

Министерство образования Республики Беларусь

**Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»**

**В. И. Мицкевич, П. В. Субботенко,
В. В. Ялтыхов**

**ОСНОВЫ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО
УРАВНИВАНИЯ
ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ**

**Новополоцк
ПГУ
2008**

УДК 528.063
ББК 26.12
М70

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

д-р физ.-мат. наук, проф. каф. высшей математики УО «ПГУ» Э. М. ПАЛЬЧИК;
канд. техн. наук, доц. каф. геодезии и кадастров УО «ПГУ» Г. Е. ГОЛОВАНЬ

Мицкевич, В. И.

М70 Основы многокритериального уравнивания геодезических сетей /
В. И. Мицкевич, П. В. Субботенко, В. В. Ялтыхов. – Новополоцк : ПГУ,
2008. – 128 с.
ISBN 978-985-418-717-4.

В монографии рассмотрена теория многокритериального уравнивания глано-
вых и высотных геодезических сетей. Показаны преимущества нового метода по
сравнению с известными методами уравнивания.

Предназначена для специалистов в области геодезии. Может быть полезна сту-
дентам и аспирантам геодезических специальностей.

УДК 528.063
ББК 26.12

ISBN 978-985-418-717-4

© Мицкевич В. И., Субботенко П. В., Ялтыхов В. В., 2008
© УО «Полоцкий государственный университет», 2008

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
1. Линейные и нелинейные методы уравнивания	5
1.1. Применение классического параметрического способа уравнивания	5
1.2. Уравнивательные вычисления на основе метода Lp-оценок	6
1.3. Решение систем нелинейных уравнений	7
2. Многокритериальная оптимизация в рамках метода наименьших квадратов	13
2.1. Примененис многокритериальной оптимизации при проектировании геодезических сетей	13
2.2. Уравнивание плановых геодезических сетей	15
2.3. Уравнивание нивелирных и спутниковых GPS сетей	18
3. Многокритериальная оптимизация с использованием нелинейного метода Ньютона	23
3.1. Постановка задачи	23
3.2. Выбор метода минимизации многокритериальной целевой функции	24
3.3. Уравнивание плановых геодезических сетей	30
3.3.1. Реализация тестовых примеров многокритериальной оптимизации функций (3.1) и (3.3)	30
3.3.2. Многокритериальное уравнивание нуль-свободных плановых геодезических сетей	31
3.3.3. Многокритериальная оптимизация под условием минимума ошибки определения площади	32
3.3.4. Многокритериальное уравнивание нуль-свободных плановых геодезических сетей	33
3.3.5. Многокритериальная оптимизация под условием минимума ошибки определения площади	39
3.4. Многокритериальное уравнивание нивелирных сетей	41
3.5. Вывод формулы для вычисления весов результатов измерений при многостепенной оптимизации	45
4. Линейные методы многокритериальной оптимизации	49
4.1. Вывод формулы вычисления весов результатов измерений при многостепенной оптимизации	49
4.2. О малости отклонений координат пунктов в методе многокритериальной оптимизации от их истинных значений	51
4.3. Сравнение результатов нелинейного и линеаризованного параметрического многокритериального уравнивания геодезических сетей	54
4.4. О выборе дополнительных целевых функций при многокритериальном коррелятном уравнивании геодезических сетей	62
4.5. Линеаризованное параметрическое коррелятное многокритериальное уравнивание геодезических сетей с помощью двух разных дополнительных целевых функций	64
4.6. О свойствах расширенной псевдообратной матрицы, вычисленной при многокритериальной оптимизации	64
Литература	67
Приложения	76

ПРЕДИСЛОВИЕ

При изучении проблем экономики, планирования, управления, организации производства и других все более широкое применение находит новое научное направление, получившее название «исследование операций».

При решении тех или иных задач каждое операционное исследование последовательно проходит три основных этапа:

- 1) постановка задачи и построение математической модели изучаемого процесса или явления;
- 2) анализ полученной модели и нахождение метода решения;
- 3) реализация найденного решения и результатов исследований на практике.

Во многих случаях процесс формализации задачи осуществляется путем выбора соответствующего критерия эффективности решения, определяющегося целевой функцией и системой ограничений.

Одним из наиболее серьезных недостатков современных методов исследования операций является то, что все они предполагают оценку решений по одному скалярному критерию эффективности. Однако в некоторых задачах по выбору решения имеется несколько критериев и все они должны учитываться для правильного выбора оптимального решения.

