Н.Н. Леонов
Дополнительные главы высшей математики для гуманитариев

В настоящем тексте приводятся основы разделов математики, которые обычно не включаются в традиционные курсы. Тем н менее, в основе совей они, с одной стороны, не слишком трудны, а с другой – применимы в гуманитарных исследованиях, что делает ознакомление с ними студентов и специалистов в гуманитарных областях вполне целесообразным.

Выбор по нескольким критериям

Пусть имеются некоторые *объекты* или *варианты решения*, характеризующиеся некоторыми *критериями*. Пусть, например, имеются некоторые политики, характеризующиеся рейтингами среди всего населения, в деловых кругах и среди властной элиты (цифры условные).

	Рейтинг		
	Все население (Н)	Деловые круги (Д)	Властная элита (В)
П1	30	10	20
П2	20	30	10
П3	10	20	30
П4	10	10	10

Эти рейтинги играют роль критериев оценки политика. Кого из них по этим критериям следует поставить выше, если, как мы видим, один стоит выше по одному критерию, а другой – по другому? Сразу скажем, что общего решения этой задачи не существует. Вот некоторые из подходов.

Один из распространенных способов – *лексикографический* выбор. При этом способе критерии упорядочиваются по важности, и вначале варианты упорядочиваются по самому важному критерию, а там, где его значения одинаковы – по второму по важности критерию, и так далее. Недостаток этого способа – проблема упорядочивания критериев по важности. При одном упорядочении лучше окажется один вариант, а при другом – другой.

	Рейтинг		
	Все население (Н)	Деловые круги (Д)	Властная элита (В)
П1	30	10	20
П2	20	20	20
П3	20	20	30

Например, при упорядочении В – Н – Д на первом месте будет П3, так как он превосходит остальных по самому важному критерию В. У П1 и П2 значение этого критерия одинаково, следовательно нужно посмотреть на значение второго по важности критерия Н. Оно больше у П1. Таким образом, политики расставляются так: П3 – П1 – П2. Если же критерии упорядочить по правилу Н – Д – В, то на первом месте будет П1 (по значению первого по важности критерия Н). У П2 и П3 одинаковы значения и первого, и второго критерия, и лишь по третьему критерию П3 выходит на второе место. Таким образом, это правило можно применять, если из содержательных соображений мы можем упорядочить критерии по важности.

Другой распространенный способ решения многокритериальных задач – введение так называемого *интегрального критерия*. Простейшим является так называемый *линейный* критерий, который строится следующим образом. Пусть $k_1, k_2, ..., k_m$ - критерии. Каждому критерию k_j присвоим так называемый *вес* w_m и положим линейный интегральный критерий равным $I = w_1k_1 + w_2k_2 + ... + w_mk_m$. Таким образом, если для варианта v значения исходных критериев равны соответственно $k_1(v), k_2(v), ..., k_m(v)$, то значение интегрального критерия для него будет равно

$$I(v) = w_1k_1(v) + w_2k_2(v) + ... + w_mk_m(v).$$

Подчеркнем, что веса присваиваются критериям, а не вариантам! Этот способ обладает тем же недостатком, что и лексикографический: необходимы определенные основания для выбора весов, ибо при одном выборе весов будет лучше один вариант, а при другом – другой. Например, если в вышеприведенном примере критерию Н присвоить вес 10, а остальным критериям – 1, то значение интегрального критерия у П1 будет равно 10·30+1·10+1·20 = 330, а у П3 - 10·200+1·20+1·30 = 250, т.е. по этому интегральному критерию П1 превосходит П3. Если же критерию В присвоить вес 10, а остальным – по 1, то значения такого интегрального критерия для П1 и П3 будут соответственно 1·30+1·10+10·20 = 240 и 1·20+1·20+10·30 = 340, т.е. по такому критерию П3 превосходит П1 . Понятно, что при использовании интегрального критерия «возрастают шансы» у вариантов, имеющих большие значения для критериев с большим весом.

