)$ можно представить как совокупность простых движений относительно соответствующих осей $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$. 2. Выбрать произвольно систему координат и определить соответствующие компоненты скорости, ускорения. 3. Составить систему уравнений и разрешить ее для условий, при которых реализуются экстремальные значения (высота, дальность и т.д.). 4. Определить зависимости этих величин (например, дальность полета от угла бросания) от параметров движения и найти экстремум функции	[1, № 1.61 – 1.65]

1.4. Примеры решения задач

Пример 1.

Самолет пролетел расстояние из города А в город В со скоростью υ_1 = 800 км/ч, а обратно – половину пути со скоростью υ_2 = 900 км/ч, а вторую половину со скоростью υ_3 = 700 км/ч. Определить среднюю путевую скорость самолета за все время полета (**уровень 1**).

Решение. При движении из города A в город B самолет пролетел расстояние $\Delta S = S$ (где S – расстояние между городами) за время Δt_1. Так как по условию задачи скорость при этом была постоянной, то $\Delta S_1 = \upsilon_1\, \Delta t_1$. При полете из города B в город A самолет на первую половину пути $\Delta S_2 =$ $= 1/2S$ затратил время Δt_2, а на вторую половину пути $\Delta S_3 = S/2$– время Δt_3. При этом $\Delta S_2 = \upsilon_2\, \Delta t_2$, $\Delta S_3 = \upsilon_3\, \Delta t_3$. По определению средней путевой скорости

$$\upsilon_{cp} = \frac{\Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3}.$$

Следовательно

$$\upsilon_{cp} = \frac{2S}{\dfrac{S}{\upsilon_1} + \dfrac{S}{2\upsilon_2} + \dfrac{S}{2\upsilon_3}} = \frac{4\upsilon_1\upsilon_2\upsilon_3}{2\upsilon_2\upsilon_3 + \upsilon_1\upsilon_3 + \upsilon_1\upsilon_2} \approx 794\ \text{км/ч}.$$

Ответ: $\upsilon_{cp} = \dfrac{4\upsilon_1\upsilon_2\upsilon_3}{2\upsilon_2\upsilon_3 + \upsilon_1\upsilon_3 + \upsilon_1\upsilon_2} \approx 794\ \text{км/ч}$.

Пример 2.

Материальная точка движется так, что ее радиус-вектор зависит от времени по закону $\vec{r} = 2t\vec{i} + 3t^2\vec{j}\,[\text{м}]$. Найти уравнение траектории $y = f(x)$ точки, а также определить значения нормального, тангенциального, полного ускорения точки и радиус кривизны траектории в момент времени τ = 1 с (**уровень 2**).

Решение. Для определения уравнения траектории материальной точки в виде $y = f(x)$ запишем закон движения в координатной форме

$$x = 2\,t, \qquad y = 3t^2.$$

Следовательно

$$t = x/2; \qquad y = 3x^2/4.$$

В произвольный момент времени t скорость и ускорение точки равны

$$\vec{\upsilon}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{i} + 6t\vec{j}\,[\text{м/с}]; \qquad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = 6\vec{j}\left[\text{м/с}^2\right],$$

а в момент времени τ

$$\vec{\upsilon}(\tau) = 2\vec{i} + 6\tau\vec{j} = 2\vec{i} + 6\vec{j}\,[\text{м/с}]; \qquad \vec{a}(\tau) = \vec{a}(t) = 6\vec{j}\left[\text{м/с}^2\right]. \qquad (1)$$

Поскольку точка движется по кривой, лежащей в плоскости *XOY*, то вектор ускорения можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие – нормальное и тангенциальное ускорения, лежащие в этой же плоскости:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau, \text{ причем } a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}, \qquad (2)$$

а их абсолютные значения

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}; \qquad a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}.$$

Модуль вектора скорости точки в произвольный момент времени равен

$$\upsilon = \sqrt{4 + 36t^2}, \qquad (3)$$

тангенциальное ускорение

$$a_\tau(t) = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{36}{\sqrt{4 + 36t^2}}$$

в момент времени τ примет значение

$$a_\tau(\tau) = \frac{36\tau}{\sqrt{4 + 36\tau^2}} \approx 5{,}6 \text{ м/с}^2. \qquad (4)$$

Нормальное ускорение точки можно найти из выражения (2) в момент времени τ

$$a_n(\tau) = \sqrt{a^2(\tau) - a_\tau^2(\tau)}, \qquad (5)$$

или с учетом (1) и (4)

$$a_n(\tau) = \sqrt{36 - \frac{324\tau^2}{1 + 9\tau^2}} \approx 1{,}9 \text{ м/с}^2.$$

Чтобы найти радиус кривизны траектории в момент времени τ, воспользуемся приведенной выше формулой для a_n с учетом выражений (3) и (5)

$$R = \frac{\upsilon^2}{a_n} \approx 21{,}1 \text{ м}.$$

Ответ: $y = 3x^2/4$ [м]; $a_n(\tau) = 1{,}9$ м/с^2; $a_\tau(\tau) = 5{,}6$ м/с^2; $a(\tau) = 6$ м/с^2; $R \approx 21{,}1$ м.

Пример 3.

Материальная точка движется так, что ее радиус-вектор зависит от времени по закону $\vec{r} = \alpha t\vec{i} + (\beta t^2 - \gamma t^3)\vec{j}\,[\text{м}]$, где α = 1 м/с, β = 3 м/с^2, γ = = 4 м/с^3. Найти максимальную скорость точки (**уровень 2**).

Решение. Из зависимостей координат точки от времени

$$x = \alpha\, t, \qquad y = \beta t^2 - \gamma t^3$$

следует, что вдоль оси OX точка движется с постоянной скоростью $\upsilon_x = \alpha$, а вдоль оси OY – с некоторым ускорением a_y, которое меняется с течением времени. Следовательно, проекция вектора скорости

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \alpha\vec{i} + (2\beta t - 3\gamma t^2)\vec{j} \qquad (1)$$

на ось OY равна

$$\upsilon_y = 2\beta t - 3\gamma t^2, \qquad (2)$$

а модуль скорости, равный $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\alpha^2 + (2\beta t - 3\gamma t^2)^2}$, (3)

с течением времени будет меняться. Скорость будет максимальна в момент времени, соответствующий максимуму величины проекции υ_y. Исследуем зависимость (2) на экстремум

$$\frac{d\upsilon_y}{dt} = 2\beta - 6\gamma t\,.$$

Из условия экстремума ($\beta - 3\gamma\tau = 0$) следует, что $\tau = \dfrac{\beta}{3\gamma}$.

Поскольку вторая производная $\upsilon_y(t)$ по времени отрицательна

$$\frac{d^2\upsilon_y}{dt^2} = -6\gamma\,,$$

то функция $\upsilon_y(t)$ имеет только максимум, поэтому момент времени τ соответствует максимуму проекции скорости υ_y и максимуму величины скорости

$$\upsilon_{\max} = \sqrt{\alpha^2 + (2\beta\tau - 3\gamma\tau^2)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \frac{\beta^4}{9\gamma^2}} = 1{,}25\ \text{м/с}\,.$$

Ответ: $\upsilon_{\max} = \sqrt{\alpha^2 + \dfrac{\beta^4}{9\gamma^2}}$ = 1,25 м/с.

Пример 4.

С какой наименьшей скоростью и под каким углом к горизонту надо бросить мяч, чтобы забросить его на крышу дома высотой A с расстояния S от дома? Сопротивлением воздуха пренебречь (**уровень 3**).

Решение. Выберем систему координат XOY так, как показано на рис. 1.8. Тогда через проекции векторов начальной скорости мяча $\vec{\upsilon}_0$ и ускорения $\vec{a}=\vec{g}$ на оси системы координат, а уравнения движения мяча примут вид

$$x = \upsilon_0 t\cos\alpha, \qquad y = \upsilon_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \tag{1}$$

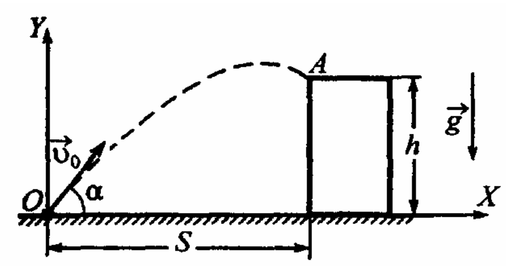


Рис. 1.8

Поскольку мяч должен быть заброшен на крышу дома с минимальной начальной скоростью, то, очевидно, нужно рассмотреть бросок, при котором мяч попадет в точку A. Уравнения (1), записанные для этого момента времени, преобразуются к виду

$$s = \upsilon_0\tau\cos\alpha,\; h = \upsilon_0\tau\sin\alpha - \frac{g\tau^2}{2},$$

и позволяют получить зависимость начальной скорости υ_0 мяча от угла α

$$\tau = \frac{s}{\upsilon_0\cos\alpha}, \qquad h = \upsilon_0\frac{s}{\upsilon_0\cos\alpha}\sin\alpha - \frac{gs^2}{2\upsilon_0^2\cos^2\alpha},$$

или

$$h = s\cdot\mathrm{tg}\alpha - \frac{gs^2}{2\upsilon_0^2\cos^2\alpha}, \qquad \upsilon_0^2 = \frac{gs^2}{2\cos^2\alpha(s\cdot\mathrm{tg}\alpha - h)}.$$

Так как в числителе полученного выражения стоит постоянная величина, то начальная скорость будет минимальна, если знаменатель $f(\alpha) = \cos^2\alpha(s\cdot\mathrm{tg}\alpha - h)$ будет максимален. Исследовав функцию $f(\alpha)$ на экстремум, получим

$$\frac{df}{dt} = -2\sin\alpha\cos\alpha(s\cdot\mathrm{tg}\alpha - h) + \cos^2\alpha\frac{s}{\cos^2\alpha} = 0,$$

откуда

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{h+\sqrt{h^2+s^2}}{s}.$$

Найденное значение угла α соответствует наименьшей начальной скорости мяча (поскольку при углах $\alpha \to 90^\circ$ начальная скорость мяча $\upsilon_0 \to \infty$). Следовательно, минимальная скорость, с которой надо бросить мяч, равна

$$\upsilon_{0\min} = \frac{\sqrt{gs^2(1+\mathrm{tg}^2\alpha)}}{2(s\cdot\mathrm{tg}\alpha - h)} = \sqrt{g(\sqrt{s^2+h^2}+h)}\,.$$

Ответ: $\alpha = \mathrm{arctg}\dfrac{h+\sqrt{h^2+s^2}}{s}$, $\upsilon_{0\min} = \sqrt{g(\sqrt{s^2+h^2}+h)}$.

Пример 5.

Турист плывет на моторной лодке против течения реки. Проплывая мимо одного из причалов, он теряет спасательный круг. Через четверть часа он обнаруживает пропажу, поворачивает назад и догоняет круг на расстоянии S = 2 км от причала, вблизи которого он его потерял. Какова средняя скорость течения реки, если мощность двигателя лодки не изменялась? (**уровень 3**)

Решение. Введем систему координат, ось OX которой направим против течения реки, а начало отсчета поместим в точку, в которой турист потерял спасательный круг (рис. 1.9). Скорость моторной лодки относительно выбранной системы отсчета может быть представлена в виде векторной суммы скорости лодки в стоячей воде $\vec{\upsilon}_л$ и скорости течения $\vec{\upsilon}_p$

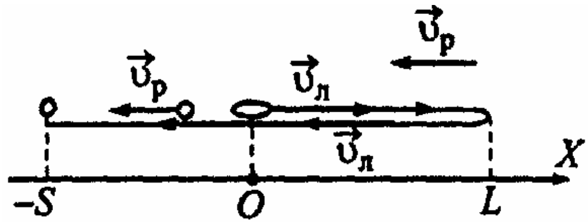


Рис. 1.9

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_л + \vec{\upsilon}_p\,. \qquad (1)$$

После того как турист потерял спасательный круг, он продолжал плыть против течения реки со скоростью $\upsilon_1 = \upsilon_л - \upsilon_p$, а после того как обнаружил пропажу, стал плыть по течению реки со скоростью $\upsilon_2 = -(\upsilon_л + \upsilon_p)$. Очевидно, что

$$L = \upsilon_1 \Delta t_1 = (\upsilon_л - \upsilon_p)\Delta t_1, \qquad S + L = |\upsilon_2| Dt_2 = (\upsilon_л + \upsilon_p) Dt_2, \qquad (2)$$

где L – расстояние, которое турист проплыл до разворота; Δt_1, Δt_2 – время движения лодки до и после разворота соответственно, причем Δt_1 = 0,25 ч.

За время $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$ спасательный круг проплыл расстояние S со скоростью υ_p – $S = \upsilon_p \Delta t$, (3)

Выразив время Δt_2, из (3) и подставив в (2), получим

$$\Delta t_2 = \frac{S}{\upsilon_p} - \Delta t_1, \qquad S + (\upsilon_л - \upsilon_p)\Delta t_1 = (\upsilon_л + \upsilon_p)\left(\frac{S}{\upsilon_p} - \Delta t_1\right).$$

Отсюда находим $\upsilon_p = \dfrac{S}{2\Delta t_1} = 4$ км/ч.

Решение задачи может быть гораздо короче, если использовать движущуюся систему отсчета, связав ее со спасательным кругом. Абсолютная скорость лодки $\vec{v}$ (скорость относительно системы отсчета, связанной с точкой, в которой турист потерял спасательный круг) равна сумме относительной $\vec{\upsilon}_{отн}$ и переносной $\vec{\upsilon}_{пер}$ скорости

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_{отн} + \vec{\upsilon}_{пер}, \tag{4}$$

причем $\vec{\upsilon}_{пер} = \vec{\upsilon}_p$.

Из (4) с учетом выражения (1) $\vec{\upsilon}_{отн} + \vec{\upsilon}_p = \vec{\upsilon}_л + \vec{\upsilon}_p$, $\vec{\upsilon}_{отн} = \vec{\upsilon}_p$.

Следовательно, относительно такой системы отсчета до и после разворота лодка двигалась с одинаковой скоростью, равной $\upsilon_л$. Поскольку до разворота лодка плыла в течение времени Δt_1, то и обратно она затратит столько же времени. За это время тело отсчета (т.е. спасательный круг) пройдет путь S со скоростью $\vec{\upsilon}_p$:

$$S = \upsilon_p 2\Delta t_1; \qquad \upsilon_p = \frac{S}{2\Delta t_1} = 4 \text{ км/ч}.$$

Ответ: $\upsilon_p = \dfrac{S}{2\Delta t_1} = 4$ км/ч.

Пример 6.

Две нити, намотанные на катушку, тянут со скоростями $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ так, как показано на рис. 1.10, *а*. С какой скоростью движется центр катушки? С какой угловой скоростью вращается катушка? Проскальзывания нет, радиусы катушки R и r заданы (**уровень 4**).

Решение. Движение каждой точки катушки будем рассматривать как сумму поступательного движения вместе с осью катушки со скоростью $\vec{\upsilon}_0$ (переносное движение) и вращательного движения вокруг этой оси с угловой скоростью ω.

Рассмотрим движение двух точек 1 и 2 катушки (рис. 1.10, *б*). Поскольку нить по катушке не проскальзывает, то абсолютные скорости точек 1 и 2 равны скоростям $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$, с которыми движутся нити.

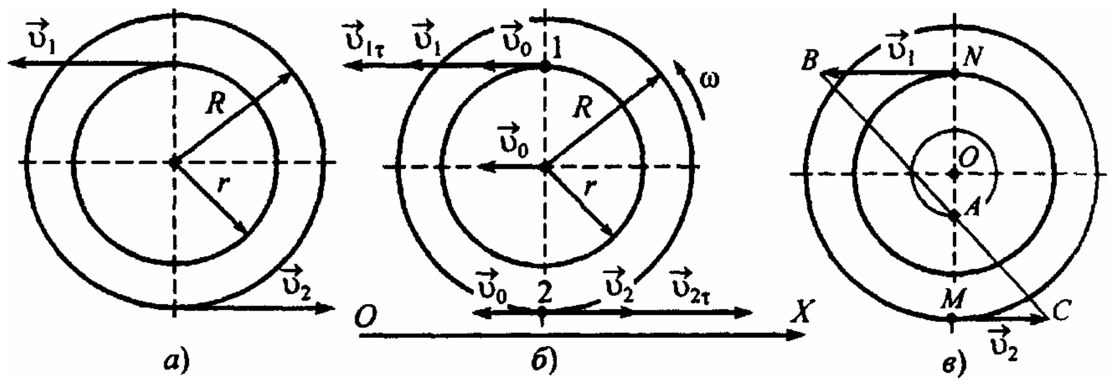


Рис. 1.10

Пусть $\vec{\upsilon}_1 > \vec{\upsilon}_2$.Очевидно, что в этом случае скорость поступательного движения оси катушки $\vec{\upsilon}_0$ будет направлена влево, и катушка будет вращаться против часовой стрелки.

Скорости $\vec{\upsilon}_{1\tau}$ и $\vec{\upsilon}_{2\tau}$, обусловленные вращательным движением катушки, равны:

$$\upsilon_{1\tau} = \omega \cdot r, \qquad \upsilon_{2\tau} = \omega \cdot R \tag{1}$$

и направлены так, как показано на рис. 1.10.

Кроме скоростей $\vec{\upsilon}_{1\tau}$ и $\vec{\upsilon}_{2\tau}$ каждая из выбранных точек будет иметь скорость $\vec{\upsilon}_0$ поступательного движения оси катушки. Следовательно

$$\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_0 + \vec{\upsilon}_{1\tau}, \qquad \vec{\upsilon}_2 = \vec{\upsilon}_0 + \vec{\upsilon}_{2\tau}.$$

Записав эти уравнения в проекции на ось OX с учетом (1)

$$-\upsilon_1 = -\upsilon_0 - \omega r, \quad \upsilon_2 = -\upsilon_0 + \omega R$$

и, решив относительно υ_0 и ω, получим

$$\upsilon_0 = \frac{R\upsilon_1 - r\upsilon_2}{R + r}, \quad \omega = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{R + r}.$$

Угловую скорость катушки можно найти, используя понятие мгновенного центра скоростей, который расположен в точке A (см. рис. 1.10, *в*).

Треугольники ΔABN и ΔAMC подобны, поэтому

$$\frac{BN}{MC} = \frac{NA}{MA},$$

где $BN = \upsilon_1$; $MC = \upsilon_2$; $NA = x$; $MA = R + r - x$; x – расстояние от мгновенного центра скоростей до точки N. Следовательно $\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{x}{R + r - x}$.

Отсюда находим $x = \frac{\upsilon_1(R + r)}{\upsilon_1 + \upsilon_2}$.

Точка N относительно мгновенного центра скоростей будет участвовать только во вращательном движении по окружности радиусом x с угловой скоростью ω. Поэтому

$$\upsilon_1 = \omega x = \frac{\omega\upsilon_1(R + r)}{\upsilon_1 + \upsilon_2}. \qquad (2)$$

Из (2) получим

$$\omega = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{R + r}.$$

Ответ: $\upsilon_0 = \frac{R\upsilon_1 - r\upsilon_2}{R + r}$; $\omega = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{R + r}$.

1.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Скорость течения реки υ = 3 км/ч, а скорость движения лодки относительно воды υ_1 = 6 км/ч. Определите, под каким углом относительно берега должна двигаться лодка, чтобы проплыть поперек реки [60°, **уровень 1**].
2. Тело движется равноускоренно с начальной скоростью υ_0. Определите ускорение тела, если за время t = 2 с оно прошло путь s = 16 м и его скорость $\upsilon = 3v_0$ [4 м/с^2, **уровень 1**].
3. Велосипедист проехал первую половину пути со скоростью υ = 16 км/ч, вторую половину пути – со скоростью υ_2 = 12 км/ч. Определите среднюю скорость движения велосипедиста [13,7 км/ч, **уровень 2**].
4. Тело падает с высоты h = 1 км с нулевой начальной скоростью. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите, какой путь пройдет тело: 1) за первую секунду своего падения; 2) за последнюю секунду своего падения [1) 4,9 м; 2) 132 м, **уровень 2**].
5. Два автомобиля, выехав одновременно из одного пункта, движутся прямолинейно в одном направлении. Зависимость пройденного ими пути задается уравнениями $s_1 = At + Bt^2$ и $s_2 = Ct - Dt^2 + Ft^3$. Определите относительную скорость u автомобилей
[$u = A - C + 2(B - D)t - 3Ft^2$, **уровень 2**].

6. Зависимость пройденного телом пути по окружности радиусом r = 3 м задается уравнением $s = At^2 + Bt$ (A = 0,4 м/с^2, B = 0,1 м/с). Для момента времени t = 1 с после начала движения определите ускорения: 1) нормальное; 2) тангенциальное; 3) полное [1) 0,27 м/с^2; 2) 0,8 м/с^2; 3) 0,84 м/с^2, **уровень 2**].
7. В течение времени t скорость тела задается уравнением вида $\upsilon = A + Bt + Ct^2$ $(0 \le t \le \tau)$. Определите среднюю скорость за промежуток времени τ [$\langle \upsilon \rangle = A + \frac{1}{2}B\tau + \frac{1}{3}C\tau^3$, **уровень 3**].
8. Зависимость пройденного телом пути от времени задается уравнением $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ (C = 0,1 м/с^2, D = 0,03 м/с^3). Определите: 1) через какое время после начала движения ускорение тела будет равно a = = 2 м/с^2; 2) среднее ускорение тела за этот промежуток времени [1) 10 с; 2) 1,1 м/с^2, **уровень 3**].
9. Нормальное ускорение точки, движущейся по окружности радиусом r = 4 м, задается уравнением $a_n = A + Bt + Ct^2$ (A = 1 м/с^2, B = 6 м/с^3, C = = 9 м/с^4). Определите: 1) тангенциальное ускорение точки; 2) путь, пройденный точкой за время t_1 = 5 с после начала движения; 3) полное ускорение для момента времени t = 1 с [1) 6 м/с^2; 2) 85 м; 3) 17,1 м/с^2, **уровень 4**].
10. Диск радиусом R = 10 см вращается так, что зависимость линейной скорости точек, лежащих на ободе диска, от времени задается уравнением $\upsilon = At + Bt^2$ (A = 0,3 м/с^2, B = 0,1 м/с^3). Определите момент времени, для которого вектор полного ускорения $\vec{a}$ образует с радиусом колеса угол φ = 4° [2 с, **уровень 4**].

Примечание. В этом разделе даны задачи, которые необходимо решать для обретения навыков решения. Для закрепления навыков решения задач по данному учебному блоку задачи могут быть взяты из сборника задач «Механика», который является приложением к учебным модулям №1 и №2.

2. УЧЕБНЫЙ БЛОК «ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ»

Введение

Динамика – раздел механики, изучающий движение тела под действием других тел. Меру взаимодействия тел, в результате которого тела деформируются или приобретают ускорение, называют **силой**. Сила – векторная величина, ее действие характеризуется числовым значением, направлением действия и точкой приложения.

При изучении данного раздела студенты должны

иметь представление:

– о способах задания положения материальной точки;

– об основных кинематических характеристиках движения и связях между ними;

– о принципе суперпозиции движений и принципе относительности механического движения;

обладать навыками:

– определения характеристик движения $\vec{r}, \vec{\upsilon}, \vec{a}$ графическим и аналитическим способами.

Учебная программа блока

Содержание блока	Форма подготовки	Рекомендуемая литература
1. Законы Ньютона. Силы. Понятие импульса тела, импульс силы, инерциальные системы отсчета	самост., лекция	[3]
2. Силы в механике. Сложение сил. Законы всемирного тяготения, Гука, Архимеда	самост., лекция	[3], [4]
3. Центр масс системы материальных точек. Закон сохранения импульса	лекция	[2], [4]
4. Работа и энергия в механике. Кинетическая энергия. Мощность	лекция, самост.	[3]
5. Поле сил. Центральные силы и потенциальная энергия	самост.	[3], [4]
6. Полная механическая энергия. Закон сохранения энергии в механике	лекция	[3], [4]
7. Законы сохранения при упругих и неупругих взаимодействиях. Рассеяние частиц*	лекция	[2], [3], [4]

Примечание. * – материал изучается ознакомительно

Цели обучения

студент должен **знать**	студент должен **уметь**
– понятие импульса силы и правила сложения сил; – законы Ньютона; – законы сохранения импульса и механической энергии материальной точки; – характеристики взаимодействия и соответствующие законы (закон всемирного тяготения, закон Гука, закон Архимеда и т.д.); – понятие работы, мощность и их связь с энергией; – параметры столкновений материальных точек; – понятие центра масс системы материальных точек; – характеристики силового поля	– определять положение центра масс системы материальных точек; – определять работу переменной силы; применять законы сохранения импульса и механической энергии в замкнутой системе; – определять ускорение и другие характеристики движения материальной точки с учетом различных видов взаимодействий (упругости, трения, сопротивления, силы Архимеда); – рассчитывать характеристики силового поля; – рассчитывать характеристики материальных точек после столкновения

2.1. Краткое содержание теоретического материала

Свободно движущейся материальной точкой или *свободной материальной точкой (телом)* можно назвать материальную точку, действием на которую других точек можно пренебречь. Если с такой точкой (телом) связать систему отсчета, то в такой системе движение других свободных тел выглядит особо просто: оно происходит прямолинейно и равномерно, то есть с постоянной по величине и направлению скоростью ($\vec{\upsilon}$ = const). Это утверждение составляет содержание **закона инерции.** Система отсчета, связанная со свободным телом, называется **инерциальной системой отсчета.** Закон инерции констатирует факт существования инерциальных систем отсчета и носит название **Первого закона Ньютона.** Для практического применения (решения задач) более полезна следующая формулировка первого закона Ньютона: *если результирующая сила, действующая на материальную точку (тело) равна нулю, то тело покоится или совершает равномерное и прямолинейное движение*. Инерциальных систем отсчета можно выбрать бесчисленное множество. Однако характер движения не будет зависеть от выбора. В этом суть одного из фундаментальных законов физики – **принципа относительности.** Следует понимать, что все используемые в физическом эксперименте системы отсчета являются инерциальными лишь с большей или меньшей степенью точности. Например, инерциальные системы отсчета на поверхности Земли связаны с общей системой (геоцентрической); космические расчеты необходимо производить относительно более точной системы отсчета, связанной с Солнцем – гелиоцентрической и т.д.

Из первого закона Ньютона следует, что при свободном движении материальной точки, скорость ее в инерциальной системе отсчета остается постоянной ($\vec{\upsilon}$ = const). В общем случае сохраняется не скорость, а произведение скорости $\vec{\upsilon}$ на массу материальной точки m. Эта величина носит название **импульса материальной точки** $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$. Если же материальная точка взаимодействует с другими материальными точками (телами), то ее скорость изменяется: $\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{a}$, причем

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n, \tag{1}$$

где $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_n$ – силы, действующие на точку со стороны тел.

Это уравнение является математической формулировкой **Второго закона Ньютона.**

Общая формулировка второго закона Ньютона имеет вид: скорость изменения импульса точки равна равнодействующей силе, действующей на точку

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \vec{F}, \tag{2}$$

где $\vec{F}$ – равнодействующая сила, которая определяется как векторная сумма сил $F_1, F_2 \ldots F_n$, действующих на точку.

Уравнение (2) может быть записано следующим образом

$$d\vec{p} = \vec{F}dt,$$

где произведение $\vec{F}dt$ получило название **импульса силы.** Это выражение определяет тот факт, что для изменения импульса тела необходимо еще учитывать время действия той или иной силы.

Уравнение (2) является векторным уравнением. Вместо него в соответствии с принципом суперпозиции движений можно записать три скалярных уравнения, которые для декартовой системы координат имеют вид

$$dp_x = F_x dt; \qquad dp_y = F_y dt; \qquad dp_z = F_z dt.$$

Все силы в природе являются силами взаимодействия, т.е. силы всегда возникают парами. Этот факт выражает суть **Третьего закона Ньютона:**

с какой силой тело 1 действует на тело 2, с такой же силой, но противоположной по направлению, тело 2 действует на тело 1

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \tag{3}$$

Все силы в природе делятся на **фундаментальные** и **нефундаментальные**. Последние в конечном итоге могут быть сведены к действию фундаментальных сил. К *фундаментальным* относятся: силы гравитационного взаимодействия, силы электромагнитного взаимодействия, сильные и слабые взаимодействия (они рассматриваются в разделе ядерной физики). К *нефундаментальным* относятся: сила Архимеда, силы упругости, сила трения и т.д.

Для решения большинства практических задач механики необходимо **знать:**

– силы гравитационного взаимодействия (закон всемирного тяготения)

$$\vec{F}_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_{12}|^3} \vec{r}_{12} \text{ или } F_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \; F_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2},$$

если ввести условие, что F_{12} действует вдоль линии, соединяющей центры масс тел; $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Нм^2/кг^2 – гравитационная постоянная;

– силы упругости

$$\sigma = E \frac{\delta\, l}{l_0} \text{ либо } \vec{F} = -k\vec{x},$$

где $k = \dfrac{ES}{l_0}$, $\sigma = F/S$ – механическое напряжение, E – модуль Юнга, $\delta\, l = x$ – абсолютное удлинение тела;

– сила реакции опоры $\vec{\mathrm{N}}$ – возникает в том случае, когда какое-либо тело расположено на подставке (подвесе), которая деформируется и действует на тело с силой $\vec{N}$. По третьему закону Ньютона со стороны тела на подвес также действует сила $m\vec{g} = -\vec{N}$ (**вес тела**). Необходимо помнить, что вес тела приложен не к телу, а к подставке (подвесу), на которой оно находится;

– силы трения и сопротивления:

- сухое трение препятствует всякому движению материальной точки, т.е. $\vec{F}_{тр} \neq 0$ при $\vec{\upsilon} = 0$; $\upsilon \neq 0$; $\vec{F}_{\text{тр}} = \mu\vec{N}$, где μ – коэффициент трения;

- разновидностью сухого трения является трение качения (R – радиус катящегося тела)

$$\vec{F}_{тр} = \mu_r \frac{\vec{N}}{R};$$

- вязкое трение обращается в нуль одновременно со скоростью;
- внутреннее трение в жидкости и газе

$$\vec{F}_{тр} = -\eta \left| \frac{d\upsilon}{dz} \right| S\vec{n},$$

где η – коэффициент вязкости (внутреннее трение); S – площадь взаимодействующих слоев жидкостей; $d\upsilon / dz$ – градиент скорости по сечению слоев; $\vec{n}$ – единичный вектор в направлении движения слоя;

– силы сопротивления при взаимодействии твердого тела и жидкой струи (газообразной)

а) при небольших скоростях сила растет линейно со скоростью

$$\vec{F}_{тр} = -r_1 \vec{\upsilon};$$

б) при больших скоростях линейный закон нарушается:

$$\vec{F}_{тр} = -r_2 |\vec{\upsilon}|^2 \vec{n},$$

где r_1 и r_2 – коэффициенты сопротивления;

– сила инерции – фиктивная сила, которая определяется фактом движения материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета (системы, движущейся с ускорением a_0):

$$\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}_0.$$

Второй закон Ньютона в неинерциальной системе отсчета принимает вид

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \vec{F}_{ин}.$$

Сила $\vec{F}_{ин}$ является фиктивной, так как мы не можем указать второе тело, действующее на данную материальную точку. Это такая сила, которую нужно прибавить к реальным силам, чтобы учесть факт ускоренного движения самой системы отсчета.

Системой материальных точек будем называть совокупность материальных точек, жестко связанных (взаимодействующих) между собой.

Импульсом системы материальных точек называется векторная сумма импульсов n материальных точек

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i.$$

Центром инерции (центром масс) системы материальных точек называется точка в пространстве, радиус-вектор $\vec{r}_c$ которой определяется условием

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i ,$$

где r_i – радиус-вектор материальной точки m_i; M – масса всей системы.

Скорость центра инерции системы n точек общей массой $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$

$$\vec{\upsilon}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \frac{1}{M}\vec{p} ,$$

т.е. импульс системы материальных точек $\vec{p} = M\vec{\upsilon}_c$ и определяется таким же выражением, как и для нахождения материальной точки, но с массой M, помещенной в точку с радиус-вектором $\vec{r}_c$. Если масса тела распределена непрерывно, то от суммирования необходимо перейти к интегрированию (функции распределения плотности вещества ρ по объему тела V:

$$M = \int_V dm = \int_V \rho \cdot dV .$$

Для системы материальных точек аналогично можно записать второй закон Ньютона и ускорение центра инерции системы

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k ; \qquad \vec{a}_c = \frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i ,$$

где $\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k$ – сумма всех внешних сил, действующих на систему материальных точек.

Импульс системы материальных точек изменяется только под действием внешних сил F_k, поэтому в замкнутой системе (в отсутствие внешнего воздействия) изменение импульса равно нулю, что бы ни происходило внутри системы

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 , \qquad (4)$$

что выражает **закон сохранения импульса.**

Центр инерции замкнутой системы материальных точек движется прямолинейно и равномерно (как следует из (4)). Поэтому, если с центром инерции замкнутой системы связать систему отсчета (ее называют **системой центра масс**), то она будет инерциальной. В этой системе $\vec{r}_c = 0$ и $\vec{\upsilon}_c = 0$ ($\vec{\upsilon}_c = \text{const}$, если центр масс движется равномерно и прямолинейно) и уравнения движения принимают простой вид

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i = 0,$$

где r_i и υ_i – радиус-вектор и скорость i-ой частицы относительно центра масс.

В случае, когда сумма внешних сил, действующих на систему, отлична от нуля (система не замкнута), но проекция равнодействующей этих сил на некоторую ось x равна нулю – $\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{kx} = 0$, то проекция импульса системы на это направление также не будет меняться со временем:

$$p_x = \sum_{i=1}^{n} p_{ix} = \text{const}.$$

В механике важным свойством сил является способность совершать работу. В курсе физики средней школы **работа** – это скалярная величина, равная произведению силы на перемещение и на косинус угла между ними (рис. 2.1).

$$\Delta A = \vec{F} \Delta \vec{r} = F \Delta r \cos\alpha.$$

В общем случае работу по перемещению тела по произвольной криволинейной траектории L можно определить согласно выражению

$$A = \int_L \vec{F} d\vec{r},$$

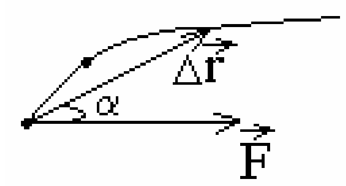


Рис. 2.1

где $\vec{F}$ – функция силы от радиус-вектора.

В частном случае прямолинейного перемещения из точки с радиус-вектором r_1 в точку с радиус-вектором r_2 под действием переменной силы работу можно определить по формуле

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr. \tag{5}$$

Работа силы, совершенная в единицу времени, называется мощностью

$$P = \frac{dA}{dt} = \vec{F}\vec{\upsilon}.$$

В этом случае выражение для работы приобретает вид

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} P(r)dt = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}\vec{\upsilon}dt\,. \qquad (6)$$

Из (6) следует, что если сила, действующая на точку, перпендикулярна скорости, то работа такой силы равна нулю. Воспользовавшись выражениями $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$, $d\vec{p} = m \cdot d\vec{\upsilon}$, $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ и (6), можно записать

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}\vec{\upsilon}dt = \int_1^2 \frac{d\vec{p}}{dt}\vec{\upsilon}dt = \int_1^2 \vec{\upsilon}d\vec{p} = \int_1^2 m\vec{\upsilon}d\upsilon = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2}. \qquad (7)$$

Скалярная величина $E_k = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$ получила название **кинетическая энергия.** Выражение (7) носит название **теоремы кинетической энергии:** работа силы по перемещению материальной точки равна приращению ее кинетической энергии.

Все силы в механике принято разделять на **консервативные** и **неконсервативные**. Консервативными называются силы, работа которых не зависит от формы траектории (пути) между двумя точками, а зависит только от начального и конечного положений тела относительно другого. Иначе говоря, работа консервативных сил по замкнутой траектории равна нулю. Примером консервативных сил являются сила тяжести, сила упругости и т.д. Работа силы тяжести, например (рис. 2.2), имеет вид

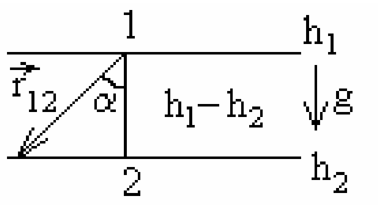


Рис. 2.2

$$A_{12} = \int_1^2 mgdr = mgr_{12} = mgh_1 - mgh_2\,.$$

Поскольку для одной и той же работы мы можем записать

$$A_{12} = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} \qquad \text{и} \qquad A_{12} = mgh_1 - mgh_2\,,$$

то можно прийти к выводу

$$mgh_1 + \frac{m\upsilon_1^2}{2} = mgh_2 + \frac{m\upsilon_2^2}{2}\,.$$

При движении в **поле силы тяжести** сохраняется величина – **полная механическая энергия**, которая складывается из кинетической и потенциальной энергий ($U_П = mgh$)

$$E = mgh + \frac{m\upsilon^2}{2} = \text{const}. \qquad (8)$$

Консервативными силами являются только **центральные силы**. Это силы, всегда направленные по радиус-вектору, соединяющему материальную точку и некоторую точку в пространстве, и зависящие только от расстояния до этой точки. Сама эта точка называется **центром силы** или **силовым центром**. В качестве примера рассмотрим силу гравитационного взаимодействия

$$\vec{F}_{12} = \gamma \frac{mM}{|r_{12}|^3} \vec{r}_{12}.$$

Совместим начало отсчета с точкой, где расположен центр масс тела массой *M*. Работа гравитационной силы определяется выражением

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}(r) d\vec{r} = -\int_1^2 \gamma \frac{mM}{r^2} dr = -\gamma mM \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \qquad (9)$$

Знак «минус» обусловлен тем, что направление радиус-вектора и действие силы противоположны.

Под потенциальной энергией в этом случае понимаем величину

$$U = -\gamma \frac{mM}{r}.$$

Для количественной характеристики силового поля в данной точке используют понятия **напряженности** (силовая характеристика**) и потенциала** (энергетическая характеристика) **поля.**

Напряженность поля, определяют как силу, действующую на материальную точку единичной массы

$$\vec{E} = \gamma \frac{M}{|r|^3} \vec{r}.$$

Векторы силы и напряженности совпадают по направлению. Силовые поля можно изобразить с помощью **силовых линий** – это линии, касательные к которым в каждой точке пространства совпадают с направлением вектора напряженности (рис. 2.3).

Потенциал поля в данной точке соответствует потенциальной энергии тела единичной массы

$$\varphi = -G \frac{M}{r},$$

или определяется работой поля, затраченной на перемещение тела единичной массы из данной точки на бесконечность.

Геометрическое место точек, обладающих одинаковым потенциалом, называют **эквипотенциальной поверхностью** (см. рис. 2.3). Силовые линии в данной точке всегда перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям.

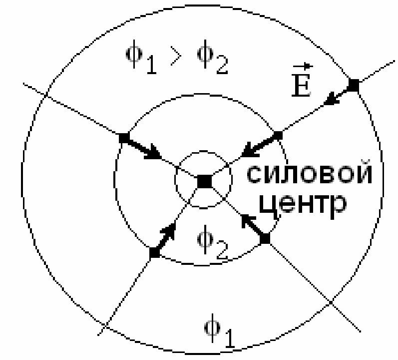


Рис. 2.3

Если поле создано несколькими источниками, то суммарная напряженность и потенциал определяются по принципу суперпозиции полей:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i ; \qquad \varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i .$$

Принцип суперпозиции является следствием принципа независимости действия сил: **суммарное ускорение, которое приобретает материальная точка под действие нескольких сил, есть векторная сумма ускорений, которое сообщает материальной точке каждая сила в отдельности.**

Силы, не являющиеся центральными, называют **неконсервативными силами**. К ним, прежде всего, относятся **диссипативные силы** (преобразующие механическую энергию в другие виды энергии), например, сила трения.

Итак, работа, совершаемая **консервативными силами** при переходе системы **из некоторого положения** в **нулевое** *(которое мы можем выбирать сами)*, называется **потенциальной энергией *U* системы в этом положении**, причем энергия системы *U* является функцией только ее координат. Необходимо отметить, что выбор нулевого положения произволен. Обычно выбирается таким образом, чтобы выражение для потенциальной энергии выглядело наиболее просто.

В системе с одними только консервативными силами полная механическая энергия остается неизменной, поскольку могут происходить только превращения потенциальной энергии в кинетическую и обратно согласно (8).

Зная силу, как функцию координат $F(x, y, z)$, потенциальную энергию можно определить интегрированием

$$U_1 = U(x, y, z) - U(0) = A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} .$$

Знак «минус» обусловлен тем, что направления силы и перемещения взаимно противоположны.

Другая задача – вычисление силы $F(x, y, z)$ по заданной потенциальной энергии $U(x, y, z)$, которую можно решить дифференцированием (обратной операцией). Поскольку $dU = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz)$, то

$$F_x = -\frac{dU}{dx}; \qquad F_y = -\frac{dU}{dy}; \qquad F_z = -\frac{dU}{dz};$$

$$\vec{F}(x, y, z) = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = -\frac{dU}{dx}\vec{i} + \frac{dU}{dy}\vec{j} + \frac{dU}{dz}\vec{k} = -\mathrm{grad}U, \qquad (10)$$

где $\mathrm{grad}U = \frac{dU}{dx}\vec{i} + \frac{dU}{dy}\vec{j} + \frac{dU}{dz}\vec{k}$ – градиент скалярной величины *U*. Эта величина является вектором, поскольку указывает направление силы, действующей на материальную точку.

Для тела единичной массы из соотношения (10) можно определить связь между напряженностью поля и потенциалом в данной точке

$$\vec{E}(x, y, z) = -\mathrm{grad}\varphi.$$

Знак «минус» указывает, что направление вектора напряженности совпадает с направлением уменьшения потенциала.

В соответствии с выражением (9) можно определить работу по перемещению материальной точки *m* из положения 1 в положение 2 как произведение разности потенциалов между этими точками на массу материальной точки:

$$A_{12} = m(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Примеры потенциальной энергии материальной точки в некоторых простейших случаях:

– $U = mgh$ – потенциальная энергия точки в поле силы тяжести (начало отсчета $h = 0$);

– $U = \frac{kx^2}{2}$ – потенциальная энергия растянутой пружины (упругого тела), начало отсчета $x = 0$;

– $U = -\gamma\frac{mM}{r}$ – потенциальная энергия гравитационного притяжения двух точечных масс *m* и *M*. За начало отсчета выбрана бесконечно удаленная материальная точка, взаимодействие с которой точек *m* и *M* бесконечно мало.

В общем случае на *i*-ю материальную точку системы действует внутренняя сила $\vec{F}_{ik}$ со стороны *k*-ой точки системы, внешняя консервативная сила $\vec{F}_i$ и внешняя неконсервативная сила $\vec{F}_i^*$. Уравнение движения i-ой точки в этом случае имеет вид

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^{N} \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i + \vec{F}_i^* .$$

Умножив на $d\vec{r}_i = \vec{\upsilon}_i dt$ и сложив уравнения всех N точек, получаем

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\upsilon}_i d\upsilon_i = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^{N} \vec{F}_{ik} \right) d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^* d\vec{r}_i .$$

Левая часть – приращение кинетической энергии

$$dE_k = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\upsilon}_i d\vec{\upsilon}_i .$$

Правые части равны убыли потенциальных энергий и работе внешних сил:

– взаимодействия между материальными точками, образующими систему

$$-dU_{вз} = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^{N} \vec{F}_{ik} \right) d\vec{r}_i ;$$

– внешнего поля консервативных сил

$$-dU_{вн} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i d\vec{r}_i ;$$

– работа внешних консервативных сил

$$dA_{вн}^* = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^* d\vec{r}_i .$$

После несложных преобразований получаем **закон сохранения энергии** в виде

$$d(E_k + U_{вз} + U_{вн}) = dA_{вн}^* .$$

Величину $E = E_k + U_{вз} + U_{вн}$ называют полной механической энергией системы материальных точек. **Если внешние неконсервативные силы отсутствуют, то полная механическая энергия системы сохраняется**

$$E = E_k + U_{вз} + U_{вн} = \mathrm{const} .$$

Для замкнутой системы закон сохранения энергии принимает вид

$$E = E_k + U_{вз} = \text{const}.$$

Полная механическая энергия замкнутой системы материальных точек, между которыми действуют только консервативные силы остается постоянной.

Если в замкнутой системе кроме консервативных сил действуют еще внутренние неконсервативные силы (силы трения), то полная механическая энергия системы не сохраняется

$$dE = d(E_k + U_{вз}) = dA_{вн,\ неконс}.$$

Действие сил трения приводит к диссипации части полной механической энергии в другие виды энергии, при этом выполняется более общий закон сохранения (механической и немеханической) энергии.

Важным применением законов сохранения является установление соотношений между начальными и конечными параметрами движения, т.е. до и после столкновения тел.

Под **столкновением** понимают процесс взаимодействия, сопровождающийся обменом импульсами и энергиями, в результате чего могут происходить различные процессы (тела могут соединяться в одно; могут возникать новые тела и т.д.).

Различают **упругие столкновения**, которые происходят без перехода механической энергии в другой вид энергии (без изменения внутреннего состояния взаимодействующих тел), и **неупругие столкновения**, сопровождающиеся преобразованием части механической энергии в другой вид и изменением внутреннего состояния взаимодействующих тел.

Наиболее простым случаем является упругое столкновение двух материальных точек с массами m_1 и m_2, движущихся вдоль одной прямой (так называемый **центральный удар** двух тел). Обозначим скорости и импульсы материальных точек до взаимодействия $\vec{\upsilon}_1$, $\vec{\upsilon}_2$, $\vec{p}_1 = m_1\vec{\upsilon}_1$, $\vec{p}_2 = m_2\vec{\upsilon}_2$ и после взаимодействия $\vec{\upsilon}_1'$, $\vec{\upsilon}_2'$, $\vec{p}_1' = m_1\vec{\upsilon}_1'$, $\vec{p}_2 = m_2\vec{\upsilon}_2'$.

Закон сохранения энергии принимает вид

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{(p_1')^2}{2m_1} + \frac{(p_2')^2}{2m_2} \quad \text{или} \quad \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \frac{m_1\upsilon_1'^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2'^2}{2}.$$

Закон сохранения импульса $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$.

После несложных преобразований получаем

$$\vec{p}_1' = \frac{(m_1 - m_2)\vec{p}_1 + 2m_1\vec{p}_2}{m_1 + m_2}, \qquad \vec{p}_2' = \frac{(m_2 - m_1)\vec{p}_2 + 2m_2\vec{p}_1}{m_1 + m_2}$$

или

$$\vec{\upsilon}_1^{/} = \frac{(m_1 - m_2)\vec{\upsilon}_1 + 2m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}, \qquad \vec{\upsilon}_2^{/} = \frac{(m_2 - m_1)\vec{\upsilon}_2 + 2m_1\vec{\upsilon}_1}{m_1 + m_2}. \qquad (11)$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

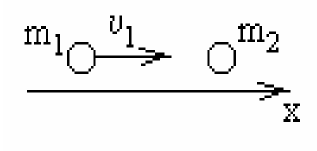


Рис. 2.4

– $\vec{p}_2 = 0$ – вторая частица до взаимодействия покоилась (рис. 2.4):

$$p_{1x}^{/} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} p_1 \text{ или } \upsilon_{1x}^{/} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1.$$

$$p_{2x}^{/} = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} p_1; \quad \upsilon_{2x}^{/} = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1. \qquad (12)$$

- если $m_1 = m_2$, то частицы обмениваются скоростями $\upsilon_{1x}^{/} = 0$, $\upsilon_{2x}^{/} = \upsilon_1$;
- если $m_1 << m_2$, то покоящаяся частица (стена) останется на месте, а налетающая отскочит назад с той же скоростью: $\upsilon_{1x}^{/} \approx -\upsilon_1$; $\vec{\upsilon}_{2x}^{/} \approx 0$;
- если $m_1 >> m_2$, то налетающая частица продолжит движение с той же скоростью, а покоящаяся отлетит с удвоенной скоростью $\upsilon_{1x}^{/} \approx \upsilon_1$; $\upsilon_{2x}^{/} \approx 2\upsilon_1$.

– Шары движутся навстречу друг другу (рис. 2.5)

$$\vec{\upsilon}_1^{/} = \frac{(m_1 - m_2)\vec{\upsilon}_1 - 2m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}; \qquad \vec{\upsilon}_2^{/} = \frac{(m_2 - m_1)\vec{\upsilon}_2 + 2m_1\vec{\upsilon}_1}{m_1 + m_2},$$

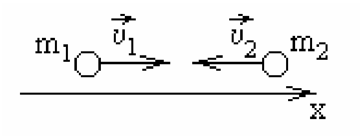


Рис. 2.5

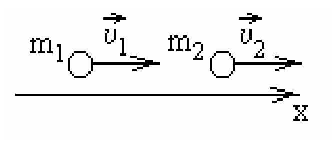


Рис. 2.6

– Шары догоняют друг друга (рис. 2.6). Необходимо отметить, что столкновение возможно только в том случае, если $\upsilon_1 > \upsilon_2$. Иначе первый шар не догонит второй. В этом случае можно применять как выражение (11), так и (12). В последнем случае при этом нужно заменить υ_1 на $\upsilon_1^* = \upsilon_1 - \upsilon_2$ (относительная скорость движения).

Частным случаем неупругого столкновения является абсолютно неупругий удар, после которого частицы m_1 и m_2 (после удара) образуют единое целое, движущееся со скоростью $\vec{\upsilon}^{/}$.

Закон сохранения импульса $\vec{p}_1 = \vec{p}^{/}$, где $p^{/} = (m_1 + m_2)\vec{\upsilon}^{/}$.

Начальная кинетическая энергия $E_k = \dfrac{p_1^2}{2m_1}$.

После столкновения $E_k^{/} = \dfrac{(p^{/})^2}{2(m_1 + m_2)} = \dfrac{(p_1)^2}{2(m_1 + m_2)} = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} E_k$.

Часть механической энергии при неупругом столкновении переходит в другой вид – Q (например, превращается в тепло)

$$Q = E_k - E_k^{/} = (1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2})E_k = \frac{m_2}{m_1 + m_2} E_k.$$

Полученные для столкновений материальных точек соотношения могут быть использованы при изучении взаимодействия атомов и элементарных частиц. Поскольку эти взаимодействия обусловлены существованием сил притяжения и отталкивания (центральные силы), то соотношения имеют более сложный вид. Однако, как и ранее, они определяются законами сохранения импульса и энергии. Для реальных тел, которые можно считать материальными точками, но конечных поперечных размеров, результат их взаимодействия может отличаться от рассмотренного ранее. Такое столкновение, показанное на рис. 2.7, получило название **рассеяние частиц.**

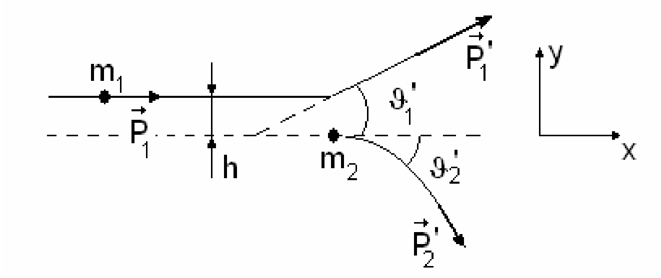


Рис. 2.7

Параметр h носит название **прицельного расстояния** и характеризует степень отклонения от центрального (лобового) удара. Для упругого столкновения законы сохранения с учетом выбранной системы координат могут быть записаны в виде

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} = \frac{m_1(\upsilon_1^{/})^2}{2} + \frac{m_2(\upsilon_2^{/})^2}{2};$$

$$m_1\upsilon_1 = m_1\upsilon_1^{/}\cos\theta_1^{/} + m_2\upsilon_2^{/}\cos\theta_2^{/};$$

$$0 = m_1\upsilon_1^{/}\sin\theta_1^{/} + m_2\upsilon_2^{/}\sin\theta_2^{/}.$$

Эта система уравнений при определенных допущениях позволяет связать предельный параметр h и начальные скорости υ_1 и υ_2 с углами рассеяния $\theta_1^{/}$ и $\theta_2^{/}$ и скоростями после рассеяния $\upsilon_1^{/}$ и $\upsilon_2^{/}$ взаимодействующих частиц m_1 и m_2.

2.2. Методические указания к лекционным занятиям

Вопросы лекции	Форма изучения	Литература	Вопросы для самоконтроля студентов
Динамика поступательного движения. Основные понятия и законы 1. Законы Ньютона. Силы. Понятие импульса тела, импульс силы, инерциальные системы отсчета. 2. Силы в механике. Сложение сил. Законы всемирного тяготения, Гука, Архимеда. 3. Центр масс системы материальных точек. Закон сохранения импульса	лекция + самост. лекция + самост. лекция + самост.	[3, § 2.1 – 2.3] [4, § 13, 14, 16, 21] [4, § 18 – 21, 31 – 33] [3, § 2.4, 2.5, 5.1, 5.2], [4, § 23]	1. Сформулируйте законы Ньютона. 2. Сила. Что она характеризует? Примеры сил. 3. Что определяет импульс силы? 4. В каких случаях применим закон сохранения импульса? Когда применение закона невозможно? 5. Как найти положение центра масс системы материальных точек? Что он характеризует? 6. Как изменяется положение центра масс при свободном падении тела?
Законы сохранения в механике материальной точки 1. Работа и энергия в механике. Кинетическая энергия. Мощность. Эквивалентность работы и энергии. 2. Полная механическая энергия. Закон сохранения энергии в механике 3. Поле сил. Центральные силы и потенциальная энергия 4. Законы сохранения при упругих и неупругих взаимодействиях. Рассеяние частиц	лекция лекция + самост. лекция лекция	[3, § 3.1, 3.2] [4, § 24, 25] [3, § 3.2], [4, § 27] [3, § 5.4] [4, § 26, 28] [3, § 3.3 – 3.5] [4, § 30]	1. Сформулируйте закон сохранения механической энергии. Что изменится при появлении сил диссипации? 2. Как определить работу переменной силы? 3. В каком случае сила не совершает работы? 4. В каких случаях не применим закон сохранения механической энергии? 5. Какие характеристики поля вы знаете? Что они характеризуют? 6. Столкновения. Какой импульс передаст материальная точка при упругом ударе о стену?

2.3. Методические указания к практическим занятиям

Тема занятия	Задачи	Рекомендации	Задачи из сборников
Силы. Законы Ньютона	1. Определение закона движения материальной точки по известным силам 2. Определение силы по известному закону движения материальной точки	1. Сделать чертеж, указав все тела и связи между ними (нити, пружины и т.д.). 2. Изобразить все силы, приложенные к телам, движение которых изучается. При этом необходимо учитывать, что на данное тело могут действовать силы только со стороны других объектов: со стороны Земли – $m\vec{g}$; со стороны пружины – $k\vec{x}$; со стороны опоры – сила реакции – $\vec{N}$; со стороны соприкасающихся тел – сила трения $\vec{F}_{тр}$. При изображении сил, приложенных к телу, не обязательно их прикладывать к строго определенным точкам (например, силу тяжести – к центру масс; можно воспользоваться правилом переноса векторов сил вдоль линии их действия. 3. Выбрать систему отсчета, которая позволяет максимально упростить уравнение динамики. – Для различных тел возможно использовать различные системы отсчета (например, в задачах на блоки). – Удобно для каждого тела системы одну из осей координат направить вдоль вектора ускорения. В некоторых задачах удобно рассматривать движение тела в неинерциальной системе отсчета, которая движется с ускорением $\vec{a}_0$. Неинерциальность системы отсчета учитывается дополнительной силой инерции $\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}$, а полное ускорение $\vec{a} = \vec{a}^{/} + \vec{a}_0$. 4. Записать второй закон Ньютона в проекциях на оси выбранной системы координат. 5. Дополнить уравнения динамики уравнениями кинематики так, чтобы число уравнений равнялось числу неизвестных	[1, № 2.2, 2.4 – 2.8, 2.12 – 2.15 [1, № 2.29 – 2.32]

Окончание табл.