В книге изложена методика по использованию векторного критерия решения для уравнительных вычислений, которая приводит их к новым по качеству результатам.

1. ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ МЕТОДЫ УРАВНИВАНИЯ

1.1. Применение классического параметрического способа уравнивания

В теории ошибок результатов измерений рассматривается вопрос математической обработки многократных наблюдений одной и той же величины. Эта задача является частным случаем совместной обработки совокупности результатов измерений многих величин, например, длин сторон и углов в плановых сетях или превышений в нивелирных построениях [38].

Существуют два способа уравнивания: параметрический и коррелятный. В первом из них решают систему линейных уравнений

$$V_{N \times 1} = A_{N \times t} \delta X_{t \times 1} + L_{N \times 1}, \quad (1.1)$$

где N – количество измерений; t – число параметров.

В связи с наличием избыточных измерений $r = N - t$ неизвестные компоненты вектора поправок V определяются неоднозначно. Для получения однозначного решения V находят по методу наименьших квадратов, удовлетворяющих условию минимума целевой функции

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^N P_i V_i^2, \quad (1.2)$$

где P – вес измерения.

Математиками К.Ф. Гауссом и А.А. Марковым доказано, что этот принцип приводит к наилучшим оценкам $\hat{X} = X^0 + \delta X$; $V = L(\hat{X})$. Они при отсутствии систематических ошибок в измерениях являются несмещенными и обладают минимальной дисперсией.

Чтобы решить систему (1.1) под условием (1.2), переходят к решению системы нормальных уравнений

$$R \delta x + B = (A^T P A) \delta x + A^T P L. \quad (1.3)$$

Тогда

$$\delta x = -R^{-1} B = -F L; \quad F = (A^T P A)^{-1} A^T P, \quad (1.4)$$

где F – расширенная псевдообратная матрица.

Оценки метода наименьших квадратов (МНК) оптимальны в классе всех линейных несмещенных оценок, только если ошибки результатов измерений подчинены нормальному закону распределения. Эффективность оценок МНК резко падает даже при небольших отклонениях от нормальности [38].

1.2. Уравнительные вычисления на основе метода Lp-оценок

В геодезической литературе неоднократно приводились примеры геодезических измерений, в результате анализа которых был установлен характер распределения ошибок, отличный от нормального [10, 11, 20, 36, 40]. Поэтому при математической обработке результатов измерений имеет смысл сначала установить закон распределения ошибок по результатам измерений, а потом соответственно выбирать корректные методы уравнивания. В опубликованной литературе достаточно часто приводятся примеры неклассических способов уравнивания геодезических измерений. Одним из таких способов обработки измерений является метод Lp-оценок. Этот метод в рамках единого алгоритма обобщает метод наименьших квадратов ($p = 2$), метод наименьших модулей (МНМ) ($p = 1$), чебышевского минимакса ($p = \infty$) и ряд других, соответствующих значениям $1 < p < \infty$.

В общем случае плотность распределения имеет вид [14]

$$f(\zeta) = \frac{c_p}{2\Delta_p} \cdot \exp\left(-\frac{1}{p} \left| \frac{\zeta - \zeta_0}{\Delta_p} \right|^p\right), \quad (1.5)$$

где p и c_p – параметры распределения; Δ_p – параметр рассеивания; ζ и ζ_0 – значения случайной величины и ее математического ожидания.

Уравнивание измерений методом Lp-оценок сводится к решению системы уравнений под условием

$$\sum_{i=1}^n q_i \cdot |v_i|^p \rightarrow \min, p \geq 1, \quad (1.6)$$

где q_i – веса результатов измерений.

Эту формулу можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^n q_i \cdot |v_i|^{p-2} \cdot v_i^2 \rightarrow \min \quad (1.7)$$

Таким образом, уравнительные вычисления в методе Lp-оценок сводятся к итеративному методу наименьших квадратов с весовой матрицей C , уточняемой в процессе итераций

$$C = q_i \cdot |v_i|^{p-2} \quad (1.8)$$

В качестве первого приближения для матрицы C обычно используют значения v_i , полученные по методу наименьших квадратов. Элементы матрицы C находят по формуле

$$C_{ij} = \begin{cases} q_i \cdot |v_i|^{p-2}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Далее находят неизвестные δX и V

$$\delta X = -(A^T \cdot C \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot C \cdot L, \quad (1.9)$$

$$V = A \cdot \delta X + L, \quad (1.10)$$

где A – матрица коэффициентов системы уравнений; δX – вектор неизвестных; L – вектор свободных членов.