Еще один способ. Будем сравнивать варианты попарно, и будем считать лучшим из них того, кто превосходит другого по большему числу критериев. Такой выбор называется *мажоритарным*. С П4 все ясно – он уступает всем. Однако П1 по этому правилу выше П2, поскольку он превосходит его по двум критериям – Н и В, а П2 превосходит П1 только по одному критерию Д. Далее, П2 следует поставить выше П3, поскольку П2 превосходит П3 по двум критериям Н и Д, а тот его – по одному В. Казалось бы, П1 должен тем более превосходить Лебелько. Ан нет! П3 првосходит П1 по двум критериям – Д и В, тогда как П1 его – лишь по одному Н. Правила, где возможен такой порочный круг, называются *нетранзитивными*, что является их очевидным недостатком. В определенной мере этот недостаток при использовании мажоритарного метода можно устранить следующим образом. Будем рассматривать варианты как игроков некоторого турнира, и если по мажоритарному принципу вариант А оказался лучше варианта В, то будем считать, что А выиграл у В, а В, соответственно, проиграл. Если ни один из них не оказался лучше другого, то считаем, что они сыграли вничью. За выигрыш варианту дается 2 балла (очка), за ничью – 1 и за поражение – 0. Лучшим считается вариант, набравший наибольшую сумму очков.

Наконец, упомянем еще одно правило выбора, которое в основном играет роль предварительного отбора. Назовем вариант *паретовским*, или *оптимальным по Парето*, или *неулучшаемым*, если для него не существует другого варианта, который абсолютно лучше, т.е. который превосходит его по какому-то критерию и не уступает по остальным критериям. Иными словами, если паретовский вариант уступает какому-либо другому варианту по некоторому критерию, то непременно «отыгрывается» по другому критерию.
П1 и П2 – паретовские варианты, так как П2 уступает П1 по Н, но превосходит по В. П3 же уступает П1 по Н, П2 – по В и ни против кого из них не отыгрывается по Д, следовательно, он – непаретовский вариант. Практически при любом разумное методе многокритериального выбора непаретовский вариант не может оказаться лучше паретов-

	Рейтинг		
	Все население (Н)	Деловые круги (Д)	Властная элита (В)
П1	30	20	20
П2	20	20	30
П3	20	20	20

ского, поэтому целесообразно предварительно отобрать только паретовские решения, отбросив остальные, а затем применять другие правила выбора.

Ситуация многокритериального выбора часто возникает в классификации. Например, требуется расклассифицировать людей на три статусные группы (высокая, средняя и низкая) по четырем критериям: доход, образование, характер трудовой деятельности, круг общения. Понятно, что по одному критерию человек может относиться, скажем, к высшей группе, а по другому – к средней. В этом случае также можно применить вышеизложенные схемы. Особенно просто воспользоваться здесь мажоритарным подходом: например, если в рассматриваемом примере человек по трем критериям принадлежит к средней группе, а по одному – к низшей, то по большинству критериев он должен быть отнесен к средней группе. Отмеченного выше порочного круга здесь не возникает.

Отметим, что практически ни одна схеме выбора не гарантирует единственного решения. Это может иметь место даже при одном критерии, когда наилучшее значение критерия имеют несколько вариантов. Для того, чтобы сделать выбор из таких «неразличимых» вариантов, можно привлечь дополнительные критерии и (или) использовать другую схему выбора.

Основы нечеткой математики

Пусть X - множество жителей страны, A - подмножество молодых людей. Принадлежит ли этому подмножеству человек 18-летнего возраста? По-видимому, практически каждый ответит утвердительно. Подобным образом трудно сомневаться, что 70-летний человек этому множеству не принадлежит, то есть он принадлежит множеству $\overline{A}$ - дополнению множества A. Но как быть с человеком 35-ти лет? Как показывают наблюдения, суждения в этом случае оказываются противоречивыми. Можно сказать, что он «не совсем» принадлежит множеству A и точно так же «не совсем» принадлежит множеству $\overline{A}$. Другими словами, множество молодых людей несколько размытое или, как чаще говорят, *нечеткое*. Как это выразить математически? Будем рассматривать всевозможные подмножества некоторого «универсального» множества X. Для любого подмножества A множества X введем понятие *индикатора*, или характеристической функции. Эта функция обозначается μ_A и определяется следующим образом:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x \in A, \\ 0, \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Очевидно, индикатор вполне определен. Наоборот, если на множестве X задана функция μ, которая может принимать лишь два значения – 1 и 0 – то такая функция однозначно определяет множество A следующим образом:

$$A=\{x\in X \mid \mu(x)=1\}.$$

Следовательно, множество и его индикатор можно отождествить. Теперь можно объяснить идею нечеткого множества. Она очень проста и заключается в том, чтобы «разрешить» индикатору принимать не только значения 1 и 0, но и любые промежуточные. Итак, пусть задана функция μ_A, которая принимает значения в отрезке [0, 1]. *Нечетким множеством* A называется множество пар $(x, \mu_A(x))$, где x - элемент (точка) множества X, а $\mu_A(x)$ – значение функции μ_A на этом элементе (в этой точке). Это значение называется *степенью принадлежности* элемента x множеству A. Функция μ_A называется *функцией принадлежности* нечеткого множества A.