Законы сохранения. Столкновения	1. Определение параметров тел после соударения	1. Сделать чертеж, на котором указать начальные и конечные импульсы системы и направление внешних сил. Векторы $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ и $\vec{F}_{вн}\Delta t$ должны образовывать замкнутый треугольник векторов. 2. Выбрать систему координат так, чтобы удобнее было проецировать на них векторы. 3. Записать уравнения закона сохранения импульса и второго закона Ньютона в проекциях на соответствующие оси. 4. Дополнить систему уравнений уравнениями кинематики, чтобы полная система уравнений стала замкнутой	[1, № 2.62 – 2.70]
	2. Определение работы произвольной силы и ее мощности	1. Сделать чертеж, на котором указать все силы, действующие на тело. 2. Выяснить – работу какой силы нужно найти. В ее качестве может выступать и равнодействующая сила. Если сила неизвестна из условия, то ее следует найти из уравнений динамики (см. выше). 3. Определить угол α между направлениями вектора перемещения и силы. 4. Используя уравнения кинематики, определить перемещение или пределы изменения координаты. 5. Определить работу по одному из соотношений: $A = FS\cos\alpha$; $A_{12} = \int_1^2 F(S)dS$; $A_{12} = \int N dt$. 6. Определить мощность силы по одному из подходящих соотношений: $N = dA/dt$, $\vec{N} = \vec{F}\vec{\upsilon}$.	[1, № 2.62 – 2.70]
	3. Определение полной механической энергии и ее составляющих	1. Сделать чертеж, на котором изобразить систему в двух (нескольких) положениях. 2. Выбрать нулевой уровень отсчета потенциальной энергии. Если тело расположено выше нулевого уровня, то потенциальная энергия положительная, если ниже – отрицательная. 3. Если в системе присутствуют диссипативные силы, то необходимо определить работу этих сил. 4. Записать закон сохранения полной механической энергии или изменения механической энергии с учетом работы сил трения. 5. Дополнить полученные уравнения нужным числом уравнений динамики: – Целесообразно записать закон сохранения энергии для начального и конечного состояний и дополнить его законом сохранения для каких-либо промежуточных состояний. – Необходимо учитывать, что при переходе к различным инерциальным системам отсчета полная энергия может меняться, поэтому целесообразно использовать неподвижные относительно Земли системы отсчета	[1, № 2.117 – 2.123]

2.4. Примеры решения задач

Силы. Законы Ньютона

Пример 1.

У бруска одна сторона гладкая, а другая шероховатая. Если его положить на наклонную плоскость шероховатой стороной, он будет находиться в равновесии на грани соскальзывания. С каким ускорением брусок будет соскальзывать, если его перевернуть? Коэффициент трения между шероховатой стороной бруска и поверхностью наклонной плоскости равен $\mu = 0{,}2$ **(уровень 2).**

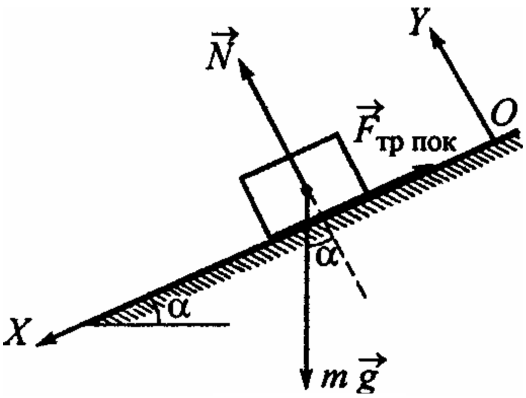


Рис. 2.8

Решение. Рассмотрим равновесие бруска на наклонной плоскости, когда он лежит на ней шероховатой стороной.

На брусок действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$ (где m – масса бруска), сила реакции поверхности плоскости и сила трения покоя $\vec{F}_{тр.пок}$, препятствующая соскальзыванию бруска (рис. 2.8).

Направим ось OX системы координат вдоль наклонной плоскости и запишем уравнение, выражающее второй закон Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр.},$$

в проекциях на оси системы координат

$$OX: ma = mg\sin\alpha - F_{тр.}, \tag{1}$$

$$OY: 0 = N - mg\cos\alpha, \tag{2}$$

где α – угол, который наклонная плоскость образует с горизонтом.

Учитывая, что тело находится в равновесии на грани соскальзывания $\vec{a} = 0$, $F_{тр} = \mu N$, из (1) и (2) находим

$$F_{тр} = \mu \cdot mg\cos\alpha, \qquad 0 = mg\sin\alpha - \mu \cdot mg\cos\alpha,$$

$$\mu = \mathrm{tg}\alpha. \tag{3}$$

Полученный результат позволяет сделать полезный вывод: если коэффициент трения между телом и поверхностью наклонной плоскости $\mu > \mathrm{tg}\alpha$, то тело будет находиться в равновесии, и самопроизвольно не будет соскальзывать с плоскости; если $\mu = \mathrm{tg}\alpha$, то тело будет находиться в равновесии на грани соскальзывания; если $\mu < \mathrm{tg}\alpha$, то тело будет соскальзывать с плоскости.

Рассмотрим движение бруска с наклонной плоскости, когда он лежит на ней гладкой стороной ($\mu = 0$). Теперь на брусок действуют две силы: сила тяжести и сила реакции. Легко понять, что уравнения движения бруска в проекциях на оси системы координат совпадут с уравнениями (1) – (2) при $F_{тр.} = 0$. Поскольку в выбранной системе координат перемещение по y отсутствует, то для описания движения достаточно уравнения движения в проекции на ось OX

$$OX: ma = mg\sin\alpha .$$

Отсюда находим $a = g\sin\alpha$, или с учетом выражения (3)

$$a = g\sin\alpha = g\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = g\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \approx 1{,}9 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a = g\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \approx 1{,}9 \text{ м/с}^2$.

Пример 2.

На наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^0$ с горизонтом, удерживают два соприкасающихся бруска так, как показано на рис. 2.9. Массы брусков m_1 = 1 кг, m_2 = 2 кг, коэффициенты трения брусков о плоскость равны μ_1 = 0,25 и μ_2 = 0,1 соответственно. Найти силу R взаимодействия между брусками, если их отпустить **(уровень 2).**

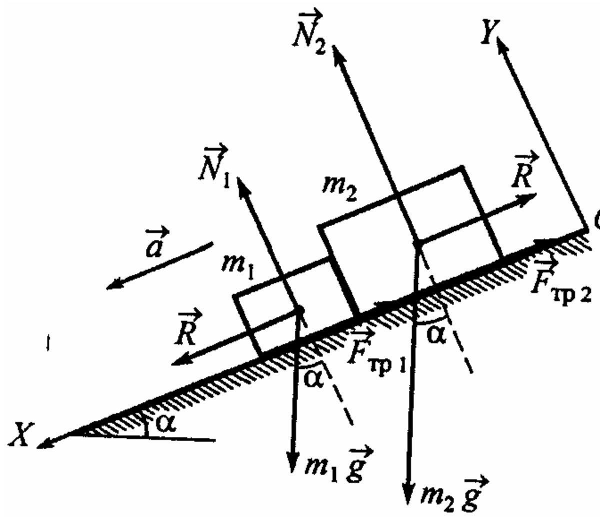


Рис. 2.9

Решение. Поскольку коэффициенты трения брусков меньше $\mathrm{tg}\alpha \approx 0{,}58$, то каждый из брусков, будучи предоставленным самому себе, соскальзывал бы с наклонной плоскости. Если бруски начинают движение из положения, показанного на рис. 2.9, то возможны два различных движения системы:

– брусок массой m_1 движется быстрее бруска массой m_2. В этом случае сила взаимодействия между брусками $R = 0$;

– бруски движутся вместе с одинаковыми ускорениями.

Выясним, какой случай соответствует условию нашей задачи. Для этого найдем ускорения брусков $\vec{a}_1$ и $\overline{a}_2$, если бы они двигались независимо друг от друга.

На каждый из брусков при этом действуют три силы: тяжести $m\vec{g}$, реакции опоры $\vec{N}$ и трения $\vec{F}_{тр}$. Запишем уравнения движения брусков

$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{тр}; \quad m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{тр}$$

в проекциях на оси системы координат

$$OX: \quad m_1a_1 = m_1g\sin\alpha - F_{тр};$$

$$OY: \quad 0 = N_1 - m_1g\cos\alpha;$$

$$OX: \quad m_2a_2 = m_2g\sin\alpha - F_{тр};$$

$$OY: \quad 0 = N_2 - m_2g\cos\alpha,$$

или с учетом соотношений $F_{тр1} = \mu_1 N_1$, и $F_{тр2} = \mu_2 N_2$:

$$a_1 = g(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha); \qquad a_2 = g(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha).$$

Так как по условию задачи $\mu_1 > \mu_2$, то, очевидно, $a_1 < a_2$. Следовательно, бруски будут двигаться вместе с одинаковым ускорением, величину которого найдем из уравнений движения при условии, что бруски взаимодействуют между собой с силой $\vec{R}$:

$$m_1a = m_1g\sin\alpha - \mu_1 m_1 g\cos\alpha + R; \qquad m_2a = m_2g\sin\alpha - \mu_2 m_2 g\cos\alpha - R.$$

Отсюда находим

$$R = \frac{m_1m_2(\mu_1 - \mu_2)\cos\alpha}{m_1 + m_2} g \approx 0{,}85 \text{ Н}.$$

Ответ: $R = \dfrac{m_1m_2(\mu_1 - \mu_2)\cos\alpha}{m_1 + m_2} g \approx 0{,}85$ Н.

Пример 3.

Между наклонной плоскостью клина, стоящего на горизонтальной поверхности, и вертикальной стенкой кладут шар такой же массы, что и клин (рис. 2.10). Определить ускорение клина, если угол при его основании равен $\alpha = 30°$. Трения нет **(уровень 3).**

Решение. На шар действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции $\vec{N}_1$ со стороны клина и сила реакции $\vec{N}_2$ стенки. На клин действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила давления $\vec{N}_1^{/}$ со стороны шара и сила реакции $\vec{N}_3$ пола. Под действием этих сил шар будет двигаться вертикально вниз с ускорением $\vec{a}_2$, а клин – горизонтально с ускорением $\vec{a}_1$.

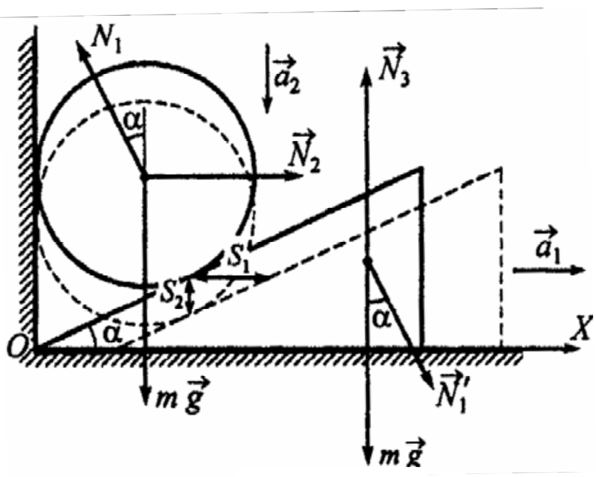


Рис. 2.10

Запишем уравнение движения клина и шара

$$m\vec{a}_1 = m\vec{g} + \vec{N}_1^{/} + \vec{N}_3; \qquad m\vec{a}_2 = m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2,$$

в проекциях на оси системы координат XOY:

$$OX\text{: } ma_1 = N_1 \sin\alpha, \tag{1}$$

$$OY\text{: } -ma_2 = -mg + N_1 \cos\alpha, \tag{2}$$

где учтено, что $N_1 = N_1^{/}$.

Для получения замкнутой системы уравнений необходимо еще одно соотношение, связывающее неизвестные величины a_1, a_2 и N_1. Поскольку связь между ускорениями a_1, a_2 и силой N_1 дают уравнения движения (1) – (2), то, очевидно, нужно найти связь между ускорениями тел.

Из рис. 2.10 видно, что если шар опустится на расстояние S_2, то клин сместится на S_1, причем

$$S_1 = \frac{a_1 t^2}{2}; \quad S_2 = \frac{a_2 t^2}{2}; \quad S_2 = S_1 \text{tg}\alpha.$$

Следовательно $a_2 = a_1 \text{tg}\alpha$.

Решив систему уравнений (1) – (3) относительно a_1, получим

$$N_1 = \frac{ma_1}{\sin\alpha}; \; ma_2 = mg - \frac{ma_1}{\sin\alpha}\cos\alpha; \; a_1 \text{tg}\alpha = g - \frac{a_1}{\text{tg}\alpha}; \; a = a_1 = \frac{g\text{tg}\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha} \approx 4{,}24 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a = \dfrac{g\text{tg}\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha} \approx 4{,}24 \text{ м/с}^2$.

Законы сохранения импульса и энергии

Пример 4.

Мяч массой m = 60 г свободно падает на пол с высоты H = 2 м и подскакивает на высоту h = 1 м. Определить продолжительность удара, если среднее значение силы удара мяча о пол равно $<F>$ = 2 Н. Сопротивлением воздуха пренебречь **(уровень 3).**

Решение. При падении с высоты H на пол мяч приобрел некоторую скорость $\vec{\upsilon}_1$ и в момент касания поверхности пола имел импульс $\vec{p}_1 = m\vec{\upsilon}_1$. Поскольку за время удара Δt мяч действовал на пол со средней силой $<\vec{F}>$, то по третьему закону Ньютона пол действовал на мяч с такой же по величине силой $<F^/> = <F>$, но направленной противоположно силе $<\vec{F}>$. Кроме силы $<F^/>$ за время удара на мяч действовала сила тяжести $m\vec{g}$. Под действием импульсов этих сил импульс мяча изменился и стал равным $\vec{p}_2 = m\vec{\upsilon}_2$.

Запишем второй закон Ньютона в виде

$$\vec{p}_1 - \vec{p}_2 = (<\vec{F}^/> + m\vec{g})\Delta t$$

в проекции на ось ОХ системы координат (рис. 2.11):

$$p_2 + p_1 = (<F^/> - mg)\Delta t \quad \text{или} \quad m(\upsilon_1 + \upsilon_2) = (<F> - mg)\Delta t .$$

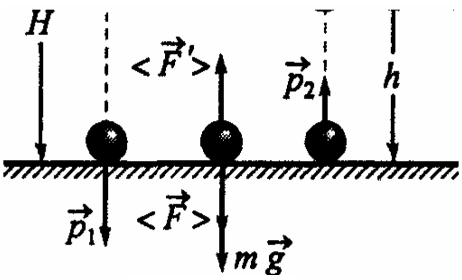


Рис. 2.11

Скорость мяча $\vec{\upsilon}_1$ в момент касания пола и скорость $\vec{\upsilon}_2$ в момент отскока найдем, записав кинематические уравнения движения мяча вблизи поверхности Земли:

а) при падении мяча вниз:

$$H = \frac{1}{2}gt_1^2; \quad \upsilon_1 = gt_1;$$

б) при движении мяча вверх:

$$h = \upsilon_2 t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2; \quad 0 = \upsilon_2 - gt_2 .$$

Отсюда находим

$$\upsilon_1 = \sqrt{2gH}; \qquad \upsilon_2 = \sqrt{2gh} .$$

Следовательно

$$m(\sqrt{2gH} + \sqrt{2gh}) = (<F> - mg)\Delta t ,$$

а искомая продолжительность удара

$$\Delta t = \frac{m(\sqrt{2gH} + \sqrt{2gh})}{< F > -mg} \approx 0,45 \text{ с}.$$

Ответ: $\Delta t = \dfrac{m(\sqrt{2gH} + \sqrt{2gh})}{< F > -mg} \approx 0,45 \text{ с}.$

Пример 5.

Лодка длиной ℓ = 3 м и массой M = = 120 кг стоит на спокойной воде (рис. 2.12). На носу и корме находятся два рыбака массой m_1 = 90 кг и m_2 = 60 кг. На какое расстояние сместится лодка относительно воды, если рыбаки пройдут по лодке и поменяются местами? Сопротивлением воды пренебречь **(уровень 3).**

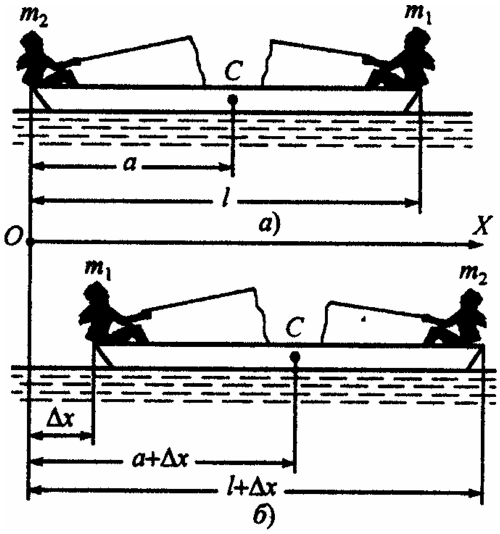


Рис. 2.12

Решение. Будем рассматривать лодку и рыбаков как одну систему. При перемещении рыбаков по лодке на систему будут действовать внешние силы: сила тяжести и сила Архимеда. Обе эти силы направлены вертикально и их результирующая равна нулю. Поскольку по условию задачи сопротивлением воды следует пренебречь, то это означает, что в горизонтальном направлении на систему никакие внешние силы не действуют. Следовательно, в направлении возможного перемещения лодки система «лодка – рыбаки» замкнута, и проекция импульса на ось OX меняться не будет.

Представим импульс системы в виде

$$\vec{P} = M_{сист}\vec{\upsilon}_c,$$

где $M_{сист} = M + m_1 + m_2$ – масса системы; $\vec{\upsilon}_c$ – скорость ее центра масс.

Так как при перемещении рыбаков $(\vec{P})_x = \text{const}$, то и $\vec{\upsilon}_c = \text{const}$. Поскольку лодка первоначально покоилась, то проекция $\upsilon_{cx} = 0$, т.е. при перемещении рыбаков координата центра масс системы не изменит своего положения.

В начальный момент координата центра масс лодки с рыбаками

$$x_c = \frac{Ma + m_1\ell}{M + m_1 + m_2}, \qquad (1)$$

где a – расстояние от начала координат до центра масс лодки (см. рис. 2.12, a).

После перемещения рыбаков по лодке

$$x_c = \frac{M(a+\Delta x) + m_1 \Delta x + m_2(\ell + \Delta x)}{M + m_1 + m_2}, \qquad (2)$$

где Δx – смещение лодки относительно неподвижной системы отсчета (см. рис. 2.12, *б*).

Приравнивая правые части соотношений (1) и (2)

$$\frac{Ma + m_1 \ell}{M + m_1 + m_2} = \frac{M(a+\Delta x) + m_1 \Delta x + m_2(\ell + \Delta x)}{M + m_1 + m_2},$$

получаем

$$\Delta x = \ell \frac{m_1 - m_2}{M + m_1 + m_2} \approx 0{,}33 \text{ м}$$

Ответ: $\Delta x = \ell \dfrac{m_1 - m_2}{M + m_1 + m_2} \approx 0{,}33$ м.

Пример 6.

Брусок массой m и длиной ℓ лежит на стыке двух горизонтальных столов (рис. 2.13). Какую минимальную работу надо совершить, чтобы перетащить тело волоком с первого стола на второй, если коэффициенты трения между телом и столами соответственно равны μ_1 и μ_2 **(уровень 3).**

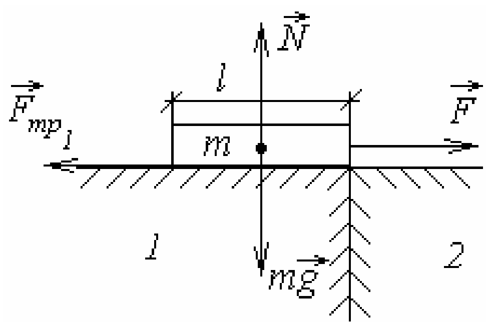


Рис. 2.13

Решение. Рассмотрим промежуточное положение бруска, соответствующее длине x его части, находящейся на втором столе. Силы, действующие на брусок в этот момент времени, представлены на рисунке. Чтобы совершить минимальную работу по перетаскиванию бруска, к нему необходимо приложить горизонтальную силу $\vec{F}$, которая по величине должна быть равна сумме сил трения $F_{тр1}$ и $F_{тр2}$, действующих на брусок со стороны первого и второго столов:

$$F = F_{тр1} + F_{тр2}.$$

Поскольку силы реакции $N_1 = m_1 g, N_2 = m_2 g$, то силы трения

$$F_{тр1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 m_1 g, \quad F_{тр2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 m_2 g,$$

где m_1, m_2 – массы частей бруска, находящихся в данный момент времени на первом и втором столах соответственно:

$$m_1 = \frac{m}{\ell}(\ell - x), \qquad m_2 = \frac{m}{\ell} x.$$

Следовательно

$$F_{mp1}=\mu_1\frac{m}{\ell}(\ell-x)g\,;\qquad F_{mp2}=\mu_2\frac{m}{\ell}xg\,;\quad F=\frac{\mu_1 mg(\ell-x)}{\ell}+\frac{\mu_2 mgx}{\ell}.$$

Как видим, сила F будет меняться в зависимости от пройденного бруском пути x по линейному закону. Работа переменной силы F может быть определена одним из трех способов.

Первый способ

График зависимости силы F от координаты (пройденного пути) x представлен на рис. 2.14. Работа переменной силы F численно равна площади заштрихованной фигуры (трапеции):

$$A=\frac{(\mu_1+\mu_2)mg\ell}{2}.$$

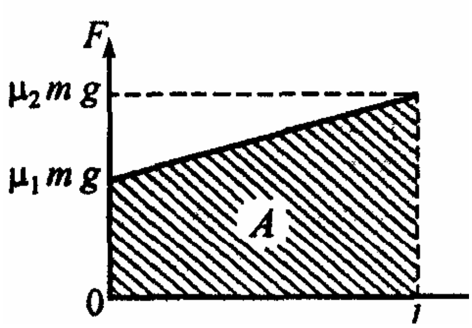


Рис. 2.14

Второй способ

Поскольку сила F зависит от пройденного бруском пути x по линейному закону, то среднее значение силы

$$\langle F\rangle=\frac{(\mu_1+\mu_2)mg}{2},$$

а работа силы на пути ℓ

$$A=\langle F\rangle\,\ell=\frac{(\mu_1+\mu_2)mg\ell}{2}.$$

Третий способ

Работа силы F может быть определена с помощью интегрирования

$$A=\int_0^\ell Fdx=\int_0^\ell\left\{\frac{\mu_1 mg(\ell-x)}{\ell}+\frac{\mu_2 mgx}{\ell}\right\}dx=\int_0^\ell\frac{\mu_1 mg(\ell-x)}{\ell}dx+\int_0^\ell\frac{\mu_2 mgx}{\ell}dx=$$

$$=\mu_1 mgh\Big|_0^\ell-\frac{\mu_1 mgx^2}{2\ell}\Bigg|_0^\ell+\frac{\mu_2 mgx^2}{2\ell}\Bigg|_0^\ell=\frac{(\mu_1+\mu_2)mg\ell}{2}.$$

Ответ: $A=\dfrac{(\mu_1+\mu_2)mg\ell}{2}$.

Пример 7.

Груз массой m = 100 г соединен невесомой нерастяжимой нитью, переброшенной через легкий блок, с пружиной жесткостью k = 10 Н/м, прикрепленной к полу (рис. 2.15). В начальный момент груз удерживают на высоте h = 15 см от пола так, что нить натянута, а пружина не деформирована. Чему будет равна максимальная скорость груза, если его отпустить? Какое количество тепла выделиться при абсолютно неупругом ударе груза о пол? **(уровень 5).**

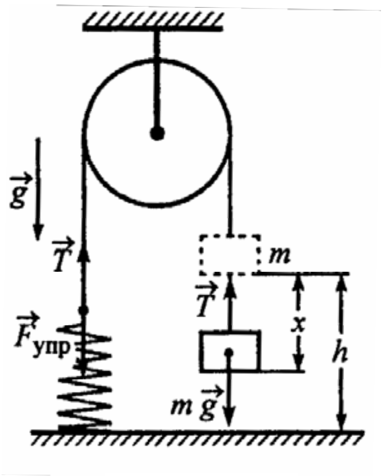


Рис. 2.15

Решение. При движении на груз будут действовать сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$, равная силе упругости пружины $\vec{F}_{упр}$, направленные так, как показано на рис. 2.15. В начале движения сила тяжести по величине будет больше силы упругости пружины, и ускорение груза будет направлено вниз. После прохождения положения равновесия сила упругости станет больше силы тяжести, и скорость груза будет уменьшаться. Очевидно, что скорость груза будет максимальной в момент прохождения им положения равновесия, в котором

$$mg = F_{упр}, \text{ или } mg = kx, \qquad (1)$$

где x – растяжение пружины в этот момент.

Следовательно

$$x = \frac{mg}{k} \approx 9{,}8 \text{ см}$$

меньше чем h = 15 см, и скорость груза достигнет максимального значения. Поскольку в момент движения груза сила натяжения равна по величине силе упругости пружины, то работа сторонней силы $\vec{T}$ на пути x будет равна работе консервативной силы $\vec{F}_{упр}$

$$|A(T)| = |A(F_{упр})| = \frac{kx^2}{2}.$$

Если выбрать нулевой уровень отсчета потенциальной энергии на уровне пола, то в начальном положении энергия системы равна потенциальной энергии груза

$$E_1 = mgh,$$

а на высоте $(h - x)$ над полом – сумме потенциальной и кинетической энергий груза и потенциальной энергии пружины

$$E_2 = mg(h - x) + \frac{m\upsilon_{\max}^2}{2} + \frac{kx^2}{2},$$

где $\upsilon_{\max}$ – максимальная скорость груза.

Следовательно, закон сохранения механической системы примет вид

$$mgh = mg(h-x) + \frac{m\upsilon_{\max}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}. \qquad (2)$$

Из (2) с учетом (1) получим

$$\upsilon_{\max} = g\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 1 \text{ м/с}.$$

Рассмотрим вторую часть задачи.

К моменту удара груза о пол пружина будет растянута на величину h, и энергия системы станет равна

$$E_3 = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{kh^2}{2},$$

где υ – скорость груза в момент удара о пол.

Теперь закон сохранения энергии системы примет вид

$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{kh^2}{2}.$$

При абсолютно неупругом ударе о пол кинетическая энергия груза перейдет во внутреннюю энергию (тепло):

$$Q = \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

Следовательно

$$Q = mgh - \frac{kh^2}{2} \approx 34{,}5 \text{ мДж}.$$

Ответ: $\upsilon_{\max} = g\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 1$ м/с; $Q = mgh - \frac{kh^2}{2} \approx 34{,}5$ мДж.

Пример 8.

На гладкой горизонтальной поверхности лежит брусок. Пуля, летящая горизонтально со скоростью υ = 600 м/с, пробивает брусок и вылетает из него со скоростью 0,5 υ. Масса пули m = 9 г, масса бруска M = 5 кг. Сколько тепла выделилось при движении пули в бруске? Траекторию пули считать прямолинейной **(уровень 4).**

Решение. Будем рассматривать пулю и брусок как одну систему, что позволит исключить из рассмотрения силы, возникающие при ударе.

Если пренебречь импульсом силы трения за время взаимодействия пули с бруском, то в горизонтальном направлении систему можно считать замкнутой. Запишем закон сохранения импульса системы «пуля – брусок» в направлении движения пули в виде

$$\frac{1}{2}m\upsilon + Mu - m\upsilon = 0\,. \qquad (1)$$

При движении пули в бруске между ними будет действовать **диссипативная сила** – сила трения, что приведет к тому, что часть механической энергии системы перейдет в тепло. Так как поверхность, на которой находится брусок, гладкая, то внешние диссипативные силы отсутствуют.

При столкновении с бруском начальная кинетическая энергия пули $E_1 = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$ частично перейдет в тепло, и механическая энергия системы непосредственно после взаимодействия будет равна

$$E_2 = \frac{m\upsilon^2}{8} + \frac{Mu^2}{2},$$

где u – скорость бруска после взаимодействия с пулей.

Запишем теорему о полной механической энергии в виде

$$|\Delta E| = |E_2 - E_1| = E_1 - E_2 = Q \text{ или } \frac{m\upsilon^2}{2} - \left\{\frac{m\upsilon^2}{8} + \frac{Mu^2}{2}\right\} = Q, \qquad (2)$$

где Q – количество тепла, выделившегося при движении пули в бруске.

Решив систему уравнений (1) – (2) относительно Q, получим

$$Q = \frac{m\upsilon^2(3M - m)}{8M} \approx 1{,}2 \text{ кДж}.$$

Ответ: $Q = \dfrac{m\upsilon^2(3M - m)}{8M} \approx 1{,}2$ кДж.

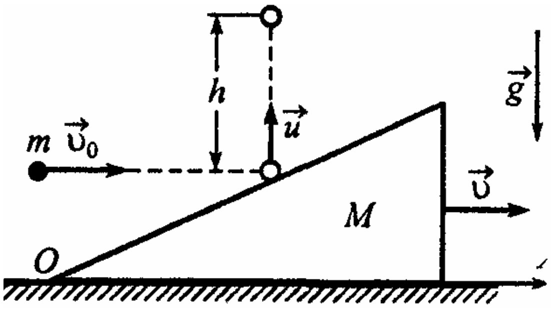


Рис. 2.16

Пример 9.

В покоящийся клин массой M попадает горизонтально летящий шарик массой m (рис. 2.16) и после упругого удара о поверхность клина отскакивает вертикально вверх. На какую высоту h он поднимется, если горизонтальная скорость клина после удара равна υ? Трением и сопротивлением воздуха пренебречь **(уровень 3).**

Решение. Полагая, что за время столкновения изменение потенциальной энергии шарика и клина равно нулю, закон сохранения энергии можно записать в виде

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + \frac{M\upsilon^2}{2}, \qquad (1)$$

где $\vec{\upsilon}$, $\vec{u}$ – скорости шарика в момент столкновения с клином и непосредственно после столкновения соответственно.

Так как между поверхностями клина и горизонтальной плоскостью трение отсутствует, то система «клин – шарик» в горизонтальном направлении замкнута (все внешние силы – силы тяжести и реакции – будут направлены вертикально). Следовательно, закон сохранения импульса

$$m\vec{\upsilon}_0 = m\vec{u} + M\vec{\upsilon}$$

в проекции на ось OX примет вид

$$m\upsilon_0 = M\upsilon. \qquad (2)$$

Выразив υ_0 из (2) и подставив в (1)

$$\frac{M^2\upsilon^2}{2m} = \frac{mu^2}{2} + \frac{M\upsilon^2}{2},$$

найдем скорость шарика сразу после столкновения с клином

$$u = \upsilon\sqrt{\frac{(M-m)M}{m^2}}.$$

Следовательно, высота подъема шарика

$$h = \frac{u^2}{2g} = \frac{M(M-m)\upsilon^2}{2m^2 g}.$$

Ответ: $h = \dfrac{M(M-m)\upsilon^2}{2m^2 g}$.

2.5. Задачи для самостоятельного решения

Силы. Законы Ньютона

1. Тело массой m = 2 кг движется прямолинейно по закону $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ (C = 2 м/с^2, D = 0,4 м/с^3). Определите силу, действующую на тело в конце первой секунды движения [3,2 Н, **уровень 1**].

2. Тело массой m движется так, что зависимость пройденного пути от времени описывается уравнением $s = A \cos \omega t$, где A и ω – постоянные. Запишите закон изменения силы от времени [$F = -mA\omega^2 \cos \omega t$, **уровень 1**].
3. С вершины идеально гладкой сферы радиусом $R = 1{,}2$ м соскальзывает небольшое тело. Определите высоту h (от вершины сферы), с которой тело со сферы сорвется [$h = 40$ см, **уровень 1**].
4. Два груза ($m_1 = 500$ г и $m_2 = 700$ г) связаны невесомой нитью и лежат на гладкой горизонтальной поверхности. К грузу m_1 приложена горизонтально направленная сила $F = 6$ Н. Пренебрегая трением, определите: 1) ускорение грузов; 2) силу натяжения нити [1) 5 м/с^2; 2) 3,5 Н, **уровень 1**].
5. Тело массой $m = 2$ кг падает вертикально с ускорением $a = 5$ м/с^2. Определите силу сопротивления при движении этого тела. [9,62 Н, **уровень 1**].
6. Подвешенный на нити шарик массой $m = 200$ г отклоняют на угол $\alpha = 45°$. Определите силу натяжения нити в момент прохождения шариком положения равновесия [3,11 Н, **уровень 2**].
7. В установке на рис. 2.17 угол α наклонной плоскости с горизонтом равен 20°, массы тел $m_1 = 200$ г и $m_2 = 150$ г. Считая нить и блок невесомыми и пренебрегая силами трения, определите ускорение, с которым будут двигаться эти тела, если тело m_2 опускается [2,29 м/с^2, **уровень 2**].

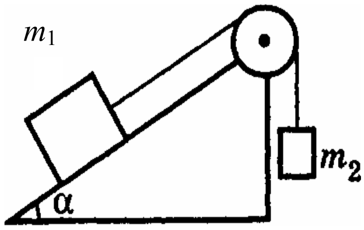


Рис. 2.17

8. На рис. 2.18 изображена система блоков, к которым подвешены грузы массами $m_1 = 200$ г и $m_2 = 500$ г. Считая, что груз m_1 поднимается, а подвижный блок с грузом m_2 опускается (нить и блоки невесомы, силы трения отсутствуют) определите: 1) силу натяжения нити T; 2) ускорения, с которыми движутся грузы [1) $T = 2{,}26$ Н; 2) $a = 1{,}5$ м/с^2, $a2 = 0{,}75$ м/с^2, **уровень 3**].

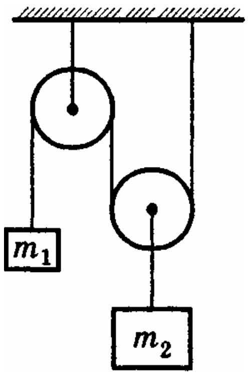


Рис. 2.18

9. В установке (рис. 2.19) углы α и β с горизонтом соответственно равны 30° и 45°, массы тел $m_1 = 0{,}45$ кг и $m_2 = 0{,}5$ кг. Считая нить и блок невесомыми и пренебрегая силами трения, определите: 1) ускорение, с которым движутся тела; 2) силу натяжения нити [1) 1,33 м/с^2; 2) 2,8 Н, **уровень 3**].
10. По наклонной плоскости с углом α наклона к горизонту, равным 30°, скользит тело. Определите скорость тела в конце второй секунды от начала скольжения, если коэффициент трения $\mu = 0{,}15$ [7,26 м/с, **уровень 4**].

11. В установке (рис. 2.20) угол α наклона плоскости с горизонтом равен 30°, массы тел одинаковы (m = 1 кг). Считая нить и блок невесомыми и, пренебрегая трением в оси блока, определите силу давления F на ось, если коэффициент трения между наклонной плоскостью и лежащим на ней телом μ = 0.1 [$F = mg(l + \mu\cos a + \sin a) \cos (\pi/4 - \alpha/2)$ = 13,5 Н, **уровень 4**].

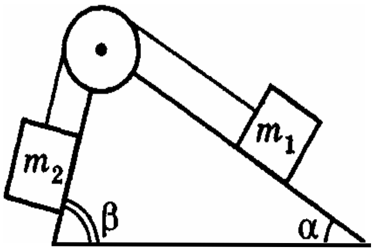


Рис. 2.19

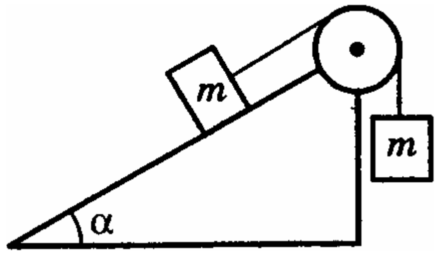


Рис. 2.20

12. Нагруженная песком железнодорожная платформа с начальной массой m_0 начинает движение из состояния покоя под действием постоянной силы тяги F. Через отверстие в дне платформы высыпается песок с постоянной скоростью μ (кг/с). Определите $\upsilon(t)$, т. е. зависимость скорость платформы от времени [$\upsilon = \frac{F}{\mu}\ln\frac{m_0}{m_0 - \mu t}$, **уровень 5**].

Закон сохранения импульса

1. На железнодорожной платформе, движущейся по инерции со скоростью υ_0 = 3 км/ч, укреплено орудие. Масса платформы с орудием M = = 10 т. Ствол орудия направлен в сторону движения платформы. Снаряд массой m = 10 кг вылетает из ствола под углом α = 60° к горизонту. Определите скорость υ снаряда (относительно земли), если после выстрела скорость платформы уменьшилась в n = 2 раза [835 м/с, **уровень 3**].
2. Снаряд массой m = 5 кг, вылетевший из орудия, в верхней точке траектории имеет скорость υ_0 = 300 м/с. В этой точке он разорвался на два осколка, причем больший осколок массой m_1 = 3 кг полетел в обратном направлении со скоростью υ_1 = 100 м/с. Определите скорость υ_2 второго, меньшего осколка [900 м/с, **уровень 3**].
3. Лодка массой M = 150 кг и длиной l = 2,8 м неподвижна в стоячей воде. Рыбак массой m = 90 кг в лодке переходит с носа на корму. Пренебрегая сопротивлением воды, определите, на какое расстояние s при этом сдвинется лодка [1,05 м, **уровень 3**].

4. Платформа с песком общей массой M = 2 т стоит на рельсах на горизонтальном участке пути. В песок попадает снаряд массой m = 8 кг и застревает в нем. Пренебрегая трением, определите, с какой скоростью будет двигаться платформа, если в момент попадания скорость снаряда υ = 450 м/с, а ее направление – сверху вниз под углом α = 30° к горизонту [1,55 м/с, **уровень 3**].
5. Две одинаковые тележки массой M каждая движутся по инерции (без трения) друг за другом с одинаковой скоростью $\vec{\upsilon}_0$. В какой-то момент времени человек массой m, находящийся на задней тележке, прыгнул в переднюю со скоростью $\vec{u}$ относительно своей тележки. Определите скорость $\vec{\upsilon}_1$ передней тележки [$\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_0 + \frac{mM}{(m+M)^2}\vec{u}$, **уровень 4**].

Определение положения центра масс

1. Определите положение центра масс системы, состоящей из четырех шаров, массы которых равны соответственно m, $2m$, $3m$ и $4m$, в следующих случаях (рис. 2.21): а) шары расположены на одной прямой; б) шары расположены по вершинам квадрата; в) шары расположены по четырем смежным вершинам куба.

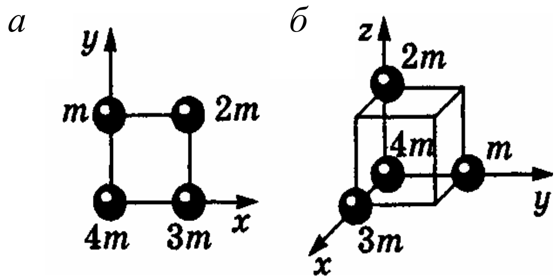


Рис. 2.21

Во всех случаях расстояние между соседними шарами равно 15 см. Направления координатных осей показаны на рис. 2.21) [а) x = 7,5 см, y_c = 4,5 см; б) x_c = 4,5 см, y_c = 1,5 см, z_c = 3 см, **уровень 2, 3**].
2. Определите координаты центра масс системы, состоящей из четырех шаров массами $2m$, $3m$, $4m$ и m, которые расположены в вершинах и в центре равностороннего треугольника со стороной a = 20 см (рис. 2.22). Направления координатных осей указаны на рисунке [x_c = 12 см, y_c = 5,77 см, **уровень 3**].

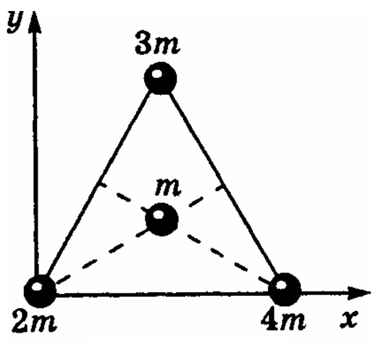


Рис. 2.22

3. Определите положение центра масс половины круглого диска радиусом R, считая его однородным. [На расстоянии $4R/3\pi$ от центра, **уровень 5**].

Работа и энергия

1. Тело массой m = 5 кг поднимают с ускорением a = 2 м/с^2. Определите работу силы в течение первых пяти секунд [1,48 кДж, **уровень 2**].
2. Автомашина массой m = 2000 кг останавливается за t = 6 с, пройдя расстояние s = 30 м. Определите: начальную скорость автомашины; 2) силу торможения [1) 10 м/с; 2) 3,33 кН, **уровень 2**].
3. Автомобиль массой m = 1,8 т движется в гору, уклон которой составляет 3 м на каждые 100 м пути. Определите: 1) работу, совершаемую двигателем автомобиля на пути 5 км, если коэффициент трения равен 0,1; 2) развиваемую двигателем мощность, если известно, что этот путь был преодолен за 5 мин [1) 11,5 МДж; 2) 38,3 кВт, **уровень 3**].
4. Определите работу, совершаемую при подъеме груза массой m =50 кг по наклонной плоскости с углом наклона α = 30° к горизонту на расстояние s = 4 м, если время подъема t = 2 с, а коэффициент трения 0,06. [1,48 кДж, **уровень 3**]
5. Насос мощностью N используют для откачки нефти с глубины h. Определите массу жидкости, поднятой за время t, если КПД насоса равен η [$m = \dfrac{\eta N t}{gh}$, **уровень 3**].
6. Поезд массой m = 600 т движется под гору с уклоном α = 0,3° и за время t = 1 мин развивает скорость υ = 18 км/ч. Коэффициент трения μ = 0,01. Определите среднюю мощность N локомотива [195 кВт, **уровень 3**].
7. Автомобиль массой m = 1,8 т спускается при выключенном двигателе с постоянной скоростью υ = 54 км/ч по уклону дороги (угол к горизонту α = 3°). Определите, какова должна быть мощность двигателя автомобиля, чтобы он смог подниматься на такой же подъем с той же скоростью [27,7 кВт, **уровень 3**].
8. Тело массой m поднимается без начальной скорости с поверхности земли под действием силы F, меняющейся с высотой подъема y по закону $\vec{F} = -2m\vec{g}(1 - Ay)$ (где A – некоторая положительная постоянная). Определите: 1) высоту подъема; 2) работу силы F на первой трети пути [1) $H = A^{-1}$, 2) $A = \dfrac{5mg}{9A}$, **уровень 4**].
9. Тело скользит с наклонной плоскости высотой h и углом наклона α к горизонту и движется далее по горизонтальному участку. Принимая коэффициент трения на всем пути постоянным и равным μ, определите

расстояние s, пройденное телом на горизонтальном участке, до полной остановки [$s = \frac{h}{\mu}(1 - \mu \mathrm{tg}\alpha)$, **уровень 4**].

10. Тело массой m начинает двигаться под действием силы $\vec{F} = 2t\vec{i} + 3t^2\vec{j}$, где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – соответственно единичные векторы координатных осей x и y. Определите мощность $N(t)$ развиваемую силой в момент времени t [$N(t) = \dfrac{2t^3 + 3t^5}{m}$, **уровень 4**].

Столкновения

1. Тело массой m_1 = 3 кг движется со скоростью υ_1 = 2 м/с и ударяется о неподвижное тело такой же массы. Считая удар центральным и неупругим, определите количество теплоты, выделившееся при ударе [3 Дж, **уровень 3**].
2. Два шара массами m_1 = 9 кг и m_2 = 12 кг подвешены на нитях длиной l = = 1,5 м. Первоначально шары соприкасаются между собой, затем меньший шар отклонили на угол α = 30° и отпустили. Считая удар неупругим, определите высоту h, на которую поднимутся оба шара после удара [$h = \left(\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 l(1 - \cos\alpha) = 3,7$ см, **уровень 4**].
3. Шар сталкивается с другим покоящимся шаром такой же массы. Докажите, что в случае упругого, но не центрального удара угол между направлениями скоростей после удара составляет $\pi/2$ [**уровень 5**].
4. При абсолютно упругом ударе костяных шаров одинаковой массы всегда отскакивает столько шаров, сколько налетает. Докажите этот результат **[уровень 5**].

3. УЧЕБНЫЙ БЛОК «КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ»

Введение

Колебаниями или **колебательными движениями** называются движения, обладающие той или иной степенью повторяемости состояния тел во времени. Например, механические колебания тела, подвешенного на пружине, качания маятников, колебания струн, вибрации фундаментов зданий, электромагнитные колебания в колебательном контуре и др. Механическое колебательное движение может рассматриваться как движение материальной точки под действием некоторой возвращающей силы, т.е. при изучении колебательного движения применимы кинематические и динамические уравнения, что определяет причину изучения данного блока в модуле «Механика материальной точки». Однако методы определения параметров колебаний и уравнений колебаний, представленные в данном разделе, имеют гораздо более широкую область применения, и будут использоваться при изучении колебательного движения твердого тела, электромагнитных колебаний, волновых процессов.

При изучении данного раздела студенты должны

иметь представление:

– об основных характеристиках колебательного движения – периоде, частоте, фазе, амплитуде;

– об основных характеристиках движения и связях между ними;

– о принципе суперпозиции движений;

– о способах решения дифференциальных уравнений второго порядка;

обладать навыками:

– определения равнодействующей силы;

– решения задач на второй закон Ньютона в инерциальной и неинерциальной системах отсчета;

– применения элементов дифференциального и интегрального исчисления.

Учебная программа блока

Содержание блока	Форма подготовки	Литература
1. Гармонические колебания (механические) и их характеристики. Связь вращения и колебаний. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний. Квазиупругая сила. Период колебаний пружинного, математического маятников	лекция лекция самост.	[2, § 27.1, 27.2]

Окончание табл.

2. Изменение кинетической и потенциальной энергии в процессе колебаний. Закон сохранения энергии для колебательной системы	самост.	[2, § 27.2]
3. Дифференциальное уравнение затухающих механических колебаний и его решение. Период, декремент затухания, время релаксации, добротность. Апериодический процесс	лекция лекция	[2, § 28.1]
4. Дифференциальное уравнение вынужденных механических колебаний и его решение. Амплитуда и фаза вынужденных колебаний. Явление резонанса. Соотношение между фазами вынужденных колебаний силы и смещения. Параметрические колебания*	лекция лекция	[2, § 28.1 – 28.3]
5. Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты. Понятие об интерференции. Условие максимумов и минимумов. Сложение гармонических колебаний одного направления с разными частотами. Биения. Период биений, время когерентности*. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу. Линейная и круговая поляризация*	лекция лекция лекция	[2, § 27.4]

Примечание. * – Материал изучается ознакомительно

Цели обучения

студент должен **знать**	студент должен **уметь**
– уравнение гармонических колебаний и связь параметров колебания; – дифференциальное уравнение гармонических колебаний; – период колебаний основных колебательных систем; – соотношения для энергий колебательных систем; – дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение; зависимость энергии от времени при затухающих колебаниях; основные характеристики затухающих колебаний; – дифференциальное уравнение вынужденных механических колебаний; зависимость кинематических величин от времени при вынужденных механических колебаниях; – зависимость амплитуды и фазы между силой и смещением вынужденных колебаний от частоты;	– составлять уравнение гармонических колебаний; находить связь между кинематическими величинами; – составлять и решать дифференциальные уравнения для простейших колебательных систем; – определять период и частоту колебаний; – находить зависимость возвращающей силы и энергий от времени; – составлять дифференциальные уравнения затухающих колебаний, уравнения зависимости кинематических величин, силы и энергии системы от времени; находить основные характеристики колебательной системы;

Окончание табл.

– параметрические колебания; – формулы для амплитуды и начальной фазы при сложении гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты; – условия максимумов и минимумов при сложении двух колебаний; – уравнение биений; период и частота биений, время когерентности; – сложение взаимно перпендикулярных колебаний; фигуры Лиссажу; линейная и круговая поляризация	– определять характеристики параметрических колебаний; – составлять уравнения результирующих колебаний; – строить векторные диаграммы; – составлять уравнение траектории при сложении взаимно перпендикулярных колебаний

3.1. Краткое содержание теоретического материала

Колебания называются **периодическими**, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебаний, повторяются через равные промежутки времени.

Периодом колебания T называется наименьший промежуток времени, по истечении которого повторяются значения всех величин, характеризующих колебательное движение. За это время совершается одно полное колебание.

Частотой периодических колебаний ν называется число полных колебаний, которые совершаются за единицу времени: $\nu = \frac{1}{T}$. Циклической (круговой) частотой периодических колебаний называется число полных колебаний, которые совершаются за 2π секунд: $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$.

Так как колебательное движение является одной из разновидностей механического движения, оно должно подчиняться законам динамики Ньютона, в частности второму закону: $m\vec{a} = \vec{F}$.

Периодичность повторения состояния тела (в частности его координат) при колебании обеспечивается возвращающей силой, поэтому перемещение тела противоположно (по направлению) действующей (возвращающей) силе. Учитывая это и вводя во второй закон Ньютона силу, например, упругости, уравнения движения можно записать в виде

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0, \tag{1}$$

где x – координата тела, зависящая от времени t при колебательном движении тела по прямолинейной траектории.

Дифференциальное уравнение (1) перепишем в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0\,, \tag{2}$$

где m – масса колеблющейся системы; k – упругость системы.

Решением уравнения (2) может быть гармоническая функция

$$x=x_0\sin(\omega t+\varphi_0) \quad \text{или} \quad x=x_0\cos(\omega t+\varphi_0)\,. \tag{3}$$

В этом можно убедиться подстановкой этой функции в уравнение (2) при условии, что

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\,. \tag{4}$$

При этом в уравнении (3) величина x – отклонение системы от точки равновесия (координата) в момент времени t; x_0 – максимально возможное отклонение от точки равновесия (амплитуда); ω – циклическая частота колебаний.

Возможен произвольный выбор гармонической функции колебательного движения, но при этом требуется определение начальной фазы колебаний φ_0, чтобы обеспечить однозначность движения, которое не зависит от нашего выбора. Начальная фаза колебаний может быть определена из значения какого-либо параметра колебаний в заданный момент времени. Например, если известно отклонение системы от точки равновесия x в момент начала колебаний ($t = 0$), можно (3) представить в виде

$$\frac{x}{x_0}=\sin(\varphi_0) \quad \text{или} \quad \frac{x}{x_0}=\cos(\varphi_0) \tag{5}$$

Уравнения (5) позволяют определить φ_0.

В уравнении колебаний (2) возвращающая сила прямо пропорциональна смещению от точки равновесия. Поэтому собственная частота колебаний любой системы, в которой вращающая сила пропорциональна смещению, может быть найдена по формуле, аналогичной (4). В качестве примера определим ω для математического маятника.

Математическим маятником называется материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити и совершающая движение в вертикальной плоскости под действием силы тяжести $m\vec{g}$ (рис. 3.1).

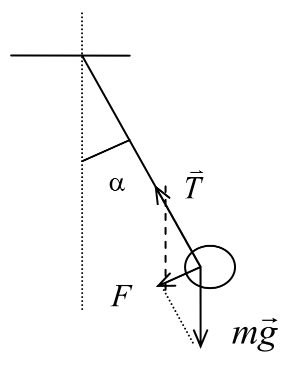


Рис. 3.1

Чтобы описать колебания под действием силы тяжести нужно воспользоваться законами механики Ньютона. Касательное (тангенциальное) ускорение телу сообщает сила $F = mg\sin\alpha$. При малых углах можно записать, что $\sin\alpha \approx \mathrm{tg}\alpha = \frac{x}{l}$. Поскольку векторы силы и смещения противонаправлены, то $F = -mg\frac{x}{l}$, т.е. сила пропорциональна смещению. Уравнение (2) для маятника можем записать в виде

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + mg\frac{x}{l} = 0.$$

Из него следует, что циклическая частота колебаний математического маятника равна: $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Таким образом, в пределе малых колебаний, т.е. при малых углах отклонения маятника из положения равновесия, когда **возвращающая сила пропорциональна смещению**, возникают гармонические колебания с периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где l – длина подвеса, g – ускорение свободного падения.

Превращение энергии при колебании рассмотрим на примере пружинного маятника. Пусть колебания происходят по закону $x = A\cos\omega t$. При гармонических колебаниях пружинного маятника происходят превращения потенциальной энергии упруго деформированного тела (пружины) $U = \frac{kx^2}{2}$ в кинетическую энергию груза $E = \frac{m\upsilon^2}{2}$ и наоборот. Полная энергия колебательной системы определяется суммой энергий. Учитывая, что $\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin\omega t$, можно записать

$$W = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m(-\omega A\sin\omega t)^2}{2} + \frac{k(A\cos\omega t)^2}{2} =$$

$$= \frac{m\omega^2A^2\sin^2\omega t}{2} + \frac{m\omega^2A^2\cos^2\omega t}{2} = \frac{m\omega^2A^2}{2}. \qquad (6)$$

Полная энергия колебаний не зависит от времени

$$W = \frac{m\omega^2A^2}{2}.$$

Однако доля каждого вида энергии в полной энергии изменяется со временем. Таким образом превращения энергии при колебаниях пружинного маятника происходят в соответствии с законом сохранения механической энергии. При движении маятника вниз или вверх от положения равновесия его потенциальная энергия увеличивается, а кинетическая – уменьшается. Когда маятник проходит положение равновесия ($x = 0$), его потенциальная энергия равна нулю, а кинетическая энергия маятника имеет наибольшее значение, равное его полной энергии. Максимальные значения энергий равны друг другу: $\frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{kx_0^2}{2}$.

Затухание колебаний вызывается главным образом трением, сопротивлением окружающей среды. Движения тела подчиняется второму закону Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{F}_{упр} + \vec{F}_{сопр},$$

где $\vec{F}_{сопр} = -b\vec{\upsilon}$ – сила сопротивления пропорциональна скорости движения тела, возвращающая сила является упругой: $\vec{F}_{упр} = -k\vec{x}$. В проекциях уравнение принимает вид

$$ma = -kx + b\upsilon,$$

преобразуя, получаем

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0. \tag{7}$$

Поделив на m, и обозначая $\beta = \frac{b}{2m}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – собственная частота колебаний, получаем дифференциальное уравнение затухающих колебаний:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \tag{8}$$

Решением данного уравнения является функция, описывающая зависимость координаты тела при затухающих колебаниях

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0), \tag{9}$$

где A_0 и φ_0 – начальные амплитуда и фаза соответственно. Циклическая частота колебаний уменьшается по сравнению с собственной частотой колебаний системы:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \tag{10}$$

Таким образом, амплитуда колебания со временем изменяется по закону $A = A_0 e^{-\beta t}$ (рис. 3.2).