По значениям остаточных уклонений v вычисляется новое значение матрицы C , и итерационный процесс повторяется до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность решения

$$\frac{\|\delta X_j - \delta X_{j-1}\|}{\|\delta X_j\|} < \Delta \quad (1.11)$$

где Δ – заданная точность решения.

Если выполняется уравнение с $p > 2$, то полученное значение δX по (1.9) «корректируется» по формуле

$$\delta X_j = (1 - G) \cdot \delta X_{j-1} + G \cdot \delta X_j, \quad (1.12)$$

где $G = \frac{1}{(p-1)}$, а для вычисления матрицы C используют остаточные уклонения v , соответствующие новым значениям δX_j ; t – номер итерации. Данная модификация была введена Флетчером, Грантом и Хебденом в 1971 году [89].

При дальнейшем изложении будем придерживаться следующих обозначений:

$p_i \Rightarrow q_i$ – вес результата измерений;

$n \Rightarrow p$ – показатель степени $n = 2$ – МНК, $n = 1$ – МНМ и т.д.

1.3. Решение систем нелинейных уравнений

В нелинейных методах Lp-оценивания вместо функции (1.2) применяют следующую функцию

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^N P_i |L_i(X)|^n, \quad (1.13)$$

где $L(X) = T^{*m} - T^{nm}$ – свободный член нелинейного параметрического уравнения; P – вес результатов измерений.

Для случая Lp-оценивания методом максимального правдоподобия отыскивается максимум (1.5). Для того чтобы воспользоваться равенством (1.9), в работе [21] доказывается, что

$$C_i = \left(\frac{1}{\Delta n} \right)^n |L(X)|^{n-2}. \quad (1.14)$$

Здесь Δn и n устанавливаются из предварительного анализа результатов измерений с применением критериев согласия.

Сравнивая (1.8) и (1.14), видим, что

$$P = \left(\frac{1}{\Delta_n} \right)^n. \quad (1.15)$$

Из [58] известно, что

$$\Delta_n^2 = \frac{\sigma^2}{c^2}, \quad (1.16)$$

где σ – стандарт измерения;

$$c^2 = \frac{n^{3/n} \Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)} \quad (1.17)$$

с использованием гамма-функций. Теперь, зная что $\Delta_n = \frac{\sigma}{c}$, вместо (1.15) запишем

$$P_i = \left(\frac{c}{\delta_i} \right)^n. \quad (1.18)$$

Поскольку веса P_i относительны, то в качестве «с» можно брать константу $c=1$ или $c=\sigma_0$.

Выражение (1.17) можно использовать в случаях, когда для каждого измерения используется индивидуальная степень

$$P_i = \left(\frac{c_i}{\delta_i} \right)^{n_i}. \quad (1.19)$$

Теперь, если $n = 1$, получим целевую функцию

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_i}{\sigma} |L(X)|, \quad (1.20)$$

а при многостепенной оптимизации

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{c_i}{\sigma_i} \right)^n |L_i(X)|^n, \quad (1.21)$$

Как и в случае Lp-оценок для минимизации функции (1.13) применим метод Ньютона

$$X^{(i+1)} = X^{(i)} + H^{-1}(X^{(i)}) \Delta \Phi(X^{(i)}), \quad (1.22)$$

где матрица Гессе

$$H(X^{(i)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Phi(X^{(i)})}{\partial X_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 \Phi(X^{(i)})}{\partial X_1 \cdot \partial X_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 \Phi(X^{(i)})}{\partial X_n \cdot \partial X_1} & \dots & \frac{\partial^2 \Phi(X^{(i)})}{\partial X_n^2} \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

– градиент целевой функции.

$$\nabla \Phi(X^{(i)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi(X^{(i)})}{\partial X_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \Phi(X^{(i)})}{\partial X_n} \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