Здесь возникает важный вопрос: как задать функцию принадлежности? Самый популярный путь – использование экспертных оценок. Группе экспертов предъявляют элемент (объект) x и спрашивают, принадлежит ли он множеству A. Например, им задают вопрос: «Является ли человек 35-ти лет молодым?». В качестве $\mu_A(x)$ берется доля (процент) экспертов, которые отнесли объект к этому множеству, т.е. в нашем примере признали 35-летнего человека молодым. Есть и более сложные экспертные процедуры.

А теперь изучим вопрос о том, как выглядят обобщения теоретико-множественных операций для нечетких множеств. Мы будем пытаться получить эти обобщения через индикаторы обычных множеств. Пусть A – обычное множество. Поскольку

$$\mu_{\overline{A}}(x)=\begin{cases}1, \text{если } x\in \overline{A},\\ 0, \text{если } x\notin \overline{A},\end{cases}=\begin{cases}1, \text{если } x\notin A,\\ 0, \text{если } x\in A,\end{cases}$$

то $\mu_{\overline{A}}(x)=1-\mu_A(x)$. Эту формулу мы примем за определение дополнения нечеткого множества. Далее,

$$\mu_{A\cup B}(x)=\begin{cases}1, \text{если } x\in A\bigcup B,\\ 0, \text{если } x\notin A\bigcup B,\end{cases}=\begin{cases}1, \text{если } x\in A \text{ или } x\in B,\\ 0, \text{если } x\notin A \text{ и } x\notin B,\end{cases}=\begin{cases}1, \text{если } \mu_A(x)=1 \text{ или } \mu_B(x)=1,\\ 0, \text{если } \mu_A(x)=0 \text{ и } \mu_B(x)=0.\end{cases}$$

Тогда

$$\mu_{A\cup B}(x)=\max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

Эта формула также переносится на нечеткие множества. Продолжая в том же духе, получаем:

$$\mu_{A\cap B}(x)=\begin{cases}1, \text{если } x\in A\bigcap B,\\ 0, \text{если } x\notin A\bigcap B,\end{cases}=\begin{cases}1, \text{если } x\in A \text{ и } x\in B,\\ 0, \text{если } x\notin A \text{ или } x\notin B,\end{cases}=\begin{cases}1, \text{если } \mu_A(x)=1 \text{ и } \mu_B(x)=1,\\ 0, \text{если } \mu_A(x)=0 \text{ или } \mu_B(x)=0.\end{cases}$$

Отсюда получаем формулу:

$$\mu_{A\cap B}(x)=\min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

Теперь заметим, что для обычных множеств

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A, x \notin B\} = \{x \mid x \in A, x \in \overline{B}\} = A \cap \overline{B},$$

так что

$$\mu_{A \setminus B}(x) = \min\{\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\}.$$

Наконец, поскольку $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, то

$$\mu_{A \Delta B}(x) = \min\{\mu_{A \cup B}(x), 1 - \mu_{A \cap B}(x)\} = \min\{\max[\mu_A(x), \mu_B(x)], 1 - \min[\mu_A(x), \mu_B(x)]\}.$$

Пример (предложен В.В. Романейко). Нечеткие множества – это множества ценителей творчества различных писателей и поэтов.

Писатели и поэты	$\mu_A(x)$	$\mu_B(x)$	$\mu_{\overline{A}}(x)$	$\mu_{A \cup B}(x)$	$\mu_{A \cap B}(x)$	$\mu_{A \setminus B}(x)$	$\mu_{A \Delta B}(x)$
1. Булгаков	0,8	0,8	0,2	0,8	0,8	0,2	0,2
2. Пелевин	0,7	0,1	0,3	0,7	0,1	0,7	0,7
3. Сорокин	0,7	0	0,3	0,7	0	0,7	0,7
4. Пушкин	0,1	0,8	0,9	0,8	0,1	0,1	0,8
5. Кастанеда	0,3	0,1	0,7	0,3	0,1	0,3	0,3
6. Толстой	0,2	0,7	0,8	0,7	0,2	0,2	0,7
7. Чейз	0,3	0,7	0,7	0,7	0,3	0,3	0,7
8. Маринина	0,4	0,9	0,6	0,9	0,4	0,1	0,6
9. Мураками	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
10. Лондон	0,5	0,8	0,5	0,8	0,5	0,2	0,5