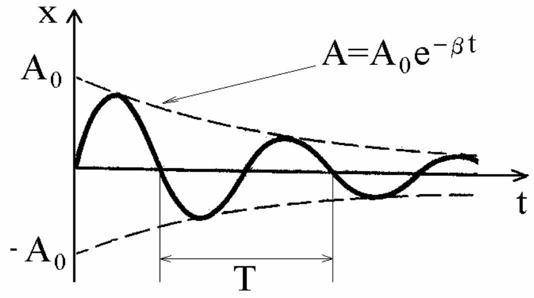


Рис. 3.2

Полная энергия колебательной системы уменьшается со временем по закону:

$$W = W_0 e^{-2\beta t}. \quad (11)$$

Промежуток времени, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в e раз, называется временем релаксации

$$\tau = \frac{1}{\beta}. \quad (12)$$

Для количественной характеристики быстроты убывания амплитуды затухающих колебаний пользуются понятиями декремента δ и логарифмического декремента λ затухания:

$$\delta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta t}; \qquad \lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N}, \quad (13)$$

где N – число колебаний, в течение которых амплитуда уменьшается в e раз.

Добротностью колебательной системы называется безразмерная величина Q, равная произведению 2π на отношение энергии системы в произвольный момент времени к убыли этой энергии за промежуток времени, равны периоду затухающих колебаний:

$$Q = 2\pi\frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)} \approx \frac{\pi}{\beta T}. \quad (14)$$

При увеличении коэффициента затухания β период затухающих колебаний возрастает и обращается в бесконечность при $\beta = \omega_0$. Такое движение системы не имеет колебательного характера и называется **апериодическим движением**.

Вынужденными колебаниями называются незатухающие колебания системы, которые вызываются действием на нее внешних сил $\vec{F}$, периодически изменяющихся с течением времени. Вынужденными являются колебания силы тока в сети переменного тока, колебания гребных винтов, лопаток и валов турбин под действием периодически изменяющихся внешних сил. Второй закон Ньютона для вынужденных колебаний имеет вид

$$\vec{F}_{упр} + \vec{F}_{сопр} + \vec{F} = m\vec{a}. \quad (15)$$

Если сила изменяется по закону $F = F_0 \cos(\omega t)$, F_0 – амплитуда возмущающей силы, ω – ее циклическая частота, то в системе, на которую действует такая сила, могут установиться вынужденные колебания, которые являются также гармоническими и происходят с циклической частотой, равной частоте вынуждающей силы. Записывая уравнение в проекциях, получаем дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

$$-kx - b\upsilon + F_o \cos\omega t = ma\,,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t\,. \qquad (16)$$

Установившиеся колебания происходят по закону: $x = A\cos(\omega t + \varphi)$, где A – амплитуда вынужденных колебаний физической величины (например, смещения), φ – разность фаз между вынужденными колебаниями $x(t)$ и силы $F(t)$.

Амплитуда A установившихся вынужденных колебаний определяется по формуле

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}\,, \qquad (17)$$

где ω_0 – циклическая частота собственных незатухающих колебаний системы.

Разность фаз между колебаниями силы и смещения определяется соотношением

$$\mathrm{tg}\varphi = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\,. \qquad (18)$$

Графики зависимости амплитуды и разности фаз от частоты при различных коэффициентах затухания, приведены на рис. 3.3.

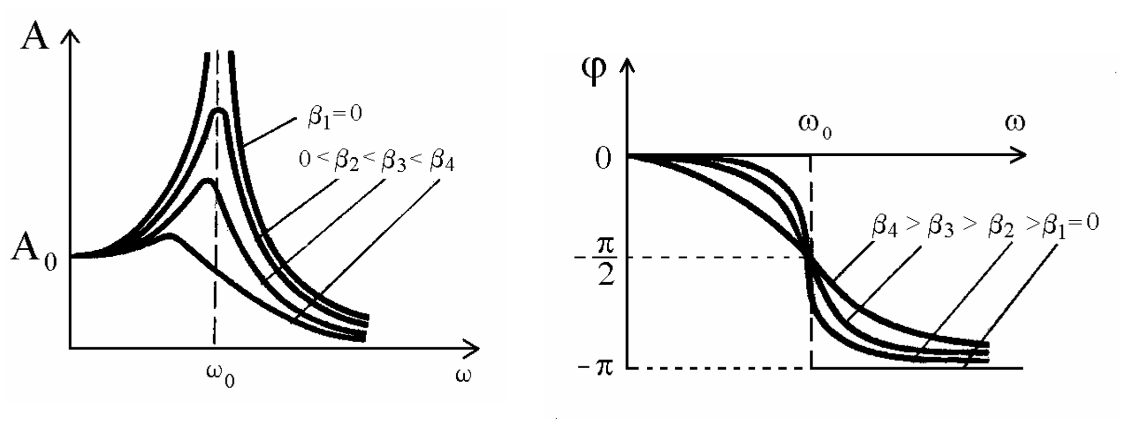


Рис. 3.3

Из уравнения (17) следует, что амплитуда вынужденных колебаний достигает наибольшего значения при частоте вынуждающей силы, не совпадающей с частотой собственных незатухающих колебаний ω_0:

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}\,. \qquad (19)$$

Явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении циклической частоты вынуждающей силы к значению ω_p называется резонансом. Соответственно величина ω_p называется резонансной циклической частотой, а кривые зависимости $A(\omega)$ – резонансными кривыми. Явление резонанса используется в акустике для анализа звуков, их усиления и т.д. Под действием периодически изменяющихся нагрузок в машинах и различных сооружениях могут возникать явления резонанса, которые иногда бывают опасны для эксплуатации машин.

Можно показать, что резонансная частота для амплитуды ускорения определяется соотношением

$$\omega_p^{уск} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}\,. \qquad (20)$$

Так как ускорение определяет силы, действующие на систему, приближение системы к этой частоте колебаний может привести к разрушению системы.

Резонансная частота для амплитуды скорости равна собственной частоте ω_0 колебаний механической системы.

Сложение колебаний

Как и любой вид движения, колебательное движение может быть результатом нескольких колебательных движений, в которых участвует одновременно система. В этом случае, для определения характеристик результирующего колебательного движения в соответствии с принципом суперпозиции в механике осуществляют *сложение колебаний.*

Сложение колебаний может осуществляться аналитически путем совместного решения уравнений колебаний, в которых участвует система или графическим методом. Последний в ряде случаев может оказаться более продуктивным.

При графическом методе каждое колебание представляется радиус-вектором (рис. 3.4), модуль которого равен амплитуде колебаний. Радиус-вектор вращается в системе (x, y) координат с циклической частотой колебаний. Вращение начинается из положения, определяемого начальной фазой.

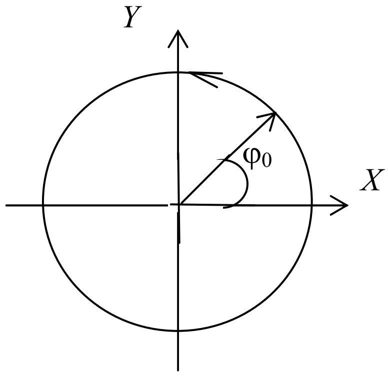


Рис. 3.4

При этом отклонение системы от равновесия в заданный момент времени определяется проекцией радиус-вектора на ось системы координат, относительно которой отсчитывается начальная фаза (ось x на рис. 3.4). Одновременное сложение двух колебаний можно осуществлять, если колебания происходят в одной плоскости. Если колебания осуществляются в разных плоскостях, то сложение производится попарно последовательно с учетом изменения положения координатной плоскости (x, y).

При сложении колебаний **одинакового направления** и одинаковой частоты $x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$ и $x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$ удобно воспользоваться методом векторных диаграмм (рис. 3.5). В этом случае говорят о когерентных колебаниях, т.е. колебаниях одинаковой частоты, разность фаз между которыми постоянна во времени. Результирующая амплитуда при сложении двух колебаний равна

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Начальная фаза результирующего колебания определяется соотношением:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}.$$

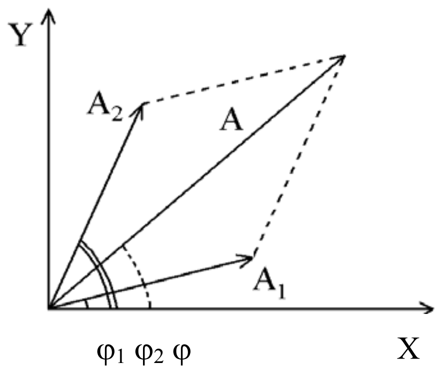


Рис. 3.5

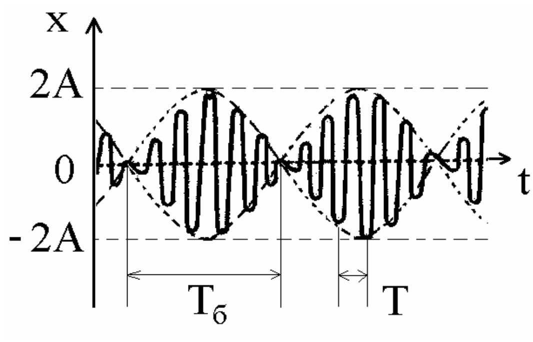


Рис. 3.6

Гармонические колебания, частоты которых различны, некогерентные, так как разность фаз непрерывно изменяется с течением времени. Негармонические колебания, получающиеся при сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний $x_1 = A\cos(\omega_1 t)$ и $x_2 = A\cos(\omega_2 t)$ с близкими частотами, называют биениями (рис. 3.6). Уравнение биений имеет вид

$$x = 2A\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right).$$

Период биений и частота биений равны:

$$T = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|}, \qquad \nu_б = |\nu_2 - \nu_1|.$$

При сложении двух **перпендикулярных колебаний** точка одновременно колеблется вдоль осей координат *OX* и *OY* по законам

$$x = A\cos(\omega t) \text{ и } y = B\cos(\omega t + \varphi).$$

Уравнение траектории результирующего движения точки в плоскости *XOY* можно найти, исключив из выражений для x и y параметр t. После преобразований получаем уравнение траектории

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{2xy}{AB}\cos\varphi = \sin^2\varphi,$$

представляющее собой общее уравнение эллипса. Поэтому результирующее движение точки называют эллиптически поляризованными колебаниями. Ориентация осей эллипса, его размеры зависят от амплитуд складываемых колебаний и разности фаз:

1. Если $\varphi = (2m + 1)\pi/2$, где m – целое число, то оси эллипса совпадают с осями *OX* и *OY*, а размеры полуосей равны A и B:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

Кроме того, если $A = B$, то траектория точки – окружность. Такое результирующее движение точки называют циркулярно-поляризованными колебаниями или колебаниями, поляризованными по кругу.

2. В тех случаях, когда $\varphi = m\pi$, где m – целое число, эллипс вырождается в отрезок прямой

$$y = \pm(B/A)x.$$

Знак «плюс» соответствует четным значениям m, т.е. сложению синфазных колебаний, знак «минус» – нечетным m, т.е. сложению колебаний, происходящих в противофазе. В этих случаях точка совершает линейно поляризованные колебания.

3.2. Методические указания к лекционным занятиям

Вопросы лекции	Форма изучения	Литература	Вопросы для самоконтроля студентов
1. Колебательное движение материальной точки Гармонические колебания (механические) и их характеристики. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний. Квазиупругая сила. Период колебаний пружинного, математического маятников. Закон сохранения энергии для колебательной системы. Диаграммный способ представления колебаний	 самост. + лекция лекция лекция лекция	 [2, § 27.1] [2, § 27.2] [2, § 27.2]	1. Каков основной признак колебательного движения? Назовите условия возникновения колебаний. 2. Запишите уравнение гармонических колебаний в всех возможных формах. 3. Как из этого уравнения найти скорость и ускорение колеблющейся точки в произвольный момент времени? 4. Как изменится период колебания математического маятника, если его точку подвеса двигать: а) вертикально вверх с ускорением a, б) вертикально вниз с ускорением a, в) горизонтально с ускорением a. 5. Как с помощью математического маятника можно определить ускорение силы тяжести? 6. Что такое векторная диаграмма? Постройте векторную диаграмму колебаний: $x_1 = 20\cos(\omega t + \pi/2)$ $x_2 = 20\cos(\omega t + 2\pi/3)$ $x_3 = 20\cos(\omega t - \pi/4)$ $x_4 = 20\cos(\omega t - \pi/2)$ 7. Получите выражения для кинетической, потенциальной и полной энергий гармонического колебания. Изобразите графически их зависимости от времени
2. Виды колебаний. Сложение колебаний. Резонанс Затухающие механические колебания. Время релаксации, добротность. Апериодический процесс. Вынужденные механические колебания. Амплитуда и фаза вынужденных колебаний. Резонанс. Соотношение между фазами вынужденных колебаний силы и смещения. Параметрические колебания*. Сложение гармонических колебаний одного направления Биения. Период биений, время когерентности*. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу. Линейная и круговая поляризация*	 лекция лекция лекция лекция лекция	 [2, §28.1 – 28.3] [2, § 27.4]	1. Как влияет коэффициент затухания на условный период затухающих колебаний системы? 2. Каков физический смысл времени релаксации? 3. Каков физический смысл добротности колебательной системы? 4.Что такое механический резонанс? Какое значение резонанса в технике? Приведите примеры. 5. Запишите дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и поясните величины, входящие в него. 6. Как по виду фигуры Лиссажу определить отношение частот складываемых колебаний? 7.Что такое линейно, эллиптически поляризованные колебания? Как их получить?

Примечание. * Материал изучается ознакомительно

3.3. Методические указания к практическим занятиям

Тема занятия	Тип задач	Рекомендации по решению	Задачи из сборников
1. Две формы уравнения колебаний	1. Гармонические колебания. Уравнение колебаний	1. Если в задаче задано уравнение гармонических колебаний, то величины, характеризующие колебания (амплитуда, частота, фаза, начальная фаза, период) могут быть найдены путем сопоставления данного уравнения с общим уравнением гармонических колебаний. 2. При нахождении зависимости кинематических величин от времени использовать соотношения $a = \upsilon' = x''$. Из курса математики повторите: график синуса и косинуса, производные и первообразные тригонометрических функций, решение тригонометрических уравнений	[1, № 12.1 – 12.10] [1, № 12.58 – 12.64]
	2. Составляющие энергии колебаний, их взаимопревращения в процессе колебаний	Определение зависимости энергий от времени. Полная энергия. Связь с кинематическими и динамическими величинами. Пользоваться законом сохранения и превращения энергии в задачах о маятниках. Зная зависимость $x(t)$, определять $v(t)$, а также потенциальную и кинетическую энергию	[1, № 12.15 – 12.20]
2. Вынужденные и затухающие колебания. Сложение колебаний	1. Сложение колебаний одного направления	1. Определение амплитуды и начальной фазы результирующего колебания. При нахождении результата сложения колебаний одной частоты и одного направления использовать векторную диаграмму колебаний. 2. Определение параметров и уравнения биений При нахождении периода биений и частоты колебаний, а также частот складываемых колебаний использовать сопоставление с уравнением биений в общем виде	[1, № 12.25 – 12.35]
	2. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний	Определение фигур Лиссажу При определении уравнения траектории $y(x)$ исключить из системы уравнений $x(t)$ и $y(t)$ время t.	[1, № 12.37 – 12.40]
	3. Затухающие колебания	Определение параметров затухающих колебаний и зависимостей кинематических величин от времени. При определении характеристик затухания (коэффициент затухания, время релаксации, декремент затухания) помнить о том, что амплитуда колебаний убывает по экспоненциальному закону. Энергия колебательной системы пропорциональна квадрату амплитуды	[1, № 12.42 – 12.47]
	4. Вынужденные колебания. Явление резонанса. Параметрический резонанс	Определение амплитуды вынужденных колебаний, резонансных частот Увеличение амплитуды вынужденных колебаний происходит при совпадении частоты внешней силы с резонансной частотой, которая различна для амплитуд смещения, скорости и ускорения	[1, № 12.54 – 12.56]

3.4. Примеры решения задач

Уравнения колебаний и параметры колебаний

Пример 1.

За какое время маятник отклонится от положения равновесия на половину амплитуды, если период колебаний 1,2 с? Начальная фаза равна нулю (**уровень 1**).

Решение. Колебания маятника могут быть описаны уравнением гармонического движения

$$x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right),$$

где A – амплитуда колебаний; T – период; φ_0 – начальная фаза колебаний ($\varphi_0 = 0$). По условию задачи $x = A/2$. Поэтому $\frac{A}{2} = A\sin\frac{2\pi}{T}t$, т.е. $\sin\frac{2\pi}{T}t$ = = 1/2 или $\frac{2\pi}{T}t = \frac{\pi}{6}$. Отсюда $t = \frac{T}{12} = \frac{1,2}{12} = 0,1$ с.

Ответ: $t = \frac{T}{12} = \frac{1,2}{12} = 0,1$ с.

Пример 2.

Маятниковые часы, идущие точно на уровне моря, подняты на высоту h = 1 км. Сколько потребуется времени для того, чтобы по часам на этой высоте прошли одни сутки? Радиус земли R = 6400 км (**уровень 2**).

Решение. Маятник часов на уровне моря за время t_0 (1 сутки) совершит $N = \frac{t_0}{T_0}$ колебаний, где $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_0}}$ – период колебания маятника; l – его длина, g_0 – ускорение силы тяжести на уровне моря.

Чтобы на высоте h совершить тоже число колебаний N, т.е. показать одни сутки, маятнику потребуется времени

$$t = NT,$$

где $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ – период колебания маятника часов на высоте h; g – ускорение силы тяжести на этой высоте.

Тогда искомое время

$$t = NT = \frac{T}{T_0}t_0 = t_0\sqrt{\frac{g_0}{g}};$$

$$g_0 = \gamma \frac{M}{R^2}; \qquad g = \gamma \frac{M}{(R+h)^2},$$

где γ – гравитационная постоянная; M – масса Земли; R – радиус земного шара.

Следовательно $t = \frac{R+h}{R} t_0 =$ 86413,5 сек = 24 ч 13,5 сек.

Ответ: t = 24 ч 13,5 сек.

Пример 3.

Материальная точка массой 10 г колеблется по закону $x = 0{,}05\sin\left(\frac{\pi t}{5} + \frac{\pi}{4}\right)$ м. Найти: 1) максимальную силу, действующую на точку; 2) закон изменения со временем кинетической энергии колеблющейся точки (**уровень 2**).

Решение. Максимальное значение возвращающей сила равно $F_0 = kA$, где коэффициент жесткости $k = m\omega^2$, A = 0,05 м – амплитуда колебаний. Так как $\omega = \frac{\pi}{5}$, то

$$F_0 = m\omega^2 A = 0{,}01 \cdot \left(\frac{\pi}{5}\right)^2 \cdot 0{,}05 = 0{,}2 \text{ мН}.$$

Кинетическая энергия $E_к = \frac{m^2}{2}$. Скорость точки определяется через производную от координаты по времени:

$$\upsilon = x' = 0{,}05 \cdot \frac{\pi}{5}\cos\left(\frac{\pi \cdot t}{5} + \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}01\pi\cos\left(\frac{\pi \cdot t}{5} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Поэтому закон изменения энергии со временем имеет вид

$$E_к = \frac{0{,}01}{2}\left(0{,}01\pi\cos\left(\frac{\pi \cdot t}{5} + \frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = 5\pi^2 10^{-5}\cos^2\left(\frac{\pi \cdot t}{5} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Максимальное значение кинетической энергии $E_{кин}^{\max} = 5 \cdot 10^{-6}$ Дж.

Ответ: $E_{кин}^{\max} = 5 \cdot 10^{-6}$ Дж.

Сложение колебаний

Пример 4.

Частица одновременно участвует в двух колебаниях одного направления: $x_1 = 4\cos(4t)$ и $x_2 = 3\cos(4t + \pi/2)$. Определите амплитуду, циклическую частоту и начальную фазу результирующего колебания (**уровень 2**).

Решение. Результирующее колебание будет происходить с частотой складываемых колебаний $\omega = 4$ рад/с. Амплитуда результирующего колебания определяется соотношением

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

где $A_1 = 4$ см, $A_2 = 3$ см, $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$. Подставляя величины получаем $A = 5$ см. Начальную фазу определим по формуле

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \quad \text{или} \quad \mathrm{tg}\varphi = \frac{A_2}{A_1} = \frac{3}{4}.$$

Результирующее колебание будет иметь начальную фазу

$$\varphi_0 = \mathrm{arctg}\frac{3}{4} = 36{,}9^0.$$

Ответ: $\varphi_0 = \mathrm{arctg}\dfrac{3}{4} = 36{,}9^0$

Пример 5.

Точка одновременно участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выражаемых уравнениями: $x = \sin(\pi t)$ и $y = 2\cos(\pi t + \pi/2)$. Найти уравнение траектории. Изобразить траекторию, указать начальное положение частицы и направление ее движения (**уровень 2**).

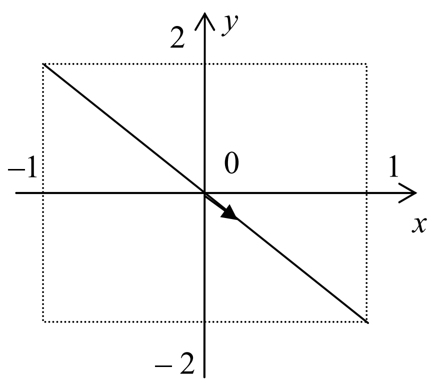


Рис. 3.7

Решение. Зависимость $y(t)$ можно представить через синус: $y = -2\sin(\pi t)$, $x = \sin(\pi t)$.

Исключая из уравнений t, получаем: $\dfrac{y}{x} = -2$,

Уравнение траектории $y = -2x$. Начальное положение $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Направление движения указано на рис. 3.7.

Пример 6.

Результирующее колебание точки, участвующей в двух колебаниях одного направления, описывается уравнением $x = A\cos 2{,}1t\cos 80t$. Найти период биений и циклические частоты складываемых колебаний (**уровень 2**).

Решение. Сравнивая искомое уравнение с общим уравнением биений

$$x = 2A\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right),$$

можно записать *систему уравнений* $\frac{\omega_2-\omega_1}{2}=2{,}1$ и $\frac{\omega_2+\omega_1}{2}=80$. Решая ее относительно частот, получаем ω_1 = 82,1 рад/с, ω_2 = 77,9 рад/с. Период биений равен

$$T=\frac{2\pi}{\Delta\omega}=\frac{2\pi}{|\omega_2-\omega_1|}=\frac{2\pi}{82{,}1-77{,}9}=1{,}5\ \text{(с)}.$$

Ответ: T = 1,5 с.

Затухающие и вынужденные колебания

Пример 7.

Груз массой m = 0,5 кг, подвешенный к пружине жесткостью k = = 32 Н/м, совершает затухающие колебания. Определить логарифмический декремент затухания, коэффициент затухания, период колебаний, если за время N = 100 колебаний амплитуда уменьшилась в n = 16 раз (**уровень 3**).

Решение. Амплитуда со временем уменьшается по закону

$$A=A_0e^{-\beta\cdot t}. \qquad (1)$$

По условию задачи за время $t_0 = NT$ амплитуда уменьшится в n = 16 раз

$$n=\frac{A_0}{A}=e^{\beta t_0}=e^{\beta NT}. \qquad (2)$$

Логарифмируя данное выражение, получаем $\ln n=\beta NT$. (3)

Учитывая, что $\lambda=\beta T$, с учетом (3) получаем $\lambda=\frac{\ln n}{N}$. (4)

Период колебаний равен $T=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$ (5), где $\omega_0^2=\frac{k}{m}$, поскольку $\beta=\frac{\lambda}{T}=\frac{\ln n}{NT}$ (6). Решая совместно (5) и (6), определяем период

$$T=\sqrt{\frac{m}{k}\left(4\pi^2+\left(\frac{\ln n}{N}\right)^2\right)}. \qquad (7)$$

Коэффициент затухания равен

$$\beta=\frac{\ln n}{NT}=\frac{\ln n}{\sqrt{\frac{m}{k}\left(4\pi^2N^2+(\ln n)^2\right)}}. \qquad (8)$$

Проведя вычисления по формулам (4), (7) и (8), получаем: $\lambda = 0{,}027$; $\beta = 0{,}035$ с$^{-1}$, Т = 0,789 с.

Ответ: $\lambda = 0{,}027$; $\beta = 0{,}035$ с$^{-1}$, $T = 0{,}789$ с.

Пример 8.

Тело массой $m = 0{,}1$ кг совершает вынужденные прямолинейные колебания. Амплитудное значение силы $F_0 = 1{,}5$ Н. Коэффициент затухания $\beta = 0{,}5$ с$^{-1}$. Определить максимальное значение амплитуды скорости υ_{max} (**уровень 2**).

Решение. Скорость тела при установившихся колебаниях

$$\upsilon = x' = \left(A\cos(\omega t + \varphi_0)\right)' = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Максимальное значение скорости

$$\upsilon_{\max} = A\omega,$$

где амплитуда смещения равна

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

Выражение для скорости принимает вид

$$v_{\max} = \frac{F_0\omega}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

Резонансная частота для скорости равна собственной частоте. Подставляя $\omega = \omega_0$ в последнее выражение, получаем $\upsilon_{\max} = \dfrac{F_0}{2\beta m}$. вычисляем максимальную скорость $\upsilon_{\max} = 15$ м/с.

Ответ: $\upsilon_{\max} = 15$ м/с.

3.5. Задачи для самостоятельного решения

Уравнения колебаний и параметры колебаний

1. Гармоническое колебание происходит по закону $S = 0{,}5 \sin (300\,\pi t + \pi/3)$. Определить амплитуду, частоту, период и начальную фазу колебаний. Написать зависимость скорости и ускорения от времени (**уровень 1**).

2. Написать уравнение гармонического колебательного движения с амплитудой 5 см, если за 1 минуту совершается 150 колебаний и начальное положение $x_0 = 2{,}5$ см (**уровень 1**).
3. Нарисовать графики гармонических колебаний $x_1 = 0{,}5 \sin(\pi t)$ и $x_2 = 0{,}5 \sin(\pi t + \pi/3)$ (**уровень 1**).
4. Скорость при гармоническом колебании изменяется по закону $\upsilon = 0{,}5\pi \sin(300\pi t + \pi/3)$. Определить амплитуду, частоту, период и начальную фазу колебаний. Написать зависимости координаты и ускорения от времени (**уровень 1**).
5. Амплитуда гармонического колебания равна 5 см, а период 4 с. Найти максимальную скорость колеблющейся точки и ее максимальное ускорение (**уровень 1**).
6. Период гармонического колебания равен 2 с, амплитуда – 50 мм, начальное смещение равно нулю. Найти скорость в тот момент времени, когда смещение точки равно 25 мм (**уровень 1**).
7. Частица совершает прямолинейные гармонические колебания с периодом $T = 6$ с. Определить промежутки времени Δt_1 и Δt_2 между последовательными моментами времени, в которые смещения частицы одинаковы по знаку и равны по модулю половине амплитуды (**уровень 2**).
8. Частица совершает прямолинейные гармонические колебания. При смещении x_1 частица обладает скоростью υ_1, а при смещении x_2 – скоростью υ_2. Найти циклическую частоту колебаний (**уровень 2**).
9. Частица совершает прямолинейные гармонические колебания. При скорости υ_1 частица обладает ускорением a_1, а при скорости частицы υ_2 – ускорением a_2. Найти амплитуду колебаний (**уровень 2**).
10. Частица совершает прямолинейные гармонические колебания с периодом T. Определить во сколько раз время прохождения частицей первой половины амплитуды меньше чем второй (**уровень 3**).
11. Ареометр плавает в жидкости. Масса ареометра 98 г, диаметр его трубки 8 мм. После небольшого толчка ареометр совершает вертикальные гармонические колебания с периодом 2,8 с. Определить плотность жидкости (**уровень 3**).
12. В открытую с обоих концов U-образную трубку вливают 0,24 кг ртути. Радиус канала трубки 5 мм. Определить циклическую частоту колебаний ртути в трубке. Вязкостью пренебречь (**уровень 3**).
13. Как изменится период вертикальных колебаний груза, висящего на двух одинаковых пружинах, если от последовательного соединения пружин перейти к параллельному соединению? (**уровень 3**)

14. Материальная точка массой 5 г совершает гармонические колебания с частотой 0,5 с$^{-1}$. Амплитуда колебаний 0,03 м. Определить максимальную силу, действующую на точку и полную энергию колеблющейся точки (**уровень 3**).
15. Тело массой 0,02 кг совершает синусоидальное гармоническое колебание с амплитудой 0,05 м и частотой 10 с$^{-1}$. Начальное положение тела – половина амплитуды. Определить полную энергию колеблющегося тела и написать уравнение зависимости скорости тела от времени (**уровень 4**).
16. Шарик массой 60 г колеблется с периодом 2 с. В начальный момент времени смещение шарика 4 см и он обладает энергией 0,02 Дж. Записать уравнение простого гармонического колебания шарика и закон изменения возвращающей силы с течением времени (**уровень 4**).

Сложение колебаний

1. Частица одновременно участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выражаемых уравнениями: $x = 0{,}50 \sin \omega t$ и $y = 1{,}5 \cos \omega t$. Найти уравнение движения частицы $y(x)$. Изобразить траекторию и указать на ней направление движения частицы (**уровень 1**).
2. Частица одновременно участвует в двух колебаниях одного направления: $x_1 = 5 \cos 2t$ и $x_2 = 10 \cos (2t + \pi/4)$. Найти циклическую частоту, амплитуду A и начальную фазу результирующего колебания частицы (**уровень 1**).
3. Результирующее колебание точки, участвующей в двух колебаниях одного направления, описывается выражением $x = 20 \cos(t) \cos(41t)$. Найти период биений и циклические частоты складываемых колебаний (**уровень 2**).
4. Написать уравнение движения $x(t)$ частицы, одновременно участвующей в двух колебаниях одного направления: $x_1 = 20 \cos \pi\mathrm{t}/3$ и $x_2 = 20 \cos (\pi t/3 + \pi/3)$ (**уровень 2**).
5. Найти уравнение результирующего колебания, полученного при сложении двух колебательных движений одного направления: $x_1 = 40 \cos 18\pi t$ и $x_2 = 40 \cos 20\pi t$ (**уровень 2**).
6. Найти амплитуду и начальную фазу колебаний, получающихся в результате сложения следующих колебаний одного направления: $x_1 = 20 \cos \omega t$, $x_2 = 20 \cos (\omega t + \pi/3)$, $x_3 = 20 \cos (\omega t + 2\pi/3)$. Написать уравнение результирующего колебания $x(t)$ (**уровень 2**).
7. Результирующее колебание точки, участвующей в двух колебаниях одного направления, описывается выражением $x = 20 \cos 2{,}1t \cos 80t$.

Найти период биений и циклические частоты складываемых колебаний (**уровень 3**).

8. Частица одновременно участвует в двух колебаниях одного направления: $x_1 = 2 \cos 4t$ и $x_2 = 4 \cos (4t + \pi/3)$ (см). Найти циклическую частоту, амплитуду А и начальную фазу результирующего колебания частицы (**уровень 4**).
9. Складываются два гармонических колебания одного направления с частотами 460 Гц и 461 Гц. Найти период биений. Написать уравнение биений (**уровень 4**).

Затухающие и вынужденные колебания

1. Найти коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания математического маятника, если известно, что за $t = 100$ с колебаний полная механическая энергия маятника уменьшилась в десять раз. Длина маятника $L = 0{,}98$ м (**уровень 1**).
2. Частица совершает прямолинейные затухающие колебания с периодом $T = 4{,}5$ с. Начальная амплитуда колебаний $A_0 = 0{,}16$ м, а амплитуда после 20 полных колебаний $A = 0{,}01$ м. Определить коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания. Написать уравнение колебаний частицы, приняв начальную фазу колебаний $\varphi = 0$ (**уровень 2**).
3. Определить коэффициент затухания математического маятника, если за промежуток времени $t = 4{,}8\ 10^2$ с маятник теряет 99 % своей полной механической энергии (**уровень 2**).
4. Математический маятник совершает затухающие колебания в среде, логарифмический декремент затухания которой $\lambda = 1{,}26$. Определить логарифмический декремент затухания маятника, если сопротивление среды возрастает в 2 раза. Во сколько раз n надо увеличить сопротивление среды, чтобы движение маятника стало апериодическим? (**уровень 2**)
5. Тело массой $m = 12$ г совершает затухающие колебания с частотой $\omega = \pi$ рад/с. При этом за время $t = 60$ с тело теряет 0,9 своей полной механической энергии. Найти: а) коэффициент затухания; б) коэффициент сопротивления среды; в) добротность колебательной системы (**уровень 2**).
6. Частица совершает прямолинейные затухающие колебания с периодом $T = 4{,}5$ с. Начальная амплитуда колебаний $A_0 = 0{,}16$ м, а амплитуда после 20 полных колебаний $A = 0{,}01$ м. Определить коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания. Написать уравнение колебаний частицы, приняв начальную фазу колебаний $\varphi = 0$ (**уровень 3**).

7. Уравнение затухающих колебаний дано в виде $x = 5e^{-0,25t} \sin\frac{\pi}{2}t$ м. Найти скорость колеблющейся точки в моменты времени: 0, T, $2T$, $3T$ и $4T$ (**уровень 3**).
8. Амплитуда затухающих колебаний математического маятника за 1 минуту уменьшилась вдвое. Во сколько раз она уменьшится за 3 минуты? (**уровень 3**)
9. Амплитуды смещений вынужденных колебаний при частотах вынуждающей силы 100 и 150 Гц равны между собой. Найти частоту, соответствующую резонансу смещений. Вынуждающая сила изменяется по гармоническому закону (**уровень 3**).
10. Амплитуды скорости вынужденных колебаний при частотах вынуждающей силы υ_1 и υ_2. Найти частоту, соответствующую резонансу скорости. Вынуждающая сила изменяется по гармоническому закону (**уровень 4).**
11. Определить амплитуду A вынужденных колебаний груза массы m = 0,1 кг на пружине с коэффициентом жесткости k = 10 Н/м, если на груз действует вертикальная вынуждающая гармоническая сила с амплитудой F_0 = 1,5 Н и частотой, в два раза большими собственной частоты груза на пружине. Коэффициент затухания β = 0,4 $с^{-1}$ (**уровень 4**).
12. Тело массой m = 360 г подвешено к пружине с коэффициентом жесткости k = 16 Н/м и совершает вертикальные колебания в некоторой среде. Логарифмический декремент затухания λ = 0,01. Сколько колебаний N должно совершить тело, чтобы амплитуда смещения уменьшилась в e раз? За какой промежуток времени произойдет это уменьшение амплитуды? (**уровень 4**)

УЧЕБНЫЙ МОДУЛЬ №2
«МЕХАНИКА МАТЕРИАЛЬНЫХ ТЕЛ. МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК»

Введение

В этом учебном модуле рассматриваются особенности и закономерности движения систем материальных точек, связанных между собой определенным взаимодействием и образующих тела. Объединение множества материальных точек в единое целое приводит к появлению новых, не присущих одной материальной точке, особенностей движения и новых закономерностей.

При описании движения систем материальных точек в механике они разделяются на три принципиально различных типа. Системы с **сильными** (жесткими) и **ориентированными** связями материальных точек образуют твердые тела, которые способны в определенной степени сохранять форму и объем. Системы с сильными, но свободно ориентирующимися связями материальных точек образуют жидкие тела, которые способны сохранять объем, но принимают форму предоставляемого им объема или обусловленную движением. В ряде случаев методика рассмотрения системы материальных точек как единого тела применяется и к системам со слабыми и не ориентированными связями материальных точек, образующих газообразные структуры (тела), которые принимают весь предоставляемый им объем и любой формы. Сильная связь материальных точек реализуется в случае, когда потенциальная энергия их взаимодействия значительно превышает кинетическую энергию. Слабая – когда кинетическая энергия материальных точек значительно превышает потенциальную энергию их взаимодействия в системе. В этом учебном модуле рассматриваются закономерности движения твердого тела и жидкости.

Новые физические понятия, вводимые в этом учебном модуле, обусловлены проявлением новых свойств систем материальных точек. Однако в большинстве случаев описание этих новых свойств и закономерностей основывается на понятиях и закономерностях механики материальной точки, рассмотренных в учебном модуле №1. Поэтому краткое содержание теоретического материала модуля содержит таблицу аналогий закономерностей поступательного и вращательного движений.

Учебно-методическая структура модуля

Учебный модуль № 2 «Механика материальных тел. Модель системы материальных точек»			
1. Учебный блок «Статика»	2. Учебный блок «Динамика вращательного движения твердого тела»	3. Учебный блок «Колебания твердого тела»	4. Учебный блок «Механика жидкости»
– результирующая сил, действующих на твердое тело; – момент силы, результирующий момент сил; – равновесное состояние тела, условия равновесия; – виды равновесия	– характеристики вращательного движения тел, абсолютность вращательного движения; – законы Ньютона для вращательного движения; – законы сохранения для вращательного движения; – степени свободы вращательного движения; – момент инерции тел; – вращение относительно оси, относительно точки	– особенности физического маятника; – крутильные колебания; – колебания связанных систем	– свойства жидкости, модель идеальной жидкости; – течение жидкости, поток, линии тока; условие непрерывности; – законы сохранения в текущей жидкости, трение в жидкости; – основные законы гидродинамики

Методическая программа модуля

Тема занятия	Тип занятия	Вид занятия	Часы
1. Условия равновесия тел, виды равновесия	формирование новых знаний	лекция	1
2. Определение видов и условий равновесного состояния тел	формирование и систематизация новых навыков	практич. занятие	2
3. Кинематические и динамические параметры вращательного движения, момент инерции тел	формирование новых знаний	лекция	2
4. Определение характеристик вращательного движения центра массы тел, моментов инерции тел	формирование и систематизация новых навыков	практич. занятие	2
5. Законы Ньютона и сохранения импульса и энергии для вращательного движения. Работа	формирование новых знаний	лекция	1

Окончание табл.

6. Вращение тел относительно свободной оси, заданной точки. Степени свободы твердого тела	формирование новых знаний	лекция	2
7. Законы сохранения импульса и энергии, параметры вращения и качения тел. Применение теоремы Штейнера	углубление и систематизация навыков	практич. занятие	2
8. Уравнения колебаний физического и крутильного маятников	формирование новых знаний	лекция	2
9. Определение параметров колебаний физического и крутильного маятников. Применение теоремы Штейнера	формирование и систематизация новых навыков	практич. занятие	2
10. Течение жидкости. Трение в жидкости. Основные законы гидродинамики	формирование новых знаний	лекция	2
11. Определение параметров течения жидкости, движения тел в жидких средах	формирование и систематизация новых навыков	практич. занятие	2
12. Механика твердого тела и жидких сред (по графику из списка лабораторных работ)	систематизация знаний и формирование навыков экспериментальной работы	лаборатор. занятия	8
13. Механика твердого тела и жидких сред	занятие-проверка результатов обучения	итоговое занятие	2

1. УЧЕБНЫЙ БЛОК «СТАТИКА»

Введение

Статика – раздел механики, в котором изучаются виды равновесных (статических) состояний тела или системы тел и условия, обеспечивающие равновесные состояния. Статика является частным случаем *динамики твердого тела*, в котором линейные и угловые ускорения отсутствуют (равны нулю). Тем не менее, этот раздел механики имеет важное и самостоятельное значение для практической деятельности, поскольку позволяет определять условия устойчивости тел, деформации и нагрузки элементов в системах тел, условия достижения необходимой прочности конструкций.

Для успешного изучения учебного материала этого блока учащийся должен **иметь представление:**

– о векторных и скалярных физических величинах;
– о силах, действующих на тела и системы тел, а также в системах тел;
– о видах поступательного движения;
– о центре массы тел, системы взаимосвязанных тел;

обладать навыками:

– сложения векторных физических величин;
– нахождения проекций векторов на координатные оси;
– выбора наиболее удобных систем координат.

Учебная программа блока

Содержание	Форма подготовки	Литература
– преобразование действующих на тело сил с различными точками приложения в силы, определяющие прямолинейное движение системы материальных точек тела и их движение по окружности; – момент силы; – условия и виды равновесного состояния тела, системы тел	лекция, самост.	[2], [4]

Цели обучения

студент должен **знать**	студент должен **уметь**
– методику определения центра массы тела; – понятия: плечо силы, момент силы; – виды равновесного состояния тела; критерий, определяющий вид равновесного состояния; – математические выражения для сил, определяющих связи элементов системы, находящейся в равновесном состоянии	– находить момент силы; – находить центр массы тела (простейшие случаи); – записать необходимое количество уравнений – условий равновесия тел; – рассчитать силы реакции связей между элементами системы в равновесном состоянии; – находить результирующую сил, действующих на тело и разлагать ее на силы, обеспечивающие прямолинейное движение и по окружности

1.1. Краткое содержание теоретического материала

Из закона сохранения импульса системы материальных точек следует, что внутренние силы связей материальных точек в системе не могут привести к изменению состояния центра массы системы (в механике – координат, параметров движения). Вывести систему, в частности из состояния покоя, могут только внешние силы. Любую внешнюю силу, приложенную к системе материальных точек (твердому телу), можно разложить, по крайней мере, на две силы, линия действия одной из которых будет проходить через центр массы твердого тела. Поэтому одним из условий равновесия (стационарного) состояния твердого тела является условие: **для сохранения равновесного состояния твердого тела векторная сумма внешних сил должна быть равна нулю:**

$$\overrightarrow{F_P} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F_i} = 0\,. \tag{1}$$

Для анализа достаточности этого условия обратимся к рис. 1.1, где точка О – центр массы твердого тела Т произвольной формы, а точка А – точка приложения, в общем случае, результирующей всех внешних сил *F*. Соединим точки А и О прямой линией и будем считать ее координатной осью *Y*. Перпендикулярно оси *Y* проведем координатную ось *X*, так, чтобы сила $\vec{F}_P$ лежала в плоскости *XAY*. Разложив $\vec{F}_P$ на компоненты по осям координат, получим $\vec{F}_y$ и $\vec{F}_x$. Силу $\vec{F}_y$, действующую по линии *AO*, согласно правилу переноса сил $\overrightarrow{F_P} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F_i} = 0$ вдоль линии их действия, можно считать приложенной к центру массы тела. Она обеспечивает прямолинейное поступательное движение тела по координате *Y*, так как все точки тела жестко связаны с центром массы и направление a_y совпадает с направлением $\vec{F}_y$. Если $\vec{F}_P$ = 0 или ее проекция $\vec{F}_y$ = 0, то центр массы будет оставаться в покое. Сила $\vec{F}_x$ обеспечивает тангециальное (касательное) ускорение точки А относительно центра массы $\vec{a}_\tau$, т.е. связывает поворот тела относительно точки О (и всех точек тела вследствие их жесткой связи). В результате все точки тела под действием $\vec{F}_x$ в каждый

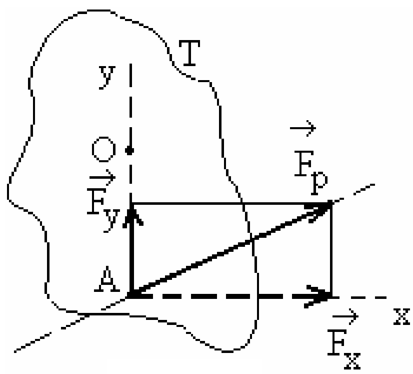


Рис. 1.1

момент времени движутся по окружностям. Такое движение тела называется вращением.

В появлении этого дополнительного вида движения и проявляется новое (отсутствующее у одной материальной точки) свойство системы жестко связанных материальных точек (тела). Таким образом, если все действующие на тела силы можно свести к одной результирующей, условие (1) является достаточным для равновесного состояния тела. Часто силы, действующие на тело в его различных точках, оказываются параллельными и не могут быть сведены к одной результирующей. В этом случае необходимо другое условие равновесия тела.

Рассмотрим ситуацию, показанную на рис. 1.2, где на невесомом жестком стержне АВ закреплены грузы массами m_1 и m_2, а стержень лежит на неподвижной опоре О. Силы, действующие на систему «грузы-стержень», параллельны: $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$ – силы тяжести, $\vec{N}$ – реакция опоры.

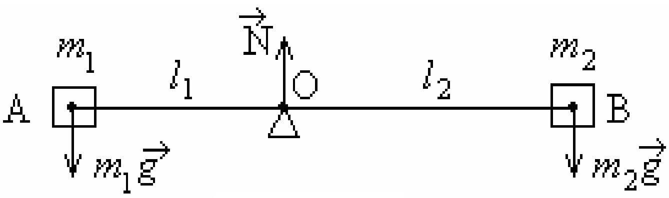


Рис. 1.2

Опыт работы с подобными системами (например – рычажные весы) показывает, что система остается в равновесии, т.е. никак не движется, если выполняются условия:

$$1)\ \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i = \vec{N} - m_1\vec{g} - m_2\vec{g} = 0, \qquad (2)$$

$$2)\ m_1\vec{g}\ell_1 = m_2\vec{g}\ell_2;\ \overrightarrow{F_P} = \sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{F_i} = 0$$

Первое условие касается поступательного движения системы, второе – вращательного. Величины $m_1\vec{g}\ell_1$ и $m_2\vec{g}\ell_2$ получили название моментов сил. Видно, что каждый из моментов сил может вызывать поворот системы в различных направлениях ($m_1\vec{g}\ell_1$ – против хода часовой стрелки, $m_2\vec{g}\ell_2$ – по ходу часовой стрелки). Поэтому величина $\vec{F}\cdot\vec{\ell}$ в общем случае является векторной величиной. В соответствии с векторной алгеброй векторы момента сил $\vec{M}_1 = \vec{F}_1\cdot\vec{\ell}_1$ и $\vec{M}_2 = \vec{F}_2\cdot\vec{\ell}_2$ направлены перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ и их плечи $\vec{\ell}_1$ и $\vec{\ell}_2$. Направление $\vec{M}$ принято определять по правилу буравчика: если буравчик поставить в точку вращения О, а рукоятку вращать в направлении силы, то ход буравчика показывает направление $\vec{M}$. При этом любое из направлений может быть взято положительным, тогда другое направление следует считать отрицательным. В соответствии с этим второе условие (2) в общем виде можно записать следующим образом:

$$\vec{M}_p = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = 0, \tag{3}$$

которое означает, что для равновесного состояния твердого тела **алгебраическая сумма моментов сил**, действующих на тело, **должна быть равна нулю.**

В реальных телах масса распределена по всему объему тела. Поэтому при решении задач целесообразно расчленять тело на элементы, для которых можно легко определить центр массы, которые соединяются невесомыми жесткими элементами, и решать задачу, как это сделано для системы, показанной на рис. 1.2.

Если тело находится в равновесном состоянии, то для решения задачи на условия равновесия «воображаемая» точка (ось) вращения может быть взята любой (произвольной), и для каждой из них может быть составлено уравнение (3). Поэтому уравнений (3) может быть составлено столько, сколько необходимо для нахождения неизвестных в задаче путем замены точки (оси) вращения.

Особое значение имеет частный случай, когда на тело действуют две равные параллельные силы, имеющие противоположное направление, их называют парой сил. Пара сил приводит тело только во вращательное движение.

Кратчайшее расстояние между параллельными прямыми, вдоль которых действуют составляющие пару силы, называется плечом этой пары (рис. 1.3).

Момент пары сил равен произведению одной из сил на плечо пары, независимо от положения оси вращения:

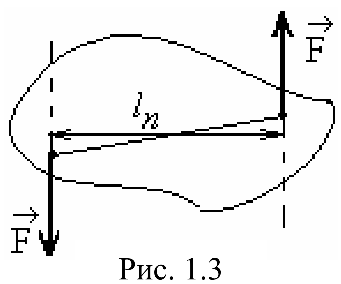


Рис. 1.3

$$\vec{M}_n = \vec{F} \cdot \vec{\ell}_n .$$

При повороте тела под действием не изменяющихся по величине и направлению сил, момент пары сил изменяется так, как изменяется ее плечо. Когда тело займет положение, при котором обе силы окажутся направленными по одной прямой, то их равнодействующая будет равна нулю.

Равновесие тела в некотором положении называется устойчивым, если при любых малых отклонениях тела от этого положения, допускаемых связями, возникают силы или моменты сил, стремящиеся возвратить тело в их исходное состояние.

На рис. 1.4 показаны примеры положения устойчивого равновесия некоторых тел и малые отклонения от этого положения.

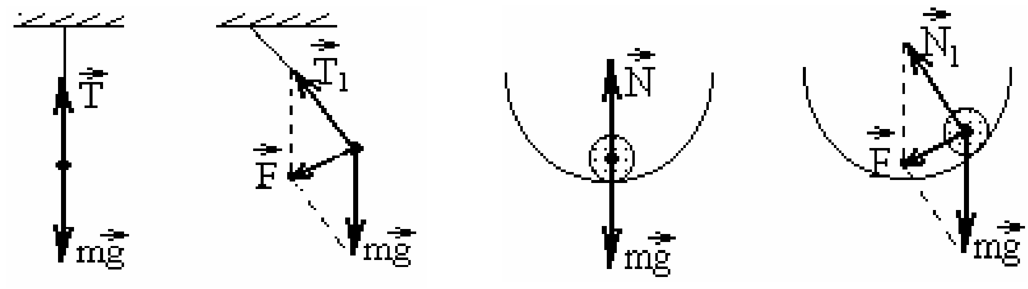


Рис. 1.4

Равновесие тела в некотором положении называется неустойчивым, если хотя бы при некоторых малых отклонениях тела от этого положения, допускаемых связями, возникают силы или моменты сил, препятствующие возвращению тела в исходное состояние (рис. 1.5).

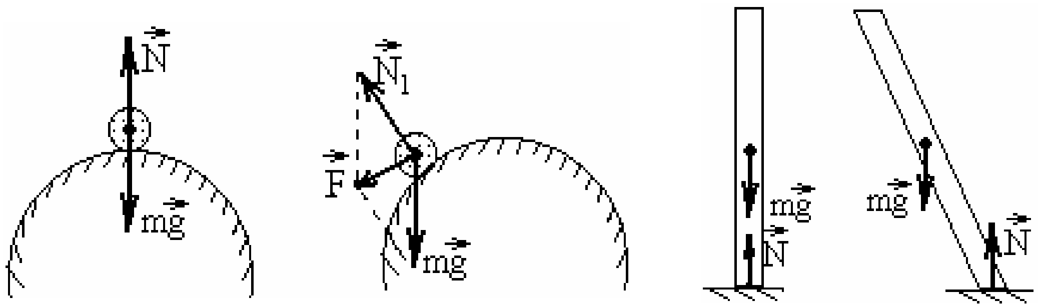


Рис. 1.5

Равновесие в некотором положении называют безразличным, если при любых малых отклонениях тела от этого положения, допускаемых связями, не возникает сил или моментов сил, стремящихся нарушить равновесие (рис. 1.6).

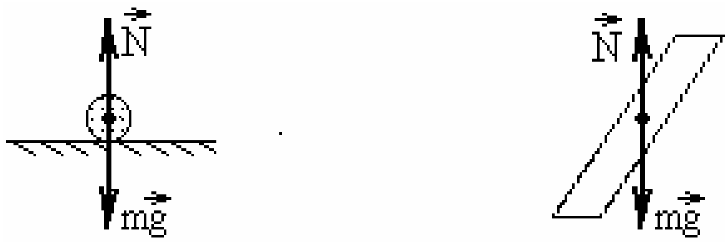


Рис. 1.6

1.2. Методические указания к лекционным занятиям

Вопросы лекции	Форма изучения	Литература	Вопросы для самоконтроля
1. Условие равновесия материальной точки. 2. Понятие твердого тела. 3. Центр масс тела. 4. Силы природы, рассматриваемые в механике. 5. Сложение сил, действующих на твердое тело в разных точках приложения. 6. Момент силы. Правило моментов. 7. Виды равновесия твердого тела	С Л С С Л Л Л	[4] [4] [4] [3] [3] [3], [4] [4]	1. Какие величины называют векторными? 2. Как находят векторную сумму (равнодействующую) нескольких сил? 3. Как рассчитываются силы упругости, сила тяжести? 4. Как направлен вектор момента силы? 5. Сформулировать условие равновесия твердого тела. 6. Какое равновесие называют устойчивым, неустойчивым, безразличным?

1.3. Методические указания к решению задач

Типы задач	Рекомендации по решению задач
1. Задачи на определение положения центра масс системы материальных точек. 2. Нахождение масс твердых тел. 3. Условие равновесия тел с закрепленной осью вращения. 4. Условие равновесия тел, которые могут участвовать во вращательном и поступательном движениях	1. Всю совокупность сил тяжести, действующих на материальные точки системы, можно заменить одной силой, приложенной к центру масс системы, положение которого определяется формулой $x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m}$; $y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m}$; $z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{m}$, где x_c, y_c, z_c – координаты центра масс в произвольно выбранной системе координат. 2. Сделать схематический чертеж, на котором указать все силы, действующие на тело. Особое внимание обратить на правильное указание точек их приложения. 3. Записать правило моментов относительно произвольно выбранной оси вращения. Как правило, ось вращения выбирают таким образом, чтобы через нее проходило как можно больше линий действия сил, приложенных к телу. Моменты таких сил тогда будут равны нулю. 4. Найти плечи сил относительно этой оси. 5. Если в полученное уравнение моментов входит две или более неизвестных величины, то надо использовать уравнение равновесия в проекциях на выбранные оси координат. 6. Решение системы, состоящей из уравнения моментов и уравнений равновесия в проекциях на оси координат, приводит к определению искомой величины

1.4. Примеры решения задач по статике

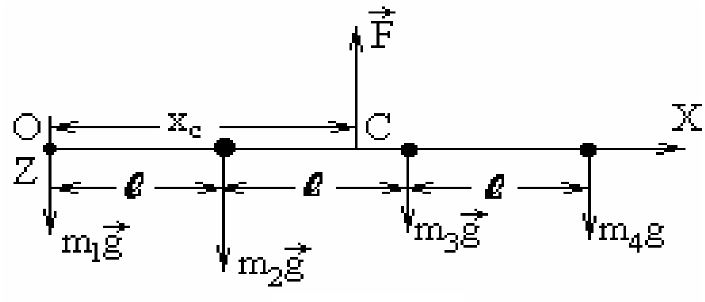


Рис. 1.7

Пример 1.

Четыре материальные точки массами m_1, m_2, m_3, m_4 расположены на легком жестком стержне на расстояниях ℓ друг за другом (рис. 1.7). Найти положение центра тяжести системы.

Решение

Первый способ. Так как система обладает осевой симметрией, то ось OX удобно направить вдоль прямой, соединяющей материальные точки, а начало отсчета поместить на конце стержня.

Положение центра тяжести системы определим по формуле

$$x_c = \frac{M_Z(m\vec{g})}{mg} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i}{m}; \; x_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i}{m} = \frac{m_1 0 + m_2\ell + m_3 2\ell + m_4 3\ell}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}.$$

Отсюда находим

$$x_c = \ell\frac{m_2 + 2m_3 + 3m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}.$$

Второй способ

Если к центру тяжести стержня (некоторой точке C), (см. рис. 1.7) приложить силу $\vec{F}$, уравновешивающую действующие силы тяжести материальных точек, то система будет находиться в равновесии.

Запишем условия равновесия относительно системы координат, указанной на рис. 1.7, с учетом силы $\vec{F}$:

$$\sum M_Z = m_2 g\ell + m_3 g 2\ell + m_4 g 3\ell - F x_c = 0, \tag{1}$$

$$\sum F_x = 0, \tag{2}$$

$$\sum F_Y = -(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)g + F = 0, \tag{3}$$

где x_c – расстояние от оси OZ до центра тяжести системы (ось OZ проходит через точку O перпендикулярно плоскости чертежа).