Частные производные получим по известным формулам численного дифференцирования

$$\frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{12 \cdot \varepsilon^2} (-\Phi_{2,0} + 16 \cdot \Phi_{1,0} - 30 \cdot \Phi_{0,0} + 16 \cdot \Phi_{-1,0} - \Phi_{-2,0}), \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_1 \cdot \partial x_1} = \frac{1}{4 \cdot \varepsilon^2} (\Phi_{1,1} - \Phi_{1,-1} - \Phi_{-1,1} + \Phi_{-1,-1}), \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} = \frac{1}{12 \varepsilon^2} (-\Phi_{2,0} + 8\Phi_{1,0} - 8\Phi_{-1,0} + \Phi_{-2,0}), \quad (1.27)$$

В формулах (1.25) – (1.27) шаг численного дифференцирования в точке с координатами x вычисляют так [84]

$$\varepsilon = 10^{-\left(\frac{m}{4} \sqrt{|m+10|} \frac{\pi}{3} \right)}, \quad (1.28)$$

где m – число значащих цифр вычисления производных.

Равенствами (1.22) – (1.28) реализуется нелинейный алгоритм уравнивания $y = |x|^n$. Установлено, что нелинейные методы требуют в 300 раз больше машинного времени, чем линейные. Поэтому, если возможно, переходят от нелинейного уравнивания к линейному.

Опираясь на формулы (1.22) – (1.24), продифференцируем функцию (1.13), применяя следующие формулы

$$y = |x|^n; \quad (1.29)$$

$$y' = n \cdot \text{sign}(x)|x|^{n-1}; \quad y'' = n(n-1)|x|^{n-2}, \quad (1.30)$$

где $\text{sign}(x)$ – функция передачи знака (или единица со знаком переменной x). В результате дифференцирования (1.21) получим

$$\nabla \Phi(X) = nAPS|L(X)|^{n-1}, \quad (1.31)$$

где A – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок, S – квадратная матрица со значениями $L(X)$ по диагонали.

В результате дифференцирования (1.31) получим матрицу Гессе

$$H(X) = n(n-1)A^TCA, \quad (1.32)$$

где
$$C = P \cdot \text{diag} |L(X)|^{n-2} \quad (1.33)$$

С учетом (1.31) – (1.33) формула (1.22) примет вид

$$\delta X = -\frac{1}{n-1} (A^TCA)^{-1} A^TPS|L(X)|^{n-1}. \quad (1.34)$$

Учитывая, что при $x \neq 0$; $y' = n|x|^{n-1} \frac{x}{|x|} = n|x|^{n-2}x$, можно записать

$$A^TPS|L(X)|^{n-1} = A^TCL(X).$$

Следовательно, вместо (1.34) окончательно запишем

$$\delta X = -\frac{1}{n-1} (A^TCA)^{-1} A^TC|L(X)| \quad (1.35)$$

Из анализа этого выражения видно, что методом Ньютона нельзя выполнить минимизацию функции (1.13) (или (1.20) при $n = 1$ и в тех случаях, когда при $n < 2$ любое $L_i(X) = 0$ дает деление на ноль при использовании (1.33).

Если $n = 2$, то выражение (1.35) будет таким

$$\delta X = (A^TCA)^{-1} A^TCL(X),$$

что соответствует алгоритму Гаусса и подтверждает связь метода Ньютона с методом Гаусса. Экспериментально установлено, что для целевой функ-

ции (1.13) нелинейный метод Ньютона работает при $1,5 \leq n < 3,0$ и совпадает с линейным МНК при $n = 2$.

Для оценки точности результатов уравнивания используют формулы оценки точности функций измеренных величин

$$m_f = \mu \sqrt{\frac{1}{P_f}}, \quad (1.36)$$

$$\mu = \sqrt{\frac{V^T P_n V}{r}}, \quad (1.37)$$

где

$$P_n = \text{diag} \left(\frac{c}{\sigma_i} \right)^n, \quad (1.38)$$

$$\frac{1}{P_f} = f Q f^T, \quad (1.39)$$

что позволяет вычислить обратный вес любой функции. Так, ошибка планового положения пункта

$$M = \mu \sqrt{Q_{ii} + Q_{kk}}. \quad (1.40)$$

В формулах (1.39) и (1.40)

$$Q = F P_n^{-1} F^T, \quad (1.41)$$

$$F = (A^T C A)^{-1} A^T C. \quad (1.42)$$

Если (1.42) подставить в (1.41) и полученное преобразовать, то найдем

$$Q = G^{-1} A^T D A G^{-1}, \quad (1.43)$$

где

$$G = A^T C A \quad (1.44)$$

— информационная матрица Фишера, а

$$D = P_n \cdot \text{diag} |V|^{2(n-2)}, \quad (1.45)$$

$$V = L(\hat{X}) = T^{\text{уравн}} - T^{\text{выч}}, \quad (1.46)$$

$$F V = 0. \quad (1.47)$$

В случае нелинейного уравнивания один столбец для i -того измерения вычисляют по формуле

$$F_{mi} = \frac{(\hat{X}_\delta)_i - (\hat{X})_i}{\delta_i}, \quad (1.48)$$

где δ — малое приращение в i -тое измерение.