Основы теории графов

Граф – это множество точек, называемых *вершинами*, и соединяющих их линий, которые называются *ребрами*. Точнее говоря, любые две вершины могут либо соединяться, либо не соединяться ребром. Графы делятся на *ориентированные* и *неориентированные*. В ориентированном графе каждое ребро имеет направление (рис. 1), а в неориентированном – нет (рис. 2).

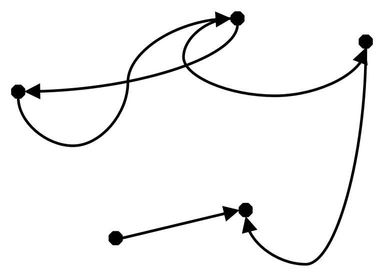

Рис. 1

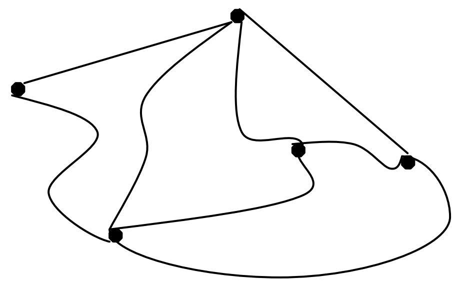

Рис. 2

Ребра ориентированного графа называются также *дугами*. Таким образом, в неориентированном графе любые две вершины могут быть либо соединены, либо не соединены ребром. В ориентированном графе любые две вершины x, y могут быть не соединены, соединены дугой в одном направлении или соединены двумя дугами в обоих направлениях – от x к y и от y к x. Подчеркнем, что в графе важен лишь факт наличия ребра между теми или иными вершинами и направления ребер (в ориентированном графе). Форма ребер (прямые, кривые) роли не играет. Например, графы, изображенные на рис. 3, эквивалентны, т.е. представляют собой один граф:

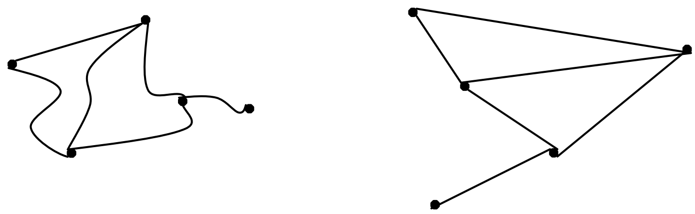

Рис 3.

Рассмотрим некоторые применения графов. Неориентированные графы могут быть использованы для изображения симметричных (двусторонних) отношений между объектами, например, отношения сотрудничества между людьми. Ориентированные графы удобны для изображения несимметричных (т.е. могущих быть односторонними) отношений – например, любви, зависти, заботы, подчиненности.

Ориентированные графы могут быть использованы для изображения отношения порядка. Если $x > y$, то мы соединяем x и y ребром, идущим в направлении от x к y, а если x и y несравнимы, то ребра между ними нет. Таким образом, любые две вершины либо соединены ребром лишь в одном направлении, либо не соединены вовсе.

Неориентированный граф называется *связным*, если из каждой вершины по ребрам можно добраться до любой другой вершины, и *несвязным* в противном случае. Таким образом, несвязный граф состоит из нескольких отдельных частей (рис. 4).

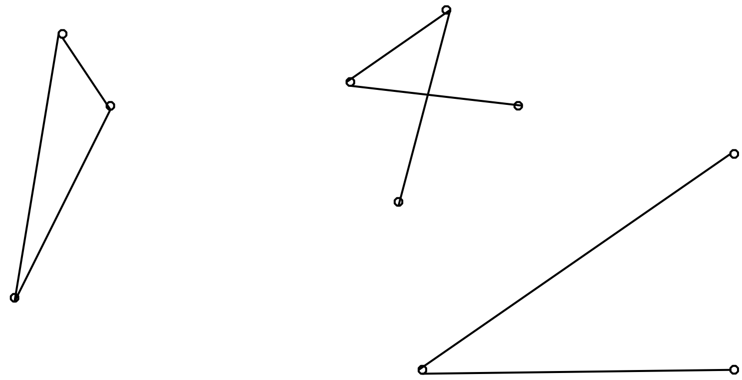

Рис. 4

Циклом в неориентированном графе называется замкнутый путь (контур) из ребер. Цикл называется *простым*, если каждая вершина в нем встречается один раз. Например, в графе, изображенном на рис. 5, цикл 1-5-2-1 – простой, а цикл 1-5-6-3-5-2-1 – нет.