Решив систему уравнений (1) – (3), получим $x_c = \ell\dfrac{m_2 + 2m_3 + 3m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$.

Ответ: $x_c = \ell\dfrac{m_2 + 2m_3 + 3m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$.

Пример 2.

Внутри диска радиусом R = 105,6 см, изготовленного из плоскопараллельной однородной пластинки, вырезан квадрат таким образом, как показано на рис. 1.8. Найти положение центра тяжести диска с вырезом.

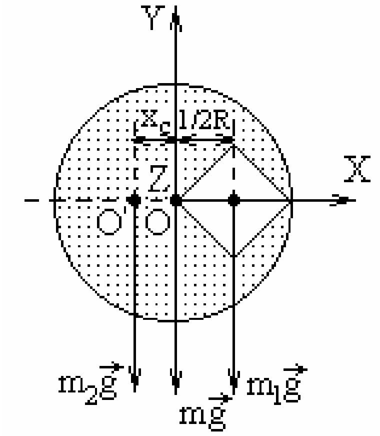


Рис. 1.8

Решение. Нахождение положения центра тяжести однородных тел, имеющих вырез, в рамках школьной программы возможно лишь при условии, что известны положения центров тяжести целого тела и вырезанной части. При этом на чертеже тело с вырезом нужно расположить так, чтобы центры тяжести целого тела и вырезанной части находились в плоскости рисунка на горизонтальной прямой. Тогда силу тяжести целого тела можно представить как сумму двух параллельных сил – силы тяжести вырезанной части и силы тяжести оставшейся фигуры, т.е. тела с вырезом.

Рассмотрим конкретную задачу.

Если бы диск массой m был без выреза, то на него действовала бы сила тяжести $m\vec{g} = m_1\vec{g} + m_2\vec{g}$, где m_1, m_2 – масса вырезанного квадрата и масса диска с вырезом соответственно. При этом сила тяжести $m\vec{g}$ приложена к центру тяжести диска без выреза (к геометрическому центру диска), $m_1\vec{g}$ – к центру тяжести квадрата (к геометрическому центру квадрата), $m_2\vec{g}$ – в некоторой точке O', соответствующей центру тяжести диска с вырезом. При этом диск находился бы в равновесии.

Запишем уравнение моментов целого диска относительно оси OZ, проходящей через точку O (геометрический центр диска) перпендикулярно плоскости чертежа, считая диск состоящим из двух частей – квадрата и диска с вырезом:

$$\sum M_Z = m_1 g \frac{R}{2} - m_2 g x_c = 0, \qquad (1)$$

где x_c – расстояние от оси OZ до центра тяжести пластинки с вырезом.

Выразив массы вырезанного квадрата и диска через плотность и объем

$$m_1 = \frac{1}{2}\rho h R^2, \qquad m = \rho h \pi R^2 \qquad (2)$$

(где h – толщина пластинки; ρ – плотность материала, из которого она изготовлена), из (1) – (2) находим

$$x_c = \frac{\frac{1}{2}m_1 R}{m_2} = \frac{\frac{1}{2}m_1 R}{m - m_1} = \frac{R}{2(2\pi - 1)} \approx 0{,}1 \text{ м}.$$

Ответ: $x_c = \dfrac{R}{2(2\pi - 1)} \approx 0{,}1$ м.

Пример 3.

Лестница массой m = 30 кг прислонена к гладкой вертикальной стене под некоторым углом к полу. Коэффициент трения между лестницей и полом μ = 0,3. Определить наименьший угол наклона лестницы к полу, при котором она может оставаться в равновесии, и силу, с которой лестница давит на стену, когда скользит.

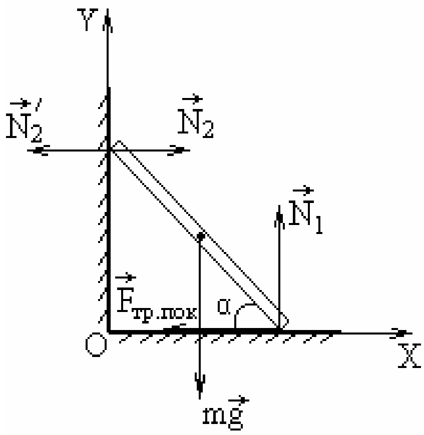


Рис. 1.9

Решение. На лестницу кроме силы тяжести $m\vec{g}$, приложенной к ее центру масс (середине), действуют силы: со стороны пола – сила реакции $\vec{N}_1$ – и сила трения покоя $\vec{F}_{тр.\ пок.}$; со стороны стены – сила реакции $\vec{N}_2$ (рис. 1.9). При этом сила трения направлена таким образом, чтобы препятствовать скольжению лестницы по полу.

Введем систему координат XYZ. Относительно оси OZ, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости чертежа, момент силы трения покоя $\vec{F}_{тр.\ пок.}$ равен нулю, сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции стены $\vec{N}_2$ «вращают» лестницу по часовой стрелке, а сила реакции пола $\vec{N}_1$ – против. С учетом этого запишем уравнения равновесия лестницы в виде

$$\sum M_Z = mg\frac{1}{2}\cos\alpha + N_2\ell\sin\alpha - N_1\ell\cos\alpha = 0, \tag{1}$$

$$\sum F_x = N_2 - F_{тр.\ пок.} = 0, \tag{2}$$

$$\sum F_y = N_1 - mg = 0. \tag{3}$$

Поскольку сила трения покоя

$$F_{тр.\ пок.} \le F_{тр.\ \max} = \mu N_1,$$

то уравнения (2) – (3) можно записать в виде

$$N_2 = F_{тр.\ пок.} \le \mu N_1; \qquad N_1 = mg; \qquad N_2 \le \mu mg. \tag{4}$$

Преобразуем уравнение (1) с учетом выражений (4):

$$\frac{mg}{2} + \mu mg \mathrm{tg}\alpha \geq mg .$$

Отсюда находим

$$\mathrm{tg}\alpha \geq \frac{1}{2\mu}; \quad \alpha_{\min} = \mathrm{arctg}\frac{1}{2\mu} \approx 59^\circ .$$

Обратимся теперь ко второму вопросу задачи.

При скольжении лестницы сила трения будет равна $F_{тр} = \mu N_1$. Следовательно, сила $\vec{N}_2^{/}$ (по третьему закону Ньютона $\vec{N}_2^{/} = N_2$, с которой лестница будет давить на стену

$$\vec{N}_2^{/} = F_{тр} = \mu N_1 = \mu mg = 88,2 \text{ Н}.$$

Ответ: $\alpha_{\min} = \mathrm{arctg}\frac{1}{2\mu} \approx 59^\circ$; $\vec{N}_2^{/} = \mu mg = 88,2$ Н.

Пример 4.

На цилиндр намотана нить, конец которой закреплен на стойке в верхней точке наклонной плоскости так, как показано на рис. 1.10. Коэффициент трения цилиндра о плоскость – μ. При каком максимальном значении угла α цилиндр не будет скатываться с наклонной плоскости?

Решение. На цилиндр действуют четыре силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}$, сила реакции $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр.\ пок.}$, препятствующая скольжению цилиндра по плоскости.

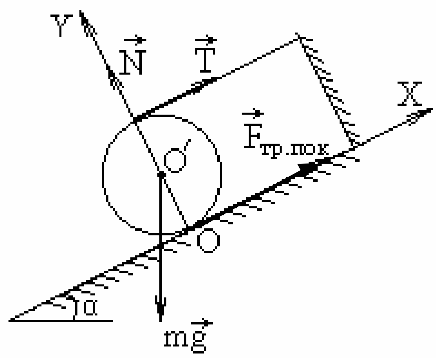


Рис. 1.10

Так как цилиндр покоится, алгебраическая сумма моментов сил, действующих на цилиндр, относительно произвольно выбранной оси равна нулю. Запишем уравнение моментов, например, относительно оси, перпендикулярной плоскости чертежа и совпадающей с осью цилиндра, а также уравнения равновесия для сил в проекциях на оси OX и OY:

$$\sum M_Z = TR - F_{тр.\ пок.}R = 0, \tag{1}$$

$$\sum F_X = T + F_{тр.\ пок.} - mg\sin\alpha = 0, \tag{2}$$

$$\sum F_Y = N - mg\cos\alpha = 0. \tag{3}$$

Выразив из уравнения (1) силу натяжения нити T и подставив в (2), получим

$$2F_{тр.\ пок.} - mg\sin\alpha = 0. \qquad (4)$$

Поскольку сила трения покоя $F_{тр.\ пок.} \le F_{тр.\ \max} = \mu N$, то уравнение (4) с учетом (3) можно записать в виде

$$F_{тр.\ пок.} = \frac{mg\sin\alpha}{2} \le \mu N = \mu mg\cos\alpha.$$

Следовательно

$$\mathrm{tg}\alpha \le 2\mu; \qquad \alpha \le \mathrm{arctg}2\mu; \qquad \alpha_{\max} = \mathrm{arctg}2\mu.$$

Ответ: $\alpha_{\max} = \mathrm{arctg}2\mu$.

2. УЧЕБНЫЙ БЛОК «ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА»

Введение

Раздел динамики вращательного движения является одним из основных разделов физики, изучаемой в университете. Это обусловлено, во-первых, достаточно новым материалом, который в школьном курсе физики не изучается. Во-вторых, этот раздел имеет большое значение при изучении других дисциплин: теоретической механики, сопротивления материалов, строительной механики, теории машин и т.д. Поэтому материал этого блока, по сравнению с другими блоками, предлагается на лекции, и не выносится на самостоятельное изучение. Вместе с тем для изучения этого блока необходимо наличие у студентов определенных знаний и умений.

При изучении данного блока студенты

должны знать:

– законы динамики поступательного движения материальной точки;

– понятие момента сил и центра масс;

– законы сохранения механики поступательного движения материальной точки;

иметь представление:

– о правилах векторного и скалярного произведений;

– о методах интегрирования;

– о способах определения центра масс;

– о кинематических характеристиках движения по окружности.

Учебная программа блока

Содержание блока	Форма подготовки	Литература
Динамика твердого тела		
1. Основные понятия: момент импульса, момент инерции, момент импульса силы	лекция	[3]
2. II закон Ньютона для вращательного движения	лекция	[3], [4]
3. Закон сохранения момента импульса	лекция	[2], [4]
4. Кинетическая энергия вращательного движения. Работа	лекция	[3]
Свободное вращение твердого тела		
5. Понятие о степени свободы твердых тел	лекция	[4]
6. Момент инерции сложных тел	лекция	[2], [3], [4]

Окончание табл.

7. Вращение тела относительно свободной оси	лекция	[4]
8. Вращение тела относительно заданной точки	лекция	–
9. Гироскопический эффект	самост.	[2], [4]

Цели обучения

студент должен **знать**	студент должен **уметь**
– законы динамики вращательного движения (законы сохранения и II закон Ньютона для вращательной динамики); – понятие и методику определения момента инерции твердых тел; – способы определения направления векторов момента силы, момента импульса; – понятие степени свободы твердого тела; – понятие свободной оси и особенности движения твердого тела со свободной осью	– определять моменты сил и плечо сил; – определять момент инерции твердых тел; – определять динамические характеристики вращательного движения на основе законов динамики вращательного движения; – решать комплексные задачи механики с учетом качения и вращения твердых тел

2.1. Краткое содержание теоретического материала

Закон сохранения момента импульса

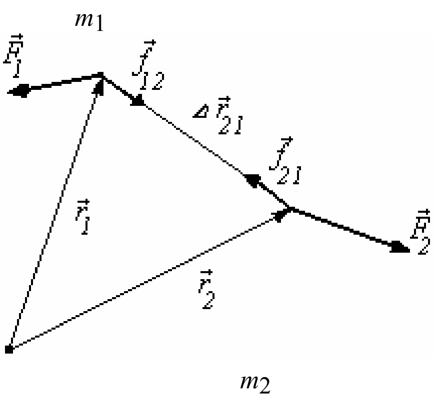


Рис. 2.1

В динамике систем материальных точек твердого тела известны две величины, которые в замкнутой системе сохраняются: импульс и энергия. Определим еще одну такую величину.

Рассмотрим систему, состоящую из двух взаимодействующих точек, на которые действуют также внешние силы (рис. 2.1). Уравнения движения точек имеют вид

$$m_1\dot{\vec{\upsilon}}_1 = \vec{f}_{12} + \vec{F}_1 \quad \text{и} \quad m_2\dot{\vec{\upsilon}}_2 = \vec{f}_{21} + \vec{F}_2,$$

где $\dot{\vec{\upsilon}}$ – производная скорости точек по времени (ускорение).

Умножим первое уравнение на $\vec{r}_1$, а второе – на радиус-вектор второй частицы $\vec{r}_2$, которые для мгновения времени, можно считать радиусами окружностей, по которым движутся материальные точки m_1 и m_2 и получим:

$$m_1\left[\vec{r}_1,\dot{\vec{\upsilon}}_1\right]=\left[\vec{r}_1\vec{f}_{12}\right]+\left[\vec{r}_1\vec{F}_1\right]; \qquad m_2\left[\vec{r}_2,\dot{\vec{\upsilon}}_2\right]=\left[\vec{r}_2\vec{f}_{21}\right]+\left[\vec{r}_2\vec{F}_2\right].$$

Поскольку векторное произведение $\left[\vec{r}\dot{\vec{\upsilon}}\right]$ эквивалентно $\dfrac{d}{dt}\left[\vec{r}\vec{\upsilon}\right]$, то получаем уравнение движения в виде

$$m_1\frac{d}{dt}[\vec{r}_1\vec{\upsilon}_1]=\left[\vec{r}_1,\vec{f}_{12}\right]+\left[\vec{r}_1\vec{F}_1\right];\quad m_2\frac{d}{dt}[\vec{r}_2\vec{\upsilon}_2]=\left[\vec{r}_2,\vec{f}_{21}\right]+\left[\vec{r}_2\vec{F}_2\right] \qquad (1)$$

Сложив уравнения вместе с учетом $\vec{p}=m\vec{\upsilon}$ и $-\vec{f}_{12}=\vec{f}_{21}$

$$\frac{d}{dt}\left([\vec{r}_1\vec{p}_1]+[\vec{r}_2\vec{p}_2]\right)=\left[(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\vec{F}_{12}\right]+\left[\vec{r}_1\vec{F}_1\right]+\left[\vec{r}_2\vec{F}_2\right],$$

векторное произведение $\left[(\vec{r}_1-\vec{r}_2),\vec{f}_{12}\right]=0$, так как вектора $\vec{r}_1-\vec{r}_2$ и $\vec{f}_{12}$ параллельны.

Если внешние силы отсутствуют, так как система замкнута, то

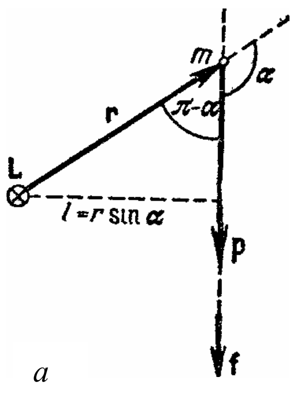
$$\frac{d}{dt}\left([\vec{r}_1\vec{p}_1]+[\vec{r}_2\vec{p}_2]\right)=0 \text{ или } [\vec{r}_1\vec{p}_1]+[\vec{r}_2\vec{p}_2]=\text{const}. \qquad (2)$$

Величина $\vec{L}=[\vec{r}\vec{p}]$ носит название момента импульса относительно точки О.

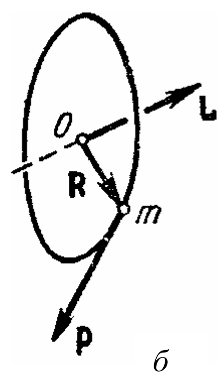
Закон сохранения момента импульса: *в замкнутой системе момент импульса системы тел всегда сохраняется постоянным.*

Величина $\vec{M}=\left[\vec{r}\vec{F}\right]$, как известно, носит название момента силы $\vec{F}$ относительно точки О.

Определение модуля момента импульса показано на примерах (рис. 2.2), где *а* – момент импульса точки массой *m* относительно оси ($L=m\upsilon l=m\upsilon r\sin\alpha=pl$ (3)), а *б* – момент импульса точки, движущейся по окружности радиуса *R* ($L=m\upsilon R=pR$ (4)).



а



б

Рис. 2.2

Направление вектора $\vec{L}$ определяют по *правилу левой руки:* если четыре пальца ладони направить по направлению плеча импульса, а ладонь расположить так, чтобы импульс входил в ладонь, то момент импульса силы будет направлен по направлению большого пальца ладони, отогнутого на угол 90°.

Обобщая уравнения (1) и (2), связь момента импульса системы материальных точек с моментами сил, действующих на точки, получаем в виде

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \sum_{i}^{m}\left[\vec{r}_i\vec{F}_i\right], \tag{5}$$

где $M = \sum_{i}^{m}\left[\vec{r}_i\vec{F}_i\right]$ – суммарный момент внешних сил.

Если суммарный момент сил на некоторую ось равен нулю $\sum M_z = 0$, то

$$\frac{d}{dt}L_z = \sum M_z, \qquad \frac{d}{dt}L_z = 0, \quad L_z = \mathrm{const}$$

и момент импульса системы также сохраняется.

Второй закон Ньютона для вращательного движения. Момент инерции тел

На основе уравнений (4) и (5) для материальной точки, движущейся по окружности, можно записать

$$d(m\upsilon R) = FR \cdot dt, \tag{6}$$

где левая часть – изменение момента импульса материальной точки под действием импульса момента силы, представленного правой частью уравнения. Так как $\upsilon = \omega R$, то уравнение (6) можно переписать в виде

$$mR^2\frac{d\omega}{dt} = F \cdot R = M,$$

или, вводя угловое ускорение ε, в виде

$$mR^2\varepsilon = M, \tag{7}$$

где величина $J = mR^2$ является мерой инертности при вращательном движении и получила название *момента инерции*. Таким образом, для вращательного движения твердого тела уравнение (7), выражающее Второй закон Ньютона, можно записать в виде

$$M = J_T\varepsilon_T, \tag{8}$$

где J_T – момент инерции тела, ε_T – мгновенное угловое ускорение тела под действием результирующего момента сил, действующих на тело.

Так как масса твердого тела распределена по его объему, то для определения момента инерции тела можно поступать следующим образом:

– разбить тело на микрообъемы dV_i;

– определить кратчайшее расстояние r_i от dV_i до оси вращения тела;

– определить массу микрообъема $m_i = \rho_i \cdot dV_i$;

– определить момент инерции такой массы $J_i = m_i r_i^2$;

– осуществить операцию суммирования J_i

$$J_T = \sum_{i=1}^{N} J_i = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \rho_i dV_i \cdot r_i^2 .$$

Операцией, эквивалентной суммированию, является интегрирование функции J по объему тела. Поэтому в общем случае

$$J_T = \int_V \rho \cdot r^2 dV , \qquad (9)$$

где ρ – плотность вещества тела.

Уравнение (9) позволяет определить J для любого тела (формы и распределения массы) и любой оси вращения этого тела. Однако определение J может быть упрощено в ряде случаев, например, если известен момент инерции тела относительно некоторой оси вращения его, проходящей через центр массы – $J_о$, а реальная ось вращения параллельно смещена (рис. 2.2).

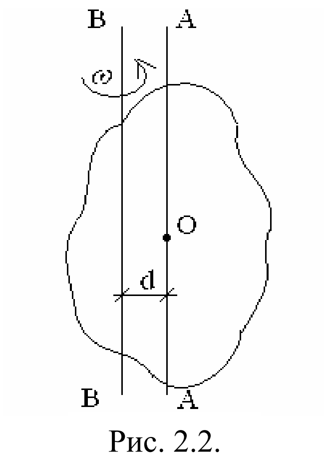


Рис. 2.2.

AA – ось вращения, для которой известно J_0;
BB – ось вращения тела, для которой определяется J

Вращение тела относительно оси BB с угловой скоростью ω можно представить в виде двух движений:

– движение центра массы m_T (точка O) по окружности с радиусом d вокруг оси BB;

– вращение тела относительно оси AA.

При этом оба движения осуществляются с угловой скоростью ω. Поэтому можно записать

$$J = J_o + m_T \cdot d^2 . \qquad (10)$$

Выражение (10) называется теоремой Штейнера.

Энергия и работа при вращательном движении

Пусть на элементы тела массой m_i действуют внутренние $\vec{f}_i$ и внешние $\vec{F}_i$ силы. Эти силы совершают работу, которая для i-го элемента будет записана в виде формулы

$$dA_i = \vec{f}_i \upsilon_i dt + \vec{F}_i \upsilon_i dt = f_i \left[\vec{\omega}\vec{r}_i\right] dt + F_i \left[\omega_i \vec{r}_i\right] dt ,$$

и которая приводит к движению i-го элемента по окружности относительно некоторой оси с угловой скоростью ω, вектор которой совпадает с осью вращения z.

Тогда для всех элементов тела элементарная работа равна

$$dA = \sum dA_i = \omega\left(\sum M_i^{внутр}\right) dt + \omega\left(\sum M_i^{внеш}\right) dt .$$

Сумма моментов внутренних сил равна 0. Поэтому

$$dA = \vec{\omega}\vec{M} dt = \omega M_{\omega} dt = \omega M_t dt ,$$

так как проекция $M_{\omega} = M_z$, поскольку ось z совпадает с вектором угловой скорости. Учитывая, что $d\varphi = \omega dt$, получаем выражение для работы по повороту твердого тела вокруг оси z на бесконечно малый угол $d\varphi$:

$$dA = M_z d\varphi$$

Для поворота тела на конечный угол φ, требуемая работа равна

$$A = \int_0^{\varphi} dA = M_z \varphi .$$

Определить энергию вращающегося тела с угловой скоростью ω можно суммированием энергий движения по окружностям всех бесконечно малых элементов (точек) твердого тела, которая является кинетической энергией.

Для одной i-ой точки твердого тела

$$W_{кi} = \frac{m_i \upsilon_i^2}{2} = \frac{m_i \omega^2 R_i^2}{2} = \frac{J}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2 J_{zi} .$$

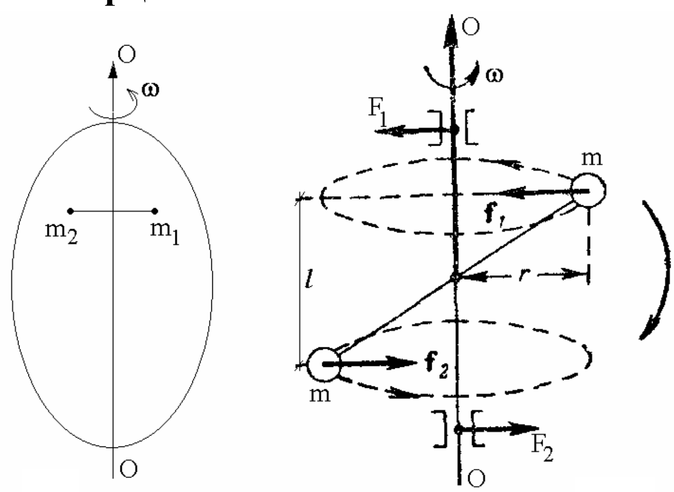
Выражение для кинетической энергии всего тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z, имеет вид $W_K = \sum_{i=1}^{N} W_{Ki} = \frac{J_x \omega^2}{2}$.

В общем случае, движение можно представить как совокупность двух движений – поступательного и вращательного. Соответственно и кинетическая энергия произвольно движущегося тела может быть записана в виде суммы кинетической энергии центра инерции $m\upsilon^2 / 2$ и вращательной энергии тела вокруг оси, проходящей через центр инерции и совершающей только поступательное движение

$$W_к = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}.$$

Этот закон удобно использовать при рассмотрении качения тел.

Свободные оси. Главные оси инерции



а *б*

Рис. 2.3

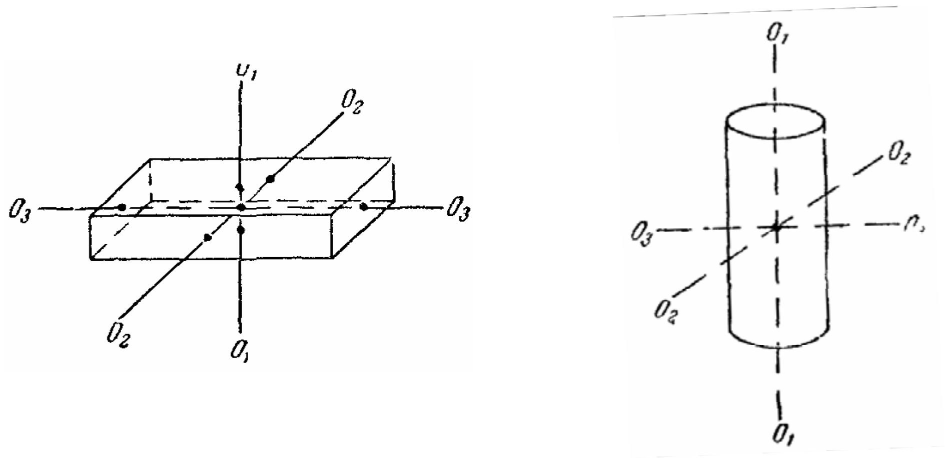
В предыдущих разделах, рассматривая вращение тел, мы подразумевали, что ось вращения неподвижна. Однако неподвижность оси вращения наблюдается только в случае, если тело симметрично относительно оси вращения (рис. 2.3, *а*), когда для каждого элемента тела m_1 находится симметричный элемент m_2 ($m_1 = m_2$). За счет жесткой связи элементов тела ось вращения обеспечивает центростремительную силу для m_1 и m_2, чтобы они двигались по окружности. Вследствие симметрии m_1 и m_2 и равенства их масс центростремительные силы, направленные к оси от m_1 и m_2 взаимно уравновешиваются. В итоге результирующая сила, действующая на ось, равна нулю. Такая ось вращения тела называется *свободной осью*, т.е. осью, сохраняющей свое положение без воздействия внешних сил.

Если тело несимметрично относительно оси вращения (см. рис. 2.3, *б*), то внутренние центростремительные силы не уравновешиваются.

Например, если тело имеет форму гантели и вращается с угловой скоростью ω вокруг оси 00, то, чтобы удерживать ось вращения неподвижной, необходимо приложить к ней силы, обеспечивающие вращательный момент $M = ma_{ц.с.}l = m\omega^2 rl$, который бы компенсировал момент сил f_1 и f_2, каждая из которых равна $m\omega^2 r$. Если не создать этого момента сил, то, закрепленная в подшипнике деталь, будет поворачиваться по стрелке (см. рис. 2.3). Таким образом, для предотвращения перемещения оси в пространстве необходимы опоры оси – подшипники, которые должны действовать на ось с силами f_1 и f_2.

Величины модулей f_1 и f_2 определяются условием статического равновесия оси вращения (см. учебный блок «Статика»).

Для тела любой формы существует три взаимно перпендикулярные, проходящие через центр инерции тела оси, которые могут служить свободными осями, что можно доказать. Такие оси называются *главными осями инерции.*



а *б*

Рис. 2.4

У однородного параллелепипеда главными осями инерции будут оси O_1O_1, O_2O_2, O_3O_3, проходящие через центры граней (рис. 2.4, *а*). У тела, обладающего осью симметрии (цилиндр), одной из осей инерции является ось симметрии (см. рис. 2.4, *б*). В качестве двух других могут служить любые взаимно-перпендикулярные оси, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси симметрии и проходящей через центр инерции. То есть только одна из главных осей инерции фиксирована.

Для тел с центральной симметрией (симметрия относительно точки – центра массы) главными осями являются любые три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр инерции, следовательно, ни одна из осей не фиксирована.

Устойчивость вращения

Основное уравнение динамики вращательного движения справедливо для вращения относительно любой возможной оси. Однако характер движения, его устойчивость, существенно зависят от того, как ось вращения расположена относительно главных осей инерции.

Если тело вращается в условиях, когда какое-либо воздействие извне отсутствует, то устойчивым оказывается только вращение вокруг главных осей, соответствующих максимальному и минимальному значениям момента инерции. Вращение же вокруг оси с промежуточным моментом инерции будет неустойчивым.

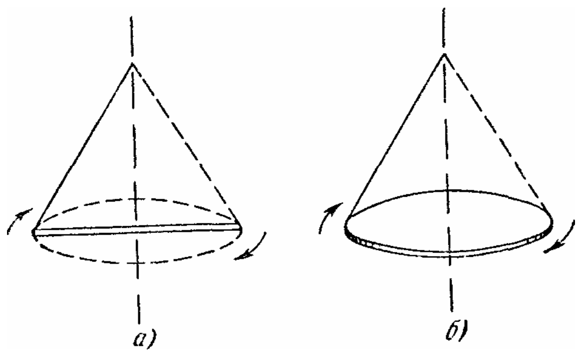


Рис. 2.5

При наличии внешнего воздействия, например – со стороны подвеса (нити), устойчивым оказывается только вращение вокруг главной оси, соответствующей наибольшему значению момента инерции. По этой причине тонкий стержень, подвешенный на нити, прикрепленный к его концу, при быстром вращении будет, в конечном итоге, вращаться вокруг перпендикулярной к нему оси, проходящей через центр (рис. 2.5, *а*). Аналогичным образом ведет себя диск, с прикрепленной к его краю нитью (рис. 2.5, *б*).

Движение тела, закрепленного в одной точке

В каждый момент времени вращение тела, закрепленного в одной точке, можно рассматривать как вращение тела вокруг мгновенной оси, которая изменяет свое положение и в теле, и в пространстве, но всегда проходит через закрепленную точку и совпадает по направлению с вектором угловой скорости.

Самым простым примером может служить вращение тела, закрепленного в центре инерции. Совместим с этой точкой также и начало координат. Момент импульса какой-либо частицы m_i относительно центра инерции равен

$$\vec{L}_i = [r_i, m\upsilon_i],$$

где скорость υ_I можно определить через векторное произведение угловой скорости ω_I и радиус-вектора i-ой точки относительно центра инерции r_i

$\vec{\upsilon}_i = [\vec{\omega}\vec{r}_i]$. Тогда момент импульса *i*-ой точки $\vec{L}_i = m_i[\vec{r}_i[\vec{\omega}\vec{r}]]$, а полный момент импульса тела

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n}\vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i[\vec{r}_i[\vec{\omega}\vec{r}_i]]. \tag{11}$$

Учитывая известную формулу векторной алгебры $\overline{A}[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]] = = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - (\vec{a}\vec{b})\vec{c}$, получаем

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i (r_i^2 \vec{\omega}_i = \vec{r}_i(\vec{r}_i\vec{\omega})), \tag{12}$$

откуда видно, что, в общем случае, вектор $\vec{L}$ момента импульса совпадает с направлением угловой скорости $\vec{\omega}$. Проецируя полученные выражения на избранную систему координат, получаем соотношение между проекциями векторов $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$ следующего вида:

$$L_x = J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z;\ L_y = J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y + J_{yz}\omega_z;\ L_z = J_{zx}\omega_x + J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z \tag{13}$$

Девять величин $J_{xx}, J_{xy} \ldots J_{zz}$ соответствуют моментам инерции тела относительно соответствующих осей при произвольном вращении тела с угловой скоростью $\vec{\omega}$ с компонентами (ω_x, ω_y, ω_z).

Для этих величин выполняется обязательное условие

$$J_{yx} = J_{xy}; \quad J_{zx} = J_{xz}; \quad J_{zy} = J_{yz}.$$

Выражение значительно упрощается, если оси выбранной системы координат совпадают по направлению с главными осями инерции. В этом случае

$$J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0;$$

$$L_x = J_{xx}\omega_x; \qquad L_y = J_{yy}\omega_{y,}; \qquad L_z = J_{zz}\omega_z$$

и

$$\vec{L} = L_x\vec{i} + L_y\vec{j} + L_z\vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные орты выбранной системы координат.

Вращение симметричного тела

Решение задач о вращении твердого тела в общем случае представляет большие трудности. Точное решение удается получить лишь для нескольких частных случаев. Поэтому основные закономерности можно выяснить на примере тел, обладающих осью симметрии. Обычно используют модель симметричного волчка, для которого выполняется следующее соотношение для главных моментов $J_{xx} = J_{yy} = J \neq J_{zz}$. При этом необходимо строго различать ось симметрии (которая может быть определена визуально) и мгновенную ось вращения, совпадающую с направлением вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ (рис. 2.6).

Рассмотрим вращение симметричного волчка в отсутствии действия внешних сил.

Вращательное движение тела в отсутствии внешних сил называется **свободным вращением.** В этом случае сохраняется кинетическая энергия, а в отсутствие внешних моментов сил направление и модуль момента импульса. Однако при свободном вращении симметричного волчка наряду с законами сохранения энергии и момента импульса выполняется закон сохранения проекций моментов импульса на ось симметрии тела (будем считать, что ось z совпадает с осью симметрии):

$$L_z = J_{zz}\omega_z = \mathrm{const},$$

согласно построению Пуансо вектор $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$ не совпадают. При этом постоянство проекции L_x означает, что симметричный волчок равномерно вращается с угловой скоростью ω_z вокруг своей оси симметрии.

Это легко можно доказать, исходя из следующих соображений. Кинетическую энергию вращающегося тела можно записать в виде суммы

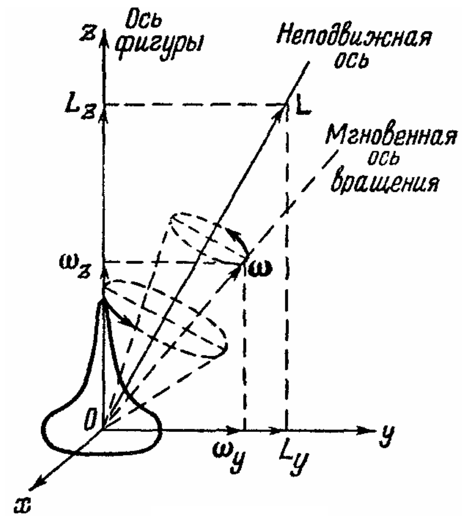


Рис. 2.6

$$E_к = \frac{1}{2}(J_{xx}\omega_x^2 + J_{yy}\omega_y^2 + J_{zz}\omega_z^2) = \frac{1}{2}(\vec{L}\vec{\omega}),$$

но $L_x = J_{xx}\omega_x$, $L_y = J_{yy}\omega_y$ и $L_z = J_{zz}\omega_z$, поэтому

$$E_к = \frac{1}{2}\left(\frac{L_x^2}{J_{xx}} + \frac{L_y^2}{J_{yy}} + \frac{L_z^2}{J_{zz}}\right).$$

В силу симметрии волчка $J_{xx} = J_{yy} = J$ получаем

$$E_к = \frac{1}{2J}(L_x^2 + L_y^2 + L_z^2) - \frac{1}{2J}L_z^2 + \frac{1}{2J_{zz}}L_z^2 = \frac{1}{2J}(L_x^2 + L_y^2 + L_z^2) + \frac{1}{2}(\frac{1}{J_{zz}} - \frac{1}{J})L_z^2$$

Поскольку для момента импульса верно равенство $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$, то

$$E_к = \frac{1}{2J}L^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{J_{zz}} - \frac{1}{J}\right)L_z^2,$$

откуда следует $L_z = \mathrm{const}$, если $E_к = \mathrm{const}$ и $L = \mathrm{const}$.

Характер движения мгновенной оси также можно установить аналогичным способом

$$E_к = \frac{1}{2}J(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) + \frac{1}{2}(J_{zz} - J)\omega_z^2 = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}(J_{zz} - J)\omega_z^2.$$

Поскольку $E_к$ и $\omega_я$ постоянны, то квадрат угловой скорости ω^2 также должен быть постоянной величиной. При этом в силу того, что $E_к = \frac{1}{2}\vec{L}\vec{\omega} = \text{const}$, угол между векторами $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$ также будет сохраняться при вращении. Поэтому мгновенная ось вращения в своем движении будет описывать конус вокруг направления вектора $\vec{L}$ с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Однако, поскольку волчок вращается относительно оси симметрии со скоростью ω_z, то ось симметрии также будет описывать конус относительно направления вектора $\vec{L}$, поскольку вектора $\vec{\omega}$, $\vec{L}$ и ось симметрии лежат в одной плоскости.

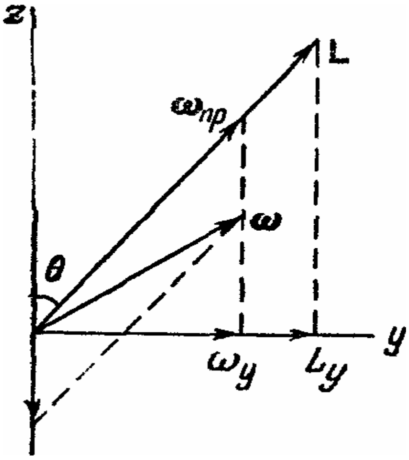


Рис. 2.7

Таким образом, симметричный волчок вращается со скоростью ω вокруг мгновенной оси и со скоростью ω_z вокруг своей оси симметрии. При этом направление вектора $\vec{L}$ представляет собой некоторую неподвижную ось, вокруг которой ось симметрии совершает вращение. Такое вращение оси симметрии относительно неподвижной оси называется *регулярной прецессией.* Угловую скорость прецессии $\omega_{пр}$ можно определить, если разложить вектор $\vec{\omega}$ по правилу параллелепипеда на две составляющие вдоль оси волчка и вдоль направления L: $\vec{\omega} = \vec{\omega}_z^{/} + \vec{\omega}_{пр}^{/}$.

Из рис. 2.7 видно, что $\omega_y = \omega \sin\Theta$, но $\omega_y = \frac{L_y}{J_{yy}} = \frac{L_y}{J} = \frac{L\sin\Theta}{J}$, тогда $\omega_{пр} = \frac{L}{J}$. Важным частным случаем свободного вращения твердого тела является вращение шарового волчка, то есть тела, у которого все главные моменты инерции одинаковы. В этом случае направление векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{L}$ совпадают. Поэтому при постоянном моменте импульса L, будет постоянна и угловая скорость ω. Движение при этом будет представлять свободное вращение шарового волчка с постоянной угловой скоростью и вокруг направления вектора момента импульса $\vec{L}$.

2.2. Методические указания к лекционным занятиям

Вопросы лекции	Форма изучения	Литература	Вопросы для самоконтроля студентов
1. Динамика твердого тела 1.1. Основные понятия: момент импульса, момент инерции, момент импульса силы. 1.2. II закон Ньютона. 1.3. Закон сохранения момента импульса. 1.4. Кинетическая энергия вращательного движения. Работа	 лекция лекция лекция лекция	 [3, § 4.1, 4.5], [4, § 34 – 36] [3, § 4.2], [4, § 38] [3, § 4.3], [4, § 37] [3, § 4.4], [4, § 40, 41]	1. Как определить момент инерции тела? 2. В какой ситуации применим закон сохранения момента импульса? 3. Какую работу нужно затратить, чтобы повернуть квадратную рамку массой m и стороной a на угол 90° относительно оси, проходящей через одну из его сторон? 4. Определить направление векторов $\vec{\omega}, \vec{\varepsilon}, \vec{L}, \vec{M}$ для горизонтального вращения шарика на веревке. 5. Указать аналогии в законах динамики и сохранения для динамики поступательного и вращательного движения. 6. Какое тело скатиться с наклонной плоскости быстрее: полый цилиндр с внутреннею полостью радиусом R или полый цилиндр с внутренней полостью R/2, если массы и внешние радиусы равны?
2. Свободное вращение твердого тела 2.1. Момент инерции сложных тел. 2.2. Понятие о степени свободы твердых тел. 2.3. Вращение тела относительно свободной оси. 2.4. Вращение тела относительно заданной точки. 2.5. Гироскопический эффект	 лекция лекция лекция лекция самост.	 [4, § 39] [4, § 42] [4, § 43] – [4, § 44]	1. Чем определяется число степеней свободы тела? 2. Что такое эллипсоид инерции, как он трансформируется с появлением симметрии в системе? 3. Какие условия необходимо выполнить при создании сложных вращающихся деталей? 4. В чем состоит суть гироскопического эффекта? Где он применяется? В чем проявляется?

2.3. Методические указания к решению задач

Тема занятия	Задачи	Рекомендации	Задачи из сборников
1. Определение динамических характеристик вращательного движения твердого тела	1. Определение момента инерции твердых тел	1. Необходимо помнить, что момент инерции системы тел есть сумма моментов инерции каждого тела в отдельности. 2. Момент инерции тела относительно произвольной оси можно определить, если известен момент инерции этого тела относительно другой параллельной данной оси по теореме Штейнера. 3. При определении момента инерции сплошных тел можно использовать методику определения центра масс – выделить элементарную массу и проинтегрировать по всему объему	[1, № 2.2, 2.4 – 2.8, 2.12 – 2.15]
	2. Динамические характеристики вращательного движения. Качение	1. При определении параметров вращательного движения твердого тела необходимо помнить, что угловая скорость, угловое ускорение, момент силы, момент импульса – псевдовекторы, т.е. их направление не совпадает с направлением движения или действия силы или передачи импульса, а определяется по правилам буравчика и левой руки. 2. Изобразить все моменты сил, приложенные к телам, движение которых изучается. При этом необходимо учитывать, что на данное тело могут действовать моменты сил только со стороны других объектов: со стороны Земли – со стороны опоры – сила реакции – $\vec{N}$; со стороны соприкасающихся тел – сила трения $\vec{F}_{тр}$. 3. Ось вращения при этом – точку относительно которой записываются моменты сил и моменты импульса удобно выбирать таким образом, чтобы часть сил (импульсов) имели нулевые плечи. Такой выбор системы отсчета позволяет максимально упростить уравнение динамики. 4. Записать второй закон Ньютона для вращательной динамики в проекциях на оси выбранной системы координат. 5. Дополнить уравнения вращательной динамики уравнениями динамики поступательного движения и уравнениями кинематики так, чтобы число уравнений равнялось числу неизвестных. 6. Разрешить систему уравнений относительно неизвестных	[1, № 2.29 – 2.32]

Окончание табл.

2. Законы сохранения при вращательном движении	1. Закон сохранения момента импульса	1. Сделать чертеж, на котором указать начальные и конечные моменты импульса системы и направление внешних сил. 2. Выбрать систему координат так, чтобы удобнее было проецировать на них векторы (часть из векторов могут проходить через центр масс и не вызывать вращения). 3. Записать уравнения закона сохранения момента импульса в проекциях на соответствующие оси. 4. Дополнить систему уравнений уравнениями динамики и кинематики, чтобы полная система уравнений стала замкнутой	[1, № 2.62 – 2.70]
	2. Закон сохранения энергии. Работа. Мощность	1. Для вращательной динамики также выполняется теорема о кинетической энергии – работа есть изменение кинетической энергии тела. 2. При этом полная кинетическая энергия будет состоять из энергии поступательного движения и энергии качения (вращения). 3. При определении работы, необходимо выяснить какие виды энергии при этом изменяются, это позволит определить работу какой силы нужно найти. В ее качестве может выступать и равнодействующая сила (момент сил). Если сила неизвестна из условия, то ее следует найти из уравнений динамики. 4. Для определения работы при повороте тела удобно использовать выражения для определения работы как произведения момента сил на элементарный угол поворота. 5. Определить мощность силы (момента силы) по одному из подходящих соотношений: $N = dA/dt$, $N = \vec{F}\vec{v}$.	[1, № 2.62 – 2.70]
	3. Комплексные задачи	1. Сделать чертеж, на котором изобразить систему в двух (нескольких) положениях. 2. Выбрать нулевой уровень отсчета потенциальной энергии. Если тело расположено выше нулевого уровня, то потенциальная энергия положительная, если ниже – отрицательная. 3. Если в системе присутствуют диссипативные силы, то необходимо определить работу этих сил. 4. Записать закон сохранения полной механической энергии или изменения механической энергии с учетом работы сил трения. 5. Дополнить полученные уравнения нужным числом уравнений динамики: – целесообразно записать закон сохранения энергии для начального и конечного состояний и дополнить его законом сохранения для каких-либо промежуточных состояний; – необходимо учитывать, что при переходе к различным инерциальным системам отсчета полная энергия может меняться, поэтому целесообразно использовать неподвижные относительно Земли системы отсчета	[1, № 2.117 – 2.123]

2.4. Примеры решения задач

Определение момента инерции

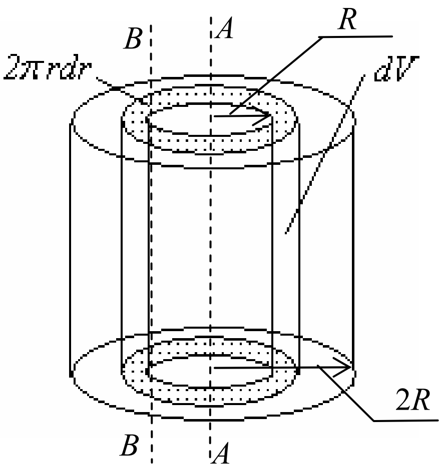


Рис. 2.8

Пример 1.

Определить момент инерции полого цилиндра с радиусами R и $2R$, массой m и высотой h относительно оси, проходящей через образующую полости (рис. 2.8).

1. Определим момент инерции относительно оси симметрии цилиндра $J_0 = \int r^2 dm$.
2. Выберем элементарный цилиндрический слой $dS = 2\pi r dr$, $dV = dSh = 2\pi rhdr$, $dm = \rho dV = 2\pi h\rho 2dr$.
3. Установим пределы интегрирования от R до $2R$

$$J_0 2\pi h\rho \int_R^{2R} r^3 dr = 2\pi h\rho \frac{1}{4} r^4 = \frac{1}{2}\pi h\rho\left(16R^4 - R^4\right) = \frac{15}{2}\pi h\rho R^4.$$

4. Общую массу цилиндра можно определить как

$$m = \rho h\left(4\pi R^2 - \pi R^2\right) = 3\pi R^2 \rho h.$$

5. Момент инерции тела относительно оси симметрии

$$J_0 = \frac{15}{2}\pi h\rho R^4 = \frac{5}{2}\left(3\pi R^2 \rho h\right) R^2 = \frac{5}{2} mR^2.$$

6. По теореме Штейнера определим момент инерции цилиндра относительно оси, проходящей через образующую полости В – В, $d = R$ – расстояние между осями А – А и В – В.

$$J = J_0 + md^2;\; J = \frac{5}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{7}{2}mR^2.$$

Пример 2.

Определить момент инерции фигуры, образованной из проволоки общей массы m, которая изогнута в виде равностороннего треугольника со стороной l. Ось вращения проходит через одну из сторон треугольника (рис. 2.9).

1. Определим момент инерции одной из сторон.

2. Выбираем элементарный участок длиной dx и массой $dm = \rho S dx$ (S – сечение проволоки, ρ – плотность материала).
3. Расстояние от dm до оси вращения $r = x \sin \alpha$.
4. Момент инерции этой стороны определим интегрированием

$$J_1 = \int r^2 dm = \int_0^l x^2 \sin^2 \alpha \cdot \rho S dx = \rho S \sin^2 \alpha \int_0^l x^2 dl.$$

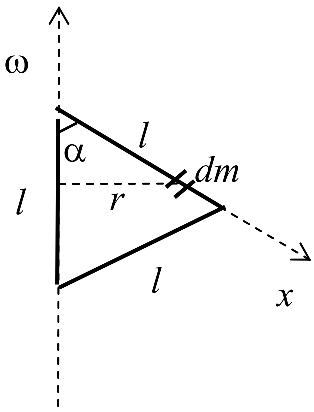


Рис. 2.9

5. Масса стороны треугольника

$$m_0 = \frac{1}{3} m; \qquad m_0 = \frac{1}{3} \rho 3 l S = \rho l S.$$

6. Момент инерции этой стороны $J_1 = \frac{1}{3} m_0 l^2 \sin^2 \alpha$. Мы определили момент инерции стержня, который закреплен под углом α к оси. При этом определенный момент инерции отличается от момента инерции стержня, перпендикулярного к оси на $\sin^2\alpha$.
7. Легко определить момент инерции второй стороны по тому же алгоритму $J_2 = \frac{1}{3} m_0 l^2 \sin^2 \alpha$.
8. Момент инерции закрепленной на оси вращения стороны равен 0 ($\sin \alpha = 0$).
9. Момент инерции относительно данной оси можно определить как сумму моментов инерции относительно той же оси

$$J = J_1 + J_2 = \frac{2}{3} m_0 l^2 \sin^2 \alpha = \frac{2}{9} m l^2 \sin^2 \alpha.$$

Динамические характеристики вращательного движения

Пример 1.

Блок с моментом инерции J = = 0,01 кг·м^2 укреплен на вершине наклонной плоскости (рис. 2.10). Гири массами m_1 = 3 кг и m_2 = 4 кг соединены нитью, перекинутой через блок. Угол при основании наклонной плоскости α = 30°. Определить натяжение нитей $F_{н1}$ и $F_{н2}$, если гиря массой m_2 опускается равноускоренно. Блок

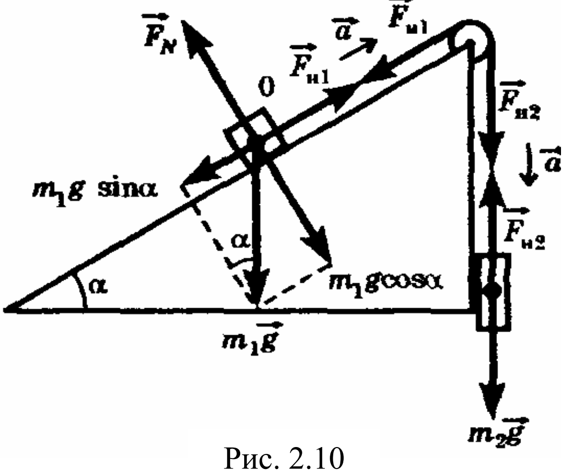


Рис. 2.10

представляет собой однородный цилиндр радиусом R = 0,1 м. Трением пренебречь.

Решение. Запишем основное уравнение динамики (второй закон Ньютона) применительно к поступательному движению грузов и основное уравнение динамики вращательного движения блока.

В векторной записи эти уравнения будут иметь вид

$$m_1\vec{a} = \vec{F}_{н1} + m_1\vec{g} + \vec{F}_N; \quad m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{F}_{н2},$$

$$J\vec{\varepsilon} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2,$$

а в скалярной

$$m_1 a = F_{н1} - m_1 g \sin\alpha, \tag{1}$$

$$m_2 a = m_2 g - F_{н2}, \tag{2}$$

$$J\varepsilon = M_2 - M_1, \tag{3}$$

где

$$M_1 = F_{н1}R; \tag{4}$$

$$M_2 = F_{н2}R. \tag{5}$$

Момент инерции блока J нам известен. Подставим (4) и (5) в (3), а также учтем, что

$$\varepsilon = \frac{a}{R} : J\frac{a}{R} = F_{н2}R - F_{н1}R$$

или

$$J\frac{a}{R^2} = F_{н2} - F_{н1}. \tag{6}$$

Итак, мы имеем три уравнения (1), (2) и (6) с тремя неизвестными: искомыми силами $F_{н1}$ и $F_{н2}$ и «ненужным» ускорением а. Можно его исключить, разделив эти уравнения попарно друг на друга. Тогда останутся два уравнения с двумя неизвестными $F_{н1}$ и $F_{н2}$, которые путем алгебраических действий можно будет отыскать. Но такое решение будет чрезвычайно громоздким, в чем вы можете убедиться, пройдя по этому пути. Мы же пойдем другим путем. Сложим левые и правые части уравнений (1), (2) и (6). При этом искомые $F_{н1}$ и $F_{н2}$ «уйдут» вследствие приведения подобных членов, а ускорение a останется. Но, найдя его, мы сможем легко определить и искомые силы натяжения из уравнений (1) и (2). Такое решение будет значительно проще.

$$m_1 a + m_2 a + J\frac{a}{R^2} = F_{н1} - m_1 g\sin\alpha + m_2 g - F_{н2} + F_{н2} - F_{н1},$$

$$a\left(m_1 + m_2 + J\frac{a}{R^2}\right) = g\left(m_2 - m_1\sin\alpha\right),$$

откуда
$$a = \frac{g\left(m_2 - m_1\sin\alpha\right)}{m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}}. \tag{7}$$

Теперь определим из (1) и (2) $F_{н1}$ и $F_{н2}$, подставив в эти выражения вместо a правую часть уравнения (7):

$$F_{н1} = m_1\left(a + g\sin\alpha\right) = m_1\left(\frac{g\left(m_2 - m_1\sin\alpha\right)}{m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}} + g\sin\alpha\right),$$

$$F_{н1} = m_1 g\frac{m_2 - m_1\sin\alpha + m\alpha + \left(m_2 + \frac{J}{R^2}\right)\sin\alpha}{m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}},$$

$$F_{н1} = m_1 g\frac{m_2 R^2 + \left(m_2 R^2 + J\right)\sin\alpha}{\left(m_1 + m_2\right)R^2 + J},$$

$$F_{н2} = m_2 g - m_2 a = m_2\left(g - \frac{g\left(m_2 - m_1\sin\alpha\right)}{m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}}\right) = m_2 g\frac{m_2 + \frac{J}{R^2} - m_2 + m_1\sin\alpha}{m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}},$$

$$F_{н2} = m_2 g\frac{m_1 R^2\left(1 + \sin\alpha\right) + J}{\left(m_1 + m_2\right)R^2 + J}.$$

Произведем вычисления:

$$F_{н1} = 3\cdot 9{,}8\frac{4\cdot 0{,}01 + \left(4\cdot 0{,}01 + 0{,}01\right)\sin 30^\circ}{\left(3+3\right)0{,}01 + 0{,}01}\text{Н} = 24\ \text{Н},$$

$$F_{н2} = 4\cdot 9{,}8\frac{3\cdot 0{,}01\left(1 + \sin 30^\circ\right) + 0{,}01}{\left(3+4\right)0{,}01 + 0{,}01}\text{Н} = 27\ \text{Н}.$$

Ответ: $F_{н1}$ = 24 Н, $F_{н2}$ = 27 Н.

Пример 2.

Маховое колесо, имеющее момент инерции J = 245 кг·м^2, вращается, с частотой ν_0 = 20 с$^{-1}$ (рис. 2.11). В некоторый момент времени на него стала действовать тормозящая сила, в результате чего колесо через t = 1 мин остановилось (ν = 0). Радиус колеса R = 0,2 м. Найти величину тормозящего момента силы $M_{тр}$ и число полных оборотов N, сделанных колесом до полной остановки.

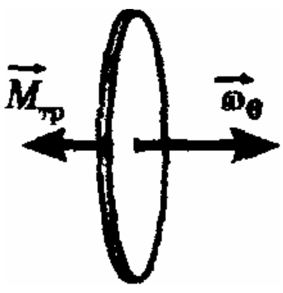


Рис. 2.11

Решение. Поскольку, кроме тормозящей силы, на колесо не действуют другие силы, создающие момент сил, то согласно основному закону динамики вращательного движения произведение момента инерции махового колеса J и его углового ускорения ε равно тормозящему моменту сил $M_{тр}$:

$$J\varepsilon = M_{тр}\,. \tag{1}$$

Поскольку колесо вращается под действием постоянного момента сил $\vec{M}_{тр}$, его движение равнозамедленное, поэтому угловое ускорение (точнее – замедление) колеса ε мы найдем по известной формуле равнопеременного вращательного движения твердого тела: $-\varepsilon = \dfrac{\omega_0 - \omega}{t}$ или $\varepsilon = \dfrac{\omega_0 - \omega}{t}$. Здесь ω_0 – начальная угловая скорость колеса, а ω – его конечная угловая скорость. Эти величины связаны с известными нам частотами вращений ν_0 и ν соотношениями $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ и $\omega = 2\pi\nu$.