Для плановых сетей приращения будут такими:
 – в линейное измерение S

$$\delta_i = 10^{(\lg \sqrt{S} - \eta/3)}, \quad (1.49)$$

– в направление

$$\delta_n = \frac{\delta_i \cdot \rho}{S}$$

При $t \leq 10$ вместо метода Ньютона можно применять нелинейный метод релаксации, изложенный в [42].

Если в целевой функции (1.13) используется только одно значение степени n , устанавливаемое в зависимости от закона распределения погрешностей результатов измерений, то имеем известный метод Lp-оценок. Но на практике на одном геодезическом объекте часто встречаются разнообразные измерения, например, при развитии линейно-угловых сетей. В этих случаях требуется до уравнивания определить и использовать разные степени n для каждой группы измерений. Очевидно, что алгоритм минимизации многостепенной целевой функции (1.21) не должен зависеть от количества групп измерений со степенями n_i , включая предельный случай N групп (для каждого измерения своя степень). При этом чем меньше количество результатов измерений в группе, тем меньше надежность установления n , которые в таких случаях могут выбираться априорно, или другим путем на основе метода многостепенной многокритериальной оптимизации под условием минимума дополнительного критерия, например

$$\Phi_2(X) = \min(\max M), \quad (1.50)$$

где M – ошибка положения пункта.

По содержанию первой главы можно сделать следующие выводы:

1. При применении в геодезической практике уравнивательных вычислений и при использовании способов, отличных от метода наименьших квадратов, предлагается осуществлять переход к соответствующим целевым функциям, а не разработку специальных алгоритмов уравнивания.

2. Решен вопрос о выборе весов измерений при любых n в способах, отличных от метода наименьших квадратов.

3. Получена формула (1.35) для реализации вместо нелинейного, линеаризованного способа Ньютона. Из этого выражения видно, что нелинейный метод неустойчив на отрезке $1 \leq n \leq 1,5$.

4. Для уравнивательных вычислений предложена идея многокритериального алгоритма уравнивания.

2. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ В РАМКАХ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

2.1. Применение многокритериальной оптимизации при проектировании геодезических сетей

В процессе многокритериальной оптимизации [24] используется векторный, а не один скалярный показатель эффективности решения. В геодезической практике этот новый подход может применяться не взамен прежних технологий, а в дополнение к ним. Ниже показано, что несколько критериев оптимальности решения можно применять не только в алгоритмах уравнивания L_p -оценок [40], но и в рамках метода наименьших квадратов (МНК) при проектировании оптимального плана наблюдений [65] и в математической обработке результатов геодезических измерений [38].

Например, при поиске такой точности измерений углов, длин линий, превышений, которая бы обеспечивала наперед заданные результаты оценки точности искомых параметров геодезической сети для поиска оптимального веса параметрического уравнения, предлагаем формулу

$$P_{K,i} = \left| p_i + \frac{p_i}{5} K_i \right|. \quad (2.1)$$

Здесь $p_i = \sigma_0^2 / \sigma_i^2$, $K_i = (-4 \leq K_i \leq 20)$ – коэффициент для каждого измерения, отыскиваемый при начальном $K = 0$ пошаговым методом проб и ошибок ($K_j = K_{j-1} \pm 1$) под условием минимума двух целевых функций

$$\Phi_1(X) = \sum_{i=1}^n P_{K,i} L_i^2(X), \quad (2.2)$$

$$\Phi_2(X) = \sum_{j=1}^t |M_j - M_{\text{доп}}|, \quad (2.3)$$

где M_j – ошибка положения определяемого пункта; $M_{\text{доп}}$ – ее допустимая величина; $L(X) = \varphi(X) - T$ – свободный член нелинейного параметрического уравнения при уравнивании, а не при проектировании; t – количество определяемых пунктов

$$M = \sigma_0 \sqrt{Q_{ii} + Q_{jj}}; \quad Q = (A^T P_{K,i} A)^{-1}.$$

Сравним величины $P_{K,i}$ для геодезического четырехугольника из [79, с. 24], найденные ранее опубликованным и новым способами (рис. 2.1, а для способа из [79] и 2.1, б для нового способа, где на месте углов указан его вес). По данным рис. 2.1, б видно, что чем ближе углы к исходным

