

УДК 528.024.1

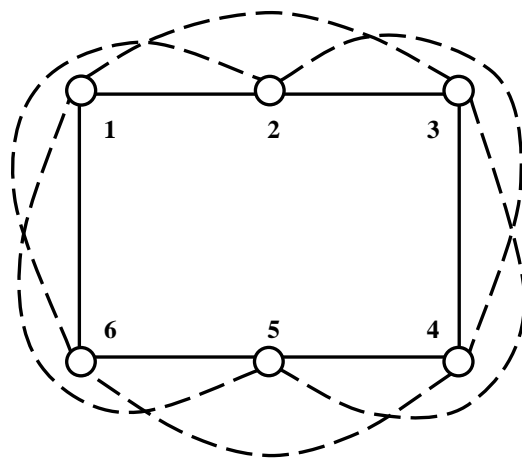
## О ПРОЕКТИРОВАНИИ РАВНОТОЧНЫХ НИВЕЛИРНЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ ЦЕЛЕЙ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОСАДОК ИНЖЕНЕРНЫХ СООРУЖЕНИЙ

*д-р техн. наук, проф. В.И. МИЦКЕВИЧ, Д.В. УСОВ*  
(Полоцкий государственный университет)

*Высотная опорная геодезическая сеть на инженерных объектах предназначается для решения основных задач – наблюдение за вертикальными смещениями горных пород в основании сооружения, используется для установки строительных конструкций и монтажа технологического оборудования в проектное положение. Исходя из поставленных задач на таких объектах требуется производить первоначальные и повторные нивелирные измерения с максимально возможной высокой точностью. Но обеспечить высокую точность наблюдений, максимальную экономическую эффективность и простоту способов измерений можно лишь на основе обоснованного проекта геометрической схемы нивелирной сети. В статье на примере разнообразных по своей конфигурации нивелирных сетей описана технология создания равноточных нивелирных сетей с различными весами измерений. Исследованы схемы и условия, при которых формируются равноточные нивелирные сети.*

**Введение.** При исследовании многочисленных различных по своей схеме нивелирных сетей было установлено, что при соблюдении определенных условий можно запроектировать и реализовать на местности геодезические равноточные построения различного типа.

Ранее все исследования проводились под условием, что измерения для равноточных нивелирных сетей (рис. 1) имеют один и тот же вес  $P = E$  как для внутреннего хода, так и для замыкающих [1].



○ – пункт нивелирования; — — — основные связи;  
- - - - дополнительные связи (замыкающие)

Рис. 1. Равноточный замкнутый нивелирный ход с замыкающими

В геодезическом производстве данное условие практически сложно выполнимо, так как расстояние между пунктами внутреннего хода и пунктами замыкающих сети разное.

Дальнейшие исследования показали, что можно получить равноточные нивелирные сети при неравноточных измерениях для внутреннего хода и замыкающих.

Например, для сети, показанной на рисунке 1, вес измерений внутреннего хода  $P = E$ , а для замыкающих  $P = 0,5E$ . Если бы дополнительные измерения (замыкающие) объединяли три внутренних хода, то  $P = 0,33E$ , если четыре, то  $P = 0,25E$ , т.е. пропорционально расстоянию между пунктами.

Докажем данное утверждение на примере нивелирной сети, изображенной на рисунке 1, используя формулы (1) – (4) [2, 3].

Точность высотного положения пункта  $i$  можно вычислить по следующим формулам:

$$m_{H_i} = \mu \sqrt{Q_{ii}}; \quad \mu = \sqrt{\frac{V^T P V}{r}}, \quad (1)$$

где  $m_{H_i}$  – средняя квадратическая погрешность отметки;  $V$  – поправки из уравнивания;  $r$  – число избыточных измерений;  $P$  – матрица весов избыточных измерений.