Тогда $\varepsilon = \dfrac{2\pi\nu_0 - 2\pi\nu}{t}$ или $\varepsilon = \dfrac{2\pi}{t}\left(\nu_0 - \nu\right) = \dfrac{2\pi}{t}\nu_0$, (2)

так как ν = 0.

Подставив (2) в (1), найдем искомый тормозящий момент сил $M_{тр}$:

$$M_{тр} = 2\pi\frac{\nu_0 J}{t}\,.$$

Полное число оборотов колеса N можно определить, умножив его среднюю частоту вращения $\nu_{ср}$, то есть среднее число оборотов за единицу времени, на все время вращения t: $N = \nu_{ср}t$.

Средняя частота вращения колеса $\nu_{ср}$ есть среднее арифметическое начальной ν_0 и конечной ν частот вращения (подчеркнем, что это справедливо только при равнопеременном вращении твердого тела):

$$\nu_{ср} = \frac{\nu_0 + \nu}{2} = \frac{\nu_0}{2} \text{ при } \nu = 0.$$

С учетом этого $N = \frac{\nu_0}{2} t$.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$M_{тр} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{60} \cdot 20 \cdot 245 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad N = \frac{20}{2} \cdot 60 = 600.$$

Ответ: $M_{тр}$ = 513 Н·м, N = 600.

Пример 3.

Однородный диск радиусом R = 0,2 м и массой m = 5 кг вращается вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости диска. Зависимость угла поворота диска от времени дается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2$, где C = 2 рад/с^2. Вращению диска противодействует тормозящий момент сил трения $M_{тр}$ = 1 Н·м. Определить величину касательной силы F, приложенной к ободу диска.

Решение. Касательная сила $\vec{F}$, приложенная к ободу диска, создает вращающий момент сил $\vec{M}$, который по определению момента силы равен произведению величины этой силы f и ее плеча. Плечом силы F в нашем случае является радиус диска, поэтому

$$M = FR.$$

Вращающему моменту силы $\vec{M}$ противодействует момент сил трения $\vec{M}_{тр}$. Согласно основному уравнению динамики вращательного движения произведение момента инерции J диска и его углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ равно векторной сумме моментов сил, приложенных к диску относительно центра вращения 0 (рис. 2.12):

$$J\vec{\varepsilon} = \vec{M} + \vec{M}_{тр}.$$

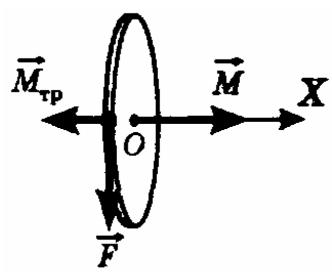


Рис. 2.12

Поскольку векторы моментов сил $\vec{M}$ и $\vec{M}_{тр}$ антинаправлены (в чем несложно убедиться, используя правило правого винта), то в проекциях на ось OX этот закон примет вид

$$J\varepsilon = M - M_{тр.}$$

Момент инерции диска относительно оси вращения определяется по формуле $J = \frac{mR^2}{2}$.

Угловое ускорение диска найдем как вторую производную угла поворота диска по времени:

$$\omega = \varphi' = B + 2Ct, \qquad \varepsilon = \omega' = 2C. \tag{4}$$

Подставив правые части (1), (3) и (4) в (2), мы получим уравнение, в котором будет только одна неизвестная – искомая сила

$$F: \frac{mR^2}{2} 2C = FR - M_{тр}.$$

Отсюда

$$FR = mR^2C + M_{тр}, \qquad F = \frac{mR^2}{R}C + \frac{M_{тр}}{R}, \qquad F = mRC + \frac{M_{тр}}{R}.$$

Подставим числа и произведем вычисления:

$$F = \left(5 \cdot 0{,}2 \cdot 2 + \frac{1}{0{,}2}\right) \text{Н} = 7 \text{ Н}.$$

Ответ: $F = 7$ Н.

Законы сохранения. Работа

Пример 1.

Какую работу A надо совершить в течение $t = 1$ мин, чтобы увеличить частоту вращения маховика массой $m = 50$ кг, имеющего форму диска диаметром $D = 1{,}5$ м, от $\nu_0 = 0$ до $\nu = 50$ с$^{-1}$, если к ободу маховика приложена по касательной постоянная сила трения $F_{тр}$?

Решение. Работа вращательного движения твердого тела определяется произведением вращающего момента силы $M_{вр}$ и угла поворота φ этого тела за некоторое время t:

$$A = M_{вр}\varphi. \tag{1}$$

Для определения вращающего момента силы $M_{вр}$ воспользуемся основным уравнением динамики вращательного движения твердого тела, которое применительно к данной задаче в векторной записи имеет вид

$$J\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{вр} + \vec{M}_{тр},$$

а в скалярной

$$J\varepsilon = M_{вр} - M_{тр.} \tag{2}$$

Здесь J – момент инерции маховика, ε – его угловое ускорение, а $M_{тр}$ – момент силы трения. Момент инерции однородного диска относительно оси вращения, проходящий через его центр масс перпендикулярно плоскости диска, определяется формулой

$$J = \frac{mR^2}{2},$$

где $R = \frac{D}{2}$, поэтому

$$J = \frac{mD^2}{8}. \tag{3}$$

Момент силы трения равен произведению силы трения $F_{тр}$ на ее плечо

$$M_{тр} = F_{тр}R \text{ или } M_{тр} = F_{тр}\frac{D}{2}. \tag{4}$$

Подставив (3) и (4) в (2), получим

$$M_{вр} = \frac{mD^2}{8}\varepsilon + F_{тр}\frac{D}{2} = 0,5D\left(0,25mD\varepsilon + F_{тр}\right).$$

Поскольку, судя по условию задачи, величины сил, действующих на маховик, и их плечи не менялись, то его вращение равноускоренное, поэтому угловое ускорение маховика ε найдем по его определению

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t},$$

где $\omega_0 = 0$, так как $\nu_0 = 0$, поэтому

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{2\pi\nu}{t}.$$

С учетом этого

$$M_{вр} = 0,5D\left(0,25mD\frac{2\pi\nu}{t} + F_{тр}\right) = 0,5D\left(0,5\pi\frac{mD\nu}{t} + F_{тр}\right). \tag{5}$$

Нам осталось найти угол поворота маховика φ за время t. Его мы можем определить из формулы средней угловой скорости переменного вращения твердого тела

$$\omega_{ср} = \frac{\varphi}{t},$$

откуда

$$\varphi = \omega_{ср}t.$$

В свою очередь среднюю угловую скорость $\omega_{ср}$ равноускоренного вращательного движения можно определить как среднее арифметическое начальной угловой скорости $\omega_0 = 0$ и конечной угловой скорости ω:

$$\omega_{ср} = \frac{\omega + \omega_0}{2} = \frac{\omega}{2} = \frac{2\pi\nu}{2} = \pi\nu.$$

Тогда $\varphi = \pi\nu t$. (6)

Подставив (5) и (6) в (1), мы решим задачу в общем виде:

$$A = 0{,}5D\left(0{,}5\pi\frac{mD\nu}{t} + F_{тр}\right)\pi\nu t, \qquad A = 0{,}5\pi\nu D\left(0{,}5\pi\nu mD + F_{тр}t\right).$$

Эту же задачу можно решить иначе, определив искомую работу как сумму изменений кинетической энергии вращательного движения маховика и работы против сил трения $A_{тр}$: $A = E_{k2} - E_{k1} + A_{тр}$.

Здесь $E_{k1} = \frac{J\omega_0^2}{2}$, $E_{k2} = \frac{J\omega^2}{2}$ и $A_{тр} = F_{тр}l$,

где l – длина дуги, по которой будет двигаться точка обода маховика в течение времени t.

Так как $v_0 = 0$, то $\omega_0 = 0$ и $E_{к_1} = 0$, поэтому

$$A = \frac{J\omega^2}{2} + F_{тр}l, \tag{7}$$

где

$$J = \frac{mD^2}{8} \tag{8}$$

$$\omega = 2\pi v. \tag{9}$$

Длину дуги l можно определить, рассуждая так: за среднюю величину периода маховика $T_{ср} = \frac{1}{v_{ср}}$ точка его обода совершит полный оборот и пройденный ею путь будет равен длине окружности πD. А за время t пройденный точкой путь равен l. Тогда средняя линейная скорость точки обода $v_{ср} = \frac{\pi D}{T_{ср}}$ и $v_{ср} = \frac{l}{t}$, поэтому $\frac{\pi D}{T_{ср}} = \frac{l}{t}$, откуда

$$l = \frac{\pi D t}{T_{ср}}, \text{ где } T_{ср} = \frac{1}{v_{ср}} = \frac{2}{v + v_0} = \frac{2}{v}, \text{ так как } v_0 = 0.$$

Тогда $$l = \frac{\pi D t v}{2} = 0{,}5\pi D t v. \qquad (10)$$

Подставим (8), (9) и (10) в (7):

$$A = \frac{mD^2 4\pi^2 v^2}{8 \cdot 2} + F_{mp} \cdot 0{,}5\pi D t v \text{ или } A = 0{,}5\pi v D(0{,}5\pi v m D + F_{mp} t),$$

Ответы одинаковы.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$A = 0{,}5 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 1{,}5(0{,}5 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 50 \cdot 1{,}5 + 1 \cdot 60)\text{Дж} = 7 \cdot 10^5 \text{Дж}.$$

Ответ: $A = 7 \cdot 10^5$ Дж.

Пример 2.

На барабан радиусом R = 0,2 м, момент инерции которого J = = 0,1 кг·м^2, намотан шнур, к которому привязан груз массой m = 0,5 кг. До начала вращения высота груза над полом h = 1 м (рис. 2.13). Найти кинетическую энергию груза $E_к$ в момент удара о пол. Движение груза считать равноускоренным.

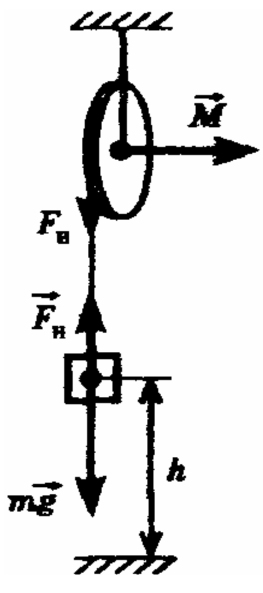


Рис. 2.13

Решение. Кинетическая энергия груза в момент его удара о пол определяется формулой

$$E_k = \frac{mv^2}{2}. \qquad (1)$$

Здесь v – конечная скорость груза в момент его удара о пол. Из условия задачи можно сделать вывод, что начальная скорость груза на высоте h равна нулю ($v_0 = 0$).

Поскольку высота h нам известна, то для определения квадрата конечной скорости груза v^2 мы могли бы воспользоваться формулой кинематики равноускоренного движения

$$v^2 = 2ah, \qquad (2)$$

если бы нам было известно ускорение груза a.

Ускорение груза можно найти следующим образом. Частицы шнура движутся с таким же ускорением a, что и груз. Вместе с ними с этим же ускорением движутся точки обода барабана, для которых ускорение, а является тангенциальным ускорением, поскольку вектор этого ускорения направлен по шнуру вниз, т.е. по касательной к ободу барабана, поэтому здесь $a_\tau = a = \varepsilon R$, откуда $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$.

Тангенциальное ускорение барабана можно определить из основного уравнения динамики вращательного движения

$$J\varepsilon = M\ . \tag{3}$$

Здесь M – момент силы, вращающий барабан. Поскольку к барабану приложена сила натяжения шнура $\vec{F}_н$, численно равная силе, с которой шнур действует на груз, то с учетом, что плечом этой силы является радиус барабана R, запишем: $M = F_н R$.

Подставив выражения для ε и M в уравнение (3), получим

$$J\frac{a}{R} = F_н R \text{ или } J\frac{a}{R^2} = F_н\,. \tag{4}$$

В этом уравнении мы имеем две неизвестные величины: ускорение a (которое нам необходимо, чтобы определить v^2, а затем и $E_к$) и силу натяжения $F_н$ (которую нам определять не надо). Решить одно уравнение с двумя неизвестными мы не можем, поэтому нам необходимо еще одно уравнение, в которое вошли бы эти неизвестные a и $F_н$. Такое уравнение мы можем записать, применив второй закон Ньютона к поступательному движению груза, движущегося вниз равноускоренно с ускорением $\vec{a}$ под действием двух сил: силы тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения нити $\vec{F}_н$. В векторном виде этот закон будет $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_н$, а в скалярном

$$ma = mg - F_н\,. \tag{5}$$

Уравнения (4) и (5) представляют собой систему двух уравнений с двумя неизвестными величинами a и $F_н$. Для их решения выразим из уравнения (5) силу натяжения и подставим ее в уравнение (4):

$$F_н = mg - ma, \qquad J\frac{a}{R^2} = mg - ma\,.$$

Теперь найдем отсюда ускорение a:

$$J\frac{a}{R^2} + ma = mg\,, \qquad a\left(\frac{a}{R^2} + m)\right) = mg\,,$$

$$a = \frac{mg}{\dfrac{J}{R^2} + m} = \frac{g}{\dfrac{J}{mR^2} + 1}\,. \tag{6}$$

Нам осталось подставить (6) в (2), а затем то, что получится после этой подстановки, в (1). Выполним эти действия:

$$v^2 = \frac{2gh}{\dfrac{J}{mR^2}+1}, \qquad E_k = \frac{m}{2}\frac{2gh}{\dfrac{J}{mR^2}+1}, \qquad E_k = \frac{mgh}{\dfrac{J}{mR^2}+1}.$$

Подставим числа и произведем вычисления

$$E_k = \frac{0,5\cdot 9,8\cdot 1}{\dfrac{0,1}{0,5\cdot 0,2^2}+1}\text{Дж} = 0,82 \text{ Дж}.$$

Ответ: $E_к = 0,82$ Дж.

Пример 3.

Горизонтальная платформа массой m_1 = 100 кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, делая ν_1 = 10 об/мин (рис. 2.14). Человек массой m_2 = 60 кг стоит на ее краю. С какой частотой ν_2 станет вращаться платформа, если человек перейдет в ее центр. Считать платформу круглым однородным диском, а человека – материальной точкой.

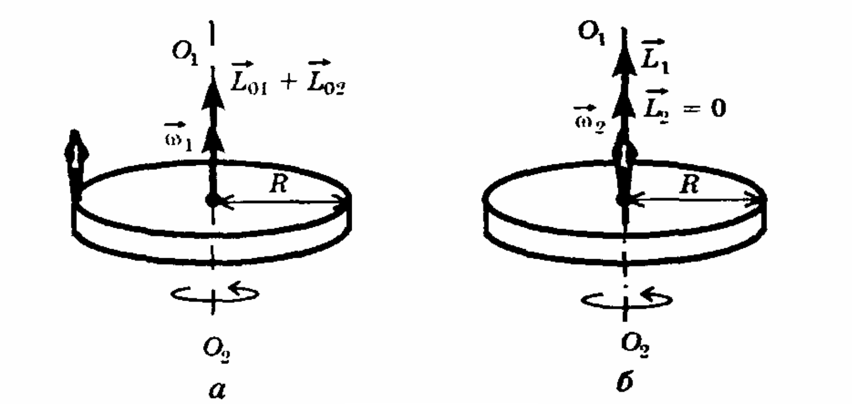


Рис. 2.14

Решение. Если считать, что на систему тел человек – платформа моменты внешних сил не действуют (на них действуют силы тяжести, но их момент сил равен нулю), то для решения этой задачи лучше всего воспользоваться законом сохранения момента импульса (законом сохранения механической энергии мы здесь воспользоваться не можем, так как энергия могла измениться, превратиться во внутреннюю в процессе перехода человека с края платформы в ее центр).

По закону сохранения момента импульса суммарный импульс платформы L_{01} и человека L_{02}, когда он стоял на краю (см. рис. 2.14, *а*), должен сохраниться, т.е. должен быть равным суммарному моменту импульса платформы L_1 и человека L_2 после того, как человек перешел в центр платформы (см. рис. 2.14, *б*):

$$L_{01} + L_{02} = L_1 + L_2 . \qquad (1)$$

Момент импульса вращающегося тела равен произведению момента инерции тела и его угловой скорости, поэтому

$$L_{01} + L_{02} = J_{пл}\omega_1 + J_{чел1}\omega_1 = (J_{пл} + J_{чел1})\omega_1 \qquad (2)$$

и

$$L_1 + L_2 = J_{пл}\omega_2 + J_{чел2}\omega_2 = (J_{пл} + J_{чел2})\omega_2 . \qquad (3)$$

ω_1 – угловая скорость платформы и человека, когда он стоял на ее краю, а ω_2 – угловая скорость платформы и человека, когда он перешел в центр.

Момент инерции платформы как однородного цилиндра

$$J_{пл} = \frac{m_1 R^2}{2} .$$

Очевидно, что момент инерции платформы после того, как человек перейдет в ее центр, не изменится, поскольку при этом не изменится ни ее масса, ни радиус.

Момент инерции человека, стоящего на краю платформы, определим по формуле момента инерции материальной точки $J_{чел1} = mR^2$.

Когда человек перейдет в центр, то расстояние от него до центра платформы, т.е. радиус окружности, по которой он движется в процессе вращения платформы, станет равен нулю, поэтому и момент инерции человека в центре платформы станет равен нулю: $J_{чел2} = m \cdot 0 = 0$, поэтому и момент импульса человека в центре платформы L_2 тоже станет равен нулю (подчеркиваем, что так будет только потому, что мы человека считаем материальной точкой, которая вращаться вокруг оси, проходящей через нее).

Тогда уравнение (1) можно записать так:

$$L_{01} + L_{02} = L_1 + L_2 = L_1 .$$

Теперь подставим выражение для моментов инерции $J_{пл}$ и $J_{чел}$ в уравнения (2) и (3) и приравняем правые части полученных уравнений:

$$\left(\frac{m_1 R^2}{2} + m_2 R^2\right)\omega_1 = \frac{m_1 R^2}{2}\omega_2 ; \qquad (0,5m_1 + m_2)\omega_1 = 0,5m_1\omega_2 .$$

Поскольку в условии задачи речь идет не об угловых скоростях ω_1 и ω_2, а о частотах вращения ν_1 и ν_2, то, воспользовавшись соотношениями $\omega_1 = 2\pi\nu_1$ и $\omega_2 = 2\pi\nu_2$, запишем:

$$(0,5m_1 + m_2)2\pi\nu_1 = 0,5m_1 2\pi\nu_2 .$$

Отсюда найдем искомую частоту вращения ν_2:

$$\nu_2 = \frac{\nu_1(0,5m_1 + m_2)}{0,5m_1}, \qquad \nu_2 = \nu_1\left(1 + \frac{2m_2}{m_1}\right).$$

Подставим числа и произведем вычисления:

$$\nu_2 = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{2 \cdot 60}{100}\right)c^{-1} = 0,37\ \text{с}^{-1}.$$

Ответ: ν_2 = 0,37 с$^{-1}$.

2.5. Вопросы к коллоквиуму

1. Закон сохранения момента импульса.
2. Закон динамики вращательного движения и его связь с поступательным движением твердых тел.
3. Момент инерции тела: методы определения и фундаментальное значение.
4. Движение твердого тела с закрепленной осью.
5. Движение твердого тела со свободной осью вращения.
6. Движение твердого тела с осью, закрепленной в точке.

3. УЧЕБНЫЙ БЛОК «КОЛЕБАНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА»

Учебная программа блока

Содержание программы	Форма подготовки	Рекомендуемая литература
1. Физический маятник. Крутильный маятник	лекция	[2, § 27.2]
2. Колебания связанных систем	лекция	[5, § 54]

Цели обучения

студент должен **знать**	студент должен **уметь**
– дифференциальное уравнение колебаний физического и крутильного маятников; – периоды колебаний физического и крутильного маятников; – особенности колебаний связанных систем	– определять период и приведенную длину физического маятника (простые формы)

3.1. Краткое содержание теоретического материала

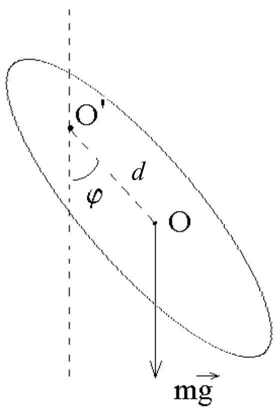


Рис. 3.1

Физическим маятником называется тело, закрепленное на неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр массы, и совершающее колебания под действием силы тяжести. При отклонении маятника из положения равновесия на угол α возникает вращающий момент, стремящийся вернуть маятник в положение равновесия (рис. 3.1).

Этот момент равен

$$M = -mgd\sin\varphi, \qquad (1)$$

где m – масса маятника, d – расстояние от точки подвеса до центра массы маятника $O'O$. Согласно основному закону вращательного движения

$$M = J\varepsilon = J\frac{d^2\varphi}{dt^2}, \qquad (2)$$

где J – момент инерции тела относительно оси вращения. Приравнивая (1) и (2), получаем

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgd\sin\varphi.$$

В случае малых колебаний можно считать $\sin\varphi \approx \varphi$, тогда получаем известное нам дифференциальное уравнение гармонических колебаний:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} \approx -\frac{mgd}{J}\varphi.$$

Следовательно, движение маятника носит гармонический характер с частотой $\omega = \sqrt{\frac{mgd}{J}}$.

Период колебаний можно определить по формуле

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}.$$

Из сопоставлений периода колебаний математического маятника и физического маятника получается, что математический маятник длиной $L^* = \frac{J}{md}$ будет иметь такой же период колебаний, как и данный физический. Величину L^* называют **приведенной длиной физического маятника.**

Тело, подвешенное на упругой нити или другом упругом элементе, совершающее колебания в горизонтальной плоскости, представляет собой крутильный маятник (рис. 3.2). При колебаниях упругий элемент испытывает деформацию сдвига. Будем считать, что на колеблющееся тело действует только упругая сила со стороны закрученной нити. Момент упругой силы относительно оси вращения пропорционален углу φ закручивания нити: $M = -K\varphi$, где K – коэффициент пропорциональности (коэффициент кручения подвеса), зависящий от размеров и упругих свойств материала подвеса. Уравнение движения будет иметь вид $M = J\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, где J – момент инерции тела относительно оси вращения. Таким образом $J\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -K\varphi$.

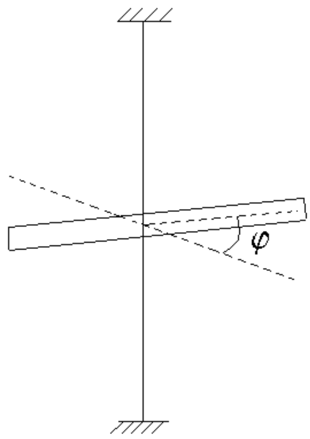


Рис. 3.2

Это уравнение аналогично дифференциальному уравнению гармонических колебаний. Следовательно, если тело на нити закрутить на некоторый угол, то оно будет совершать вокруг вертикальной оси колебания с частотой $\omega=\sqrt{\dfrac{K}{J}}$ или с периодом $T=2\pi\sqrt{\dfrac{J}{K}}$. Если K известно, то, измерив T, можно найти момент инерции тела, поэтому метод крутильных колебаний часто используется для нахождения моментов инерции тел. Приборы с использованием крутильного маятника применяют для определения модуля упругости при сдвиге, коэффициента внутреннего трения твердых материалов при сдвиге, коэффициента вязкости жидкости.

Колебания связанных систем (с несколькими степенями свободы)

До сих пор мы рассматривали простейшие колебательные системы, поскольку они представляли собой изолированные колебания, обладающие одной степенью свободы (математический, физический и пружинный маятники). Переход от одного осциллятора к системе с несколькими степенями свободы приводит к качественному изменению.

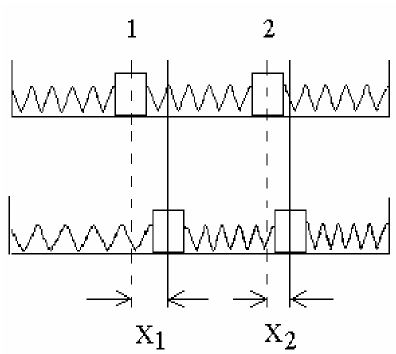


Рис. 3.3

В системе с несколькими степенями свободы возможны колебания с разными частотами. Их совокупность образует частотный спектр системы (нормальные колебания).

Поясним сказанное примером одномерной цепочки двух частиц, изображенных на рис. 3.3. Пружины являются одинаковыми с коэффициентом упругости k. Силами трения будем пренебрегать. При малых отклонениях от равновесия силы, действующие на частицы, будут пропорциональны изменению длин пружин.

На тело 1 действует сила

$$F_1=-kx_1+k(x_2-x_1)=k(x_2-2x_1),$$

на тело 2 действует сила

$$F_2=-kx_2+k(x_1-x_2)=k(x_1-2x_2),$$

где x_1 и x_2 – смещения частиц из положения равновесия. Переменные x_1 и x_2 описывают *две степени свободы* системы, а движение системы описывается системой уравнений

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x_1}{dt^2}=k(x_2-2x_1) \\ m\dfrac{d^2x_2}{dt^2}=k(x_1-2x_2) \end{cases}. \qquad (1)$$

У этой системы есть два гармонических решения вида

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0). \qquad (2)$$

Наряду с колебаниями с собственной частотой $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, появляется колебание с дополнительной частотой. Подставляя в систему (1) функцию (2), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -m\omega^2 A_1 = kA_2 - 2kA_1 \\ -m\omega^2 A_2 = kA_1 - 2kA_2 \end{cases},$$

где A_1 и A_2 – амплитуды колебаний, которые в общем случае изменяются со временем. Преобразуя последнюю систему, получаем

$$\begin{cases} (2k - m\omega^2)A_1 - kA_2 = 0 \\ -kA_1 + (2k - m\omega^2)A_2 = 0 \end{cases}. \qquad (3)$$

Система (3) имеет нетривиальное решение, если равен нулю определитель коэффициентов системы, т.е. при условии

$$\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \left(2k - m\omega^2\right)^2 - k^2 = 0.$$

Отсюда находим, что в системе из двух связанных осцилляторов колебания могут происходить уже с двумя частотами:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ и } \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}.$$

Таким образом, с увеличением числа частиц (числа степеней свободы системы) увеличивается и число возможных частот колебаний системы. Частотный спектр становится богаче. В теории колебаний доказывается, что в системе с N-колебательными степенями свободы имеется N таких частот и колебаний. Все другие колебания в системе могут быть представлены как сумма (наложение) нормальных колебаний. Примером могут быть колебания атомов в молекулах и твердых телах. Если в молекулах (или других системах) существует n связей между элементами системы, то количество степеней свободы равно: $N = (n - 1)$. Представление сложного состояния системы как результат сложения (суперпозиции) соственных состояний широко применяется в квантовой физике.

3.2. Вопросы для самоконтроля

1. Что называется физическим маятником?
2. Что такое приведенная длина физического маятника?
3. По какой формуле можно рассчитать период колебаний физического маятника?
4. Чему равен момент инерции обруча, диска, шара, стержня относительно оси, проходящей через центр масс?
5. Как определить момент инерции тела относительно оси, не проходящей через центр масс?
6. Что называется крутильным маятником и как определить его период?
7. От чего зависит коэффициент кручения нити?
8. Приведите примеры использования крутильных колебаний?

3.3. Примеры решения задач

Пример 1.

Однородный стержень совершает малые колебания в вертикальной плоскости около горизонтальной оси, проходящей через его верхний конец. Длина стержня L = 0,5 м. Найти период колебаний.

Решение. Для определения периода колебаний воспользуемся формулой

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}.$$

Маятник представляет собой стержень, момент инерции которого равен $J_0 = \frac{1}{12}mL^2$. Относительно оси вращения момент инерции можно определить по теореме Штейнера ($d = L/2$)

$$J = J_0 + md^2 = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}mL^2.$$

Определяем период

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{mL^2}{mgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}},\ T = 1{,}15\ \text{с}.$$

Пример 2.

Физический маятник представляет собой тонкий однородный стержень. Определить длину стержня, если частота колебаний маятника максимальна, когда точка подвеса находится от центра масс на расстоянии x = = 20,2 см.

Решение. Циклическая частота колебаний физического маятника

$$\omega = \sqrt{\frac{mgx}{J}}, \tag{1}$$

где m – масса маятника; J – момент инерции.

Согласно теореме Штейнера, момент инерции стержня относительно точки подвеса, отстоящей от центра масс на расстоянии x

$$J = \frac{1}{12} mL^2 + mx^2. \tag{2}$$

Поставив (2) в (1), получим

$$\omega = \sqrt{\frac{12gx}{L^2 + 12x^2}}. \tag{3}$$

Найдем экстремум функции (3)

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{6g(L^2 - 12x^2)}{x^{1/2}(L^2 + 12x^2)^{3/2}} = 0,$$

откуда

$$L^2 - 12x^2 = 0,$$

т.е. искомая длина маятника

$$L = 2\sqrt{3}x.$$

Вычисляя, получим L = 70 см.

3.4. Практическое занятие (1 час)

Содержание занятия: Физический маятник. Крутильный маятник.

Рекомендации по решению задач

Тема занятия	Тип задач	Рекомендации по решению
Физический маятник. Крутильный маятник	Определение параметров колебаний и зависимостей кинематических величин от времени. Определение момента инерции тел методом крутильных колебаний	При нахождении периода колебаний необходимо определить момент инерции тела относительно оси качания маятника с помощью теоремы Штейнера. Для нахождения кинематических величин использовать общую теорию гармонических колебаний. Знать выражение для потенциальной энергии упругой деформации и кинетической энергии вращающегося тела

3.5. Задачи для самостоятельной подготовки

1. Определить частоту простых гармонических колебаний диска радиусом 20 см около горизонтальной оси, проходящей через середину радиуса диска перпендикулярно его плоскости.
2. Определить период простых гармонических колебаний диска радиусом 40 см около горизонтальной оси, проходящей через образующую диска.
3. Определить период гармонических колебаний стержня длиной 20 см около горизонтальной оси, проходящей через его конец.
4. Стержень длиной 20 см, подвешенный на оси, проходящей через его конец, отклонили на небольшой угол. За какое время стержень вернется к положению равновесия, если его отпустить?
5. На концах вертикального стержня укреплены два груза. Центр тяжести этих грузов находится ниже середины стержня на 5 см. Найти длину стержня, если известно, что период малых колебаний стержня с грузами вокруг горизонтальной оси, проходящей через его середину, равен 2 с. Массой стержня по сравнению с массой грузов пренебречь.
6. Обруч диаметром 56,6 см висит на гвозде, вбитым в стену, и совершает малые колебания в плоскости, параллельной стене. Найти период колебаний.
7. Какой наименьшей длины надо взять нить, к которой подвешен однородный шарик диаметром 4 см, чтобы при определении периода малых колебаний шарика рассматривать его как математический маятник? Ошибка при таком допущении не должна превышать 1 %.
8. Однородный шарик подвешен на нити, длина которой равна радиусу шарика. Во сколько раз период малых колебаний этого маятника больше периода малых колебаний математического маятника такой же длины?
9. Физический маятник установили так, что его центр тяжести оказался над точкой подвеса. Из этого положения маятник начал двигаться к положению устойчивого равновесия, которое он прошел с угловой скоростью ω. Пренебрегая трением, найти период малых колебаний этого маятника.
10. Физический маятник совершает малые колебания вокруг горизонтальной оси с частотой $\omega_1 = 15$ рад/с. Если к нему прикрепить небольшое тело массой 50 г на расстоянии 20 см ниже оси, то частота колебаний

становиться $\omega_2 = 10$ рад/с. Найти момент инерции этого маятника относительно оси вращения.

11. Два физических маятника совершают малые колебания вокруг одной и той же горизонтальной оси с частотами ω_1 и ω_2. Их моменты инерции относительно данной оси равны соответственно J_1 и J_2. Маятники привели в состояние устойчивого равновесия и скрепили друг с другом. какова будет частота малых колебаний составного маятника?
12. Система состоит из однородного горизонтального диска радиусом R массы m и тонкого стержня, коэффициент кручения которого K. Определить частоту и амплитуду малых колебаний, если в начальный момент диск отклонили на угол φ_0 и сообщили ему угловую скорость ω_0.

4. УЧЕБНЫЙ БЛОК «МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ»

Введение

Раздел механики, в котором изучается законы движения жидкости и ее взаимодействия с телами, обтекаемыми средой, называется *гидродинамикой.* При изучении движения жидкости рассматривают ее как *сплошную среду*, отвлекаясь от молекулярного строения жидкости. В ряде случаев пренебрегают внутренним трением и рассматривают модель *идеальной жидкости*.

При изучении данного раздела студенты должны

иметь представление:

– об основных физических величинах: давлении, работе, кинетической и потенциальной энергии;

– об основных законах гидростатики: законе Архимеда, законе Паскаля; знать основы гидростатического давления.

обладать навыками:

– применения элементов дифференциального и интегрального исчисления.

Учебная программа блока

Содержание программы	Форма подготовки	Рекомендуемая литература
Давление в жидкости и газе. Сила Архимеда. Закон Паскаля.	самост.	[2, § 3.5] [5, § 72 – 78]
Стационарное течение жидкости и уравнение неразрывности. Уравнение Бернулли.	лекция	
Силы внутреннего трения. Сила сопротивления.	лекция	
Движение жидкости в круглой трубе. Формула Пуазейля. Методы определения вязкости	лекция	

Цели обучения

студент должен **знать**	студент должен **уметь**
– формулы гидростатического давления, силы Архимеда; – закон Бернулли; – формулу Стокса для силы сопротивления; – выражение для силы вязкого трения	– решать задачи на применение формул гидростатического давления и силы Архимеда; – применять уравнение Бернулли для расчета скорости и давления в жидкости; – решать задачи о движении тел в вязкой среде

4.1. Краткое содержание теоретического материала

Большая подвижность частиц и малая сжимаемость жидкости являются ее отличительными особенностями. Высокая подвижность частиц жидкости обусловливает отсутствие упругости формы. В ряде механических явлений поведение жидкостей (и газов) определятся одинаковыми параметрами и уравнениями. Поэтому существует единый подход в изучении свойств жидкости и газа в условиях равновесия и движения.

В механике жидкости рассматривают как *сплошные среды*. Плотность жидкости слабо зависит от давления и можно пользоваться моделью несжимаемой жидкости.

Жидкости обладают только упругостью объема. Вследствие этого справедлив *закон Паскаля*: внешнее давление, производимое на жидкость, передается во все стороны равномерно.

Так, *гидростатическое давление*, обусловленное весом столба жидкости высотой h равно $p = \rho g h$, ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения. Благодаря различию в давлениях на разной глубине, сила давления на нижние слои больше чем на верхние, поэтому на тело, погруженное в жидкость , действует выталкивающая сила (*сила Архимеда*), направленная вверх, равная весу вытесненной телом жидкости или газа $F_A = \rho g V$.

В *гидродинамике* изучаются законы движения жидкости, ее взаимодействие с телами. Движение жидкости называют течением, а саму движущуюся жидкость потоком. Направление скорости в любой точке потока жидкости определяют так называемые *линии тока* – линии, в каждой точке которой вектор скорости направлен по касательной. Густота линий тока характеризует значение скорости. В стационарном режиме значение скорости в каждой точке потока жидкости не изменяется со временем. Выделяя часть потока жидкости, ограниченную линиями тока, получим *трубку тока*. Частицы среды при стационарном режиме движутся по линиям тока, поэтому боковую поверхность трубки жидкость не пересекает. За одно и то же время через различные сечения трубки тока проходят одинаковые объемы жидкости $V_1 = V_2$, $V_1 = \upsilon_1 S_1 \Delta t$, $V_2 = \upsilon_2 S_2 \Delta t$ (рис. 4.1). Здесь частицы среды имеют скорости υ_1 и υ_2 в сечениях S_1 и S_2, поэтому

$$\upsilon_1 S_1 = \upsilon_2 S_2 . \qquad (1)$$

Данное уравнение называют *уравнение неразрывности*. В общем случае для идеальной жидкости в стационарных условиях произведение скорости на поперечное сечение трубки тока остается постоянным в любом сечении трубки $\upsilon S = \text{const}$.

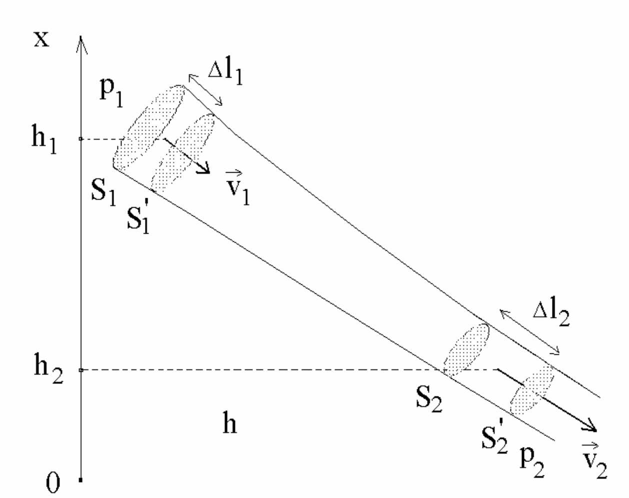


Рис. 4.1

Для изучения движения выделенной части жидкости применим закон изменения ее полной механической энергии. За время Δt выделенная часть жидкости переместится в новое положение, в котором она будет уже ограничена сечениями S_1' и S_2'. Объемы жидкости между сечениями S_1S_1' и S_2S_2' движутся поступательно и имеют кинетическую и потенциальную энергии. Так как силы давления на боковую поверхность трубки тока не выполняют работы по перемещению жидкости (они перпендикулярны к $\vec{\upsilon}$), то сумма работ внешних сил будет равна работе сил давления в сечениях S_1 и S_2 при их перемещении на расстояния $\Delta l_1 = v_1\Delta t$ и $\Delta l_2 = v_2\Delta t$. Эта работа равна изменению полной механической энергии, а масса жидкости в объеме $S\Delta l$ равна m:

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} + mgh_2 - \left(\frac{m\upsilon_1^2}{2} + mgh_1\right) = p_1S_1\Delta l_1 - p_2S_2\Delta l_2.$$

Разделим обе части на $S_2\Delta l_2 = S_1\Delta l_1$ и получим:

$$\frac{\rho\upsilon_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 = \frac{\rho\upsilon_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1, \tag{2}$$

где ρ – плотность жидкости.

Это уравнение справедливо для любого движущегося объема жидкости внутри любой линии тока и является **уравнением Бернулли**. В общем случае (2) можно записать в виде

$$\frac{\rho\upsilon^2}{2} + \rho g h + p = \text{const}, \tag{3}$$

где $\frac{\rho\upsilon^2}{2}$ – динамический напор; ρgh – гидравлический напор; p – гидростатический напор. С физической точки зрения **динамический напор** соответствует удельной кинетической энергии, т.е. энергии 1 ед. объема движущейся жидкости, а **гидравлический напор** – удельная потенциальная энергия 1 единицы объема в поле силы тяжести.

С какой скоростью будет вытекать жидкость из нижнего отверстия (рис. 4.2) под действием силы тяжести? Пусть с помощью специальных приспособлений поддерживается постоянный уровень жидкости. В какой-то момент времени в нижней части открывается отверстие, через которое начинает истекать жидкость. За нулевой уровень отсчета выберем уровень, на котором находится отверстие. Выделим линию тока, которая начинается наверху и заканчивается в отверстии. Будем считать отверстие очень маленьким и давления в верхней и нижней частях его одинаковыми. Площадь отверстий и сосуда не учитываются, p_0 – атмосферное давление. Учитывая, что каждая струйка начинается на верхней поверхности и заканчивается на отверстии, запишем уравнение Бернулли для двух сечений:

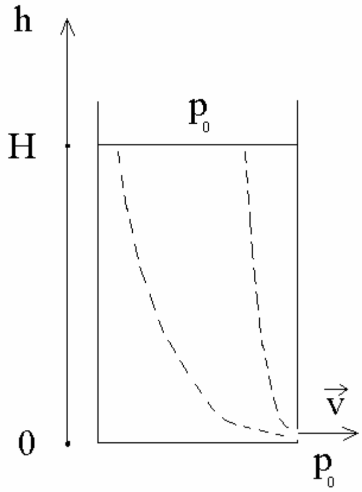


Рис. 4.2

$$\frac{\rho\upsilon_0^2}{2} + p_0 + \rho g H = \frac{\rho\upsilon^2}{2} + p_0,$$

где υ_0 – скорость движения уровня воды на высоте H; υ – скорость истечения жидкости из сосуда. По условию H = const, следовательно, $\upsilon_0 = 0$, тогда $\rho g H = \frac{\rho\upsilon^2}{2}$, откуда следует, что скорость вытекания жидкости $\upsilon = \sqrt{2gH}$.Таким образом, скорость истечения весомой жидкости равна скорости, которую приобретает тело, падая с высоты H.

Вязкостью называется свойство жидкостей или газов оказывать сопротивление перемещению частиц среды. Между слоями жидкости, движущимися друг относительно друга с некоторыми скоростями, действуют силы внутреннего трения. В случае одномерного течения жидкости (вдоль оси x) величина силы трения описывается законом Ньютона:

$$F_{mp} = -\eta S \frac{d\upsilon_x}{dy}, \tag{4}$$

где η – коэффициент динамической вязкости; S – площадь соприкосновения движущихся слоев; $d\upsilon_x/dy$ – градиент скорости, т.е. быстрота изменения скорости слоев в направлении оси y, перпендикулярной υ_x, от слоя к слою.

Для медленно движущегося небольшого шара радиусом r сила лобового сопротивления описывается **законом Стокса**:

$$\vec{F}_c = -6\pi r \eta \vec{\upsilon} .$$

Закон Стокса лежит в основе лабораторного метода определения вязкости по изучению падения шариков в вязкой среде.

Характер течения жидкости зависит от значения безразмерной величины $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho \upsilon L}{\eta}$, где ρ – плотность жидкости (газа), υ – средняя (по сечению трубы) скорость потока, η – коэффициент вязкости жидкости, L – характерный для поперечного сечения размер тела. Величина **Re** называется *числом Рейнольдса*. Начиная с некоторого определенного значения **Re**, называемого критическим, течение приобретает турбулентный характер.

Рассмотрим течение жидкости в круглой трубе (рис. 4.3). При ламинарном течении скорость жидкости изменяется от нуля около стенок трубы до максимума на оси трубы. Жидкость при этом оказывается как бы разделенной на тонкие слои, которые скользят относительно друг друга, не перемешиваясь. В этом случае скорость частиц жидкости в данной точке пространства будет все время одна и та же. Если увеличивать скорость течения, то при достижении определенного значения скорости, режим течения станет турбулентным, когда слои жидкости вследствие их завихрений перемешиваются.

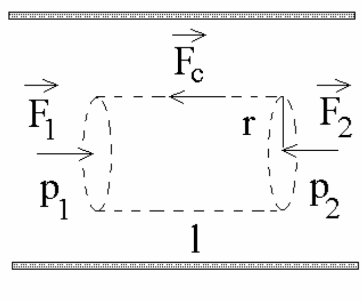


Рис. 4.3

При ламинарном течении жидкости в круглой трубе скорость равна нулю у стенки трубы и максимальна на оси трубы.

Найдем закон изменения скорости. Выделим воображаемый цилиндрический объем жидкости радиусом r и длиной l. При стационарном течении этот объем движется без ускорения. В направлении движения на жидкость действует сила давления $F_1 = p_1 \pi r^2$; во встречном направлении сила давления $F_2 = p_2 \pi r^2$. Результирующая сил давления имеет модуль $F = (p_1 - p_2)\pi r^2$, (5)

где (πr^2) – площадь основания цилиндра.

На боковую поверхность действует тормозящая сила внутреннего трения

$$F_c = \eta \left| \frac{d\upsilon}{dr} \right| 2\pi r l = -\eta \frac{d\upsilon}{dr} 2\pi r l , \tag{6}$$

где $2\pi r l$ – площадь боковой поверхности цилиндра; $d\upsilon/dr$ – значение производной на расстоянии τ от оси трубы, оно отрицательно, потому что скорость убывает с расстоянием от оси трубы.

Приравняв выражения (5) и (6), получим

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 = -\eta \frac{d\upsilon}{dr} 2\pi l\,.$$

Разделив переменные, получим уравнение

$$d\upsilon = -\frac{(p_1 - p_2)}{2\eta l} r dr\,,$$

интегрирование которого дает

$$v = -\frac{(p_1 - p_2)}{4\eta l} r^2 + C\,. \qquad (7)$$

Постоянную C нужно выбрать из условия, что на стенке трубы (т.е. при $r = R$) скорость обращалась в нуль. Это условие выполняется в случае, если

$$C = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta l} R^2\,.$$

Подстановка этого значения в (7) приводит к формуле

$$\upsilon(r) = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta l}(R^2 - r^2) = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta l}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) R^2\,. \qquad (8)$$

Скорость жидкости на оси трубы равна

$$\upsilon_0 = \upsilon(0) = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta l} R^2\,. \qquad (9)$$

С учетом формулы (8), можно записать:

$$\upsilon(r) = \upsilon_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \qquad (10)$$

Вычислим поток жидкости $Q = V/t$, равный объему жидкости, протекающей через поперечное сечение трубы в единицу времени. Разобьем сечение трубы на кольца шириной dr (рис. 4.4). Через кольцо радиусом r пройдет в единицу времени объем жидкости dQ:

$$dQ = \upsilon_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r dr\,.$$

Проинтегрировав это выражение по r в пределах от нуля до R, получим поток Q:

$$Q = \int_0^R \upsilon_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r dr = \frac{1}{2}\pi R^2 \upsilon_0 = \frac{1}{2} S \upsilon_0\,. \quad (11)$$

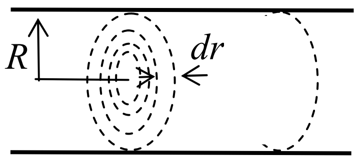


Рис. 4.4

Подставив в (11) выражение (9), получим формулу **Пуазейля**

$$Q = \frac{(p_1 - p_2)\pi R^4}{8\eta l}. \tag{12}$$

Из формулы Пуазейля следует, что поток Q сильно зависит от радиуса трубы, пропорционален отношению $\frac{(p_1 - p_2)}{l}$, т.е. перепаду давления на единице длины трубы, а также обратно пропорционален вязкости жидкости η. Объем прошедшей через сечение S жидкости за время t выражается формулой

$$V = \frac{\pi(p_1 - p_2)R^4 t}{8\eta l}. \tag{13}$$

Из этого выражения найдем коэффициент вязкости

$$\eta = \frac{\pi(p_1 - p_2)R^4 t}{8Vt}. \tag{14}$$

Если жидкость с плотностью ρ вытекает только под действием собственного веса, то разность давлений на концах вертикального капилляра высотой h равна гидростатическому давлению $\rho g h$, т.е.

$$p_1 - p_2 = \rho g h, \tag{15}$$

где ρ – плотность жидкости; g – ускорение силы тяжести; h – высота столба жидкости.

Тогда с учетом (15) уравнение (14) примет вид

$$\eta = \frac{\pi \rho g h R^4 t}{8Vl} = c\text{onst}\ t = At. \tag{16}$$

Итак, время течения определенного объема V жидкости определяется ее вязкостью и зависит от условий течения (константы A, т.е. размеров трубы, объема и плотности жидкости). Если константа A известна, то вязкость определяется самым быстрым методом – методом Пуазейля.

4.2. Вопросы для самоконтроля

1. Что называется давлением?
2. Сформулируйте закон Паскаля
3. Что такое гиростатическое давление, чему оно равно?
4. Чему равна сила Архимеда?

5. Что такое линия и трубка тока?
6. Запишите и объясните уравнение неразрывности.
7. Сформулируйте закон Бернулли
8. Что такое динамический напор?
9. В чем различие ламинарного и турбулентного движения? Что такое число Рейнольдса?
10. Запишите выражение для силы внутреннего трения, от чего она зависит
11. Как зависит скорость течения жидкости вдоль оси трубы?
12. Запишите формулу Пуазейля. Что она позволяет определить?

4.3. Примеры решения задач

Пример 1.

В жидкости плотностью ρ_1 плавает полый шар объемом V, изготовленный из материала плотностью ρ_2. Каков объем полости V_n, если известно, что объем погруженной в жидкость части шара составляет n = 0,75 всего объема шара?

Решение. При равновесии сила тяжести равна архимедовой силе

$$F_A = mg, \tag{1}$$

где m – масса шара, равная $m = \rho_2\left(V - V_n\right)$. Модуль Силы Архимеда $F_A = \rho_1 g V_1$, где – V_1 погруженный в жидкость объем. Поставив в (1) данные выражения, получаем

$$\rho_2 g\left(V - V_1\right) = \rho_1 g V_1,$$

или с учетом того, что $V_1 = nV$

$$\rho_2\left(V - V_1\right) = \rho_1 n V.$$

Отсюда объем полости $V = V\left(1 - n\rho_1/\rho_2\right)$.

Пример 2.

Определить время τ вытекания жидкости из сосуда высотой H и площадью основания S, если внизу находится отверстие площадью S_0 (рис. 4.5).

Решение. Известно, что скорость истечения жидкости из отверстия, определяется формулой $\upsilon = \sqrt{2gx}$, где x – высота уровня поверхности жидкости.

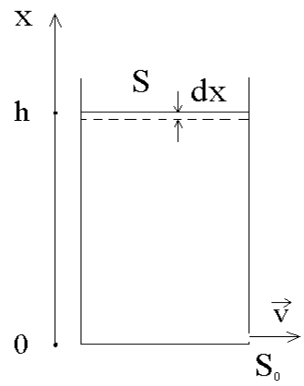


Рис. 4.5

Изменение объема вследствие вытекания связано с изменением уровня жидкости:

$$dV = -Sdx\,. \tag{1}$$

С другой стороны это изменение равно объему жидкости, проходящему через отверстие

$$dV = \upsilon S_0 dt = \sqrt{2gx}\,S_0 dt\,. \tag{2}$$

Приравнивая (1) и (2), получаем дифференциальное уравнение, в котором переменные разделяются

$$-Sdx = \sqrt{2gx}\,S_0 dt\,,\ -\frac{S}{S_0\sqrt{2g}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}} = dt$$

Интегрируя

$$-\int_h^0 \frac{S}{S_0\sqrt{2g}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^\tau dt\,,$$

определяем зависимость времени вытекания от начального уровня

$$\tau = \frac{S}{S_0}\sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

Пример 3.

Две манометрические трубки установлены на горизонтальной трубе переменного сечения в местах, где сечения трубы равны S_1 и S_2 (рис. 4.6). По трубе течет вода. Найти объем воды, протекающей в единицу времени через сечение трубы, если разность уровней воды в манометрических трубках равна h.

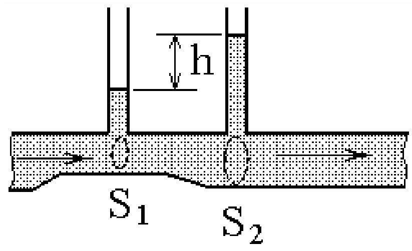


Рис. 4.6

Решение. Объем жидкости, протекающий в единицу времени равен $V = \upsilon_2 S_2$, где υ_2 – скорость течения воды в месте сечения S_2. Запишем уравнение Бернулли для двух сечений

$$\frac{\rho\upsilon_2^2}{2} + p_2 = \frac{\rho\upsilon_1^2}{2} + p_1\,, \tag{1}$$

где p_1 и p_2 – статические давления манометрических трубок. Учитывая, что $p_2 - p_1 = \rho g h$, с другой стороны из (1) следует что $p_2 - p_1 = \frac{\rho\upsilon_1^2}{2} - \frac{\rho\upsilon_2^2}{2}$, получаем

$$\rho g h = \frac{\rho\upsilon_1^2}{2} - \frac{\rho\upsilon_2^2}{2}\,. \tag{2}$$

Записываем уравнение неразрывности

$$\upsilon_1 S_1 = \upsilon_2 S_2 . \qquad (3)$$

Решаем совместно систему уравнений (2 – 3), находим скорость

$$\upsilon_2 = S_1 \sqrt{\frac{2gh}{S_2^2 - S_1^2}} .$$

Подставив υ_2 в (1), получаем искомый объем жидкости

$$V = S_2 S_1 \sqrt{\frac{2gh}{S_2^2 - S_1^2}} .$$

4.4. Практическое занятие (2 часа)

Содержание занятия: Давление в жидкости и газе. Равновесие тел в жидкостях (газах). Уравнение Бернулли. Сила сопротивления. Движение тел в жидкостях (газах).

Рекомендации по решению задач

Тема занятия	Тип задач	Рекомендации по решению
Статическое давление в жидкости и газе. Стационарное течение жидкости и уравнение неразрывности. Уравнение Бернулли. Давление в потоке жидкости. Вязкость (внутреннее трение). Сила сопротивления. Методы определения вязкости. Движение тел в жидкостях (газах)	Равновесие тел в жидкости и газе. Вытекание жидкостей из сосудов. Движение жидкостей в трубах. Движение тел в жидкостях и газах	При решении задач на равновесие тел в жидкости и газе необходимо вспомнить условия равновесия тел. При рассмотрении задач на вытекание жидкости из сосудов помнить о том, что скорость вытекания зависит от высоты уровня жидкости. Задачи данного типа, как правило, решаются с использованием дифференциального исчисления

4.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Аквариум; имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, заполнен водой. С какой силой вода давит на стенку аквариума, если ее длина 0,8 м, а высота 0,6 м?
2. Однородный шарик массой 60 г лежит на дне пустого стакана. В стакан наливают жидкость так, что объем погруженной в жидкость части шарика оказывается в 6 раз меньше его общего объема. Плотность жидкости в 3 раза больше плотности материала шарика. Найти силу давления шарика на дно стакана.
3. В подводной части судна образовалось отверстие, площадь которого 5 см^2. Отверстие находится ниже уровня воды на 3 м. Какая минимальная сила

требуется, чтобы удержать заплату, закрывающую отверстие с внутренней стороны судна?

4. Нефть храниться в баке высотой 8 м и диаметром 5 м. Определить среднюю силу, с которой нефть давит на боковую поверхность бака. Плотность нефти равна $0{,}76 \cdot 10^3$ кг/м^3.
5. До какой высоты h нужно налить однородную жидкость в цилиндрический сосуд радиусом r, чтобы средняя сила, с которой жидкость будет давить на боковую поверхность сосуда, была равна силе давления на дно сосуда?
6. В цилиндрический сосуд налиты ртуть и вода в равных по весу количествах. Общая высота двух слоев жидкостей равна 29,2 см. Определить давление жидкостей на дно сосуда. Плотность ртути $13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3.
7. Полый шар, отлитый из чугуна, плавает в воде, погрузившись ровно наполовину. Найти объем полости шара, если масса шара 5 кг. Плотность чугуна 7800 кг/м^3, воды – 1000 кг/м^3.
8. Медный шар с внутренней полостью весит в воздухе 2,59 Н, а в воде – 2,17 Н. Определить объем внутренней полости шара. Выталкивающую силу в воздухе не учитывать.
9. Определить наименьшую площадь плоской льдины толщиной 40 см, способной удержать на воде человека массой 75 кг. Плотность льда 900 кг/м^3, воды – 1000 кг/м^3.
10. Ареометр представляет собой стеклянную цилиндрическую трубку, запаянную с обоих концов, длина которой 20 см, внешний диаметр 1,2 см, толщина стенок 1 мм, плотность стекла 2,6 г/см^3. В нижнюю часть трубки помещен 1 см^3 ртути. Какова минимальная плотность жидкости, которую еще можно измерять с помощью такого ареометра?
11. Сплошной однородный шар, объем которого V, плавает на границе двух несмешивающихся жидкостей. Плотность верхней жидкости ρ_1, нижней ρ_2, плотность материала шара ρ ($\rho_1 < \rho < \rho_2$). Какая часть объема шара будет находиться в верхней, а какая часть – в нижней жидкости?
12. В сосуд налита ртуть и сверх нее масло. Шар, опущенный в сосуд, плавает так, что он ровно наполовину погружен в ртуть. Определить плотность материала шара. Плотность масла $9 \cdot 10^2$ кг/м^3, плотность ртути $13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3.
13. Тело кубической формы плавает на поверхности ртути так, что в ртуть погружено 0,25 его объема. Какая часть объема тела будет погружена в ртуть, если поверх нее налить слой воды, полностью закрывающий тело?
14. Определить плотность однородного тела, вес которого в воздухе 2,745 Н, а в воде 1,658 Н. Потерей веса в воздухе пренебречь.
15. Вес тела в воде в три раза меньше, чем в воздухе. Чему равна плотность тела?