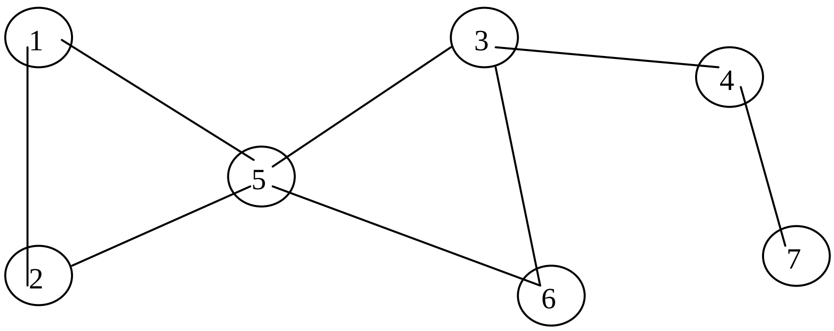

Рис. 5

Древовидный граф (*дерево*) – это неориентированный связный граф без циклов. Если в дереве выделена одна вершина, то она называется *корнем*. Можно наглядно показать, что при выборе любой вершины в качестве корня древовидный граф можно изобразить так, что он будет напоминать обычное дерево или куст - в обычном положении или корнем вверх (рис. 6).

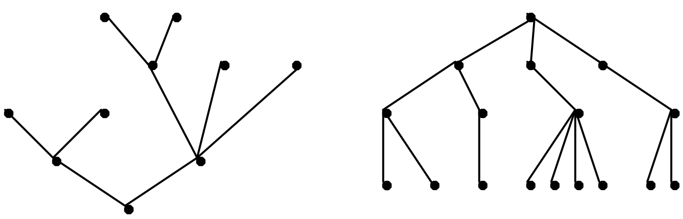

Рис. 6

Древовидный граф с корнем можно некоторым естественным способом превратить в ориентированный, а именно: направить все ребра от корня либо наоборот (рис. 7).

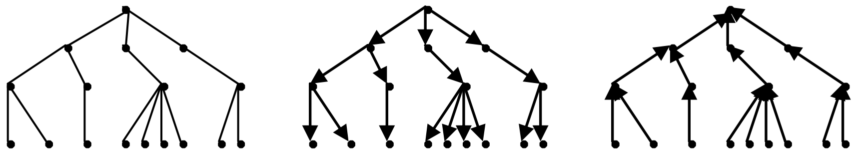

Рис. 7

Древовидным графом может быть описана любая строго иерархическая система – например, система административной подчиненности. Важная разновидность такой системы – иерархическая классификация. Например, разделим сельское население нашей страны по областям, затем – по районам, далее – по сельсоветам и, наконец, – по деревням. Введем следующее расстояние $d(x,y)$ между сельскими жителями x и y. Положим это расстояние равным единице, если эти люди живут в одной деревне, двум – если они живут в разных деревнях одного сельсовета, трем – в разных сельсоветах одного района, четырем – разных районах одной области и, наконец, пяти, если они проживают в разных областях. Напомним, что разумно определяемое расстояние удовлетворяет следующим условиям:

1. $d(x,y) \geq 0$;
2. $d(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
3. $d(x,y) = d(y,x) \, \forall x, y \in X$;
4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \, \forall x, y, z \in X$.

Можно показать, что введенное выше расстояние удовлетворяет этим условиям и даже более сильному, чем условие 4, условию

$$4'. \; d(x,y) \leq \max\left[d(x,z) + d(z,y)\right] \forall x, y, z \in X.$$

Это условие сильнее условия 4 в силу того очевидного факта, что максимум из двух неотрицательных чисел не больше их суммы. Условие $4'$ называется *ультраметрическим неравенством*, расстояние, удовлетворяющее этому условию, – *неархимедовым расстоянием* или *ультраметрикой*, а метрическое пространств с таким расстоянием – *неархимедовым метрическим пространством* или *ультраметрическим пространством*. Эти понятия играют большую роль в иерархической классификации и других приложениях.