Вес измерений можно вычислить используя следующие формулы:

$$P = \frac{1}{\sigma_h^2}; \quad P = \frac{c}{L}; \quad P = \frac{1}{j}, \quad (2)$$

где  $\sigma_h = const$  – точность измеренных превышений;  $L$  – длина хода в километрах;  $r$  – число избыточных измерений;  $j$  – число станций нивелирования для конкретного превышения.

Диагональные элементы  $Q_{ii}$  формулы (1) можно найти, используя матричное выражение:

$$\begin{aligned} Q &= F P^{-1} F^T, \\ F &= (A^T P A)^+ A^T P. \end{aligned} \quad (3)$$

При проектировании нивелирных сетей вместо выражения (1) будем использовать формулу:

$$m_{H_i} = \sigma_h \sqrt{Q_{ii}}. \quad (4)$$

Приведем численные значения обратной матрицы весов  $Q$  для указанной нивелирной сети при условии, что  $P = E$ .

$$Q_{6 \times 6} = \begin{pmatrix} 0,1806 & -0,0278 & -0,0278 & -0,0694 & -0,0278 & -0,0278 \\ -0,0278 & 0,1806 & -0,0278 & -0,0278 & -0,0694 & -0,0278 \\ -0,0278 & -0,0278 & 0,1806 & -0,0278 & -0,0278 & -0,0694 \\ -0,0694 & -0,0278 & -0,0278 & 0,1806 & -0,0278 & -0,0278 \\ -0,0278 & -0,0694 & -0,0278 & -0,0278 & 0,1806 & -0,0278 \\ -0,0278 & -0,0278 & -0,0694 & -0,0278 & -0,0278 & 0,1806 \end{pmatrix}.$$

В данной матрице значения диагональных элементов одинаковы, используя формулу (4) мы получим одинаковые погрешности положения пунктов для всей сети.

Приведем численные значения обратной матрицы весов  $Q$  для нивелирной сети при условии, что вес измерений внутреннего хода  $P = E$ , а для замыкающих  $P = 0,5E$ , т.е.

$$P = \text{diag}(1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0,5 \ 0,5 \ 0,5 \ 0,5 \ 0,5 \ 0,5);$$

$$Q_{6 \times 6} = \begin{pmatrix} 0,2491 & -0,0120 & -0,0620 & -0,1009 & -0,0620 & -0,0120 \\ -0,0120 & 0,2491 & -0,0120 & -0,0620 & -0,1009 & -0,0620 \\ -0,0620 & -0,0120 & 0,2491 & -0,0120 & -0,0620 & -0,1009 \\ -0,1009 & -0,0620 & -0,0120 & 0,2491 & -0,0120 & -0,0620 \\ -0,0620 & -0,1009 & -0,0620 & -0,0120 & 0,2491 & -0,0120 \\ -0,0120 & -0,0620 & -0,1009 & -0,0620 & -0,0120 & 0,2491 \end{pmatrix}.$$

Как видно из вычислений, диагональные элементы обратной матрицы весов одинаковые, применяя формулу (4) получим одинаковые для всех пунктов нивелирной сети средние квадратические погрешности определения отметок  $m_{H_i}$ , значит сеть равноточная при различных весах измерений.

**Основная часть.** Рассмотрим решение некоторых задач по проектированию нивелирных сетей.

Допустим, что отметки пунктов необходимо получить с точность  $m_{H_{\text{дон}}} \leq 0,1 \text{ мм}$  при точности измерения превышения  $\sigma_h \leq 0,1 \text{ мм}$ . Следовательно,  $(\sqrt{Q_{ii}})_{\text{дон}} \leq 1$ .

При проектировании нивелирных сетей целесообразно знать величину  $q_i^1 = \sqrt{Q_{\max}}$ , где цифрой 1 отмечено число линий между реперами хода. При этом:

$q_p$  – для равноточной сети без исходных пунктов;

$q_n$  – для неравноточной сети без исходных пунктов;

$q_c$  – для свободной сети.