16. Медный шар с внутренней полостью весит в воздухе 2,6 Н, в воде 2,2 Н. Определить объем внутренней полости шара. Плотность меди принять равной 8,8 г/см^3.
17. Рассчитать изменение потенциальной энергии тела, поднимаемого в воде на высоту h. Изменится ли при подъеме тела потенциальная энергия воды, находящейся в этом сосуде? Рассмотреть случаи, когда плотность тела больше и когда – меньше плотности воды. Плотность материала тела ρ, плотность воды ρ_0, объем тела V.
18. Тело объемом 500 см^3 при взвешивании в воздухе было уравновешено на весах медными гирями весом 0,44 Н. Определить истинный вес тела. Плотность меди $8{,}8\cdot10^3$ кг/м^3, воздуха 1,29 кг/м^3.
19. Если сосуд заполнен воздухом, то его вес равен 1,2629 Н, при наполнении его углекислым газом вес становится равным 1,2694 Н, при наполнении водой 11,25 Н. Определить плотность углекислого газа, объем и вес сосуда. Плотность воздуха 1,29 кг/м^3.
20. Оболочка воздушного шара имеет объем 100 м^3 и наполнена водородом. Вес оболочки вместе с водородом, 500 Н. Определить подъемную силу шара и плотность слоя воздуха, в котором шар будет находиться в равновесии. Плотность воздуха у поверхности земли 1,29 кг/м^3.
21. Два одинаковых вертикальных сообщающихся сосуда заполнены водой и закрыты легкими поршнями. На какую высоту поднимется правый поршень после установления равновесия, если на левый поставить груз массой 3 кг? Площадь каждого поршня 200 см.
22. В U-образную трубку постоянного сечения наливают ртуть. Затем в трубку наливается вода и неизвестная жидкость. Определить плотность этой жидкости, если уровень ртути в обоих коленах остался неизменным. Высота столба воды 0,2 м, а жидкости 0,18 м.
23. Два одинаковых вертикальных сообщающихся сосуда заполнены водой и закрыты легкими поршнями. На какую высоту поднимется правый поршень после установления равновесия, если на левый поставить груз массой 3 кг? Площадь каждого поршня 200 см^2.
24. В сообщающихся сосудах находится ртуть. Диаметр одного сосуда в четыре раза больше диаметра второго сосуда. В левый сосуд наливают столб воды высотой 70 см. Насколько поднимется уровень ртути в правом сосуде и насколько опустится в левом? Насколько поднимется уровень ртути в узком сосуде, если такой же высоты столб воды налить в широкий?
25. Ртуть находится в U-образной трубке, площадь сечения левого канала которой в три раза меньше; чем правого. Уровень ртути в узком канале расположен на расстоянии 30 см от верхнего конца трубки. Насколько поднимется уровень ртути в правом канале, если левый канал доверху залить водой?

26. Трубка Пито (рис. 4.7) установлена по оси газопровода, площадь внутреннего сечения которого равна S. Пренебрегая вязкостью, найти объем газа, проходящего через сечение трубы в единицу времени, если разность уровней в жидкостном манометре равна h, а плотности жидкости и газа – соответственно ρ_0 и ρ.

27. Сопло фонтана, дающего вертикальную струю высотой H, имеет форму усеченного конуса, сужающегося вверх. Диаметр нижнего сечения D, верхнего d, высота сопла h. Определить секундный расход V_1 воды, подаваемой фонтаном, и избыточное давление Δp в нижнем сечении. Сопротивлением воздуха в струе и сопротивлением в сопле пренебречь.

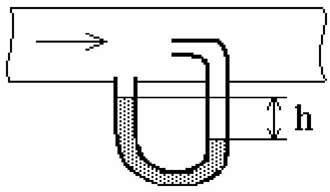


Рис. 4.7

28. В боковой стенке широкого открытого бака вмонтирована суживающаяся трубка, через которую вытекает вода. Площадь сечения трубки уменьшается от 3,6 см^2 до 1,2 см^2. Уровень воды в баке на 4,9 м выше уровня в трубке. Пренебрегая вязкостью воды, найти горизонтальную составляющую силы F, действующую на трубку.

29. Шприц, применяемый для смазывания шарнирных соединений автомобиля, заполнили для промывки керосином. Радиус поршня шприца 2 см, ход поршня 25 см. Радиус выходного отверстия шприца 2 мм. Пренебрегая вязкостью керосина и трением поршня о стенки, определить время, за которое будет вытеснен керосин из шприца, если давить на поршень с постоянной силой 5 Н.

30. Какое давление p создает компрессор в краскопульте, если струя жидкой краски вытекает из него со скоростью 25 м/с? Плотность краски равна $0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3.

31. Определить время полного опорожнения конической воронки, наполненной водой, высотой H, с углом при вершине 2α, если внизу находится отверстие площадью S.

32. Стальной шарик (плотность ρ_1 = 9 г/см^3) падает с постоянной скоростью в сосуде с глицерином (ρ_2 = 1,26 г/см^3, динамическая вязкость η = = 1,48 Па·с). Считая, что при числе Рейнольдса $Re \leq 0{,}5$ выполняется закон Стокса, определить предельный размер шарика.

33. Площадь соприкосновения слоев текущей жидкости 10 см^2, коэффициент вязкости 10^{-3} Па·с, а возникающая сила трения между слоями – 0,1 мН. Определите градиент скорости.

34. Шарик всплывает с постоянной скоростью в жидкости, плотность которой в 3 раза больше плотности материала шарика. Определите отношение силы трения, действующей на всплывающий шарик, к его весу.

УЧЕБНЫЙ МОДУЛЬ №3.
«МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ. ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ»

Введение

Настоящий модуль посвящен изучению состояния и процессов изменения состояний вещества в газообразной форме, т.е. вещества с плотностью много меньшей, чем в других агрегатных состояниях (твердое тело, жидкость). При повышенных плотностях газы проявляют некоторые свойства, подобные свойствам жидкости, поэтому механика таких газов рассматривается с привлечением понятий гидродинамики (модуль №2, блок 4). В настоящем модуле основное внимание уделяется газам с относительно низкой плотностью, когда энергия коллективных взаимодействий частиц значительно меньше энергии движения (усредненной) одной частицы газа. На основе этого принципа, положенного в основу модели **идеального газа**, разработана **молекулярно-кинетическая теория газов**, оперирующая усредненными характеристиками движения частиц, которое описывается законами классической механики. Однако в связи с большим количеством частиц, образующих систему – газ, взаимодействующих между собой (столкновения), для системы частиц – газа возникают новые характеристики (параметры), не присущие одной частице газа, например **температура.** Поэтому основной задачей молекулярно-кинетической теории является определение связи таких «коллективных» параметров с усредненными параметрами механического движения частиц газа на основе **статистических методов.**

Существует также наука (термодинамика), изучающая систему частиц – газ, как единое целое, без обращения к внутренней структуре вещества (газа) и оперирующая только параметрами системы – **макропараметрами**, к которым относятся в частности, *температура*, *давление*, *объем*, *масса вещества*, *концентрация частиц*, *плотность вещества*, *внутренняя энергия.*

Таким образом, молекулярно-кинетическая теория и термодинамика взаимно дополняют друг друга, описывая связь между макропараметрами вещества на основе микросвойств системы – газ (в частности). Поэтому в этом блоке эти параметры используются совместно.

Учебно-методическая структура модуля

Модуль № 3 «Молекулярно-кинетическая теория. Основы термодинамики»		
1. Учебный блок «Законы состояния идеального газа»	2. Учебный блок «Явления переноса»	3. Учебный блок «Термодинамика. Агрегатное состояние вещества»
– давление идеального газа; – уравнение Менделеева – Клапейрона; – газовые законы; – понятие о степенях свободы; – внутренняя энергия идеального газа; – распределение Максвелла по скоростям и энергии; – идеальный газ в потенциальном поле; – распределение Больцмана; – поток газа на стенку	– критерии вакуума; столкновения; – теплопроводность; – внутреннее трение; – диффузия	– процессы изменения состояния газа; – работа; I начало термодинамики; – теплоемкость; – политропические процессы; – циклические процессы, их КПД; – II начало термодинамики; энтропия; – реальные газы; уравнение Ван-дер-Ваальса; – критические параметры; – фазовые переходы

Методическая программа модуля

Тема занятия	Тип занятия	Вид занятия	Часы
1. Законы состояния идеального газа	формирование новых знаний	вводная лекция	1
2. Определение макро и микропараметров идеального газа	углубление и систематизация навыков	лекция	2
3. Распределение Максвелла – Больцмана	формирование новых знаний	практич. занятие	2
4. Распределение Максвелла – Больцмана	углубление и систематизация навыков	лекция	2
5. Лабораторная работа по определению параметров реальных газов	углубление и систематизация навыков	лаборат. работа	4
6. Явления переноса	формирование новых знаний	лекция	2
7. Определение основных параметров явлений переноса	углубление и систематизация навыков	практич. занятие	2
8. Процессы изменения состояния газа. Работа и энергия. I начало термодинамики	формирование новых знаний	лекция	2
9. I начало термодинамики. Работа	углубление и систематизация навыков	практич. занятие	2
10. Циклические процессы. КПД. Энтропия	формирование новых знаний	лекция	2
11. Определение КПД процессов. Энтропия	углубление и систематизация навыков	практич. занятие	2

1. УЧЕБНЫЙ БЛОК
«ЗАКОНЫ СОСТОЯНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА»

Введение

При рассмотрении газовых процессов используют модель **идеального газа.** *Идеальным* можно считать газ, если коллективным взаимодействием между частицами газа в условиях данной задачи можно пренебречь. Из реальных газов по своим свойствам наиболее близкими к идеальным газам являются *разреженные газы*, а также *инертные газы*.

Анализ основных физических процессов в газе осуществляется на основе молекулярно-кинетической теории (МКТ), в которой газ рассматривается в рамках механических представлений. В молекулярно-кинетической теории для описания свойств газов применяются микроскопические и макроскопические параметры. К *микроскопическим* параметрам относятся скорость частиц, их кинетическая энергия, концентрация частиц, а к *макроскопическим* – давление, объем, температура. Поскольку в газе содержится достаточно большое количество частиц с различными значениями микропараметров, то целесообразно рассматривать усредненные микроскопические параметры, полученные на основе статистического рассмотрения газовых процессов. Макроскопические параметры характеризуют газ в целом и связаны с микроскопическими параметрами через основные уравнения молекулярно-кинетической теории. Основные уравнения МКТ подробно рассматривались в курсе физики средней школы, поэтому этот раздел предполагает в основном самостоятельное повторение материала. Поэтому основное внимание в этом блоке уделяется статистическому подходу к описанию физических явлений в газе.

При изучении данного блока студенты должны

иметь представление:

– о законах классической динамики;

– об особенностях свободного вращения тел;

– о степени свободы материальной точки и твердого тела.

обладать навыками:

– интегрирования, использования табличных интегралов;

– расчета основных макро- и микропараметров идеального газа на основе уравнения состояния идеального газа.

Учебная программа блока

Содержание блока	Форма подготовки	Рекомендуемая литература
1. Давление идеального газа	самост.	[2], [3], [4]
2. Уравнение Менделеева – Клапейрона	самост.	[2], [3], [4]
3. Законы состояния газа	самост.	[2], [3], [4]
4. Понятие степеней свободы	самост.	[3], [4]
5. Внутренняя энергия идеального газа	лекция	[3], [4]
6. Распределение Максвелла	лекция	[2], [3], [4]
7. Идеальный газ в потенциальном поле	лекция	[2], [3], [4]
8. Поток частиц идеального газа на стенку	лекция	[2], [3], [4]
9. Средняя энергия в потоке и в объеме идеального газа	лекция	[3], [4]

Цели обучения

Студент должен **знать**	Студент должен **уметь**
– основные уравнения МКТ; – уравнение Менделеева – Клапейрона, и другие законы состояния газа; – закон о равнораспределении энергии по степеням свободы; – распределение Максвелла; – распределение Больцмана; – выражения для потоков частиц и энергий идеального газа на стенку; – способ определения средних энергий частиц газа в потоке и в объеме	– определять макроскопические параметры идеального газа на основе законов состояния газа; – определять число степеней свободы идеального газа и соответствующую им энергию; – определять средние и наиболее вероятную скорости; – рассчитывать число частиц имеющих скорости (энергии) в заданном диапазоне; – определять равновесные параметры идеального газа

1.1. Краткое содержание теоретического материала

Модель идеального газа

МКТ основывается на модели идеального газа, для которого считаются справедливыми следующие утверждения:

– микрочастицы движутся хаотически и подчиняются законам механики;

– хаотичность движения означает, что система – газ однородна во всех направлениях по своим характеристикам и свойствам. Например, если для какого-либо направления определена средняя скорость частиц газа, то она одинакова для всех направлений;

– размер микрочастиц много меньше расстояния между ними, и поэтому взаимодействие частиц происходит только при их столкновениях, которые соответствуют упругому взаимодействию механических объектов;

– абсолютно упругий характер взаимодействия распространяется и на взаимодействие микрочастиц газа с другими макротелами, например, стенками сосуда;

– давление в МКТ есть результат изменения импульса микрочастиц газа при упругом столкновении со стенками сосуда;

– температура в МКТ характеризует скорость теплового движения молекул;

– внутренняя энергия в МКТ есть суммарная энергия теплового хаотического движения (поступательное, вращательное, колебательное).

Уравнение состояния идеального газа

Состояние заданной массы газа определяется значениями 3-х параметров: давления p, объема V и температуры T. Эти параметры называются макропараметрами и связаны друг с другом. Указанная связь может быть задана аналитически в виде функции

$$F(p,V,T)=0.$$

Это соотношение, определяющее связь между параметрами какого-либо тела, называется *уравнением состояния* этого тела.

При небольших плотностях газы с хорошей точностью подчиняются уравнению

$$\frac{pV}{T}=\text{const}. \qquad (1)$$

Следовательно, это и есть уравнение состояния идеального газа. Для произвольной массы газа его можно записать

$$pV=\frac{m}{\mu}RT=\frac{N}{N_A}RT, \qquad (2)$$

где m – масса газа, μ – молярная масса, N – число частиц в газе, N_A – число Авогадро (число частиц в моле газа), R – универсальная газовая постоянная.

Если учесть, что концентрация $n={N}/{V}$, $\kappa={R}/{N_A}$,

то

$$p=nkT. \qquad (3)$$

(1), (2) и (3) являются различными формами одного и того же уравнения состояния идеального газа. Согласно (2), можно получить выражение для плотности идеального газа $\rho=\dfrac{m}{V}=\dfrac{\mu\cdot p}{RT}$.

Основное уравнение МКТ

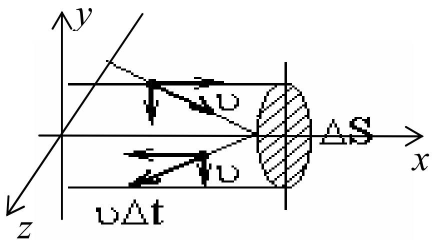


Рис. 1.1

Рассмотрим одноатомный газ. Пусть молекулы не взаимодействуют между собой, а соударения о стенку абсолютно упругие (рис. 1.1).

При каждом соударении изменение импульса частицы, перпендикулярного стенке Δp :

$$\Delta p = m\upsilon_x - (-m\upsilon_x) = 2m\upsilon_x .$$

где υ_x – средняя скорость частиц в направлении x.

За время Δt площадки ΔS могут достигнуть все частицы, которые включены в объем $\upsilon_x \Delta t \Delta S$. Число этих частиц, равное ΔN с учетом возможных направлений движения и условия хаотичности ($\upsilon_x = \upsilon$) можно определить выражением

$$\Delta N = \frac{1}{6} n\upsilon \Delta t \Delta S .$$

Эти молекулы передают стенке суммарный импульс

$$\Delta P = 2m\upsilon \Delta N = \frac{1}{6} n\Delta S \Delta t \upsilon \cdot 2m\upsilon = \frac{1}{3} n\Delta S \Delta t \upsilon^2 .$$

Давление на стенку сосуда (по определению) равно $p = \dfrac{F}{\Delta S}$. Так как по Второму закону Ньютона $F = \dfrac{\Delta P}{\Delta t}$,

$$p = \frac{\Delta P}{\Delta t \Delta S} = \frac{1}{3} nm\upsilon^2 . \tag{4}$$

Если газ в объеме V содержит N молекул, движущихся со скоростями $\upsilon_1, \upsilon_2, ... \upsilon_N$, то для характеристики всей совокупности молекул газа вводят среднюю квадратичную скорость

$$\left\langle \upsilon_{кв} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{N} \sum \upsilon_{x_i}^2} .$$

Откуда

$$p = \frac{1}{3} nm \left\langle \upsilon_{кв}^2 \right\rangle . \tag{5}$$

Введем среднюю кинетическую энергию хаотического поступательного движения одной молекулы:

$$\left\langle W \right\rangle = \frac{m \left\langle \upsilon_{кв}^2 \right\rangle}{2} ,$$

тогда $$p = \frac{2}{3} n \langle W \rangle. \qquad (6)$$

Средняя кинетическая энергия поступательного движения

Перепишем (6), умножив на объем V_0, занимаемый 1 молем газа:

$$pV_0 = \frac{2}{3} n V_0 \langle W \rangle.$$

Согласно уравнению Менделеева – Клапейрона и учитывая, что $nV_0 = N_A$

$$\langle W \rangle = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{3}{2} kT, \qquad (7)$$

где k – постоянная Больцмана.

Все молекулы при данной температуре характеризуются одной и той же средней энергией поступательного движения независимо от типа частиц. Значит, температура есть мера средней кинетической энергии.

Так как каждая частица имеет 3 степени свободы поступательного движения ($\upsilon_{кв}^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2$) и вследствие хаотичности движения $\upsilon_x^2 = \upsilon_y^2 = \upsilon_z^2$, на каждую степень свободы поступательного движения приходится энергия, равная $\frac{1}{2} kT$.

Согласно (7), получаем

$$W = \frac{3}{2} kT \qquad \text{и} \qquad W = \frac{m \langle \upsilon_{кв}^2 \rangle}{2},$$

следовательно

$$\langle \upsilon_{кв}^2 \rangle = \frac{3kT}{m}.$$

Учитывая, что $\mu = mN_A$, получаем еще одно выражение для среднеквадратичной скорости

$$\langle \upsilon_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

Давление газа не зависит от сорта молекул. Если имеем смесь нескольких газов, концентрации которых в сосуде n_1, n_2 ... и $n = \sum n_i$, то $p = (n_1 + n_2 + ...)kT$. Давление p_i называется парциальным. Тогда суммарное давление в сосуде $p = \sum p_i$ (закон Дальтона).

Распределение Максвелла

Выбираем в воображаемом пространстве, которое будем называть пространством скоростей, прямоугольные координатные оси, по которым будем откладывать $\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z$. Тогда скорость каждой частицы будет соответствовать точке в этом пространстве. Из-за столкновения положение этой точки (скорость) непрерывно будет меняться, но их плотность в каждом месте будет оставаться неизменной, поскольку рассматривается равновесное состояние газа (T, V и p постоянны).

Вследствие равноправности всех направлений движения расположение точек относительно начала координат будет сферически симметричным. Следовательно, плотность точек в пространстве скоростей будет зависеть только от модулей скоростей частиц υ. Обозначим плотность точек в этом пространстве как $Nf(\upsilon)$, где N – полное число молекул в данной массе газа, а $f(\upsilon)$ – некоторая функция распределения частиц по скоростям. Тогда количество молекул, компоненты скоростей которых лежат в пределах $(\upsilon_x \div \upsilon_x + d\upsilon_x)$, $(\upsilon_y \div \upsilon_y + d\upsilon_y)$, $(\upsilon_z \div \upsilon_z + d\upsilon_z)$ можно представить в виде

$$dN_{\upsilon_x,\upsilon_y,\upsilon_z} = Nf(\upsilon)d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z. \tag{8}$$

$dV = d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z$ – элемент объема в пространстве скоростей. Учитывая сферическую симметрию пространства скоростей, сумму всех элементарных объемов, отстоящих от центра системы координат на расстоянии υ, можно представить сферическим слоем с объемом $dV_c = 4\pi\upsilon^2 d\upsilon$, где $d\upsilon$ – толщина слоя. Тогда число частиц в слое, число частиц, обладающих скоростями в диапазоне $\upsilon \div \upsilon + d\upsilon$, будет равно

$$dN_\upsilon = Nf(\upsilon)4\pi\upsilon^2 d\upsilon. \tag{9}$$

Вероятность того, что скорость молекул окажется в заданных пределах определяется выражением

$$dP_\upsilon = f(\upsilon)4\pi\upsilon^2 d\upsilon. \tag{10}$$

Функцию $F(\upsilon) = f(\upsilon)4\pi\upsilon^2$ (11)

называют **функцией распределения молекул газа по скоростям.**

Для каждой из компонент скорости можно также определить соответствующую вероятность

$$dP_{\upsilon_x} = \varphi(\upsilon_x)d\upsilon_x,$$

где $\varphi(\upsilon_x)$ – функция распределения по x-ой компоненте скорости.

Аналогично можно определить dP_{υ_y} и dP_{υ_e}. Причем в силу равноправия всех направлений вид функций $\varphi(\upsilon_x)$, $\varphi(\upsilon_y)$ и $\varphi(\upsilon_t)$ должен быть одинаков.

Поэтому $dP_\upsilon = f(\upsilon)d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_t = \varphi(\upsilon_x)\varphi(\upsilon_y)\varphi(\upsilon_t)d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_t$,

т.е.
$$f(\upsilon) = \varphi(\upsilon_x)\varphi(\upsilon_y)\varphi(\upsilon_t)\,. \tag{12}$$

Логарифмируя последнее равенство, получаем

$$\ln f(\upsilon) = \ln\varphi(\upsilon_x) + \ln\varphi(\upsilon_y) + \ln\varphi(\upsilon_t)\,,$$

а затем, дифференцируя по υ_x, получаем

$$\frac{f'(\upsilon)}{f(\upsilon)}\frac{d\upsilon}{d\upsilon_x} = \frac{\varphi'(\upsilon_x)}{\varphi(\upsilon_x)}\,. \tag{13}$$

Поскольку $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_t^2}$, то

$$\frac{d\upsilon}{d\upsilon_x} = \frac{\upsilon_x}{\sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_t^2}} = \frac{\upsilon_x}{\upsilon}\,.$$

Подставляя последнее равенство в предыдущее равенство (13), получаем

$$\frac{f'(\upsilon)}{f(\upsilon)\cdot\upsilon} = \frac{\varphi'(\upsilon_x)}{\varphi(\upsilon_x)\cdot\upsilon_x}\,.$$

Интегрирование последнего соотношения дает

$$\ln\ \varphi(\upsilon_\text{x}) = -\frac{d\upsilon_x^2}{2} + \ln A, \qquad \varphi(\upsilon_x) = Ae^{\frac{-\alpha\upsilon_x^2}{2}}\,.$$

Аналогично для каждой из компонент скоростей можно записать:

$$\varphi(\upsilon_y) = Ae^{\frac{-\alpha\upsilon_y^2}{2}}, \qquad \varphi(\upsilon_t) = Ae^{\frac{-\alpha\upsilon_t^2}{2}}\,.$$

Тогда (12) можно переписать в виде

$$f(\upsilon) = A^3 e^{-\frac{\alpha(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_t^2)}{2}} = A^3 e^{-\frac{\alpha\upsilon^2}{2}}\,.$$

Постоянная A определяется из условия нормировки

$$A\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha\upsilon_x^2}{2}}\,d\upsilon_x = 1\,.$$

Используя табличный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta\upsilon_x^2} d\upsilon_x = \sqrt{\dfrac{\pi}{\beta}}$, получаем $A = \sqrt{\dfrac{\alpha}{2\pi}}$, откуда окончательно для x-ой компоненты

$$\varphi(\upsilon_x) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\alpha\upsilon_x^2}{2}} \qquad \text{и} \qquad f(\upsilon) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{\alpha\upsilon_x^2}{2}}. \qquad (14)$$

Графическое отображение функции распределения частиц газа по скоростям показано на рис. 1.2.

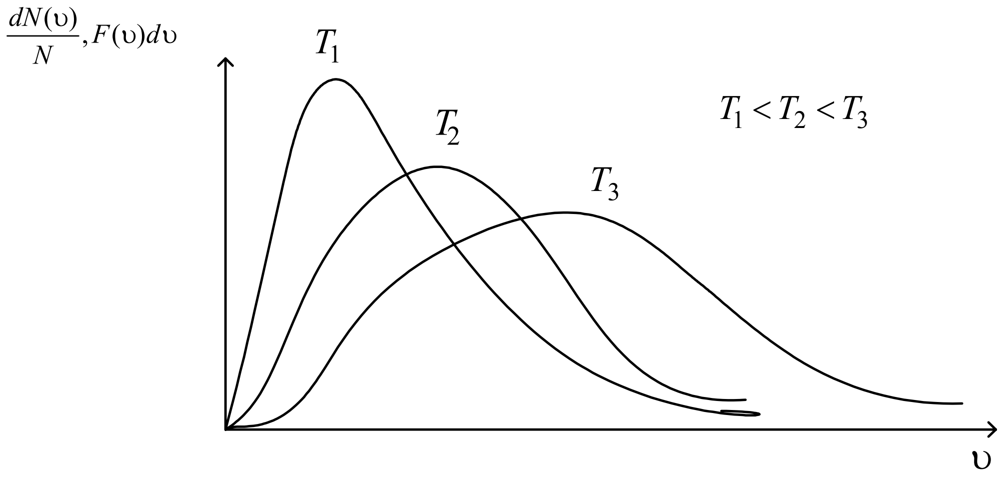


Рис. 1.2

Следствия

1. Определим с помощью (14) среднеквадратичную скорость:

$$\left\langle \upsilon_x^2 \right\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \upsilon_i^2 = \frac{1}{N}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \upsilon_x^2 N\varphi(\upsilon_x) d\upsilon_x = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha\upsilon_x^2}{2}} \upsilon_x^2 d\upsilon_x.$$

Табличный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\beta\upsilon_x^2}{2}} \upsilon_x^2 d\upsilon_x = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{\beta^3}}$, поэтому получаем

$$\left\langle \upsilon_x^2 \right\rangle = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{8\pi}{\alpha^3}} = \frac{1}{\alpha}.$$

Поскольку $\left\langle \upsilon_x^2 \right\rangle = \dfrac{3kT}{m}$, получаем $\alpha = \dfrac{m}{kT}$ и $A = \sqrt{\dfrac{\alpha}{2\pi}} = \left(\dfrac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2}$.

В результате

$$\varphi(\upsilon_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \cdot e^{-\frac{m\upsilon_x^2}{2kT}};$$

$$f(\upsilon)=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\cdot e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}};\qquad(15)$$

$$F(\upsilon)=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\cdot 4\pi\upsilon^2\cdot e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}.$$

2. Найдем средние и наиболее вероятную скорости с помощью распределения Максвелла

1.<υ> (средняя арифметическая скорость), $\langle\upsilon\rangle=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\upsilon_i$ или

$$\langle\upsilon\rangle=\int_0^\infty \upsilon F(\upsilon)d\upsilon=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\cdot 4\pi\int_0^\infty e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}\upsilon^3 d\upsilon=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}};\qquad(16)$$

2. $\upsilon_{ср.кв}$ (средне квадратичная скорость), $\langle\upsilon_{кв}\rangle=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\upsilon_i^2$ или

$$\upsilon_{ср.кв.}=\sqrt{<\upsilon^2>}=\int_0^\infty \upsilon^2 F(\upsilon)d\upsilon=\sqrt{\frac{3kT}{m}};\qquad(17)$$

3. $\upsilon_{вер}$ (наиболее вероятная скорость), находится из условия экстремума (максимума) функции распределения $F'(\upsilon)=0$, поэтому

$$\upsilon_{вер}=\sqrt{\frac{2kT}{m}}.\qquad(18)$$

Распределение молекул по скоростям имеет вид

$$dN_\upsilon=N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\cdot e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}\cdot 4\pi\upsilon^2 d\upsilon.$$

Если ввести новую переменную $\varepsilon=\frac{m\upsilon^2}{2}$, откуда $\upsilon=\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}$ и $d\upsilon=\frac{1}{\sqrt{2m\varepsilon}}d\varepsilon$, получаем

$$dN_\xi=N\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{(kT)^{3/2}}\cdot e^{-\frac{\phi}{kT}}\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon.\qquad(19)$$

Распределение молекул по энергиям где dN_ε – число частиц, которые имеют значение энергии в диапазоне ε, ε + dε.

Газ в потенциальном поле

В реальных условиях частицы газа находятся в потенциальном поле сил тяготения. Если бы силы тяготения отсутствовали, то в результате теплового движения газ атмосферы рассеялся бы в межзвездном пространстве.

Пусть на уровне z = 0, относительно которого отсчитывается потенциальная энергия $\Pi(z)_{(z=0)}=0$, а концентрация $\mathrm{n}_{(z=0)}=n_0$. Будем полагать, что с изменением z изменяется не только потенциальная энергия $\Pi(h)$, но и концентрация $n(h)$. Если состояние газа равновесное, то поток частиц сверху вниз через эту поверхность должен быть равен потоку частиц снизу вверх. Для частиц со скоростями от υ_z до $\upsilon_z + d\upsilon_z$ в потоке сверху вниз имеем

$$d\nu_{\upsilon_{z(h)}} = n_{z(h)}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{m\upsilon^2_{z(h)}}{2kT}} \upsilon_{z(h)} d\upsilon_{z(h)} . \quad (20)$$

Для потока частиц с теми же скоростями в диапазоне υ_t, $\upsilon_t + d\upsilon_t$ идущими от z = 0 к $z = h$ (снизу вверх) должно выполняться условие

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{m\upsilon_h^2}{2} + \Pi(h) . \quad (21)$$

Продифференцируем (21) по скоростям

$$\upsilon_0 d\upsilon_0 = \upsilon_h d\upsilon_h .$$

С учетом этого для потока частиц со скоростями на высоте h от υ_h до $\upsilon_h + d\upsilon_h$ и идущими от z = 0 можем записать

$$d\nu_{\upsilon_0} = n_0\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{m\upsilon_0^2}{2kT}} \upsilon_0 d\upsilon_0 .$$

Для стационарного состояния имеем $d\nu_n = d\nu_0$

и

$$n_h\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{m\upsilon_h^2}{2kT}} \upsilon_h d\upsilon_h = n_0\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{m\upsilon_0^2}{2kT}} \upsilon_0 d\upsilon_0 ,$$

или после преобразования

$$n_h e^{-\frac{m\upsilon_h^2}{2kT}} = n_0 e^{-\frac{m\upsilon_0^2}{2kT}} . \quad (22)$$

С учетом (21) и (22) можно записать

$$n_h = n_0 \exp\left(-\frac{\Pi(h)}{kT}\right), \tag{23}$$

Выражение (23) является *распределением Больцмана*, характеризующим распределение концентрации частиц в потенциальном поле. Это выражение определяет распределение частиц в потенциальном поле при максвелловском распределении этих частиц по скоростям.

Из распределения Больцмана следует, что частицы с большей плотностью располагается там, где ниже их потенциальная энергия, а также там, где выше температура.

В поле силы тяжести $\Pi(h) = mgh$, а $p = nkT$ поэтому можем записать барометрическую формулу для распределения давления воздуха по высоте

$$p_h = p_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}, \tag{24}$$

где p_0 – давление газа поверхности Земли.

Практическое подтверждение вытекающей из закона Больцмана барометрической формулы показывает, что максвелловское распределение частиц газа по скоростям является универсальным, т.е. пригодным для систем с наложенным и без наложенного силового поля, поскольку потенциальное поле сил не изменяет вид функции распределения Максвелла по любой из проекций скоростей частиц газа.

Распределение энергии по степеням свободы

При хаотическом движении частиц газа все направления скоростей равновероятны, поэтому нельзя отдать предпочтение какому-либо одному направлению. Следовательно, энергии поступательного движения частиц газа в направлении x, y и z с наибольшей вероятностью равны. Если за *число степеней свободы* системы принять количество независимых величин, с помощью которых может быть задано состояние системы (положение), то для поступательного движения одной частицы газа их может быть три: x, y, z (α, φ, θ) (рис. 1.3). Однако мы знаем, что $< W > = < \frac{m\upsilon^2}{2} > = \frac{3}{2}kT$. Таким образом на одну степень свободы приходится средняя энергия поступательного движения $\frac{1}{2}kT$.

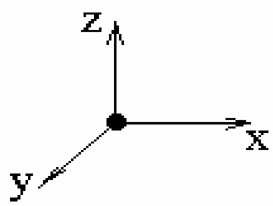


Рис. 1.3

Если система состоит из N не связанных жестко частиц, то количество степеней свободы будет равно $3N$, а полная энергия поступательного движения – $\frac{3}{2}NkT$.

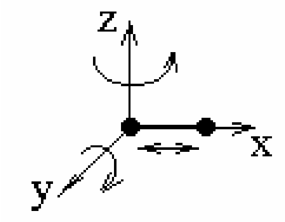


Рис. 1.4

Частицей газа может быть молекула, состоящая из нескольких атомов. При этом в дополнение к поступательному движению для характеристики состояния каждой молекулы необходимо использовать и другие виды механического движения: вращательное и колебательное (рис. 1.4).

Эти виды движения также определяют энергию частицы. Энергия каждого из видов при взаимном столкновении частиц может переходить в энергию других видов. Таким образом, устанавливается равновесие между средними значениями всех видов механической энергии частиц газа по степеням свободы. Это обстоятельство отражается в законе статистической физики *о равнораспределении энергии по степеням свободы*: на каждую степень свободы молекулы приходится в среднем одинаковая средняя энергия, равная $\frac{1}{2}kT$.

Если молекула двухатомная с жесткой связью, то колебание атомов относительно друг друга невозможно, и в дополнение к поступательным степеням свободы появляются вращательные. Так как вращение происходит вокруг центра масс, и атомы движутся по сферическим орбитам, то их вращательное движение в силу симметрии определяется двумя параметрами, каждое из которых равноправно. Поэтому двухатомная молекула с жесткой связью имеет 5 степеней свободы (3 поступательные и 2 вращательные) и среднюю энергию $\frac{5}{2}kT$.

Если связь атомов не жесткая, то атомы могут колебаться вдоль прямой, соединяющей центры атомов. Число степеней свободы возрастает. При этом возрастает и полная энергия, которой может обладать частица. Следует учесть, что колеблющийся атом обладает кинетической и потенциальной энергией. Если считать, что колебания в различных молекулах происходят несогласованно, то можно считать, что в любой момент времени одна половина общей энергии колебаний кинетическая, а другая потенциальная. Отсюда следует, что, поставив в соответствие кинетической энергии колебательного движения среднюю энергию $\frac{1}{2}kT$, мы должны поставить в соответствие и среднему значению потенциальной энергии колебательного движения $\frac{1}{2}kT$. Таким образом, на одну степень свободы колебательного движения приходится удвоенная по сравнению с другими видами движения средняя энергия – kT. В модуле 2 (блок 3) показано, что для колебаний связанных систем количество колебательных движений (типов колебаний) равно (n – 1), где n – число связей в молекуле. Поэтому для трехатомной молекулы с двумя связями (H_2O) имеем 3 поступательных и 2 вращательных степени свободы (2 – 1),·*2* колебательных степени свободы, а в итоге (i = 7).

В общем случае средняя энергия многоатомной молекулы равна

$$<\varepsilon>=\frac{i}{2}kT,$$

где i – сумма числа поступательных, вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы $i = i_{пост} + i_{вращ} + 2(n-1)_{кол}$, где n – число связей атомов в молекуле.

Внутренняя энергия, связанная с температурой одного моля газа, может быть найдена согласно выражению

$$U = N_A \frac{i}{2}kT = \frac{i}{2}\nu RT.$$

Проанализируем, что происходит в веществе при понижении температуры до 0 К. При нулевой температуре прекращается поступательное, вращательное и колебательное движение в молекулах. Однако не следует думать, что при абсолютном нуле температуры прекращается всякое движение частиц вещества и полная внутренняя энергия становится равной нулю, так как даже при абсолютном нуле температуры сохраняется движение электронов в атомах изотопов и нейтронов в ядрах атомов. Таким образом, абсолютный нуль температуры означает такое состояние тела, при котором невозможно уменьшение его внутренней энергии путем передачи ее окружающим телам без атомных и ядерных превращений. Следовательно, при абсолютном нуле температуры вещество находится в состоянии с наименьшей возможной энергией.

Поток частиц идеального газа на стенку

Рассмотрим задачу о потоке частиц газа на стенку сосуда (число частиц, падающих на единицу площади стенки в единицу времени) и о средней энергии частиц в этом потоке (рис. 1.5).

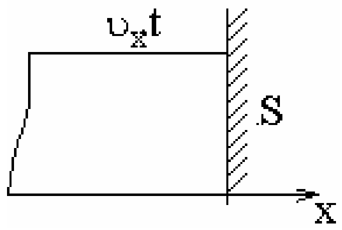


Рис. 1.5

Поток частиц, обладающих скоростью υ_x на единичную площадку S, можно записать в виде

$$d\nu_{\upsilon_x} = dn_{\upsilon_x}\upsilon_x,$$

где n_{υ_x} – концентрация частиц со скоростями υ_x.

Все частицы, обладающие скоростью υ_x и заключенные в объеме $S\upsilon_x dt$, достигают площадки S. С учетом распределения Максвелла получаем

$$d\nu_{\upsilon_x} = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \cdot e^{-\frac{m\upsilon_x^2}{2kT}} \cdot \upsilon_x d\upsilon_x. \qquad (25)$$

Тогда полный поток всех частиц на стенку можно найти интегрированием в пределах от 0 до ∞

$$\nu_S = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \int_0^\infty e^{-\frac{m\upsilon_x^2}{2kT}} \cdot \upsilon_x d\upsilon_x = \frac{1}{2} n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \int_0^\infty e^{-\frac{m\upsilon_x^2}{2kT}} d\upsilon_x^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{2kT}{m}\right) n\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \int_0^\infty e^{-y} dy = -n\left(\frac{kT}{2\pi m}\right)^{1/2} e^{-\frac{m\upsilon_x^2}{2kT}}\Bigg|_0^\infty = n\left(\frac{kT}{2\pi m_e}\right)^{1/2},$$

т.к.

$$\bar{\upsilon}_{cp} = \left(\frac{8kT}{\pi m_e}\right)^{1/2}, \text{ то } \nu_S = \frac{n}{4}\left(\frac{8kT}{\pi m}\right)^{1/2} = \frac{n\bar{\upsilon}}{4}, \;\; \nu_S = \frac{1}{4} n\sqrt{\frac{8kT}{\pi m_e}}. \qquad (26)$$

Как видно, используется среднеарифметическая скорость, поскольку поток на стенку обусловлен движением частиц относительно стенки, т.е. скоростью относительного движения.

Определим среднюю энергию частиц в потоке. Для этого просуммируем кинетическую энергию всех частиц, падающих на стенку за единицу времени (энергия потока), и разделить на число частиц (поток). Это соответствует интегрированию

$$\overline{\xi}_{\upsilon_x} = \frac{1}{v_{\upsilon_x}} \int_0^\infty \frac{m\upsilon_x^2}{2} dv_{\upsilon_x},$$

где dv_{υ_x} – число частиц в потоке v_{υ_x}, обладающих скоростью υ_x и энергией $\frac{m\upsilon_x^2}{2}$. Используем выражение (25) $\overline{\xi}_{v_{\upsilon_x}} = \frac{m^2}{2kT}\int \upsilon_x^3 \cdot e^{-\frac{m\upsilon_x^2}{2kT}} d\upsilon_x$.

Интеграл вида $\int x^2 e^{-ax^2} dx = -\frac{ax^2+1}{2a^2} e^{-ax^2}$, где $a = \frac{m}{2kT}$, $x = \upsilon_x$. Тогда

$$\overline{\xi}_{v_x} = \frac{m^2}{2kT}\left(-\frac{a\upsilon_x^2+1}{2a^2} e^{-a\upsilon_x^2}\right)_0^\infty = \frac{m^2}{2kT}\left(-\frac{\upsilon_x^2}{2a} - \frac{1}{2a^2}\right) e^{-a\upsilon_x^2}\Big|_0^\infty =$$

$$= -\frac{m\upsilon_x^2}{2} e^{-\frac{m\upsilon_x^2}{2kT}}\Bigg|_0^\infty - kTe^{-a\upsilon_x^2}\Big|_0^\infty = 0 + kT = kT,$$

$$\overline{\xi}_{v_x} = kT. \tag{27}$$

Итак, средняя энергия частиц, падающих на стенку в потоке, обусловленная компонентой скорости υ_x, равна kT. Для определения полной энергии частиц в потоке необходимо $\overline{\xi}_{v_x}$ сложить с энергией $\overline{\xi}_{v_y}$ и $\overline{\xi}_{v_z}$. Средняя энергия, как мы увидели выше, приходящаяся на компоненты скорости υ_y и υ_z, соответствует $kT/2$. Следовательно, полная средняя энергия частиц в потоке, обусловленная поступательным движением

$$\overline{\xi}_v = \overline{\xi}_{v_x} + \overline{\xi}_{v_y} + \overline{\xi}_{v_z} = kT + kT/2 + kT/2 = 2kT, \tag{28}$$

Средняя энергия частиц в потоке, переносимая на стенку, оказывается больше, чем средняя энергия частиц в объеме, равная 3/2 kT. Поскольку число частиц, падающих на стенку пропорционально скорости, то быстрые частицы смогут попасть на стенку из большего объема, т.е. их доля в потоке оказывается больше, чем в объеме. Это обогащение потока быстрыми частицами и приводит к увеличению средней энергии частиц в потоке (на стенке).

1.2. Методические указания к лекционным занятиям

Вопросы лекции	Форма изучения	Литература	Вопросы для самоконтроля студентов
1. Законы состояния идеального газа			
1.1. Основные понятия 1.2. Давление газа и уравнение Менделеева – Клапейрона 1.3. Газовые законы и явления 1.4. Внутренняя энергия идеального газа 1.5. Степень свободы идеального газа	самост. самост. лекция лекция лекция	[4, § 91, 97] [3, § 8.1] [4, § 93, 99] [3, § 8.3] [4, § 98] [2, § 1.3] [4, § 94], [3, § 9.2] [3, § 8.4 – 8.6]	1. Что выражает макроскопический параметр температура? 2. Сформулируйте основное уравнение МКТ 3. Сформулируйте теорему о равнораспределении энергии по степеням свободы 4. Какая энергия приходится на одну колебательную степень свободы идеального двухатомного газа? 5. Какие газовые явления определяют охлаждение газированной жидкости при испарении углекислого газа из нее
2. Распределение Максвелла – Больцмана			
2.1. Распределение Максвелла 2.2. Газ в потенциальном поле 2.3. Поток частиц газа на стенку 2.4. Средняя энергия частиц газа в потоке на стенку	лекция лекция лекция лекция	[4, § 106, 107], [3, § 8.6] [4, § 109], [3, § 8.7] – –	1. Что выражает распределение Максвелла? 2. Что выражает распределение Максвелла – Больцмана? 3. Как определить поток газа на стенку? 4. От чего зависят средние скорости молекул, что они выражают? Приведите примеры. 5. От чего зависит распределение частиц в силовом поле? 6. Почему полная энергия частиц в потоке на стенки отличается от энергии частиц в объеме? 7. Как определить среднюю энергию частиц в потоке и в объеме? 8. Что выражает наиболее вероятная скорость частиц, как ее определить и когда можно использовать?

1.3. Методические указания к практическим занятиям

Тема занятия	Задачи	Рекомендации	Задачи из сборников
Определение макро и микропараметров идеального газа	1. Газовые законы и основное уравнение МКТ. 2. Внутренняя энергия и степени свободы	При решении задач на расчет параметров состояния газа рекомендуется следующая последовательность: 1) выяснить, изменяется ли состояние газа. Если в задаче задано одно состояние газа, то пользуются уравнением Менделеева – Клапейрона, которое связывает между собой пять физических величин, характеризующих состояние газа, – p, V, T, m, μ – и позволяет по заданным четырем найти пятую величину. Отношение $\nu = m/\mu$ представляет собой число молей газа, $\rho = m/V$ есть плотность газа, $V' = V/m$ – удельный объем газа; 2) выяснить, изменяется ли масса газа. Если масса газа изменяется или дана в условии, то для каждого состояния записать уравнение Менделеева – Клапейрона. Если масса газа не изменяется, то записать уравнение Клапейрона или один из законов идеального газа; 3) представить в развернутом виде параметры начального и конечного состояния газа; 4) записать дополнительные уравнения, связывающие искомые величины или параметры состояния, используя условие задачи; 5) решить полученную систему уравнений. Надо учитывать, что в уравнение Менделеева – Клапейрона входит число молей газа, и поэтому поведение газа определяется не массой, а числом молей. Это особенно важно, если приходится рассматривать смесь газов. Если в условии задачи даются показания технических манометров, то они отображают не полное давление газа в баллоне, а лишь давление, избыточное над атмосферным давлением $p_{атм}$. Поэтому полное давление газа в баллоне равно показанию манометра, увеличенному на $p_{атм}$.	[1, № 5.8 – 5.45] [1, № 5.47 – 5.63]
Распределение Максвелла – Больцмана	1. Определение параметров газа по распределению Больцмана 2. Определение доли частиц в заданном диапазоне скоростей и энергий 3. Определение равновесных концентрации и температуры в потоке и объеме идеального газа	В кинетической теории употребляются различные типы средних скоростей молекул: средняя квадратичная $\upsilon_{кв}$, средняя арифметическая $\langle\upsilon\rangle$ и наиболее вероятная $\upsilon_в$. Средней квадратичной скоростью $\langle\upsilon_{кв}\rangle$ пользуются в тех случаях, когда необходимо рассчитать какую-либо физическую величину, пропорциональную квадрату скорости, например, кинетическую энергию поступательного движения молекул газа, давление газа. Средняя арифметическая скорость $\langle\upsilon\rangle$ позволяет определять средние значения таких физических величин, характеризующих свойства газа, в формулу которых скорость входит в первой степени, например, среднее число столкновений молекулы в единицу времени, среднее время свободного пробега, средний импульс молекул. Наиболее вероятной скоростью $\upsilon_в$, пользуются в задачах, связанных с применением закона распределения молекул по скоростям. При определении доли частиц, имеющих скорости или энергии в заданном диапазоне можно избежать интегрирования, если ширина этого диапазона очень мала. Тогда интегрирование заменяется суммированием, а дифференциалы – конечными разностями. При определении средних величин с использование уравнения Максвелла все интегралы сводятся к табличным, что значительно упрощает математические расчеты	[1, № 5.106 – 5.108, 5,110, 5.111] [1, № 5.92 – 5.104] [1, № 5.108, 5.109]

1.4. Примеры решения задач

Законы состояния идеального газа

Пример 1.

Сколько ходов должен сделать поршневой насос с объемом рабочего цилиндра V_0, чтобы откачать воздух из баллона емкостью V от давления p_0 до давления p? Изменением температуры пренебречь.

Решение. Если в начале первого рабочего хода воздух в баллоне занимал объем V при давлении p_0, то к концу первого хода та же масса воздуха займет объем ($V + V_0$) при давлении p_1. Так как температура воздуха не меняется, то по закону Бойля – Мариотта получим

$$p_0 V = p_1 (V + V_0).$$

Следовательно

$$p_1 = p_0 \frac{V}{V + V_0}.$$

В начале второго хода поршня объем и давление воздуха в баллоне равны соответственно V и p_1, а в конце хода – ($V + V_0$) и p_2. Поэтому

$$p_1 V = p_2 (V + V_0),$$

откуда с учетом выражения для давления p_1

$$p_2 = p_1 \frac{V}{V + V_0} = p_0 \left(\frac{V}{V + V_0} \right)^2.$$

Продолжая аналогичные рассуждения, легко получить, что к концу n-го рабочего хода давление в баллоне станет равным

$$p_n = p_0 \left(\frac{V}{V + V_0} \right)^n.$$

Следовательно, для достижения давления $p_n = p$ насос должен сделать $n = \dfrac{\lg(p / p_0)}{\lg(V / (V + V_0))} = \dfrac{\lg(p_0 / p)}{\lg((V + V_0) / V)}$ ходов.

Ответ: $n = \dfrac{\lg(p_0 / p)}{\lg((V + V_0) / V)}$.

Пример 2.

В вертикальном цилиндрическом сосуде под поршнем находится m = = 1 г азота. Площадь поршня S = 10 см^2, масса M = 1 кг. Азот нагревают на ΔT = 10 К. Насколько при этом поднимется поршень? Давление над поршнем нормальное. Молярная масса азота $\mu = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Трения нет.

Решение. В положении равновесия на поршень действуют три силы: сила тяжести поршня $M\vec{g}$ и силы давления над поршнем $F_0 = p_0 S$ и $F = pS$ под поршнем, (где p_0 и p – внешнее давление и давление под поршнем соответственно), направленные так, как показано на рис. 1.6. При этом указанные силы уравновешивают друг друга:

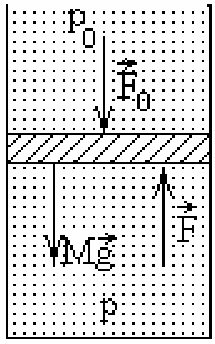


Рис. 1.6

$$Mg + F_0 = F, \qquad \text{или} \qquad Mg + p_0 S = pS.$$

Следовательно, давление под поршнем

$$p = \frac{Mg}{S} + p_0 \tag{1}$$

зависит только от массы, сечения поршня (сосуда) и давления над ним, т.е. не зависит от параметров газа под поршнем. Это означает, что процесс нагревания газа, заключенного под незакрепленным поршнем, будет протекать изобарически. В этом случае справедлив закон Гей – Люссака:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}, \quad \text{или} \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1},$$

где $V_1 = Sh_1$, $V_2 = Sh_2$ – объемы, занимаемые азотом до и после нагревания. Следовательно, при нагревании газа его объем увеличится и поршень поднимется на высоту

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{V_2 - V_1}{S} = \frac{V_1}{S}\left(\frac{V_2}{V_1} - 1\right) = \frac{V_1}{S}\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) = \frac{V_1}{ST_1}(T_2 - T_1) = \frac{V_1}{ST_1}\Delta T. \tag{2}$$

Записав уравнение состояния азота при температуре T_1

$$pV_1 = \frac{m}{\mu} RT_1,$$

с учетом (1)

$$\left(\frac{Mg}{S} + p_0\right)V_1 = \frac{m}{\mu} RT_1, \qquad \text{или} \qquad \frac{V_1}{T_1} = \frac{mR}{\mu\left(\frac{Mg}{S} + p_0\right)},$$

из (2) получим

$$\Delta h = \frac{mR\Delta T}{\mu \cdot \left(\frac{Mg}{S} + p_0 \right) \cdot S} = \frac{mR\Delta T}{\mu \cdot (Mg + p_0 S)} \approx 2{,}7 \text{ см}.$$

Ответ: $\Delta h = \dfrac{mR\Delta T}{\mu \cdot (Mg + p_0 S)} \approx 2{,}7$ см.

Пример 3.

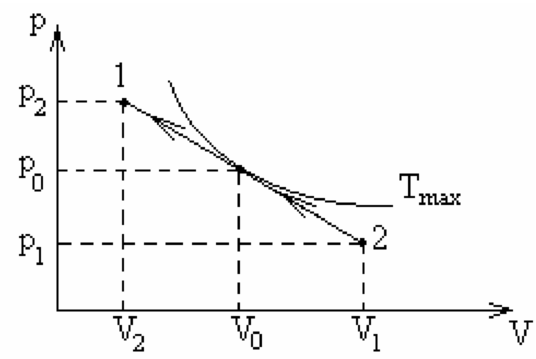


Рис. 1.7

Гелий массой m = 20 г бесконечно медленно переводят из состояния 1, которому соответствует объем V_1 = 32 л и давление $p_1 = 4{,}1 \cdot 10^5$ Па, в состояние 2, где V_2 = 9 л и $p_2 = 15{,}5 \cdot 10^5$ Па. Какой наибольшей температуры достигает газ в этом процессе, если на диаграмме $p - V$ зависимость давления от объема изобразится прямой линией? Молярная масса гелия $\mu = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Решение. Каждой точке на графике зависимости давления газа от занимаемого им объема (рис. 1.7) соответствует определенное значение температуры. Графически состояние, в котором температура гелия максимальна, можно определить, построив семейство изотерм. При этом изотерма, соответствующая наибольшей температуре (очевидно, что прямая зависимости давления от объема должна быть касательная к ней), определит значения давления p_0 и объема V_0, при которых температура максимальна.

Аналитически значения p_0 и V_0 легко найти. Исследовав на экстремум зависимость температуры от давления или объема.

Поскольку давление зависит от объема линейно, т.е.

$$p = aV + b, \tag{1}$$

то с учетом (1) уравнение Менделеева – Клапейрона

$$pV = \frac{m}{\mu} RT$$

можно записать в виде

$$T = \frac{\mu}{mR}(aV + b)V. \tag{2}$$

Следовательно

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\mu}{mR}(2aV + b); \qquad 2aV_0 + b = 0; \qquad V_0 = -\frac{b}{2a}. \qquad (3)$$

Подставив значение V_0 в (1), получим

$$p_0 = \frac{1}{2}b.$$

Так как зависимость $T(V)$ имеет один экстремум, то найденные значения объема V_0 и давления p_0 соответствуют состоянию газа с максимальной температурой

$$T_{\max} = \frac{\mu}{mR}(aV_0 + b)V_0 = -\frac{\mu}{mR}\cdot\frac{b^2}{4a}.$$

Записав уравнение процесса (1) в начальном и конечном состояниях

$$p_1 = aV_1 + b, \qquad p_2 = aV_2 + b,$$

найдем значения коэффициентов a и b:

$$a = \frac{p_1 - p_2}{V_1 - V_2} = -5\cdot 10^7\,\text{Па/м}^3; \qquad b = \frac{p_2V_1 - p_1V_2}{V_1 - V_2} = 2\cdot 10^6\,\text{Па}.$$

Следовательно

$$T_{\max} = \frac{\mu(p_2V_1 - p_1V_2)^2}{4mR(V_1 - V_2)(p_2 - p_1)} \approx 481\ \text{K}.$$

Решение можно упростить, если заметить, что зависимость (2) температуры от объема имеет вид параболы, координата вершины которой совпадает с (3).