пунктам, тем с меньшей точностью их можно измерять для достижения $(M_C)_{доп.} = 30$ мм и $(M_D)_{доп.} = 19$ мм.

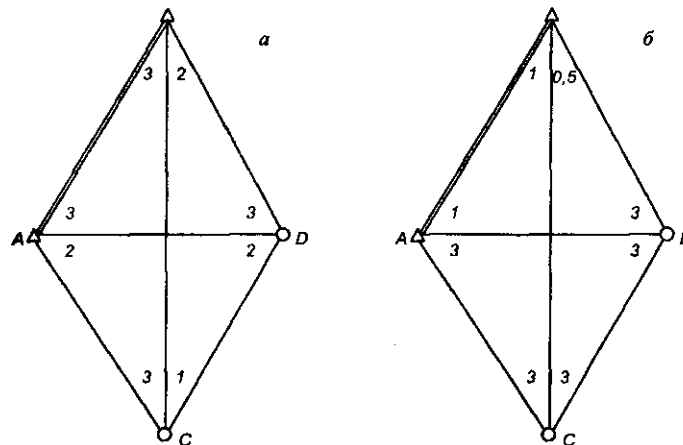


Рис. 2.1. Значения весов для угловых измерений

Отметим, что формулы (2.1) – (2.3) легко программируются. Также не вызывает затруднений переход от функции (2.3) к критерию

$$\Phi_2(X) = |m_{PL} - (m_{PL})_{доп.}|, \quad (2.4)$$

где m_{PL} – средняя квадратическая погрешность определения площади.

В результате, как может показаться с первого взгляда, функция (2.2) лишь косвенно участвует в минимизации, а основные вычислительные трудности связаны с получением обратной матрицы весов Q . Но так обстоит дело только при проектировании оптимального плана измерений, но не при уравнивании последних. При этом избежать использования критерия (2.2) нельзя, а вместо (2.3) или (2.4) предлагаем отыскивать минимум одной из следующих целевых функций:

$$\Phi_2(X) = \sum_{j=1}^l M_j; \quad (2.5)$$

$$\Phi_2(X) = \min(\max M); \quad (2.6)$$

$$\Phi_2(X) = m_{PL}, \quad (2.7)$$

где

$$M = \mu \sqrt{Q_{ii} + Q_{jj}}. \quad (2.8)$$

Практическое применение (2.2), (2.5) – (2.7) может иметь место, если наложить ограничение на величины $P_{k,i}$, так как чем больше вес результата измерения, тем меньше Q_{jj} и, следовательно, меньше значение функций (2.5) – (2.7).

Однако наибольший практический интерес имеет задача поиска оптимальных весов измерений до уравнивания в процессе проектирования. Здесь используем формулы (2.1) – (2.5) и равенство

$$\mu_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i \sqrt{P_{k,i}}, \quad (2.9)$$

а при обработке по МНК примем $\mu = \sigma_0$. Результаты вычислений приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1
Проектирование по МНК и многокритериальная оптимизация (в скобках)

№ пп	1	2	3	4	5	6
№ страницы из [72]	93	129	153	179	202	217
метод построения	триангуляция	триангуляция	триангуляция	трилатерация	трилатерация	лин/угл сеть
M_1 , м	0,0859 (0,0705)	0,0417 (0,0259)	0,0510 (0,0416)	0,0565 (0,0028)	0,0339 (0,0233)	0,0170 (0,0129)
M_2 , м	0,0882 (0,0705)	0,0256 (0,0259)	0,0528 (0,0414)	0,0728 (0,0040)	0,0369 (0,0234)	0,0311 (0,0185)
M_3 , м	0,0402 (0,0280)	0,0339 (0,0298)	0,0247 (0,0276)	0,0373 (0,0017)	–	0,0276 (0,0185)
M_4 , м	–	–	–	0,0560 (0,0033)	–	–

Мы не привели в табл. 2.1 запроектированные $P_{k,i}$, но для примера из [79, с. 24, рис. 1] получено: $M_D = 0,0336$ м; $M_C = 0,0348$ м; $P_1 = P_2 = 5$; $P_3 = P_8 = 0,2$. По МНК имели $P_1 = P_8 = 1$; $M_D = 0,0267$ м; $M_C = 0,0495$ м. Как видим, здесь правильно сработала целевая функция (2.6).