В таблицах 1 – 3 приведены значения  $q_p, q_n, q_c$  для различного числа пунктов замкнутого нивелирного хода  $k$ , с различным количеством превышений  $n$  и различными весами измерений, как было указано выше, состоящих из замыкающих через одну, две и три внутренние линии, что изображено на рисунке 1.

Таблица 1

Величины  $q_p, q_n, q_c$  для замкнутых нивелирных сетей при  $T = 1$

Число пунктов $k$	Количество превышений $n$	Нивелирная сеть		
		равноточная $q_p^1$	неравноточная $q_n^1$	свободная $q_c^1$
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
4	4	0,559	0,935	1,000
5	5	0,632	1,095	1,059
6	6	0,697	1,236	1,225
7	7	0,756	1,363	1,309
8	8	0,810	1,479	1,414
9	9	0,861	1,587	1,491
10	10	0,908	1,688	1,580
11	11	0,954	1,784	1,651
12	12	0,997	1,874	1,732
13	13	1,038	1,961	1,797
14	14	1,077	2,044	1,871
15	15	1,116	2,124	1,932
20	20	1,289	2,485	2,236
30	30	1,580	3,083	2,739
40	40	1,825	3,583	3,162
50	50	2,041	4,021	3,536

Таблица 2

Величины  $q_p, q_n, q_c$  для замкнутых нивелирных сетей при  $T = 2$

Число пунктов $k$	Количество превышений $n$	Нивелирная сеть		
		равноточная $q_p^2$	неравноточная $q_n^2$	свободная $q_c^2$
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
5	10	0,467	0,527	0,763
6	12	0,500	0,565	0,836
7	14	0,528	0,599	0,876
8	16	0,555	0,629	0,926
9	18	0,581	0,656	0,966
10	20	0,604	0,681	1,013
11	22	0,628	0,705	1,050
12	24	0,650	0,727	1,092
13	26	0,672	0,749	1,127
14	28	0,692	0,769	1,166
15	30	0,712	0,789	1,199
20	40	0,805	0,879	1,364
30	60	0,963	1,030	1,641
40	80	1,098	1,159	1,878
50	100	1,218	1,275	2,088

Таблица 3

Величины  $q_p, q_n, q_c$  для замкнутых нивелирных сетей при  $T = 3$

Число пунктов $k$	Количество превышений $n$	Нивелирная сеть		
		равноточная $q_p^3$	неравноточная $q_n^3$	свободная $q_c^3$
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
7	21	0,456	0,485	0,722
8	24	0,472	0,504	0,764
9	37	0,488	0,521	0,786
10	30	0,503	0,537	0,814
11	33	0,517	0,552	0,836
12	36	0,531	0,566	0,862
13	39	0,544	0,580	0,885
14	42	0,558	0,593	0,910
15	45	0,570	0,606	0,931
20	60	0,629	0,665	1,038
30	90	0,732	0,766	1,222
40	120	0,822	0,853	1,382
50	150	0,903	0,932	1,526

По данным таблиц 1 – 3 видно, что  $q_p \leq q_c \leq q_n$ , при  $k > 4$ , т.е. замкнутые равноточные сети с различным числом замыкающих, точнее, аналогичных неравноточных и свободных нивелирных сетей.

Исследования показали, что выражение  $q_p \leq q_c \leq q_n$  также справедливо для двухконтурных (рис. 2) и универсально-равноточных нивелирных сетей, что подтверждено данными таблицы 4 и таблицы 5.