Ответ: $T_{\max} = \dfrac{\mu(p_2V_1 - p_1V_2)^2}{4mR(V_1 - V_2)(p_2 - p_1)} \approx 481\ \text{K}.$

Пример 4.

В цилиндр с газом вдвигают поршень со скоростью υ_1. Найти, какую часть кинетической энергии приобретает молекула в результате столкновения с поршнем, если скорость молекулы относительно стен цилиндра равна υ_2 и перпендикулярна основанию поршня. Удар абсолютно упругий.

Решение. Обозначим ΔE_K изменение кинетической энергии молекулы вследствие удара, E_{K1} – энергию молекулы перед ударом. Найти надо соотношение $\Delta E_K / E_{K1}$.

При сближении молекулы с поршнем ее скорость относительно поршня равна $\upsilon_1 + \upsilon_2$. После абсолютно упругого удара молекула станет двигаться в обратную сторону от поршня с такой же относительно него скоростью. Относительно стенок цилиндра скорость молекулы после удара станет на υ_1 больше, чем относительно поршня, ведь поршень сообщает ей дополнительный импульс, двигаясь сам со скоростью υ_1 относительно стенок. Поэтому скорость молекулы относительно стенок станет равна $2\upsilon_1 + \upsilon_2$, а ее кинетическая энергия

$$E_{K2} = \frac{m_M (2\upsilon_1 + \upsilon_2)^2}{2},$$

тогда как до удара она была $E_{K2} = \dfrac{m_M \upsilon_2^{\,2}}{2}$. Здесь m_M – масса молекулы газа.

Изменение кинетической энергии молекулы

$$\Delta E_K = E_{K2} - E_{K1} = \frac{m_M (2\upsilon_1 + \upsilon_2)^2}{2} - \frac{m_M \upsilon_2^2}{2} =$$

$$= \frac{m_M}{2}(\upsilon_2^2 + 4\upsilon_1\upsilon_2 + 4\upsilon_2^2 - \upsilon_2^2) = 2m_M\upsilon_1(\upsilon_2 + \upsilon_1).$$

Относительное изменение кинетической энергии

$$\frac{\Delta E_K}{E_{K1}} = \frac{2m_M\upsilon_1(\upsilon_2 + \upsilon_1)}{\dfrac{m_M\upsilon_2^2}{2}} = 4\frac{\upsilon_1(\upsilon_2 + \upsilon_1)}{\upsilon_2^2}$$

или

$$\frac{\Delta E_K}{E_{K1}} = 4\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}\left(1 + \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}\right).$$

Если скорость поршня υ_1 во много раз меньше скорости молекулы υ_2, то слагаемым υ_1/υ_2 в скобках можно пренебречь из-за его малости по сравнению с единицей. Тогда ответ будет

$$\frac{\Delta E_K}{E_{K1}} = 4\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}.$$

Ответ: $\dfrac{\Delta E_K}{E_{K1}} = 4\dfrac{\upsilon_1}{\upsilon_2}\left(1 + \dfrac{\upsilon_1}{\upsilon_2}\right)$.

Пример 5.

В баллоне находится газ при температуре $t_1^\circ = 17^\circ C$. Во сколько раз уменьшится давление этого газа, если 20 % его выйдет из баллона, а температура при этом понизится на $\Delta t^\circ = 10^\circ C$?

Решение. Введем обозначения: Δm – масса газа, покинувшего баллон, m_1 – первоначальная масса газа, $\Delta m/m_1$ = 20 % = 0,2 – относительное изменение массы газа в баллоне, p_1 – давление в баллоне до выхода из него газа, p_2 – давление после выхода газа. Требуется найти соотношение p_1/p_2.

Очевидно, что объем газа в баллоне не менялся, несмотря на то, что газ его частично покинул, ведь объем газа в баллоне равен объему баллона, а изменялись давление, температура и масса газа. Запишем уравнение состояния газа применительно к началу и концу процесса выхода газа из баллона:

$$p_1 V = \frac{m_1}{M} R T_1 \qquad \text{и} \qquad p_2 V = \frac{m_2}{M} R T_2 .$$

Нам надо найти отношение p_1/p_2, поэтому разделим первое уравнение на второе:

$$\frac{p_1 V}{p_2 V} = \frac{m_1 R T_1 M}{M m_2 R T_2}, \qquad \frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1 T_1}{m_2 T_2}. \tag{1}$$

Нам известно относительное изменение массы газа:

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{m_1 - m_2}{m_1} = 1 - \frac{m_2}{m_1},$$

откуда

$$\frac{m_2}{m_1} = 1 - \frac{\Delta m}{m_1} \qquad \text{и} \qquad \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{1 - \frac{\Delta m}{m_1}}. \tag{2}$$

Поскольку температура газа понизилась на $\Delta t^\circ = \Delta T$,

то
$$T_2 = T_1 - \Delta T. \tag{3}$$

Подставив (2) и (3) в (1), получим

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{\left(1 - \frac{\Delta m}{m_1}\right) \cdot (T_1 - \Delta T)}.$$

Переведем единицу температуры в СИ:

$$17^{\circ}C = (17+273)K = 290\ \text{К}.$$

Напоминаем, что к $\Delta t^{\circ} = 10^{\circ}C$ не надо прибавлять 273, потому что разность температур по шкалам Цельсия и Кельвина одинакова: $\Delta t^{\circ} = \Delta T$ К.

Произведем вычисления: $\dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{290}{(1-0,2)(290-10)} = 1,3$.

Ответ: $\dfrac{p_1}{p_2} = 1,3$.

Пример 6.

Цилиндр разделен на две части подвижной теплоизолирующей перегородкой. При одинаковой температуре по обе стороны перегородки находится одинаковое число молей газа, и при этом перегородка остается в равновесии. Затем справа от перегородки температуру газа повышают в три раза, а слева оставляют без изменения. Во сколько раз изменится давление газа в сосуде?

Введем обозначения: T_1 – температура газа в сосуде до нагревания газа и температура газа слева от перегородки после нагревания, T_2 – температура газа справа от перегородки после нагревания, p_1 – первоначальное давление газа в сосуде, p_2 – давление газа в сосуде после нагревания. Найти требуется отношение p_2/p_1.

Решение. Для решения задачи воспользуемся уравнением состояния идеального газа. Применим это уравнение к состоянию газа справа от перегородки до и после нагревания, а также к состояниям газа слева от перегородки.

Теперь давайте подумаем вот о чем: до нагревания перегородка была в равновесии, значит, давление p_1 слева и справа от нее было одинаковым и одинаковой была температура T_1. Одинаковым было (и осталось) число молей ν в обеих частях. Следовательно, согласно уравнению Менделеева – Клапейрона $pV = \nu RT$ и объем газа V слева и справа от перегородки до нагревания был одинаковым, т.е. перегородка делила вначале сосуд пополам (рис. 1.8, *а*).

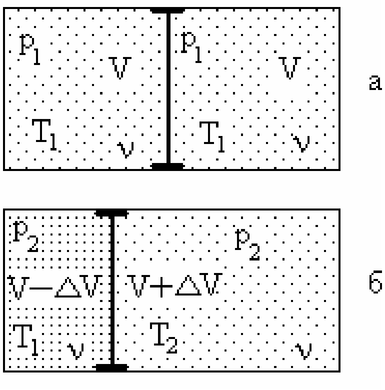


Рис. 1.9

Тогда уравнение состояния применительно

к начальному состоянию газа в любой из половинок запишем так:

$$p_1 V = \nu R T_1 . \qquad (1)$$

Здесь R – молярная газовая постоянная.

После нагревания газа справа от перегородки до температуры T_2 давление там повысилось до p_2, и перегородка передвинулась влево, сжав слева газ так, что там давление тоже стало равным p_2. При этом объем газа справа от перегородки увеличился на ΔV и стал равным $V + \Delta V$, а слева на столько же уменьшился и стал равным $V - \Delta V$ (см. рис. 1.8, *б*). Количество молей в обеих частях сосуда от этого, конечно же, не изменилось. Тогда уравнение Менделеева – Клапейрона применительно к газу слева от передвинувшейся перегородки примет вид

$$p_2(V - \Delta V) = \nu R T_1 , \qquad (2)$$

а справа
$$p_2(V + \Delta V) = \nu R T_2 ,$$

где $T_2 = 3T_1$ согласно условию задачи, поэтому

$$p_2(V + \Delta V) = \nu R \cdot 3T_1 . \qquad (3)$$

Посмотрим внимательно на уравнения (1), (2) и (3).

Нам надо найти отношение p_2 / p_1, и нам практически не известна ни одна величина, входящая в эти уравнения. Но выход есть. Давайте сначала «уйдем» от изменения объема ΔV, выразив эту величину через объем V. Для этого можно в правую часть уравнения (3) подставить вместо $\nu R T_1$ левую часть уравнения (2). Тогда давление p_2 сократится и мы определим ΔV через V

$$p_2(V + \Delta V) = 3p_2(V - \Delta V) ; \quad V + \Delta V = 3V - 3\Delta V ;$$

$$4\Delta V = 2V \quad \text{и} \quad \Delta V = 0{,}5V . \qquad (4)$$

Если теперь подставить (4) в (2), а затем приравнять левые части полученного уравнения и уравнения (1), ведь правые части $\nu R T_1$ у них одинаковы, то неизвестный объем V сократится и мы легко найдем отношение давлений p_2 / p_1:

$$p_2(V - 0{,}5V) = \nu R T_1 ; \quad 0{,}5 p_2 V = \nu R T_1 ; \quad p_1 V = 0{,}5 p_2 V ,$$

откуда $p_2 = 2p_1$.

Ответ: $p_2 = 2p_1$, давление увеличится в 2 раза.

Распределение Максвелла – Больцмана

Пример 1.

Сравнить полное число молекул в атмосферном столбе с основанием в 1 см^2 с числом молекул в столбе высотой 1000 м и тем же основанием.

Решение. Пусть число молекул в единице объема при $h = 0$ равно N_0, тогда распределение числа этих частиц по высоте будет определяться выражением

$$N(h) = N_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} = N_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}.$$

Полное число молекул в столбе с основанием в 1 см^2 и заданной высотой

$$N(H) = \int_0^H N(z)dz = N_0 \int_0^H e^{-\frac{\mu gh}{RT}} dz = N_0 \frac{RT}{\mu \cdot g}(1 - e^{-\frac{\mu gH}{RT}}),$$

где μ – молярная масса воздуха.

Подставив численные значения высоты, получим:

$$N_1(H \to \infty) = 2{,}1 \cdot 10^{25} \text{ и } N_2(H = 10^3) = 0{,}25 \cdot 10^{25}.$$

Сравнить можно отношением или разностью N.

Ответ: $\frac{N_1}{N_2} = 8{,}4$ или $(N_1 - N_2) = 1{,}85 \cdot 10^{25}$.

Пример 2.

На какой высоте находится центр масс вертикального столба воздуха в атмосфере Земли, если температура воздуха T не зависит от h. Считать, что для воздуха имеет место распределение Больцмана.

Решение. Пусть площадь сечения столба S. Выделим на некоторой высоте h слой воздуха толщины dh, его масса $dm = \rho(h) \cdot S \cdot dh$, где $\rho(h)$ – плотность воздуха на высоте h. Поскольку $\rho(h) = m \cdot n(h)$, где m – масса молекулы, а $n(h)$ – концентрация молекул на высоте h, которая определяется из распределения Больцмана: $n(h) = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$.

Из курса механики известно, что центр масс системы частиц тела с непрерывным распределением массы определяется известным соотношением $\vec{r}_c M_c = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i m_i$ или $\vec{r}_c = \sum_{M_c} \vec{r}_i m_i$, которое в нашем случае имеет вид:

$$H_C = \frac{\int\limits_0^{\infty} h dm}{\int\limits_0^{\infty} dm}.$$

Вычислим интегралы:

$$\int\limits_0^{\infty} dm = mn_0 S \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{mgh}{kT}} dh = -\frac{mn_0 SkT}{mg} \left(e^{-\frac{mgh}{kT}} \right)_0^{\infty} = \frac{n_0 SkT}{g};$$

$$\int\limits_0^{\infty} hdm = \int\limits_0^{\infty} hmn(h)Sdh = mn_0 S \int\limits_0^{\infty} he^{-\frac{mgh}{kT}} dh = \frac{n_0 S (kT)^2}{mg^2}.$$

Откуда находим: $H_C = \dfrac{kT}{mg}$.

Таким образом, центр масс вертикального столба воздуха находится на высоте, на которой концентрация молекул $n(h)$, а, следовательно, потенциальная энергия молекул и давление газа уменьшаются в e раз.

Пример 3.

Вычислить среднюю потенциальную энергию молекулы газа в поле силы тяжести.

Решение. Среднее значение потенциальной энергии молекулы газа на высоте z определяется выражением: $\langle U \rangle = mg \int\limits_0^{\infty} z dW(z)$, где $dW(z)$ – вероятность того, что потенциальная энергия молекулы заключена в интервале от U до $U + dU$ в поле тяжести Земли:

$$dW(z) = \frac{e^{-\frac{mgz}{kT}}}{\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{mgz}{kT}} dz}.$$

Тогда

$$\langle U \rangle = mg \frac{\int\limits_0^{\infty} ze^{-\frac{mgz}{kT}} dz}{\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{mgz}{kT}} dz} = mg \frac{\left(\dfrac{kT}{mg} \right)^2}{\left(\dfrac{kT}{mg} \right)} = kT,$$

т.е. потенциальная энергия молекул в поле силы тяжести зависит только от температуры.

Ответ: $\langle U \rangle = kT$.

Пример 4.

Найти силу, действующую на частицу со стороны однородного поля, если концентрации этих частиц на двух уровнях, отстоящих друг от друга на расстоянии Δh = 3 см (вдоль поля), отличаются в η = 2 раза. Температура системы T = 280 К.

Решение. Сила, действующая на частицу со стороны однородного поля, определяется выражением

$$F = \frac{U(h_2) - U(h_1)}{\Delta h} = \frac{U_2 - U_1}{\Delta h},$$

где $\Delta h = h_2 - h_1$. Согласно распределению Больцмана концентрации частиц n_1 и n_2 на двух уровнях h_1 и h_2 определяются соответственно

$$n_1 = n_0 e^{-\frac{U_1}{kT}} \qquad \text{и} \qquad n_2 = n_0 e^{-\frac{U_2}{kT}}.$$

Поскольку частицы располагаются с большей плотностью там, где меньше их потенциальная энергия, то $n_1/n_2 = \eta$. Следовательно

$$-\frac{U_1}{kT} + \frac{U_2}{kT} = \ln \eta$$

или

$$U_2 - U_1 = kT \ln \eta .$$

Искомая сила $F = \dfrac{kT}{\Delta h} \ln \eta = 0{,}9 \cdot 10^{19}$ Н.

Ответ: $F = 0{,}9 \cdot 10^{19}$ Н.

Пример 5.

Найти наиболее вероятную скорость молекул идеального газа.

Решение. Предполагая, что идеальный газ находится в термодинамическом равновесии, используем функцию распределения молекул по скоростям

$$f(\upsilon) = 4\pi \left(\frac{a}{\pi} \right)^{3/2} e^{-a\upsilon^2} \upsilon^2 , \qquad (1)$$

где $a = \dfrac{m}{2kT}$. Производная функции распределения (1) по скорости

$$f'(\upsilon) = 4\pi\left(\frac{a}{\pi}\right)^{3/2}(-2a\upsilon^3 + 2\upsilon)e^{-a\upsilon^2}.$$

Обозначая наиболее вероятную скорость через υ_B, находим ее из уравнения $f'(\upsilon_B) = 0$, т.е. $2\upsilon_B(-a\upsilon_B^2 + 1) = 0$.

Отсюда следует

$$\upsilon_B = \sqrt{\frac{1}{a}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}.$$

Ответ: $\upsilon_B = \sqrt{\dfrac{2kT}{m}}$.

Пример 6.

Определить долю молекул водорода, модули скоростей которых при температуре 27°С лежат в интервале от υ_2 = 1898 м/с до υ_1 = 1903 м/с.

Решение. Интервал скоростей $\Delta\upsilon = \upsilon_2 - \upsilon_1$ = 5 м/с достаточно мал по сравнению с самими скоростями. Поэтому для определения искомой доли молекул вместо интегрирования можно записать распределение Максвелла по модулям скоростей в виде

$$\frac{\Delta N}{N} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}\upsilon^2\Delta\upsilon. \qquad (1)$$

Наиболее вероятная скорость молекул водорода при заданной температуре (T = 300 К) равна $\upsilon_B = \sqrt{\dfrac{2kT}{m}}$ (см. пример 5). Учитывая это, преобразуем формулу (1) к виду

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{\upsilon^2}{\upsilon_B^3}e^{-\frac{\upsilon^2}{\upsilon_B^2}}\Delta\upsilon. \qquad (2)$$

Введем обозначение $u = \upsilon/\upsilon_B$. Тогда выражение (2) примет вид

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}u^2e^{-u^2}\Delta u. \qquad (3)$$

Для водорода при T = 300 К $\upsilon_B = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = 1{,}57 \cdot 10^3$ м/с.

Следовательно, u = 1,2 и $\Delta u = \frac{\Delta\upsilon}{\upsilon_B} = 3{,}16 \cdot 10^{-3}$. Подставив эти значения в выражение (3), получаем $\frac{\Delta N}{N} = 2{,}45 \cdot 10^{-3} = 0{,}245\ \%$.

Ответ: $\frac{\Delta N}{N} = 0{,}245\ \%$.

Пример 7.

Какая часть молекул водорода, находящегося при температуре T, обладает скоростями, отличающимися от наиболее вероятной скорости не более чем на 5 м/с? Задачу решить для двух значений T: 1) 400 К; 2) 900 К.

Решение. Поскольку в задаче идет речь о наиболее вероятной скорости, надо считать $\upsilon = \upsilon_B$. Следовательно $u = \upsilon/\upsilon_B = 1$, и выражение (3), полученное при решении предыдущей задачи, примет простой вид

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi e}} \Delta u .$$

Прежде чем производить расчеты, необходимо убедиться в том, что выполняется условие $\Delta u = \frac{\Delta\upsilon}{\upsilon_B} << u$. Найдем сначала наиболее вероятную скорость при T_1 = 400 К и T_2 = 900 К соответственно.

$$\upsilon_{B1} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8{,}31 \cdot 400}{0{,}002}} \text{м/с} = 1{,}82 \cdot 10^3 \text{м/с}; \quad \upsilon_{B2} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8{,}31 \cdot 900}{0{,}002}} \text{м/с} = 2{,}73 \cdot 10^3 \text{м/с}.$$

Так как по условию $\Delta\upsilon$ = 10 м/с, то получим Δu_1 = 1/182, Δu_2 = 1/273.

Поскольку u = 1, то условие $\Delta\ u << u$ выполняется для обеих температур.

Теперь вычислим искомые величины:

$$\frac{\Delta N_1}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi e}} \Delta u_1 = \frac{4}{\sqrt{3{,}14 \cdot 2{,}7} \cdot 182} = 0{,}0046; \quad \frac{\Delta N_2}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi e}} \Delta u_2 = \frac{4}{\sqrt{3{,}14 \cdot 2{,}7} \cdot 273} = 0{,}003.$$

Таким образом, при увеличении температуры наиболее вероятная скорость молекул увеличивается, а число молекул, скорости которых лежат в одном и том же интервале около наиболее вероятной, уменьшается. На графике функции распределения скоростей (см. рис. 1.2), с увеличением температуры максимум кривой сдвигается вправо, а величина максимума уменьшается.

Ответ: $\frac{\Delta N_1}{N} = 0,0046$, $\frac{\Delta N_2}{N} = 0,003$.

Пример 8.

Какая часть молекул газа имеет скорости, превышающие наиболее вероятную скорость?

Решение. В условии задачи рассматриваются молекулы, скорости которых заключены в интервале от наиболее вероятной скорости υ_B до $\upsilon_B + \infty$, т.е. в бесконечно большом интервале скоростей $\Delta\upsilon$. Воспользуемся функцией распределения Максвелла в «приведенном» виде (см. пример 6)

$$\frac{dN}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 e^{-u^2} du \text{, где } u = \upsilon/\upsilon_B. \quad (1)$$

Найдем число молекул, относительные скорости которых лежат в заданном интервале от u_1 до u_2, интегрируя правую часть (1) в этих пределах:

$$dN = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N \int_{u_1}^{u_2} u^2 e^{-u^2} du. \quad (2)$$

Учитывая, что относительная скорость $u = \upsilon/\upsilon_B$, то в нашей задаче $u_1 = 1$; $u_2 = \infty$. Следовательно, искомая часть молекул выразится интегралом

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_1^{\infty} u^2 e^{-u^2} du.$$

Воспользуемся очевидным фактом, что скорости всех молекул лежат в интервале от 0 до ∞. Поэтому, если обозначить через $\Delta N'$ число молекул, скорости которых меньше наиболее вероятной, т.е. лежат в интервале от 0 до 1, то можно записать $\frac{\Delta N}{N} + \frac{\Delta N'}{N} = 1$. Таким образом, вместо того чтобы искать $\frac{\Delta N}{N}$, можно найти $\frac{\Delta N'}{N}$ по формуле

$$\frac{\Delta N'}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 u^2 e^{-u^2} du, \quad (3)$$

а затем вычислить $\frac{\Delta N}{N} = 1 - \frac{\Delta N'}{N}$.

Так как интеграл (3) все же в конечном виде не берется, воспользуемся методом приближенного интегрирования. Для этого разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена:

$$u^2 e^{-u^2} = u^2 - \frac{u^4}{1} + \frac{u^6}{2} - \frac{u^8}{6} + \frac{u^{10}}{24} - \cdots .$$

Следовательно $\dfrac{\Delta N'}{N} \approx \dfrac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{14} - \dfrac{1}{54} + \dfrac{1}{264} - \cdots\right)$.

Ограничиваясь первыми четырьмя членами разложения, найдем с погрешностью, не превышающей 0,01: $\dfrac{\Delta N'}{N} = 0,43$.

Отсюда получим ответ: $\dfrac{\Delta N}{N} = 1 - 0,43 = 0,57$.

Ответ: $\dfrac{\Delta N}{N} = 0,57$.

Пример 9.

Найти наиболее вероятную энергию молекул идеального газа.

Решение. Определим точку максимума функции распределения молекул идеального газа по энергиям:

$$f(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2} e^{-E/(kT)} E^{1/2} .$$

Производная этой функции по E

$$f'(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2} e^{-E/(kT)} \left(-\frac{E^{1/2}}{kT} + \frac{1}{2E^{1/2}}\right).$$

Искомую энергию найдем из уравнения $f'(E) = 0$, т.е.

$$-\frac{E^{1/2}}{kT} + \frac{1}{2E^{1/2}} = 0 .$$

Откуда следует $E_B = \dfrac{1}{2}kT$. Отметим, что $E_B \neq E(\upsilon_B)$.

Ответ: $E_B = \dfrac{1}{2}kT$.

2. УЧЕБНЫЙ БЛОК «ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА»

Введение

Несмотря на хаотичное движение частиц газа при постоянстве его температуры, давления и объема, состояние газа можно считать среднестатистически равновесным, т.е. средние значения концентрации, скорости, распределения по скоростям можно считать неизменными. Отсюда следует вывод, что тепловое движение частиц газа способствует сглаживанию возникающих в газе неоднородностей. Это сглаживание (выравнивание) неоднородностей происходит в результате процессов, которые получили название процессов (явлений) переноса. К ним относится теплопроводность, внутреннее трение и диффузия. Рассмотрим эти процессы на основе МКТ.

При изучении данного блока студенты должны

иметь представление:

– о распределении Максвелла для частиц идеального газа;

– об основных положениях МКТ;

– о степенях свободы движения микрочастиц.

– об экспериментальных проявлениях явлений диффузии, теплопроводности и вязкости

обладать навыками:

– интегрирования и работой с табличными интегралами;

– расчета основных параметров идеального газа.

Учебная программа блока

Содержание блока	Форма подготовки	Рекомендуемая литература
1. Критерий вакуума. Столкновения частиц газа	лекция	[4]
2. Теплопроводность газа	лекция	[2], [4]
3. Внутреннее трение в газе	лекция	[2], [4]
4. Диффузия в газе	лекция	[3], [4]

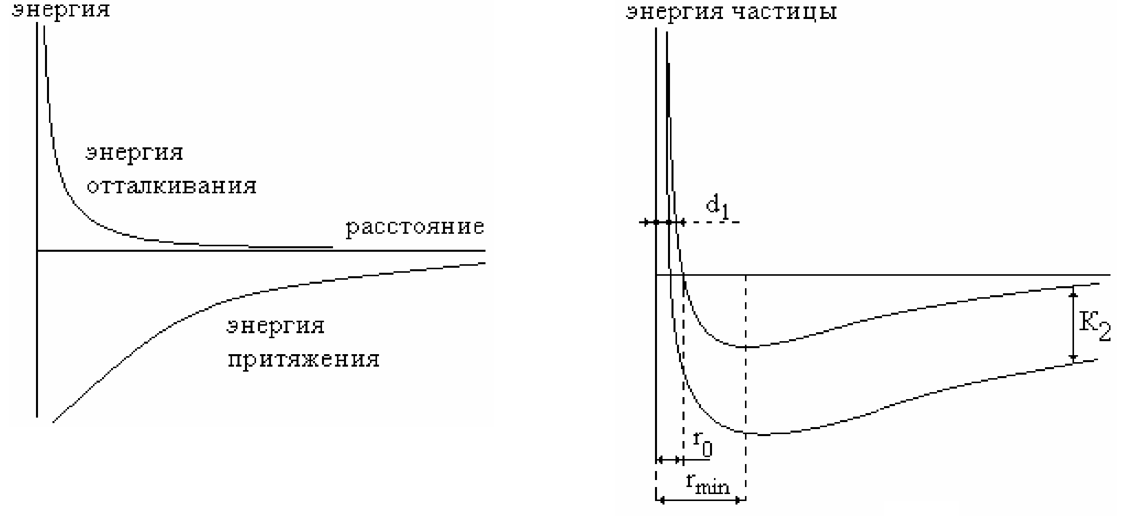
Цели обучения

Студент должен **знать**	Студент должен **уметь**
– критерий вакуума; – коэффициенты переноса – коэффициент диффузии, коэффициент теплопроводности и коэффициент вязкости; – эмпирические законы Фика, Ньютона и Фурье для явления переноса	– определять число столкновений частиц в газе; – определять длину среднего пробега частиц в газе; – определять коэффициенты переноса в различных ситуациях; – определять потоки частиц и энергии, а также силы, обусловленные явлениями переноса

2.1. Краткое содержание теоретического материала

Число столкновений. Длина свободного пробега частиц в газе

Находясь в тепловом движении, частицы газа периодически сталкиваются друг с другом. Под столкновением частиц подразумевается процесс взаимодействия между ними, в результате которого частицы изменяют скорость своего движения. Основываясь на допущениях относительно свойств идеального газа, будем считать, что система двух сталкивающихся частиц замкнута, т.е. на них не оказывают никакого действия другие частицы в процессе столкновения. Это снимает определенные трудности при анализе процесса столкновений частиц газа. Другая трудность связана с определением размеров частиц газа, знание которых также необходимо для анализа рассматриваемого процесса, Определим эти размеры из следующих соображений. Известно, что частицы газа состоят из атомов, которые в свою очередь состоят из ядер (+) и электронных оболочек (–), причем размеры ядер много меньше области, характерной для электронных оболочек. Наличие в частицах газа положительных и отрицательных зарядов обеспечивает возможность силового взаимодействия частиц, т.е. система их двух сталкивающихся частиц характеризуется как кинетической энергией (тепловое движение) так и потенциальной (силовое взаимодействие). Здесь мы не будем рассматривать силовое взаимодействие двух частиц, а воспользуемся известными результатами: частицы газа испытывают притяжение друг к другу на расстояниях больше некоторого значения и отталкивание на меньших расстояниях. Учитывая это, а также то, что силы отталкивания по величине значительно превосходят силы притяжения, энергетическую диаграмму сталкивающихся частиц можно представить как на рис. 2.1, *а*.



а *б*

Рис. 2.1

Суммирование энергий притяжения и отталкивания приводит к образованию минимума *функции потенциальной энергии* системы частиц. Положение минимума определится расстоянием между центрами частиц r_{min}, если одна из частиц располагается в центре системы координат.

Таким образом, до расстояния $x = r_0$ частицы испытывают притяжение, а при $x < r_0$ – отталкивание. Если использовать понятие относительной скорости частиц, то помещенную в центр координат частицу можно считать неподвижной, а кинетическую энергию системы двух частиц приписать другой частице, обозначив ее K_2 при $x = \infty$. Ясно, что при сближении частиц полная энергия частицы 2 будет нарастать до расстояния r_{min}, а на меньших расстояниях ее полная энергия уменьшается, становясь равной 0 при расстоянии d_1 между центрами частиц. Эти рассуждения верны для замкнутой системы, о чем мы условились ранее. Равенство полной энергии нулю означает, что частица 2 останавливается и начинает под действием отталкивания двигаться в обратном направлении. Ясно, что чем больше K_2, тем меньше будет d. Полагая сталкивающиеся частицы одинаковыми, можно считать, что d равно двум радиусам частиц или эффективному диаметру частицы. С увеличением кинетической энергии (температуры газа) эффективный диаметр частицы газа уменьшается, значит, уменьшается и эффективное сечение частицы для процесса взаимодействия σ, определяемое соотношением $\sigma = \pi \cdot d^2$.

Зависимость σ от температуры определяется **законом Сезерленда**

$$\sigma = \sigma_0 \sqrt{1 + C/T},$$

где σ_0 – сечение при 273 К, а C – константа, равная 50 – 300 для различных газов.

Итак, при столкновении частиц газа изменение направления движения (относительного) их, происходит, можно считать, в момент сближения их до расстояния d и, следовательно, эта величина может быть взята для характеристики размеров сталкивающихся молекул.

Перейдем далее к определению числа столкновений частиц газа за 1 секунду. Для этого предположим, вначале, что все частицы в газе кроме одной неподвижны, а движущаяся частица имеет скорость, равную средней тепловой $\overline{\upsilon}$. Очевидно, что за единицу времени (секунду) движущаяся частица столкнется со всеми частицами, центры которых лежат внутри цилиндра радиусом R. Движущаяся частица столкнется со всеми частицами, центры которых лежат в цилиндре с площадью $S = \pi \cdot d^2$ и длиной $\upsilon_{cp}(\overline{\upsilon})$.

$$z = nV_{цил} = \pi \cdot d^2 n\bar{\upsilon}.$$

Учтем движение всех частиц. Вдоль x движение не скажется на числе столкновений, т.к. сколько частиц «убегает», столько же и движется «навстречу».

Найдем относительную скорость частиц, движущихся перпендикулярно x:

$$\bar{\upsilon}_{отн} = \sqrt{\bar{\upsilon}^2 + \bar{\upsilon}^2} = \bar{\upsilon}\sqrt{2},$$

тогда

$$z = \pi\sqrt{2} d^2 n\bar{\upsilon}.$$

За 1 с частица проходит расстояние $\bar{\upsilon}$, поэтому средняя длина свободного пробега равна

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{\upsilon}}{z} = \frac{1}{\pi\sqrt{2} d^2 n}.$$

Зависимость λ от T (формула Сезерленда) имеет вид

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_0 \frac{T}{C + T},$$

где C – постоянная Сезерленда.

Теплопроводность газов

Процесс теплопроводности реализуется, когда в газе возникают области с различной температурой под действием каких-либо внешних причин.

Рассмотрим теплопроводность на простейшем примере, когда газ заключен между двумя ограничивающими его стенками с различными температурами T_1 и T_2 (рис. 2.2). Выделим в пространстве между стенками воображаемую поверхность S и S_1 и S_2 параллельные ей на расстоянии от S равном средней длине свободного пробега $\bar{\lambda}$. У стенки с T_1 газ нагрет до T_1, а у стенки с T_2 до T_2. Пусть $T_1 > T_2$, тогда очевидно в газе будет происходить изменение температуры газа от T_1 до T_2, т.е. вдоль x будет существовать изменение температуры, которое в каждой точке x можно характеризовать бесконечно малыми приращениями dT и dx. Отношение dT/dx называется *градиентом температуры.*

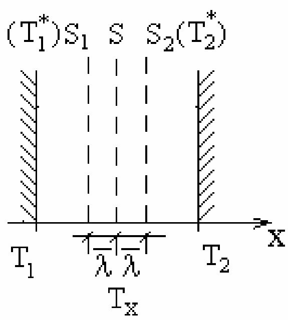


Рис. 2.2

Пусть на S_2 температура газа соответствует T_2^*, а на S_1 – T_1^* при хаотическом тепловом движении через площадку S частицы газа, движущиеся от S_2 к S будут переносить среднюю кинетическую энергию, соответствующую T_2^*, а движущиеся со стороны S_1 – среднюю кинетическую энергию, соответствующую T_1^*. Это утверждение будет справедливым, т.к. на длине свободного пробега скорость частиц не изменяется. Полный поток энергии, переносимый через плоскость S можно определить как разность потоков переносимой частицами энергии слева направо и справа налево. Считая движение частиц газа хаотическим (равновероятным во всех направлениях), для потоков частиц слева направо и справа налево можем записать

$$\nu_{S(x,-x)} = \frac{1}{6} n_x \vec{\upsilon}_{(T_x)}, \tag{1}$$

где $\bar{\upsilon}_{(T_x)}$ – средняя скорость частиц через S, т.е. соответствующая температуре T_x. С учетом (1) для потока энергии через S можно записать выражение в виде

$$q_x = \nu_{S(x)} \bar{\varepsilon}_{(T_1^*)} - \nu_{S(-x)} \bar{\varepsilon}_{(T_2^*)} = \nu_{S(x,-x)} (\bar{\varepsilon}_{(T_1^*)} - \bar{\varepsilon}_{(T_2^2)}), \tag{2}$$

где $\bar{\varepsilon}_{(T_1^*)}, \bar{\varepsilon}_{(T_2^2)}$ – средние значения кинетической энергии частиц в области S_1 и S_2.

Величина $(\bar{\varepsilon}_{(T_1^*)} - \bar{\varepsilon}_{(T_2^2)})$ может быть определена через градиент средней величины кинетической энергии или градиент температуры:

$$(\bar{\varepsilon}_{(T_1^*)} - \bar{\varepsilon}_{(T_2^2)}) = \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x} 2\bar{\lambda} = 2\bar{\lambda} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{dT} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = 2\bar{\lambda} C_V^* \frac{\partial T}{\partial x}, \tag{3}$$

где C_V^* – величина, характеризующая, как изменяется средняя энергия молекул газа с изменением температуры, т.е. теплоемкость газа. Индексы $(\,^*_V)$ показывают, что теплоемкость относится к случаю постоянного объема газа и отнесена к одной молекуле.

Из (1), (2) и (3) следует, что поток энергии (тепловой поток) равен

$$q = -\frac{1}{3} n \bar{\upsilon}_{(T_x)} \bar{\lambda} \cdot C_V^* \frac{dT}{dx}, \tag{4}$$

где переход от $\partial T/\partial x$ (частной производной) к dT/dx (полной производной) возможен вследствие отсутствия градиента температуры по другим координатам кроме x; знак «–» перед правой частью появляется из-за снижения температуры по x, т.е. $-dT$ соответствует $+dx$.

В то же время эмпирическое уравнение теплопроводности Фурье выглядит следующим образом

$$q = -\chi \frac{dT}{dx}, \tag{5}$$

где χ – коэффициент теплопроводности вещества.

Сравнивая (4) и (5), получаем коэффициент теплопроводности газа с его микропараметрами (параметрами частиц)

$$\chi = \frac{1}{3} n\bar{\upsilon}\bar{\lambda}C_V^* . \tag{6}$$

Умножив и разделив правую часть на mNa (m – масса молекулы, Na – число Авогадро), получим

$$\chi = \frac{1}{3} nm\bar{\lambda}\bar{\upsilon}\frac{C_V^* Na}{mNa} = \frac{1}{3}\rho\bar{\upsilon}\bar{\lambda}\cdot C_V , \tag{7}$$

где C_v – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме его, ρ – плотность газа.

Анализ (7) показывает, что коэффициент теплопроводности, осуществляемой за счет процесса переноса, рассмотренного выше, не зависит от давления. Действительно, $\rho \sim p$, $\bar{\lambda} \sim \frac{1}{p}$, $\bar{\upsilon} = \left(\frac{8kT}{\pi\cdot m}\right)^{1/2}$, т.е. произведение величин, определяющих χ не содержит величины давления p. Этот вывод справедлив только при условии $\bar{\lambda} << \alpha$ (α – расстояние между стенками с различной температурой), при котором рассматривался выше процесс теплопроводности.

Если условия процесса таковы, что $\bar{\lambda} > \alpha$, то при движении между стенками частицы газа сталкиваться не будут, поэтому процесс теплопроводности будет осуществляться иначе: прямым переносом энергии частицами газа от стенки с T_1 на стенку T_2. В этом случае поток частиц на стенку (и со стенки) равен

$$\nu_{(x,-x)} = \frac{n\bar{\upsilon}}{4}. \tag{8}$$

Различие в средних энергиях частиц, движущихся от стенки с T_1 на стенку T_2 и наоборот составит $C_V^*(T_1 - T_2)\alpha$, где α – коэффициент аккомодации, учитывающий тот факт, что частица, слетающая с T_1 может иметь энергию меньше, чем обусловленная T_1 (образно говоря, не успевает за время контакта со стенкой прогреться до T_1) а частица, слетающая со стенки с T_2 (образно говоря, не успевает за время контакта со стенкой остыть до T_2). *Коэффициент аккомодации* зависит от состояния поверхности стенок, материала, рода газа, температуры и в практических случаях составляет величину 0,1 – 0,9. С учетом (8) для удельного потока энергии можно записать при условии $\bar{\lambda} > \alpha$

$$q = \frac{n\bar{\upsilon}}{4} C_V^* (T_1 - T_2)\alpha . \qquad (9)$$

Проделав процедуру, подобную проделанной в (7), получим

$$q = \frac{n\bar{\upsilon}}{4}(T_1 - T_2)\alpha \cdot \frac{mC_V^* Na}{mNa} = \frac{\rho\bar{\upsilon}}{4} C_V \alpha (T_1 - T_2), \qquad (10)$$

так как $\rho \sim p$, теплопроводность газа при $\bar{\lambda} > \alpha$, т.е. при низких давлениях зависит от давления. В связи с этим при решении задач на теплопроводность газа необходимо, сравнивая $\bar{\lambda}$ с α, установить характер процесса теплопроводности.

Внутреннее трение (вязкость) газов

Как и в предыдущем случае рассмотрим одномерную модель процесса (рис. 2.3). Пусть стенка S_2 неподвижна, а стенка S_1 движется в направлении y со скоростью υ. Тогда частица газа в процессе контакта со стенкой S_1 получает импульс $m\upsilon$ и при последующем хаотическом в совокупности с направленным (надтепловым) движении будет в процессе столкновений передавать часть импульса другим частицам газа. Таким образом, в газе будет осуществляться перенос импульса от S_1 к S_2. При этом слои газа, располагающиеся ближе к S_1, будут двигаться с большей направленной скоростью, чем более удаленные слои.

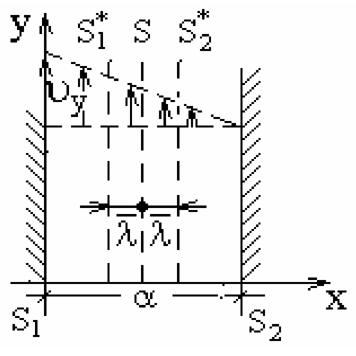


Рис. 2.3

Таким образом, в промежутке между пластинами установится некоторое распределение скорости направленного движения от υ у S_1 до 0 у S_2. Пусть в рассматриваемой системе выполняется условие $\bar{\lambda} << \alpha$, тогда мы можем воспользоваться тем же методом, что и при рассмотрении теплопроводности. Также выделим некоторую воображаемую плоскость S и плоскости S_1^* и S_2^* на расстоянии $\bar{\lambda}$ от S. На расстоянии $\bar{\lambda}$ направленный импульс молекул не изменяется, т.к. нет столкновений с другими молекулами. Поток частиц через S со стороны S_1^* и со стороны S_2^* за счет теплового движения частиц определится, как и в случае теплопроводности (1) соотношением

$$\nu_{S(x,-x)} = \frac{1}{6} n\overline{\upsilon}.$$

Поток импульса, переносимый от слоя газа на S_1^* к слою газа на S_2^* будет равен

$$\nu_{pS} = \nu_{S(x,-x)}(m\upsilon_{y_1}^* - m\upsilon_{y_2}^*) = \frac{1}{6} mn\overline{\upsilon}(\upsilon_{y_1}^* - \upsilon_{y_2}^*), \tag{11}$$

где $\upsilon_{y_1}^*$ и $\upsilon_{y_2}^*$ – направленные скорости в слоях газа у S_1^* и S_2^*.

Величина ($\upsilon_{y_1}^*$ – $\upsilon_{y_2}^*$) может быть найдена и через градиент направленной скорости υ_y по координате x:

$$(\upsilon_{y_1}^* - \upsilon_{y_2}^*) = 2\overline{\lambda}\frac{d\upsilon_y}{dx},$$

считая, что υ_y в пределах $2\overline{\lambda}$ изменяется от x линейно. С учетом этого (11) можно записать в виде

$$\nu_{pS} = -\frac{1}{3} n\overline{\upsilon}\overline{\lambda} \cdot m\frac{d\upsilon_y}{dx}, \tag{12}$$

где знак «–» обусловлен тем, что значению (+dx) соответствует (–$d\upsilon_y$). Величина ν_{pS} характеризует передаваемое количество движения от слоя S_1^* слою газа S_2^* через единичную площадь (ν_{pS} – поток) за единицу времени и может быть записана в виде

$$\nu_{pS} = \frac{dm\upsilon_y}{dt}, \text{ где } dt = 1 \text{ (сек)}.$$

В то же время в соответствии с законом Ньютона

$$F = ma = m\frac{d\upsilon}{dt},$$

можем записать, что ν_{pS} численно равен силе, с которой один слой газа действует на другой в направлении υ_y. В результате (12) можем записать в виде

$$F_y = -\frac{1}{3} n \cdot \overline{\upsilon}\overline{\lambda} \cdot m\frac{d\upsilon_y}{dx}. \tag{13}$$

Рассматривая F_y как силу трения слоев газа, для коэффициента внутреннего трения η получаем из (13) следующее выражение $F = -\eta \frac{d\upsilon}{dx}$ в соответствии с законом Ньютона, установленным эмпирически

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\bar{\upsilon}\bar{\lambda}. \tag{14}$$

Учитывая, что $\rho = mn, \bar{\upsilon} \sim \left(\frac{T}{m}\right)^{1/2}$, $\bar{\lambda} \sim \frac{1}{n\sigma}$, из (14) имеем

$$\eta \sim \frac{\sqrt{m}}{\sigma}\sqrt{T},$$

откуда следует, что коэффициент внутреннего трения не зависит ни от концентрации, ни от давления. Однако надо помнить, что этот вывод справедлив при условии $\bar{\lambda} << \alpha$ (т.е. в соответствующем диапазоне давлений газа).

При низких давлениях, когда $\bar{\lambda} > \alpha$, мы уже не можем оперировать понятием слои газа и, следовательно, коэффициента внутреннего трения (вязкости) газа. Импульс направленного движения будет частицами газа переноситься непосредственно от стенки к стенке и за единицу времени через единичное сечение газа (на единицу площади стенки) будет передаваться импульс

$$\Delta p = \frac{1}{4}n\bar{\upsilon}m\upsilon_y = \frac{1}{4}n\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}m\upsilon_y. \tag{15}$$

Диффузия в газах

Диффузия – процесс, заключающийся в самопроизвольном (за счет теплового движения) взаимном проникновении и перемешивании частиц двух соприкасающихся газов, жидкостей и даже твердых тел. Если один газ диффундирует в другой, то процесс называется взаимодиффузией. *Самодиффузия* – проникновение одной части частиц газа в другую часть того же газа, например при различной концентрации частиц в различных частях объема. Процесс самодиффузии аналогичен процессам переноса (теплопроводности, внутреннего трения) и отличается от них только величиной, которая переносится. Рассмотрим диффузию на следующей модели. Пусть объем с газом характеризуется тем, что плотность газа (концентрация) в нем в направлении «x» (рис. 2.4) изменя-

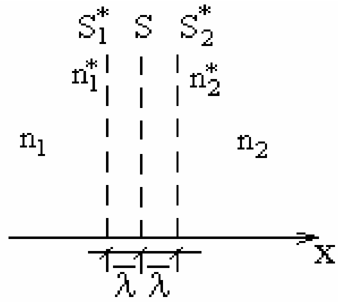


Рис. 2.4

ется. Воспользовавшись тем же, что и в предыдущих случаях методическим приемом, получим суммарный поток газа через сечение S как разницу потоков от S_1^* к S и от S_2^* к S. Пусть $n_1^* > n_2^*$.

$$\nu_x = \frac{1}{6} n_1^* \bar{\upsilon} - \frac{1}{6} n_2^* \bar{\upsilon} = \frac{1}{6} \bar{\upsilon} (n_1^* - n_2^*) .$$

Величину $(n_1^* - n_2^*)$ выразим через градиент концентрации

$$(n_1^* - n_2^*) = \frac{dn}{dx} 2\bar{\lambda} .$$

Тогда выражение для ν_x можно записать в виде

$$\nu_x = -\frac{1}{3} \bar{\upsilon} \bar{\lambda} \frac{dn}{dx} . \tag{16}$$

Сравнивая (16) с законом Фика для самодиффузии

$$\nu_x = -\mathrm{D} \frac{dn}{dx} ,$$

видим, что коэффициент самодиффузии связан с микропараметрами газа выражением

$$D = \frac{1}{3} \bar{\upsilon} \bar{\lambda} , \tag{17}$$

или, если подставить $\bar{\upsilon} \sim \left(\frac{T}{m} \right)^{1/2}$ и $\bar{\lambda} = \frac{1}{n\sigma}$, выражением

$$D \sim \frac{1}{n\sigma} \left(\frac{T}{m} \right)^{1/2} ,$$

из которого следует, что коэффициент самодиффузии в отличие от χ и η зависит от n и, следовательно, от давления газа.

Для случая взаимодиффузии ее коэффициент определяется выражением (вывод не приводится)

$$D_{12} = \frac{n_1 \bar{\upsilon}_2 \bar{\lambda}_2 + n_2 \bar{\upsilon}_1 \bar{\lambda}_1}{3(n_1 + n_2)} , \tag{18}$$

где n_1 и n_2 – концентрации соответствующих газов, или

$$D_{12} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{kT}{\pi} \right)^{3/2} \frac{1}{p d_{12}^2} \sqrt{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} , \tag{19}$$

где d_{12} – сумма радиусов частиц газа 1 и 2; $p = p_1 + p_2$ – суммарное давление газов; m_1 и m_2 – соответственно массы частиц газов.

2.2. Методические указания к лекционным занятиям

Вопросы лекции	Форма изучения	Литература	Вопросы для самоконтроля студентов
Явления переноса			1. Что называют явлением переноса? Приведите примеры 2. Может ли выполниться критерий вакуума, если резиновый шар, наполненный воздухом, достать с большой глубины водоема? 3. Что выражает коэффициент вязкости? Как он зависит от температуры, давления? 4. Что выражает коэффициент теплопроводности? Как он зависит от температуры, давления? 5. Что выражает коэффициент диффузии? Как он зависит от температуры, давления? 6. Что выражает эмпирические законы Фика и Фурье? 7. Чем определяется эффективность теплопередачи между двумя нагретыми плоскостями? 8. Что выражает коэффициент аккомодации, где он применяется? 9. По какой причине начинает вращаться внутренний цилиндр, отделенный от внешнего вращающегося цилиндра слоем газа?
1. Критерий вакуума.	лекция	[3, § 8.8], [4, § 111]	
2. Столкновения	лекция	[3, § 8.9], [4, § 113]	
3. Теплопроводность	лекция	[3, § 8.9], [4, § 112]	
4. Внутреннее трение	лекция	[4, § 114 – 116]	
5. Диффузия	лекция	[3, § 8.9]	

2.3. Методические указания к практическим занятиям

Тема	Задачи	Рекомендации	Задачи из сборников
Определение основных параметров явлений переноса	1. Определение длины пробега и числа столкновений.	1. При решении задач надо знать среднюю длину свободного пробега молекул $\langle l \rangle = \langle \upsilon \rangle / \langle z \rangle$, среднее время пробега $\langle \tau \rangle = \langle l \rangle / \langle \upsilon \rangle$, формулы, что связывают эти величины с размерами молекул и скоростью движения (температурой). Для определения полного числа столкновений необходимо учесть, что молекулы сталкиваются попарно, поэтому число столкновений меньше числа молекул в два раза.	[1, № 5.112, 5.113, 5.115, 5.117] [7, № 2.34, 2.35]
	2. Определение коэффициентов переноса.	2. Для определения коэффициентов переноса – диффузии, теплопроводности, внутреннего трения (вязкости) необходимо применять известные законы Менделеева – Клапейрона, основное уравнений МКТ и др. Выразив неизвестные величины из этих законов, получаете зависимость коэффициентов переноса в необходимом виде.	[1, № 5.132, 5.135, 5.138, 5.140, 5.154] [7, № 2.36 – 2.42]
	3. Определение потоков частиц и энергии в различных условиях	3. Потоки частиц и энергий связаны с коэффициентами переноса эмпирическими законами Фика, Фурье и Ньютона. Определив эти коэффициенты согласно п. 2, можно получить значение этих потоков. При этом необходимо помнить, что явления переноса связаны со средними величинами (длина свободного пробега). Поскольку реальные процессы происходят в ограниченных объемах, то для решения задачи необходимо проверить выполнение критерия вакуума, для того чтобы выбрать правильное выражения для коэффициентов переноса и входящих в него величин.	[1, № 5.155, 5.157, 5.160] [7, № 2.40, 2.44]

2.4. Примеры решения задач

Пример 1.

Определите: 1) среднюю длину свободного пробега молекул; 2) число соударений за 1 с, происходящих между всеми молекулами кислорода, находящегося в сосуде емкостью 2 л при температуре 27°С и давлении 100 кПа.

Решение. Средняя длина свободного пробега молекул кислорода вычисляется по формуле

$$\langle\lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\pi\cdot d^2\cdot n_0}, \qquad (1)$$

где $d = 2{,}9\cdot10^{-10}$ м – эффективный диаметр молекулы кислорода; n_0 – число молекул в единице объема, которое можно определить по уравнению $p = n_0kT$.

Число молекул равно

$$n_0 = \frac{p}{kT}, \qquad (2)$$

где $k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана.

Подставляя (2) в (1), имеем

$$\langle\lambda\rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\cdot\pi\cdot d^2\cdot p}. \qquad (3)$$

Число соударений z, происходящих между всеми молекулами за 1 с

$$z = \frac{1}{2}\langle z\rangle N, \qquad (4)$$

где N – число молекул кислорода в сосуде объемом $2\cdot10^{-3}$ м^3; $<z>$ – среднее число соударений одной молекулы за 1 с.

Число молекул в сосуде

$$N = n_0V. \qquad (5)$$

Среднее число соударений молекул за 1 с

$$\langle z\rangle = \frac{\langle v\rangle}{\langle\lambda\rangle}, \qquad (6)$$

где $<v>$ – средняя арифметическая скорость молекулы. Она равна

$$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}, \qquad (7)$$

где $\mu = 32\cdot10^{-3}$ кг/моль – молярная масса кислорода.

Подставляя в (4) выражения (5), (6) и (7), находим:

$$z = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \cdot d^2 \cdot p}{kT} \cdot \frac{p}{kT} V = \frac{2\pi \cdot d^2 p^2 V}{k^2 T^2} \cdot \sqrt{\frac{RT}{\pi\mu}} .$$

Выразим все величины в системе СИ и произведем вычисления:

$$z = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}9^2 \cdot 10^{-20} \cdot 10^{10} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{1{,}38^2 \cdot 10^{-46} \cdot 9 \cdot 10^4} \cdot \sqrt{\frac{8{,}31 \cdot 300}{3{,}41 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}} = 9 \cdot 10^{28};$$

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{\sqrt{2} \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}9^2 \cdot 10^{-20} \cdot 10^5} = 3{,}56 \cdot 10^{-8} .$$

Ответ: $\langle \lambda \rangle = 3{,}56 \cdot 10^{-8}$ м, $z = 9 \cdot 10^{28}$.

Пример 2.

Определите: 1) коэффициент диффузии; 2) коэффициент внутреннего трения азота, находящегося при температуре 300 К и давлении 10^5 Па.

Решение. Коэффициент диффузии

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle , \qquad (1)$$

где $\langle v \rangle$ – средняя арифметическая скорость молекул, равная

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} , \qquad (2)$$

где $\mu = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса азота; $\langle \lambda \rangle$ – средняя длина свободного пробега молекул. Для нахождения $\langle \lambda \rangle$ воспользуемся формулой

$$\langle \lambda \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot d^2 \cdot p} , \qquad (3)$$

где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана; $d = 3{,}1 \cdot 10^{-10}$ м – эффективный диаметр молекулы азота. Подставляя (2) и (3) в (1), имеем

$$D = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \cdot \frac{kT}{\sqrt{2}\pi \cdot d^2 p} = \frac{2kT}{3\pi \cdot d^2 p} \sqrt{\frac{RT}{\pi\mu}} .$$

Коэффициент внутреннего трения

$$\eta = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \rho ,$$

где ρ – плотность газа при температуре 300 К и давлении 10^5 Па.

Для нахождения ρ воспользуемся уравнением состояния идеального газа. Запишем его для двух состояний азота: при нормальных условиях (T_0 = 273 К; $p_0 = 1{,}01\cdot 10^5$ Па):

$$p_0 V_0 = \frac{m}{\mu} R T_0, \qquad \text{и} \qquad pV = \frac{m}{\mu} RT.$$

Учитывая, что $\rho_0 = \frac{m}{V_0}$; $\rho = \frac{m}{\mu}$, мы имеем

$$\rho = \rho_0 \frac{pT_0}{p_0 T}.$$

Коэффициент внутреннего трения газа может быть выражен через коэффициент диффузии

$$\eta = D\rho = \frac{D\rho_0 p T_0}{p_0 T}.$$

Выразим величины в системе СИ и проведем вычисления:

$$D = \frac{2\cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 300}{3\cdot 3{,}14\cdot 3{,}1^2\cdot 10^{-20}\cdot 10^5}\sqrt{\frac{8{,}31\cdot 300}{3{,}14\cdot 28\cdot 10^{-3}}} = 4{,}7\cdot 10^{-5};$$

$$\eta = 4{,}7\cdot 10^{-5}\cdot 1{,}25\cdot \frac{10^5\cdot 273}{1{,}01\cdot 10^5\cdot 300} = 5{,}23\cdot 10^{-5}.$$

Ответ: $\eta = 5{,}23\cdot 10^{-5}\,\frac{\text{кг}}{\text{м}\cdot\text{с}}$.

Пример 3.