2.2. Уравнивание плановых геодезических сетей

Определение оптимального плана измерений при заданной точности искомых параметров сети и минимальном числе повторений наблюдений наиболее полно изложено в [79].

Рассмотрим решение аналогичной задачи с позиций многокритериальной оптимизации с применением следующих двух целевых функций:

$$\Phi_1(X) = \sum_{i=1}^N P_{k,i} L_i^2(X), \quad (2.10)$$

$$\Phi_2(X) = \min(\max M), \quad (2.11)$$

где X – вектор координат определяемых пунктов; N – количество измерений; $L(X)$ – свободный член параметрического уравнения; $P_{i,k}$ – вес параметрического уравнения, причем

$$P_{k,i} = \left| p_i + \frac{P_i}{5} K_i \right|, \quad (2.12)$$

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}; \quad (2.13)$$

K_i ($-4 \leq K \leq 20$) – коэффициент для каждого измерения, отыскиваемый методом релаксации под условием минимума $\Phi_2(X)$, в (2.11) M – ошибка положения определяемого пункта.

Поиск K_i осуществляется в j -том приближении для каждого измерения в отдельности методом подбора из трех вариантов K_i , $K_i + 1$ и $K_i - 1$. При этом принимают вариант, отвечающий минимуму функции (2.11). Количество приближений – не более 20.

Известно, что веса измерений при уравнивании должны быть определены до обработки и оставаться неизменными. Так требует теория уравнительных вычислений. И все же, нарушая это правило, предпримем попытку уточнения весов измерений в процессе уравнивания. Для этих целей используем формулы

$$M = \mu_j \sqrt{Q_{xx} + Q_{yy}}, \quad (2.14)$$

$$\mu_j = \sqrt{\frac{V^T P_{k,i} V}{r}}. \quad (2.15)$$

Результаты вычислений по традиционной (метод наименьших квадратов) и новой методикам приведены в табл. 2.2.

Ниже вместо (2.1) предлагается формула

$$P_{K,i} = \left| p_i + \frac{P_i}{S_j} K_i \right|, \quad (2.16)$$

где целое число S_j подбирается в j -том испытании под условием минимума функций (2.2) и (2.3). Поскольку K и S – целые числа, то и поиск S_j осуществляется целочисленным программированием. Замечено, что разным S_j соответствует адекватный вектор K_j , компоненты которого (K_i) изменяются с поиском S_j .

Таблица 2.2

Обработка по МНК и многокритериальная оптимизация (в скобках)

№ пп	1	2	3	4	5	6
№ страницы из [72]	93	129	153	179	202	217
μ	0,608 (0,318)	1,139 (0,670)	0,833 (0,590)	1,053 (0,0179)	1,098 (0,0308)	1,121 (0,481)
M_1	0,0523 (0,0185)	0,0475 (0,0155)	0,0424 (0,0167)	0,0595 (0,0357)	0,0373 (0,0380)	0,0077 (0,0027)
M_2	0,0536 (0,0177)	0,0292 (0,0127)	0,0439 (0,0188)	0,0766 (0,0355)	0,0406 (0,0381)	0,0141 (0,0051)
M_3	0,0245 (0,0075)	0,0387 (0,0157)	0,0206 (0,0105)	0,0392 (0,0280)	–	0,0125 (0,0051)
M_4	–	–	–	0,0589 (0,0198)	–	–

Чтобы дать ограничения на величину поправок в результаты измерений $V = L(\tilde{X})$, вместо (2.11) можно применить целевую функцию

$$\Phi_2(X) = \min(\mu \cdot \max(M)), \quad (2.17)$$

где $\mu = \sqrt{V^T P V} / r$.

Как в этом случае изменяются M_i и S_i , показано в табл. 2.3, в которой без скобок даются результаты вычислений по МНК, в круглых скобках при $S = 5$; в квадратных скобках – с применением (2.11) и (2.16), а в фигурных скобках – с использованием (2.16) и (2.17).