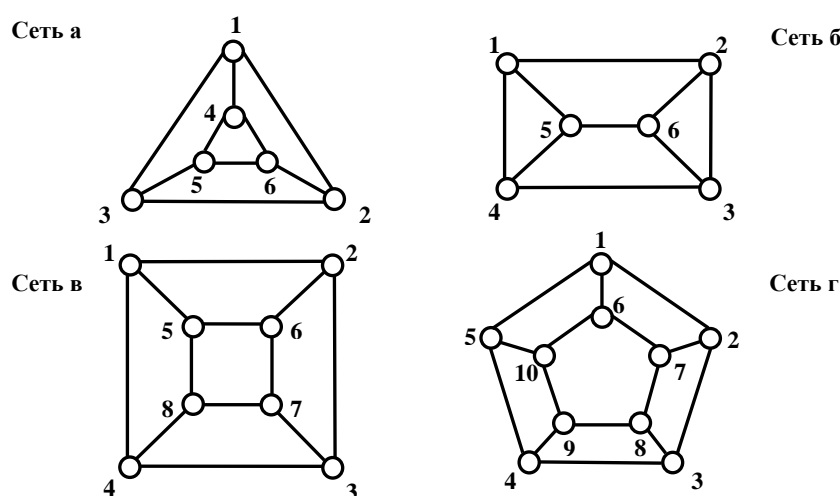


Рис. 2. Равноточный двухконтурный нивелирный ход

Таблица 4

Величины  $q_p, q_n, q_c$  для двухконтурных нивелирных сетей при  $P = 1$

Число пунктов $k$	Количество превышений $n$	Нивелирная сеть		
		равноточная $q_p$	неравноточная $q_n$	свободная $q_c$
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
Сеть а	9	0,511	0,643	0,856
Сеть б	9	0,511	0,697	0,856
Сеть в	12	0,550	0,711	0,913
Сеть г	15	0,587	0,765	0,957

Таблица 5

Величины  $q_p, q_n, q_c$  для универсально-равноточных нивелирных сетей при  $P = 1$

Число пунктов $k$	Количество превышений $n$	Нивелирная сеть		
		равноточная $q_p$	неравноточная $q_n$	свободная $q_c$
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
4	6	0,433	0,577	0,707
5	10	0,400	0,516	0,632
6	15	0,373	0,471	0,577
7	21	0,350	0,436	0,535
8	28	0,331	0,408	0,500
9	36	0,314	0,385	0,471
10	45	0,300	0,365	0,447

С помощью данных, представленных в таблицах, можно решать задачи следующего характера: известна точность измеренных превышений  $\sigma_n$  и средняя квадратическая погрешность отметки  $m_{H_i}$ , требуется определить число пунктов нивелирной сети  $k$ .

Например,  $\sigma_n = 0,2 \text{ мм}$ ,  $m_{H_{дон}} = 0,4 \text{ мм}$ .

Используя формулу (4) можно найти величину  $q = \sqrt{Q_{\max}} = \frac{m_{H_{дон}}}{\sigma_n} = 2$ , а по данной величине из таблиц можно выбрать максимальное количество пунктов, которое можно использовать для построения сети на местности, чтобы удовлетворить поставленным условиям.

Так, видно, что для равноточной сети величина  $k < 50$ , для свободной сети  $k < 20$ , для неравноточной сети (незамкнутого нивелирного хода)  $k < 13$ .

Допустим, что для некоторого объекта величина  $q = 0,5 \text{ мм}$  ( $\sigma_n = 0,1 \text{ мм}$ ,  $m_{H_{дон}} = 0,05 \text{ мм}$ ). Такое значение  $q$  возможно для равноточной сети с замыкающими (см. табл. 2) при  $k = 5$ , используя такие же условия другие сети не дадут установленной точности при  $k = 5$ .

Приведем результаты обработки равноточных нивелирных сетей с различным числом замыкающих, применяя разные веса измерений для внутреннего хода и дополнительных построений. Данные по обработке приведем в таблице 6, где покажем величины  $q_p$  для всех пунктов сети.