Два тонкостенных коаксиальных цилиндра длиной 10 см могут свободно вращаться вокруг их общей оси Z. Радиус R большого цилиндра равен 5 см. Между цилиндрами имеется зазор размером d = 2 мм. Оба цилиндра находятся в воздухе при нормальных условиях. Внутренний цилиндр приводят во вращение с постоянной частотой n_1 = 20 с$^{-1}$. Внешний цилиндр заторможен. Определить, через какой промежуток времени с момента освобождения внешнего цилиндра он приобретет частоту вращения n_2 = 1 с$^{-1}$. При расчетах изменением относительной скорости цилиндров пренебречь. Масса m внешнего цилиндра равна 100 г.

Решение. При вращении внутреннего цилиндра слой воздуха увлекается им и начинает участвовать во вращательном движении. Вблизи поверхности этого цилиндра слой воздуха приобретает со временем практически такую же линейную скорость, как и скорость точек на поверхности цилиндра, т.е. $v = 2\pi n_1(R - d)$. Так как $R > d$, то приближенно можно считать

$$v \approx 2\pi n_1 R\ . \qquad (1)$$

Вследствие внутреннего трения момент импульса передается соседним слоям газа и, в конечном счете, внешнему цилиндру. За интервал времени Δt внешний цилиндр приобретает момент импульса $L = p \cdot R$, где p – импульс, полученный внешним цилиндром. Отсюда

$$p = \frac{L}{R}. \qquad (2)$$

С другой стороны

$$p = \eta \cdot \frac{dv}{dz} \cdot S \cdot \Delta t, \qquad (3)$$

где η – динамическая вязкость; dv/dz – градиент скорости; S – площадь поверхности цилиндра ($S = 2\pi \cdot R\lambda$).

Приравняв правые части выражений (2) и (3) и выразив из полученного равенства искомый интервал Δt, получим

$$\Delta t = \frac{L}{\eta \cdot R \cdot \frac{dv}{dz} \cdot S}. \qquad (4)$$

Найдем входящие в эту формулу величины L, dv/dz, S. Момент импульса $L = J \cdot \omega$, где J – момент инерции цилиндра ($J = mR^2$); m – его масса; ω_2 – угловая скорость внешнего цилиндра ($\omega_2 = 2\pi n_2$). С учетом этого запишем

$$L = mR^2 \cdot 2\pi \cdot n_2 = 2\pi \cdot mR^2 n_2.$$

Градиент скорости $dv/dz = v/z = v/d$. Площадь цилиндра равна $S = 2\pi R\lambda$. Подставив в (4) выражения L, dv/dz, S, получим:

$$\Delta t = \frac{m \cdot d \cdot n_2}{\eta \cdot v \cdot \lambda}.$$

Заменив здесь v по (1), найдем

$$\Delta t = \frac{m \cdot d \cdot n_2}{2 \cdot \pi \cdot \eta \cdot R \cdot \lambda \cdot n_1}. \qquad (5)$$

Динамическая вязкость воздуха $\eta = 17{,}2$ мкПа·с $= 1{,}72 \cdot 10^{-5}$ Па·с.

Подставив в (5) значения входящих в формулу величин и произведя вычисления, получим

$$\Delta t = 18{,}5 \text{ с}.$$

Ответ: $\Delta t = 18{,}5$ с.

Пример 4.

Пространство между двумя параллельными пластинами площадью 150 см^2 каждая, находящимися на расстоянии 5 мм друг от друга, заполнено кислородом. Одна пластина поддерживается при температуре 17°С, другая – при температуре 27°С. Определите количество теплоты, прошедшее за 5 мин посредством теплопроводности от одной пластины к другой. Кислород находится при нормальных условиях.

Эффективный диаметр молекул кислорода считать равным 0,36 нм.

Решение. Количество теплоты, перенесенное газом в результате теплопроводности от одной пластины к другой

$$Q = \left| \chi \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x} \cdot S \cdot t \right|,$$

где χ – коэффициент теплопроводности.

$$\Delta T = t_2^\circ - t_1^\circ; \qquad \chi = \frac{1}{3}\rho\langle\lambda\rangle\langle v\rangle.$$

C_V – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме

$$C_V = \frac{i}{2} \cdot \frac{R}{M},$$

где i – число степеней свободы (для кислорода $i = 5$); $\rho = m/V$ – плотность.

Используем уравнение Менделеева – Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M} RT,$$

откуда

$$\rho = \frac{p \cdot M}{R \cdot T}.$$

Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle\lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot d^2 \cdot n},$$

где n – концентрация газа.

Уравнение состояния идеального газа

$$p = n \cdot k \cdot T,$$

откуда

$$n = \frac{p}{k \cdot T}.$$

Средняя арифметическая скорость молекулы $\langle v\rangle=\sqrt{\dfrac{8\cdot R\cdot T}{\pi\cdot M}}$.

Тогда

$$\chi=\frac{1}{3}\cdot\frac{i}{2}\cdot\frac{R\cdot p\cdot M}{M\cdot R\cdot T}\cdot\frac{k\cdot T}{\sqrt{2}\cdot\pi\cdot d^2\cdot p}\cdot\sqrt{\frac{8\cdot R\cdot T}{\pi\cdot M}}=\frac{i}{3}\cdot\frac{k}{\pi\cdot d^2}\cdot\sqrt{\frac{RT}{\pi\cdot M}}.$$

Подставим это выражение в формулу количества теплоты:

$$Q=\frac{i}{3}\cdot\frac{k}{\pi\cdot d^2}\cdot\sqrt{\frac{RT}{\pi\cdot M}}\cdot\frac{(t_2^\circ-t_1^\circ)}{\Delta x}\cdot S\cdot t;$$

$$Q=\frac{5}{3}\cdot\frac{1{,}38\cdot10^{-23}}{3{,}14\cdot(3{,}6\cdot10^{-10})^2}\cdot\sqrt{\frac{8{,}31\cdot273}{3{,}14\cdot32\cdot10^{-3}}}\cdot\frac{27-17}{5\cdot10^{-3}}\cdot15\cdot10^{-3}\cdot300=76{,}4\ \text{(Дж)}.$$

Ответ: $Q=76{,}4$ Дж.

Пример 5.

Найти зависимость коэффициента диффузии от температуры при постоянном давлении.

$$D=\frac{1}{3}\bar{\upsilon}\bar{\lambda}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}.$$

Поэтому зависимость имеет вид $D=AT^{3/2}$ при постоянном давлении *p*.

Пример 6.

Найти зависимость коэффициента теплопроводности от температуры.

Решение. Поскольку

$$\chi=\frac{1}{3}\bar{\upsilon}\bar{\lambda}C_V\rho,$$

а каждая из величин определяется как

$$\rho=\frac{p\mu}{RT};\qquad \bar{\upsilon}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}};\qquad C_V=\frac{i}{2\mu}R;\qquad \bar{\lambda}=\frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p},$$

то подставив выражение

$$\chi=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\frac{RT}{\sqrt{2}\pi\upsilon^2 p}\frac{p\mu}{RT}\frac{\upsilon}{2\mu}R,$$

получим

$$\chi = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\mu}{\pi R}}\frac{k}{\pi\upsilon^2}\sqrt{\frac{T}{\pi\mu R}},$$

т.е. зависимость имеет вид $\chi = A\sqrt{T}$.

Пример 7.

Найти зависимость коэффициента внутреннего трения от температуры.

Решение. Поскольку $\eta = \frac{1}{3}\bar{\upsilon}\bar{\lambda}\rho$,

то согласно уравнению Менделеева – Клапейрона

$$pV = \frac{m}{\mu}RT; \qquad \frac{p\mu}{RT} = \rho.$$

Длина пробега при этом может быть представлена в идее

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\upsilon^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}, \text{ где } p = nkT,$$

тогда

$$\bar{\upsilon} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}; \qquad \eta = \frac{1}{3}\frac{p\mu}{RT}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}.$$

Окончательно получаем

$$\eta = \frac{1}{3}\frac{k}{R}\sqrt{\frac{8R}{\pi\mu}}\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma^2} = A\sqrt{T};$$

$$\eta = A\sqrt{T},$$

где $A = \frac{1}{3}\frac{kp}{\sqrt{2}\pi\sigma^2}\sqrt{\frac{8\mu}{\pi \cdot R}} = \frac{2k}{3\pi\upsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\pi \cdot R}}$.

Пример 8.

Найти коэффициент теплопроводности водорода, если известно, что коэффициент вязкости (внутреннего трения) для него при этих условиях равен $8{,}6\cdot10^{-6}$ нсек/м^2.

$$\eta = \frac{1}{3}\bar{\upsilon}\bar{\lambda}\rho; \; \chi = \frac{1}{3}\bar{\upsilon}\bar{\lambda}C_V\rho; \; C_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}; \; \bar{\upsilon}\bar{\lambda}\rho = 3\eta; \; \chi = \frac{3\eta}{3}C_V = \frac{i}{2}\eta \cdot R;$$

$$\chi = \frac{1}{2}86\cdot10^{-6}\cdot\frac{5}{2}\cdot 8{,}31\cdot10^3 = 90\cdot10^{-6} = 9\cdot10^{-8} = 0{,}09 \text{ Вт/мК}.$$

Пример 9.

Определите, во сколько раз отличается коэффициент динамической вязкости η углекислого газа и азота, если оба газа находятся при одинаковых условиях.

$$\eta = \frac{1}{3}\bar{\upsilon}\bar{\lambda}\rho;\ \rho = \frac{p\mu}{RT};\ \lambda = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p};\ \bar{\upsilon} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}};$$

$$\eta_1 = \frac{1}{3}\frac{p\mu_1}{RT}\frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma_1^2 p}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu_1}};\ \eta_2 = \frac{1}{3}\frac{p\mu_2}{RT}\frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma_2^2 p}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu_2}};$$

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_2}}.$$

Пример 10.

Цилиндрический термос с внешним радиусом r_2 = 10 см и внутренним r_1 = 9 см, высотой 20 см наполнен льдом. Температура льда 0° С, наружная температура 20° С.

1). При каком предельном давлении воздуха между стенками термоса коэффициент теплопроводности будет зависеть от давления? Температуру воздуха считать 10° С, диаметр молекул воздуха $3\cdot10^{-10}$ м, μ = 29 г/моль.

2). Найти коэффициент теплопроводности воздуха при давлении:

а) 760 мм. рт. ст.; б) 10^{-4} мм. рт. ст.

3). Какое количество тепла проходит за 1 мин через боковую поверхность термоса средним радиусом 9,5 см за счет теплопроводности

а) 760 мм рт. ст.; б) 10^4 мм рт. ст.

1. При $\bar{\lambda} = d$ коэффициент теплопроводности начинает зависеть от давления $\bar{\lambda} = \dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi\upsilon^2 p} \Rightarrow p = \dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi\upsilon^2 d}, p = 7{,}37\cdot10^{-3}$ мм рт. ст.

а) $\chi = \dfrac{1}{3}\bar{\upsilon}\bar{\lambda}C_V\rho = \dfrac{ik}{3\pi\upsilon^2}\sqrt{\dfrac{T}{\pi\cdot\mu\cdot R}}$ и $\chi = 13{,}1\cdot10^{-6}\,\dfrac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$;

б) $\chi = \dfrac{1}{3}d\bar{\upsilon}\rho\cdot C_V = \dfrac{1}{3}d\sqrt{\dfrac{8RT}{\mu}}\dfrac{p\mu}{RT}\dfrac{Ri}{2\mu} = \dfrac{i}{6}dp\sqrt{\dfrac{8R}{\pi\cdot\mu\cdot T}} = 1{,}78\cdot10^{-4}\,\dfrac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}.$

2. $Q = \chi\dfrac{\Delta T}{\Delta x}\Delta S\Delta t$, но $\Delta S = 2\pi\cdot r\lambda$, где $r = \dfrac{r_1 + r_2}{2}$, $Q = \chi\dfrac{\Delta T}{\Delta T}2\pi\cdot r\lambda\cdot\Delta t$;

тогда с учетом 2) получаем

а) Q_1 = 188 Дж; б) Q_2 = 2,55 Дж.

3. УЧЕБНЫЙ БЛОК
«ТЕРМОДИНАМИКА. АГРЕГАТНОЕ СОСТОЯНИЕ ВЕЩЕСТВА»

Введение

Раздел механики, в котором изучается законы движения жидкости и ее взаимодействия с телами, обтекаемыми средой, называется *гидродинамикой.* При изучении движения жидкости рассматривают ее как *сплошную среду*, отвлекаясь от молекулярного строения жидкости. В ряде случаев пренебрегают внутренним трением и рассматривают модель *идеальной жидкости*.

При изучении данного раздела студенты должны

иметь представление:

– об основных физических величинах: давлении, работе, кинетической и потенциальной энергии;

– об основных законах гидростатики: законе Архимеда, законе Паскаля. Знание гидростатического давления;

обладать навыками:

– применения элементов дифференциального и интегрального исчисления.

Учебная программа блока

Содержание программы	Форма подготовки	Литература
1. Первое начало термодинамики. Работа. Внутренняя энергия. Теплота	лекция	[2, § 9.1 – 9.3], [5, § 82 – 84], [6, § 14, 15]
2. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам. Зависимость теплоемкости идеального газа от вида процесса. Адиабатный процесс. Политропный процесс	лекция	[2, § 9.5 – 9.6], [5, § 87 – 90], [6, § 21]
3. Обратимые и необратимые процессы. Круговой процесс (цикл). Цикл Карно	лекция	[2, § 11.1 – 11.2], [5, § 105], [6, § 29 – 30]
4. Энтропия. Второе начало термодинамики. Вычисление энтропии идеального газа. Статистическое толкование второго начала термодинамики	лекция	[2, § 11.3 – 11.6], [5, § 104, 107]
5. Отступления от законов идеальных газов. Реальные газы. Уравнение Ван-дер-Ваальса	лекция	[2, § 12.1 – 12.3], [5, § 91], [6, § 97 – 98]

Окончание табл.

6. Фазовые переходы I и II рода. Критическое состояние. Уравнение Клапейрона – Клаузиуса	лекция	[2, § 12.3], [5, § 120, 123], [6, § 111, 113]
7. Поверхностное натяжение. Формула Лапласа. Капиллярные явления	самост.	[5, § 115 – 119], [6, § 106 – 109]

Цели обучения

студент должен **знать**	студент должен **уметь**
– определения теплоты, внутренней энергии и работы газа; – связь параметров состояния при различных процессах; – первый закон термодинамики. Смысл величин, входящих в него; – понятие теплоемкости для различных процессов; – политропический процесс; – КПД тепловых машин; – цикл Карно; – определение второго начала термодинамики; – способы вычисления энтропии идеального газа; – статистическое толкование второго начала термодинамики; – уравнение Ван-дер-Ваальса. Смысл поправок для давления и объема; – фазовое состояние вещества. Фазовые переходы I и II рода. Критическое состояние; – уравнение Клапейрона – Клаузиуса; – причины возникновения поверхностного натяжения, добавочного давления над искривленной поверхностью	– вычислять изменение внутренней энергии, работу газа и количество теплоты в различных процессах; – определять КПД различных круговых процессов; – вычислять изменение энтропии; – находить связь критических параметров вещества и поправок в уравнении Ван-дер-Ваальса; – определять температуру фазового перехода; – определять работу сил поверхностного натяжения, лапласово давление

3.1. Краткое содержание теоретического материала

Физические свойства макросистем, состоящих из большого количества частиц, изучаются взаимно дополняющими методами: статистическим и термодинамическим. *Термодинамический метод* основан на анализе условий и количественных соотношений при различных превращениях энергии, происходящих в системе. Внутренняя энергия термодинамической системы включает в себя кинетическую энергию движения частиц (поступательного и вращательного движения), а также потенциальную энергию их взаимодействия. В идеальном газе пренебрегают силами межмолекулярного взаимодействия, поэтому внутренняя энергия может быть принята как сумма кинетических энергий хаотического движения всех молекул

$$U = N\frac{i}{2}kT = \frac{m}{M}N_A\frac{i}{2}kT = \frac{i}{2}\frac{m}{M}RT\,,$$

где i – число степеней свободы молекулы. Изменение внутренней энергии газа связано с изменением температуры

$$dU = \frac{i}{2}\frac{m}{M}RdT\,.$$

Обмен энергий между системой и внешними телами может осуществляться двумя качественно различными способами: путем совершения работы и путем теплообмена.

Элементарная работа, совершаемая газом при изменении его объема

$$dA = pdV\,.$$

Полная работа при изменении объема газа вычисляется с помощью интегрирования

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV\,,$$

где V_1 и V_2 – соответственно начальный и конечный объемы газа.

Количество теплоты, переданное системе, определяется по формуле

$$\Delta Q = Cm\Delta T\,,$$

где C – удельная теплоемкость газа при данном процессе. Связь между молярной C_m и удельной C теплоемкостями газа

$$C_m = C\mu\,,$$

где μ – молярная масса газа.

Первое начало термодинамики утверждает, что *количество теплоты Q, сообщаемое системе, затрачивается на приращение внутренней энергии системы ΔU и совершение системой работы A над внешними телами*

$$Q = \Delta U + A\,.$$

Первое начало термодинамики в *дифференциальной форме*

$$\delta Q = dU + \delta A\,.$$

Отличия в записи малых величин отражают тот факт, что внутренняя энергия является функцией состояния системы, а работа и теплота – функции процесса. В отличие от внутренней энергии системы, которая является однозначной функцией состояния этой системы, понятия *теплоты* и *работы* имеют смысл только в связи с процессом изменения состояния системы. Они являются энергетическими характеристиками процесса изменения состояния системы.

Применим первое начало термодинамики к изопроцессам. Запишем закон в развернутом виде

$$CmdT = dU + pdV .$$

Так, при *изохорном* процессе $dV = 0$, т.е. работа $A = 0$ и вся теплота идет на изменение внутренней энергии газа $CmdT = dU$, где $dU = \frac{i}{2}\frac{m}{M}RdT$, откуда теплоемкость газа при изохорном процессе

$$C = C_V = \frac{dU}{mdT} = \frac{i}{2}\frac{R}{M}.$$

Во всех других процессах объем газа изменяется. При *изобарном* процессе работа газа

$$A = p\left(V_2 - V_1\right), \text{ или } A = \frac{m}{M}R\left(T_2 - T_1\right).$$

Изменение внутренней энергии

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{M}R\Delta T \text{ или } \Delta U = \frac{i}{2}p\Delta V .$$

Количество теплоты

$$Q = \Delta U + p\Delta V = \frac{i}{2}\frac{m}{M}R\Delta T + \frac{m}{M}R\Delta T = \frac{i+2}{2}\frac{m}{M}R\Delta T .$$

Теплоемкость газа при изобарном процессе

$$C = C_p = \frac{Q}{m\Delta T} = \frac{i+2}{2}\frac{R}{M}.$$

Молярные теплоемкости газа при постоянном объеме и постоянном давлении

$$C_V = \frac{i}{2}R, \; C_p = \frac{i+2}{2}R .$$

Уравнение Майера связывает молярные теплоемкости газа при изохорном и изобарном процессах

$$C_p = C_V + R .$$

При *изотермическом* процессе температура газа постоянна, поэтому количество теплоты идет на совершение работы $dQ = dA$, где $dA = pdV$. Работа вычисляется интегрированием

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{M}\frac{RT}{V} dV = \frac{m}{M} RT \ln\frac{V_2}{V_1} \text{ или } A = \frac{m}{M} RT \ln\frac{p_1}{p_2}.$$

Адиабатный процесс реализуется в условиях теплоизоляции системы, но адиабатным можно считать также процесс, протекающий столь быстро, что за время его осуществления не успевает произойти существенный теплообмен с внешней средой. Из первого начала термодинамики следует, что в адиабатном процессе работа совершается за счет изменения внутренней энергии: $dA = -dU$. Т.е. если газ расширяется, то его температура понижается, а при резком сжатии – нагревается.

Получим соотношение между параметрами состояния газа. Записывая выражения для работы и изменения внутренней энергии $dA = pdV$, $dU = C_V dT$, где $C_V = \frac{i}{2}\frac{m}{M}R$ – теплоемкость газа при изохорном процессе, имеем

$$pdV = -C_V dT.$$

Так как $p = \frac{mRT}{MV}$, получаем $\frac{m}{M}\frac{RT}{V}dV = -C_V dT$, $\frac{dT}{T} = -\frac{mR}{MC_V}\frac{dV}{V}$

т.к. $\frac{mR}{MC_V} = \frac{C_p - C_V}{C_V} = \gamma - 1$, где $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}$ – безразмерная величина, называемая постоянной адиабаты или коэффициентом Пуассона. Считая, что теплоемкости не зависят от температуры, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dT}{T} = -(\gamma - 1)\frac{dV}{V}.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln T = -(\gamma-1)\ln V + \text{const},\ \ln T + (\gamma-1)\ln V = \text{const},\ \ln\left(TV^{\gamma-1}\right) = \text{const}.$$

Таким образом, связь температуры и объема газа при адиабатном процессе имеет вид

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}. \tag{1}$$

Поскольку при любом процессе для идеального газа $\frac{pV}{T} = \text{const}$, то давление и объем связаны соотношением

$$pV^{\gamma} = \text{const}. \tag{2}$$

Соотношение (2) называют уравнением Пуассона.

На p – V-диаграмме адиабатный процесс 2 круче, чем изотермический 1 (рис. 3.1). Работа при адиабатном процессе противоположна по знаку изменению внутренней энергии

$$A = -\frac{m}{M} C_V \left(T_2 - T_1\right),$$

и с учетом связи параметров (1) при адиабатном процессе может быть записана в виде $A = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\frac{m}{M}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]$,

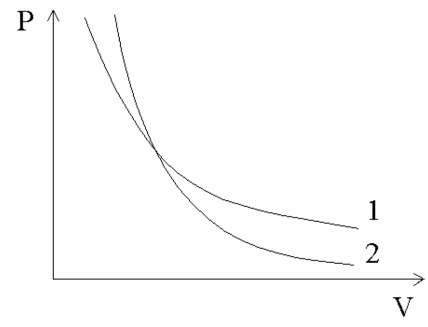


Рис. 3.1

где T_1, T_2, и V_1, V_2 – соответственно начальные и конечные температуры и объемы газа.

Политропическими называются процессы, при которых теплоемкость тела остается постоянной. Для идеального газа уравнение политропы имеет вид

$$pV^{n} = \text{const},$$

где n – показатель политропы

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V}.$$

Рассмотренные ранее процессы относятся к категории политропических. Изобарическому процессу соответствует $n = 0$, изотермическому – $n = 1$, адиабатическому $n = \gamma$.

Для описания термодинамических процессов одного первого начала термодинамики недостаточно, поскольку оно не позволяет определить направление протекания процесса. В самом деле, процесс самопроизвольной передачи теплоты от холодного тела к горячему не противоречит первому началу термодинамики. Однако опыты показывают, что самопроизвольно данные процессы не протекают. Прежде всего, расширим представления о термодинамических процессах. Введем понятие *обратимого* процесса. Термодинамический процесс называется обратимым, если после него можно возвратить систему в начальное состояние таким образом, чтобы в других телах не осталось каких-либо изменений. Необходимое условие обратимого процесса – его *равновесность*. Реальные процессы являются *неравновесными*, и поэтому являются *необратимыми*.

Круговым процессом называется термодинамический процесс, в итоге которого система возвращается в исходное состояние. Круговые процессы изображаются в диаграммах $p - V$, $p - T$ и др. в виде замкнутых кривых (рис. 3.2).

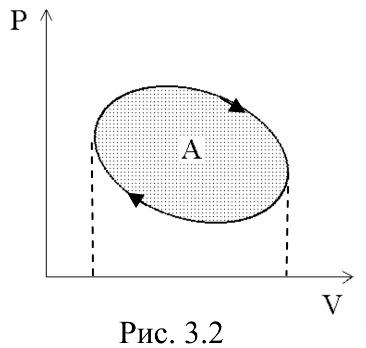


Рис. 3.2

Круговые процессы лежат в основе всех *тепловых машин* – устройств, которые превращают внутреннюю энергию в механическую энергию. Основные части тепловой машины: нагреватель, рабочее тело и холодильник. Рабочее тело (обычно газ) получает количество теплоты Q_1 от нагревателя, совершает работу A за цикл, отдает холодильнику количество теплоты Q_2. На графике работа равна площади фигуры, ограниченная графиками процесса. Изменение внутренней энергии в круговом процессе равно нулю. Работа, совершаемая за цикл равна $A = Q_1 - Q_2$. Эффективность тепловой машины определяется термическим коэффициентом полезного действия (КПД) для кругового процесса (цикла)

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

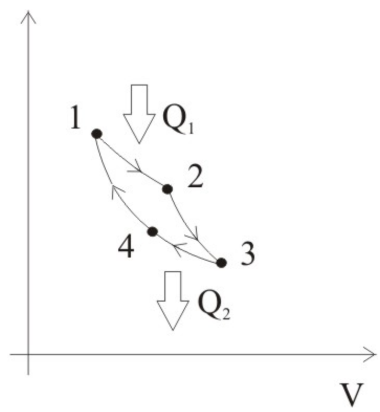


Рис. 3.3

Среди всех круговых процессов большое значение имеет процесс, составленный из четырех обратимых процессов: двух изотерм и двух адиабат – цикл Карно (рис. 3.3). Определим КПД данного цикла. Запишем выражение для количеств теплоты и работ, совершаемых рабочим телом на разных участках процесса

Участок 1 – 2: изотерма – T_1, $Q_1 = A_{12} = \dfrac{m}{M} RT_1 \ln \dfrac{V_2}{V_1}$.

Участок 2 – 3: адиабата, $Q_{23} = 0$, $A_{23} = -\Delta U_{23} = -C_V \left(T_2 - T_1\right)$.

Участок 3 – 4: изотерма T_2, $Q_2 = A_{34} = \dfrac{m}{M} RT_2 \ln \dfrac{V_4}{V_3}$.

Участок 4 – 1: адиабата, $Q_{41} = 0$, $A_{41} = -\Delta U_{41} = -C_V \left(T_1 - T_2\right)$;

$$\eta = \frac{A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41}}{Q_1} = \frac{A_{12} + A_{34}}{Q_1},$$

$$\eta = \frac{\frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}}{\frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 - T_2 \ln \frac{V_1}{V_2} \ln \frac{V_3}{V_4}}{T_1}.$$

Температура и объем в состояниях 2 – 3 и 1 – 4 связаны:

$$TV^{\gamma-1} = \text{const};$$

$$\begin{cases} T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1} \\ T_2 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} \end{cases}.$$

Откуда следует, что $\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$, следовательно $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$, где T_1 – температура нагревателя; T_2 – температура холодильника. КПД любого реального теплового двигателя не может превышать КПД цикла Карно. Можно показать, что КПД реального цикла меньше чем цикла Карно, т.к. протекающие в нем процессы являются *неравновесными*.

Поскольку КПД равен $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$, с другой стороны $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$, $1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$, то в обратимом цикле Карно справедливо соотношение $\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$.

Мы получили выражение, похожее на закон сохранения. При работе тепловой машины в цикле Карно величина $\frac{Q_1}{T_1}$, взятая от нагревателя, равная $\frac{Q_2}{T_2}$, отданной холодильнику. Эту величину называют энтропией. Можно показать, что в отличие от количества теплоты δQ, величина $\frac{\delta Q}{T}$ в обратимом процессе есть полный дифференциал функции состояния системы, называемый *энтропией S системы*.

Энтропия – функция состояния системы, изменение которой в обратимом процессе равно отношению бесконечно малого количества теплоты dQ, сообщенного системе, к абсолютной температуре системы $dS = \frac{dQ}{T}$.

По знаку dS судят о направленности теплообмена между системой и окружающей средой. Энтропия dS и теплота dQ имеют один и тот же знак. При нагревании $\delta Q > 0$ и энтропия возрастает, при охлаждении энтропия тела убывает. При обратимом адиабатном процессе $dQ = 0$, так что $dS = 0$, $S = \text{const}$. Таким образом, обратимый адиабатный процесс является *изоэнтропийным*.

В произвольном *необратимом* процессе

$$dS > \frac{dQ}{T},$$

т.е. изменение энтропии системы больше величины $\frac{dQ}{T}$, где T – температура внешнего тела. Тогда для любых процессов $dS \geq \frac{dQ}{T}$, где знак равенства относится к обратимым процессам, а знак «больше» – к необратимым.

Если система адиабатически изолирована, т.е. $\delta Q = 0$, то при любых процессах, происходящих в системе, энтропия изолированной системы не может убывать, а значит $dS \geq 0$.

Это утверждение является *вторым началом термодинамики*. Реальные процессы являются *неравновесными*, поэтому энтропия системы может только возрастать, достигая максимума в состоянии термодинамического равновесия.

Изменение энтропии при равновесном переходе системы из состояния 1 в состояние 2 вычисляется через интеграл

$$\Delta S_{1\to 2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{dU + dA}{T}. \qquad (3)$$

Допустим, начальное состояние характеризуется параметрами T_0, V_0, конечное – T, V, тогда, записывая выражения для элементарных работ, изменения внутренней энергии и теплоты, получаем

$$dA = pdV = \frac{mRT}{MV}dV; \quad dU = C_V dT;$$

$$dQ = dU + dA = C_V dT + \frac{mRT}{MV}dV.$$

Используя соотношение (3), вычисляем изменение энтропии в данном процессе перехода из состояния начального в состояние конечное

$$\Delta S = \int_{T_0}^{T} \frac{C_V dT}{T} + \int_{V_0}^{V} \frac{mR}{MV}dV; \qquad \Delta S = C_V \ln\frac{T}{T_0} + \frac{m}{M}R\ln\frac{V}{V_0}$$

Так как для идеального газа $\frac{pV}{T} = \text{const}$, выражение для энтропии идеального газа можно переписать в других эквивалентных формах.

Энтропия, подобно внутренней энергии, – аддитивная величина: энтропия системы равна сумме энтропий всех тел, входящих в состав системы. В термодинамике доказывается, что энтропия изолированной системы в любом обратимом процессе не изменяется. Дело в том, что при передаче теплоты δQ от тела 1 к телу 2 в обратимом процессе температуры обоих тел одинаковы. Поэтому изменение энтропии dS_2 тела 2 получающего теплоту δQ, равно и противоположно по знаку изменению энтропии dS_1 тела 1, отдающего теплоту δQ: $dS = dS_1 + dS_2 = 0$.

До сих пор, рассматривая второй закон термодинамики, мы пользовались термодинамическим методом исследования. Однако существует связь второго закона термодинамики с молекулярно-кинетической теорией строения вещества. Раскрытие этой связи позволяет глубже понять физический смысл энтропии.

С молекулярно-кинетической точки зрения каждому состоянию газа (системы частиц) соответствует некоторое распределение его молекул по объему, а также по скоростям (импульсам и энергиям). Предположим, что система, изолированная от внешней среды, содержит 4 частицы (n = 4) и занимает объем V (рис. 3.4). Предположим, что частицы «меченные», а объем разбит на две равные части. Будем считать, что различные состояния отличаются только распределением молекул 1, 2, 3, 4 по двум ячейкам. Представим в виде таблицы все возможные состояния такой системы.

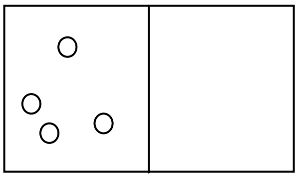


Рис. 3.4

Макросостояние	Возможные микросостояния*	$Г$, Число микросостояний	ω, Вероятность макросостояния
1. Справа нет частиц	0000	1	1/16
2. Справа одна частица	1000 0100 0010 0001	4	4/16
3. Справа две частицы	1100 1010 1001 0110 0101 0011	6	6/16
4. Справа три частицы	0111 1011 1101 1110	4	4/16
5. Справа четыре частицы	1111	1	1/16

Примечание. * Если частица находится слева, это обозначено цифрой «0», если справа – «1».

Состояния, перечисленные в одной строке, в макро-масштабе неразличимы и обладают одинаковой энергией. Число микросостояний определяется соотношением

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Число микросостояний, с помощью которого реализуется данное макросостояние, называется статистическим весом *Г* или кратностью вырождения макросистемы. Из таблицы видно, что статистический вес *Г* и вероятность состояния одновременно достигают максимального значения. Минимальной вероятностью обладает состояние, реализуемое единственным способом.

Рассмотрим сосуд, в котором содержится N_A частиц, и они занимают объем V_0. Выделим внутри малый объем V. Вероятность обнаружить там одну частицу

$$\omega_1 = \frac{V}{V_0},$$

вероятность встретить там две частицы

$$\omega_2 = \left(\frac{V}{V_0}\right)^2,$$

вероятность там встретить все N_A частиц

$$\omega_{N_A} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{N_A}. \qquad (4)$$

Поскольку выделенный объем мал, то вероятность $\omega_{N_A} << 1$, поэтому состояние никогда не реализуется. Для этого состояния статистический вес равен $Г = 1$, т.е. состояние реализуется единственным способом. Прологарифмируем выражение (4)

$$\ln\omega_{N_A} \sim N_A \ln\left(\frac{V}{V_0}\right).$$

Сравним это выражение с соотношением, полученным ранее для энтропии (для одного моля):

$$S \sim R\ln\frac{V}{V_0}.$$

Можно записать $S \sim k\ln\omega_{N_A}$. Поскольку вероятность состояния $\omega \sim Г$, то между энтропией системы и статистическим весом ее состояния существует связь, которая описывается *формулой Больцмана*

$$S = k\ln Г.$$

Данная формула позволяет дать статистическое толкование второго начала термодинамики. Для реальных процессов $\Delta S \geq 0$, следовательно, замкнутая термодинамическая система переходит из состояний менее вероятных в состояния более вероятные, пока не достигнет равновесного состояния, которое является наиболее вероятным. Иными словами, второе начало термодинамики имеет статистический характер, выражающий стремление системы, состоящей из большого количества частиц, к самопроизвольному переходу из состояний менее вероятных в состояния более вероятные.

К системам с малым количеством частиц второй закон термодинамики неприменим. Так в сильно разреженных газах происходят значительные случайные отклонения от равномерного распределения молекул по объему. Подобные явления называются флуктуациями (отклонения параметров от средних значений, например, плотности, температуры, давления). Флуктуации обусловлены тепловым движением частиц макросистемы. Можно показать, что в газе относительная флуктуация концентрации

$$\frac{\Delta n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{N}},$$

где N – количество частиц. Если в сосуде $N \sim 10^{23}$ частиц, то $\Delta n / n \sim 10^{-12}$. Видно, что вероятность заметных отклонений параметров газа от средних величин ничтожно мала. Совершенно иную картину мы получим в разреженных газах.

Реальный газ хорошо описывается уравнением

$$pV = \nu RT$$

только при малых плотностях, т.е. при небольшом давлении и достаточно высоких температурах. С повышением давления и уменьшением температуры наблюдается значительное отступление от уравнения Менделеева – Клапейрона.

Самым простым и вместе с тем дающим хорошие результаты при описании газов в широком интервале плотностей, оказалось *уравнение Ван-дер-Ваальса*

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)\left(V_m - b\right) = RT,$$

где p – давление газа, V_m – молярный объем; a и b – постоянные Ван-дер-Ваальса, имеющие для разных газов различные значения. Поправка $\frac{a}{V_m^2}$ характеризует ту добавку к внешнему давлению, которая обусловлена взаимным притяжением молекул друг к другу. Вследствие того, что молекулы обладают конечным объемом, пространство, доступное для движения молекул, оказывается меньшим, чем объем сосуда V_m. Поправка b характеризует ту часть объема, которая недоступна для движения молекул. Уравнение можно переписать для произвольной массы m, учитывая, что $V = \nu V_m$

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{\nu} - b\right) = RT,$$

где $\nu = m/M$ – количество вещества. Записываем уравнение для ν молей газа

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(V - b\nu\right) = \nu RT. \tag{5}$$

Реальные газы следуют уравнению Ван-дер-Ваальса лишь приближенно. Воображаемый газ, точно подчиняющийся уравнению (5), называется ван-дер-ваальсовским.

Внутренняя энергия ван-дер-ваальсовского газа должна включать в себя, кроме кинетической энергии молекул, энергию взаимодействия между молекулами. Кинетическая энергия молекул равна внутренней энергии идеального газа

$$U = C_V T,$$

где C_V – изохорная теплоемкость газа.

При изменении объема газа от V_1 до V_2 внутреннее давление a/V_m^2 совершает работу, которая для 1 моля равна

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{a}{V_m^2} dV = \frac{a}{V_1} - \frac{a}{V_2}.$$

Так как работа внутренних сил равна изменению потенциальной энергии системы, то можно считать, что a/V_m есть искомое выражение для потенциальной энергии одного моля газа. Окончательно, внутренняя энергия одного моля газа может быть записана в виде $U_m = C_V T - \dfrac{a}{V_m}$.

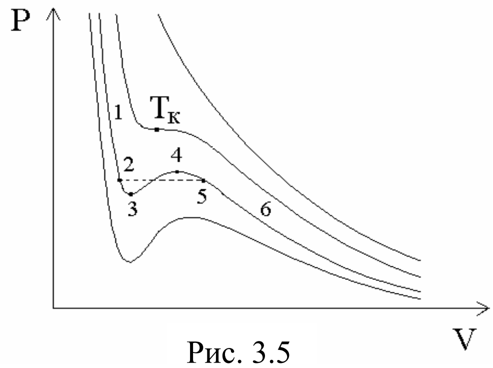


Рис. 3.5

На рис. 3.5 представлена графически связь между объемом и давлением газа при разных температурах (чем больше температура, тем выше располагается изотерма). Эти кривые называются изотермами Ван-дер-Ваальса. При высоких температурах они имеют форму, близкую к гиперболе и описывают газообразное состояние вещества (почти идеальный газ). По мере уменьшения температуры форма изотермы изменяется и при некоторой критической температуре обнаруживается точка перегиба. Рассмотрим изотермы ниже $T_к$. Измерения показывают, что изотермы реального газа приближаются к изотермам Ван-дер-Ваальса на участках 1 – 2, соответствующих жидким состояниям, и на участках 5 – 6, соответствующих парообразным состояниям вещества; однако в средней части реальная изотерма идет не по кривой 2 – 3 – 4 – 5, а по изобаре 2 – 5 (в точке 2 – кипящая жидкость, в точке 5 – насыщенный пар). Но если опыты провести с очень чистым веществом, а сжатие (расширение), подвод и отвод теплоты производить достаточно медленно, то можно обнаружить состояния, соответствующие участкам 2 – 3 (перегретая жидкость) и 5 – 4 (пересыщенный пар). Не реализуется только часть изотермы Ван-дер-Ваальса – участок 3 – 4.

Решая уравнение Ван-дер-Ваальса для критического состояния, получаем критические параметры:

$$V_к = 3b, \quad p_к = \frac{a}{27b^2}, \quad T_к = \frac{8a}{27Rb}.$$

Пользуясь этими соотношениями, можно по известным a и b вычислить критические параметры вещества и наоборот, определить постоянные a и b.

Фазой вещества называется совокупность однородных, одинаковых по своим свойствам частей системы. Например, в закрытом сосуде находится вода и над ней смесь пара воды и воздуха. В этом случае имеем дело с системой из двух фаз: одну фазу образует вода, вторую смесь воздуха и паров воды. Три фазы одного и того же вещества (твердая, жидкая, газообразная, или жидкая и две твердых) могут находиться в равновесии только при единственных значениях температуры и давления, которым на диаграмме $p - T$ соответствует тройная точка. В термодинамике доказывается, что равновесие более чем трех фаз одного и того же вещества невозможно.

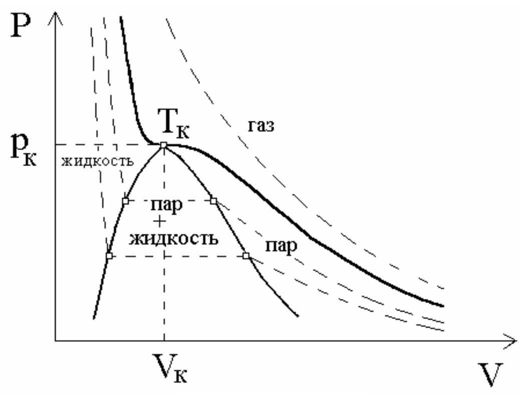


Рис. 3.6

Если провести линию через крайние точки горизонтальных участков изотерм, получается колоколообразная кривая, ограничивающая область двухфазных состояний вещества (рис. 3.6). При температурах выше критической вещество при любом давлении оказывается однородным.

Различают два типа превращений вещества из одной фазы в другую при изменении внешний условий: *фазовые переходы первого (1) и второго (2) рода*. При фазовом переходе 1 рода скачкообразно изменяются такие характеристики вещества, как плотность, удельный и молярный объемы, и что особенно характерно, выделяется или поглощается теплота, называемая *теплотой фазового перехода*. Примерами фазовых переходов 1 рода могут служить превращения вещества из одного агрегатного состояния в другое (испарение и конденсация, плавление и кристаллизация и т.д.), фазовые превращения твердых тел из одной кристаллической модификации в другую, переход вещества из сверхпроводящего состояния в нормальное под действием сильного магнитного поля.

Уравнение Клапейрона – Клаузиуса позволяет определить изменение температуры фазового перехода в зависимости от изменения давления при равновесно протекающем процессе

$$\frac{dp}{dT}=\frac{L}{T\left(V_2-V_1\right)},$$

где L – теплота фазового перехода; $(V_2 - V_1)$ – изменение объема вещества при переходе его из первой фазы во вторую; T – температура перехода (процесс изотермический).

При фазовом переходе 2 рода теплота не поглощается и не выделяется, скачкообразно изменяются такие характеристики вещества, как молярная теплоемкость, коэффициент теплового расширения, удельная проводимость, вязкость. Примерами фазовых переходов могут служить: переход некоторых металлов при низких температурах из нормального в сверхпроводящее состояние, переход гелия из одной модификации в другую, обладающую свойством сверхтекучести, переход вещества их ферромагнитного в парамагнитное состояние при температуре, называемой точкой Кюри.

Поверхность жидкости характеризуется текучестью, несжимаемостью и наличием свободной поверхности. В жидкостях расстояния между молекулами значительно меньше, чем в газах. Поэтому силы взаимодействия между молекулами играют существенную роль. В поверхностном слое жидкости возникает избыточное молекулярное давление, направленное по нормали внутрь жидкости. Переход молекул из глубины жидкости в поверхностный слой сопровождается работой против сил молекулярного притяжения. Молекулы жидкости в приповерхностном слое обладают дополнительной потенциальной энергией. Поскольку положение равновесия соответствует минимуму потенциальной энергии, жидкость, представленная самой себе, будет принимать форму с минимальной поверхностью. Силы поверхностного натяжения направлены по касательной к поверхности жидкости, перпендикулярно к участку контура, на который она действует. Коэффициент поверхностного натяжения равен

$$\sigma = \frac{F}{l}, \text{ или } \sigma = \frac{\Delta E}{\Delta S},$$

где F – сила поверхностного натяжения, действующая на контур l, ограничивающий поверхность жидкости; ΔE – изменение поверхностной энергии (пропорциональна изменению площади ΔS поверхности пленки).

Поверхность жидкости представляет собой как бы растянутую пленку, которая стремится сократиться, и при искривленной поверхности возникает добавочное давление под поверхностью жидкости. *Формула Лапласа* позволяет определить избыточное давление для произвольной поверхности жидкости двоякой кривизны

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

где R_1 и R_2 – радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных нормальных сечений поверхности жидкости; радиус кривизны положителен, если центр кривизны находится внутри жидкости (выпуклый мениск), и отрицателен, если центр кривизны находится вне жидкости (вогнутый мениск). В случае сферической поверхности

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}.$$

Высота подъема жидкости в капиллярной трубке

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r},$$

где θ – краевой угол; r – радиус капилляра; ρ – плотность жидкости; g – ускорение свободного падения.

3.2. Вопросы для самоконтроля

1. Какие состояния термодинамической системы и термодинамические процессы называются: а) равновесными; б) неравновесными?
2. Что такое функция состояния системы? Приведите примеры.
3. Дайте определение работы.

4. Что такое количество теплоты?
5. Чем определяется внутренняя энергия идеального газа и от чего зависит ее изменение?
6. Объясните, как изменяется внутренняя энергия газа при изотермическом, изохорном и изобарном процессах?
7. Какой процесс называется адиабатическим? Как связаны параметры состояния газа в данном процессе?
8. Что такое постоянная адиабаты?
9. Что такое тепловой двигатель?
10. Как определяется КПД кругового процесса?
11. Из каких процессов состоит цикл Карно? Каков его КПД и можно ли его превысить, работая с теми же нагревателем и холодильником?
12. Что такое энтропия? Каковы свойства этой функции состояния системы?
13. Каково статистическое толкование второго начала термодинамики?
14. Что такое статистический вес состояния?
15. Чем отличаются реальные газы от идеальных газов?
16. Изобразите графически и поясните характер взаимодействия двух молекул в зависимости от расстояния между их центрами.
17. Объясните смысл поправок в уравнении Ван-дер-Ваальса.
18. Изобразите на диаграмме p–V изотермы Ван-дер-Ваальса. Сравните их с экспериментальными.
19. Какая температура и какое состояние называют критическими?
20. Что в термодинамике понимают под термином «фаза»?
21. Чем отличаются фазовые переходы первого и второго рода?
22. Что представляет собой уравнение Клапейрона – Клаузиуса?
23. Каков физический смысл коэффициента поверхностного натяжения жидкости?
24. Как вычислить избыточное давление над искривленной поверхностью жидкости?
25. Запишите формулу высоты подъема жидкости в капиллярной трубке.

3.3. Практические занятия

Практическое занятие № 1 (2 часа)

Содержание занятия: Термодинамика. Первое и второе начало термодинамики. Круговые процессы (циклы).

Рекомендации по решению задач

Тема занятия	Тип задач	Рекомендации по решению
1. Первое начало термодинамики. Работа. Внутренняя энергия. Теплота	Взаимосвязь теплоты, работы и внутренней энергии для различных процессов. Вычисление теплоемкости газа	Внутренняя энергия зависит от числа степеней свободы молекул газа. Работа газа связана с изменением объема газа
2. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам. Зависимость теплоемкости идеального газа от вида процесса. Адиабатный процесс		
3. Обратимые и необратимые процессы. Круговой процесс (цикл). Цикл Карно	КПД круговых процессов	Для вычисления КПД необходимо, прежде всего, установить, чему равна суммарная работа газа в круговом процессе и какое количество теплоты получил газ от нагревателя. Воспользоваться формулой определения КПД

Практическое занятие № 2 (2 часа)

Содержание занятия: Энтропия. Уравнение Ван-дер-Ваальса. Фазовые переходы. Капиллярные явления.

Рекомендации по решению задач

Тема занятия	Тип задач	Рекомендации по решению
1. Энтропия. Второе начало термодинамики. Вычисление энтропии идеального газа. Статистическое толкование второго начала термодинамики	Вычисление изменения энтропии в различных процессах	Вычисление изменения энтропии производится путем интегрирования $\Delta S = \int_1^2 \frac{dU + dA}{T}$
2. Отступления от законов идеальных газов. Реальные газы. Уравнение Ван-дер-Ваальса	Задачи на взаимосвязь поправок с критическими параметрами	Воспользоваться формулами взаимосвязи критических параметров с поправками
3. Фазовые переходы I и II рода. Критическое состояние. Уравнение Клапейрона – Клаузиуса	Определение температуры фазового перехода	
4. Поверхностное натяжение. Капиллярные явления	Нахождение поверхностной энергии, коэффициента поверхностного натяжения, высоты подъема жидкости в капиллярной трубке, нахождение избыточного давления над искривленной поверхностью	Если мениск выпуклый, то добавочное давление $p > 0$, если вогнутый $p < 0$

3.4. Примеры решения задач

Пример 1.

Идеальный газ, совершающий цикл Карно, произвел работу A = 600 Дж. Температура нагревателя T_1 = 500 К, холодильника – T_2 = 300 К. Определить: 1) КПД цикла; 2) количество теплоты, отданное холодильнику за один цикл.

Решение. КПД цикла Карно $\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1}$.

Количество теплоты, отданное холодильнику

$$Q_2 = Q_1 - A, \tag{1}$$

а количество теплоты полученной от нагревателя

$$Q_1 = \frac{A}{\eta}.$$

Подставив это выражение в (1), получим

$$Q_2 = A\left(\frac{1}{\eta} - 1\right).$$

Вычисляя, получаем: η = 0,4; Q_2 = 900 Дж.

Пример 2.

Некоторое количество воздуха адиабатически сжимается. При этом его давление изменяется от p_1 = 100 кПа до p_2 = 1,2 МПа. Затем сжатый воздух охлаждают до температуры исходного состояния. Определить давление p_3 в конечном состоянии.

Решение. При адиабатическом процессе связь параметров p и T состояния определяется уравнением $\dfrac{T^{\gamma}}{p^{1-\gamma}} = \text{const}$.

Для 1-го и 2-го состояния $\dfrac{T_1^{\gamma}}{p_1^{1-\gamma}} = \dfrac{T_2^{\gamma}}{p_2^{1-\gamma}}$, где $\gamma = 1{,}4$ для воздуха.

Во втором процессе, при изохорном охлаждении

$$\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_3}{T_3}. \tag{1}$$

Выражаем T_2 и подставляем в (1), учитывая, что $T_3 = T_1$. Находим p_3

$$p_3 = p_2\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Вычисляя, получаем $p_3 = 590$ кПа.

Пример 3.

Некоторая масса азота в первом состоянии имеет давление $p_1 =$ $= 100$ кПа и объем $V_1 = 10^{-2}$ м^3, а во втором состоянии $p_2 = 300$ кПа и объем $V_2 = 0{,}4\cdot10^{-2}$ м^3. Переход из первого состояния во второе осуществляется в два этапа: сначала по изобаре, а затем по изохоре (рис. 3.7). Определить изменение внутренней энергии $\Delta U = 0$, совершенную газом работу A и количество теплоты, поглощенной газом Q.

Решение. Внутренняя энергия системы является ее функцией состояния, следовательно, изменение определяется разностью энергий в конечном и начальном состояниях $\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R\left(T_2 - T_1\right)$, $I = 5$ – число степеней свободы для молекул азота. Разность температур определим, учитывая уравнение Менделеева – Клапейрона

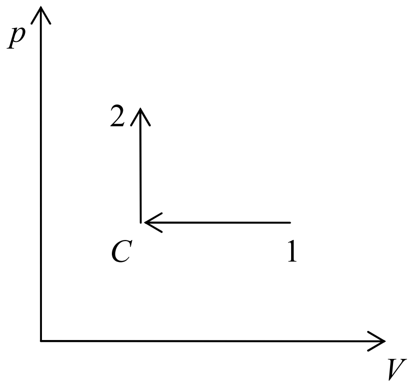


Рис. 3.7

$$T_2 - T_1 = \frac{M}{mR}\left(p_2V_2 - p_1V_1\right).$$

Следовательно $\Delta U = \frac{i}{2}\left(p_2V_2 - p_1V_1\right)$.

Переход системы из состояния 1 в состояние 2 сопровождается совершением работы лишь на участке 1C

$$A = A_{1C} = p_1\left(V_2 - V_1\right),$$

а на участке C2 работа равна нулю.

Согласно первому началу термодинамики количество теплоты, сообщенное системе, идет на приращение внутренней энергии газа и на совершение работы

$$Q = \Delta U + A_{1C} = \frac{i}{2}\left(p_2V_2 - p_1V_1\right) + p_1\left(V_2 - V_1\right).$$

Подставляя числовые значения, вычисляем: $\Delta U = 500$ Дж, $A = -\,600$ Дж, $Q = -\,100$ Дж.

Пример 4.

Определить изменение энтропии ΔS при изотермическом расширении азота массой m = 10 г, если давление газа уменьшилось от p_1 = 0,1 МПа до p_2 = 50 кПа.

Решение. Учитывая, что процесс изотермический, изменение энтропии равно

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\int_1^2 dQ = \frac{Q}{T}. \qquad (1)$$

Согласно первому началу термодинамики, количество теплоты полученной газом при изотермическом процессе равно работе $Q = A$, т.к. $\Delta U = 0$, а работа газа в этом процессе равна

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Поэтому искомое изменение энтропии

$$\Delta S = \frac{m}{M} R \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Вычисляя, получаем $\Delta S =$ 2,1 Дж/К.

Пример 5.

Некоторый газ количеством вещества $\nu =$ 1000 моль занимает объем V_1 = 1 м^3. При расширении газа до объема 1,5 м^3 была совершена работа против сил межмолекулярного притяжения, равная A = 45,3 кДж. Определить поправку a, входящую в уравнение Ван-дер-Ваальса.

Решение. Работа против сил межмолекулярного притяжения выражается формулой

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p' dV,$$

где $p' = \dfrac{\nu^2 a}{V^2}$ – внутреннее давление, обусловленное взаимодействием молекул. Таким образом, работа равна

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu^2 a}{V^2} dV = \nu^2 a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right),$$

откуда искомая поправка $a = \dfrac{AV_1V_2}{\nu^2\left(V_1 - V_1\right)}$.

Вычисляя, получаем a = 0,136 Нм^4/моль^2.

Пример 6.

В сосуд с ртутью опущен открытый капилляр. Разность уровней ртути в сосуде и капилляре h = 37 мм. Принимая плотность ртути ρ = 13,6 г/см^3, а ее поверхностное натяжение σ = 0,5 Н/м, определить радиус кривизны ртутного мениска в капилляре.

Решение. Избыточное давление, вызванное кривизной мениска

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}.$$

Так как ртуть – несмачивающая жидкость, то она в капилляре опускается на такую высоту, при которой гидростатическое давление столба жидкости ртути $p = \rho g h$ уравновешивается избыточным давлением Δp, т.е. $\dfrac{2\sigma}{R} = \rho g h$.

Отсюда радиус кривизны ртутного мениска $R = \dfrac{2\sigma}{\rho g h}$.

Вычисляя, получаем R = 2,03 мм.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. – М.: Наука, 1973.
2. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики: Учебное пособие для втузов. – М.: Высш. школа, 1989.
3. Макаренко Г.М. Физика. Т 1. – Мн.: Дизайн ПРО, 2003
4. Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: Наука, 1973
5. Савельев И.В. Курс общей физики. Учебное пособие. В 3-х томах. Т. 1. Механика. Молекулярная физика. – М.: Наука, 1987.
6. Сивухин Д.В. Термодинамика и молекулярная физика. Учеб. пособие для вузов. 3-е изд., испр. и доп. – М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.
7. Трофимова Т.И. Сборник задач по курсу физики для втузов. – М.: ОНИКС 21 век, 2003.

Дополнительная

8. Астахов А.В. Курс физики. Т. 1. – М.: Наука, 1977.
9. Зисман Г.А., Тодес О.М. Курс общей физики. Т. 1. – М.: Наука, 1969.
10. Иродов И.Е., Савельев И.В., Замша О.И. Сборник задач по общей физике. – М.: Наука, 1975.

Учебное издание

ВАБИЩЕВИЧ Сергей Ананьевич
ГРУЗДЕВ Владимир Алексеевич
ДУБЧЕНОК Геннадий Аркадьевич
ЗАЛЕССКИЙ Виталий Геннадьевич
МАКАРЕНКО Геннадий Макарович

ФИЗИКА

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

для студентов технических специальностей

В двух частях

Часть 1

Редактор Д.Н. Богачёв

Подписано в печать 6.04.05. Формат 60×84 1/16. Гарнитура Таймс. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 13,46. Уч.-изд. л. 12,2. Тираж 250. Заказ

Издатель и полиграфическое исполнение
Учреждение образования «Полоцкий государственный университет»

ЛИ 02330/0133020 от 30.04.04 ЛП № 02330/0133128 от 27.05.04

211440 г. Новополоцк, ул. Блохина, 29