Таблица 6

Результаты обработки равноточных нивелирных сетей с различными весами измерений при  $T = 2, T = 3, T = 4$

Число пунктов $k$	$q_p^2$		$q_p^3$		$q_p^4$	
	$P = 1,0$	$P = 1,0$ $P = 0,5$	$P = 1,0$	$P = 1,0$ $P = 0,5$ $P = 0,33$	$P = 1,0$	$P = 1,0$ $P = 0,5$ $P = 0,33$ $P = 0,25$
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>
5	0,40	0,47	–	–	–	–
6	0,42	0,50	–	–	–	–
7	0,45	0,53	0,35	0,46	–	–
8	0,49	0,56	0,36	0,47	–	–
9	0,51	0,58	0,38	0,49	0,32	0,44
10	0,53	0,60	0,39	0,50	0,32	0,46
11	0,54	0,63	0,39	0,52	0,33	0,46
12	0,55	0,65	0,40	0,53	0,33	0,47
13	0,56	0,67	0,40	0,54	0,33	0,48

По результатам таблицы 6 можно сделать следующие **выводы**: нивелирная сеть остается равноточной при измерениях с различными весами, потери точности при этом остаются незначительными, что видно из сравнения колонок 2 и 3, 4 и 5, 6 и 7.

В таблице 7 покажем зависимость точности определения отметок в равнооточных сетях от количества измерений в сети и веса данных измерений.

Для сравнения точности определения отметок будем использовать выражение  $\gamma = \frac{\sqrt{Q_E}}{\sqrt{Q_{P_i}}}$ , в котором  $\gamma$  – величина, показывающая, насколько одна сеть лучше другой;  $\sqrt{Q_E}$  – получено при  $P = E$ ;  $\sqrt{Q_{P_i}}$  – получено при  $P = 0,5E$ ,  $P = 0,33E$ ,  $P = 0,25E$ .

Таблица 7

Сравнительная характеристика равнооточных нивелирных сетей

Обозначения	Сеть 1	Сеть 2 $T = 2$	Сеть 3 $T = 3$	Сеть 4 $T = 4$
		$P = 1,0$	$P = 1,0$ $P = 0,5$	$P = 1,0$ $P = 0,5$ $P = 0,33$
<i>I</i>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<i>n</i>	10	20	20	40
<i>M</i>	0,5883	0,6225	0,3967	0,3364
$\mu$	1,0000	1,0294	0,7878	0,7383
$\sqrt{Q}$	0,5083	0,6047	0,5036	0,4556
$\gamma$	–	1,5	1,8	2,0

По данным таблицы видно, что замыкающие при  $T = 2$ ,  $T = 3$ ,  $T = 4$  улучшили нивелирную сеть по сравнению с замкнутым нивелирным ходом в 1,5, 1,8 и 2,0 раза.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Усов, Д.В. Методика построения равнооточных нуль-свободных нивелирных и спутниковых геодезических сетей / Д.В. Усов, О.О. Усова, В.В. Ялтыхов // Земля Беларуси. – 2009. – № 1. – С. 38 – 40.
2. Ялтыхов, В.В. Применение метода Лр-оценок в уравнительных вычислениях / В.В. Ялтыхов, Н.О. Куприенко, П.М. Левданский. – Новополоцк: ПГУ, 2008. – 100 с.
3. Маркузе, Ю.И. Уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей / Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1982. – 191 с.

Поступила 26.10.2010

**ABOUT DESIGNING OF SEMI-UNIFORMLY PRECISE LEVELLING GEODETIC NETWORKS FOR THE PURPOSES OF DETERMINING OF SETTLEMENT OF ENGINEERING STRUCTURES**

**V. MITSKEVICH, D. USOV**

*Missions of leveling reference geodetic network for engineering objects are monitoring of vertical displacement of rocks at the foundation of structure, using for installation of building unit and assembling of technological equipment at locations mentioned by project. Therefore it is required to conduct initial and replicated leveling measurements with high maximum likelihood precision. It is possible to ensure high accuracy of observations, maximum economical affectivity and simplicity of measurement methods only on the basis of well founded design of geometric schema of leveling network. In the paper description of designing of semi-uniformly precise levelling networks with the diverse weights of measurements is presented. Examples of various configurations of levelling networks are provided. Schemas and conditions of designing of semi-uniformly precise levelling networks are studied.*