Таблица 2.3

Результаты вычислений

№ пп	1	2	3	4	5	6
№ страницы из [18]	93	129	153	179	202	217
S	– (5) [6] {14}	– (5) [6] {15}	– (5) [7] {14}	– (5) [12] {19}	– (5) [5] {18}	– (5) [6] {15}
μ	0,608 (0,318) [0,219] {0,185}	1,139 (0,684) [0,634] {0,440}	0,833 (0,619) [0,546] {0,280}	1,053 (0,0236) [0,0184] {0,0084}	1,098 (0,0374) [0,0374] {0,0111}	1,121 (0,510) [0,471] {0,240}

Окончание табл. 2.3

M_1	0,0523 (0,0180) [0,0177] {0,0213}	0,0475 (0,0151) [0,0150] {0,0157}	0,0424 (0,0166) [0,0165] {0,0121}	0,0595 (0,0339) [0,0277] {0,0400}	0,0373 (0,0375) [0,0375] {0,0265}	0,0077 (0,0027) [0,0027] {0,0027}
M_2	0,0536 (0,0172) [0,0169] {0,0196}	0,0292 (0,0119) [0,0117] {0,0111}	0,0439 (0,0187) [0,0186] {0,0160}	0,0766 (0,0339) [0,0322] {0,0406}	0,0406 (0,0376) [0,0376] {0,0260}	0,0141 (0,0051) [0,0051] {0,0050}
M_3	0,0245 (0,0073) [0,0072] {0,0081}	0,0387 (0,0154) [0,0152] {0,0157}	0,0206 (0,0102) [0,0100] {0,0076}	0,0392 (0,0255) [0,0142] {0,0080}	-	0,0125 (0,0052) [0,0051] {0,0049}
M_4	-	-	-	0,0589 (0,0255) [0,0292] {0,0402}	-	-

2.3. Уравнивание нивелирных и спутниковых GPS сетей

Многокритериальное уравнивание плановых и нивелирных сетей с поиском оптимальных весов измерений можно выполнить под условиями (2.10) и (2.11) традиционными методами. Для этого применяют известные формулы метода наименьших квадратов

$$\delta x = -(A^T P_k A)^{-1} A^T P_k L, \quad (2.18)$$

$$P_{ki} = \left| p_i + \frac{P_k K_i}{5} \right|, \quad (2.19)$$

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}, \quad (2.20)$$

где $P_{ki} > 1$, ($-4 \leq K \leq 20$) – коэффициент для i -того измерения, подбираемый под условием минимума целевой функции $\Phi_2(X)$, в которой M – ошибка положения определяемого пункта

$$M = \mu_j \sqrt{Q_n}, \quad (2.21)$$

$$\mu_j = \sqrt{\frac{V^T P_k V}{r}}, \quad (2.22)$$

где j – номер приближения ($1 \leq j \leq 20$). Поиск K_i осуществляется в j -том приближении для каждого измерения в отдельности методом релаксации из трех вариантов K_i , $K_i + 1$ и $K_i - 1$. Если N – количество измерений, то формулы (2.18) – (2.22) будут применяться $3jN$ раз.

Результаты вычислений для примера [6, с. 254] обычным методом МНК без поиска P_k [45] и с поиском P_k приведены в табл. 2.4.

Таблица 2.4

Оценка точности (мм) методом обычного уравнивания и многокритериальная обработка (в скобках)

№ репера	Свободная сеть с исходным пунктом 18	Нуль-свободная сеть относительно средней плоскости	Нуль-свободная сеть относительно исходных пунктов
μ	0,319 (0,106)	0,391 (0,106)	0,391 (0,106)
93	73 (10)	52 (7)	65 (9)
2	92 (15)	44 (8)	64 (11)
12	96 (18)	47 (12)	63 (13)
86	105 (21)	60 (15)	78 (19)
22	122 (21)	92 (16)	83 (14)
96	108 (21)	68 (16)	72 (14)
18	0 (0)	92 (11)	83 (11)

Рассмотрим вопросы раздельного уравнивания сетей, развиваемых методом спутниковой геодезии.

В работах [5, 46] отмечается возможность раздельного уравнивания приращений прямоугольных координат ΔX , ΔY , ΔZ . Преимущества раздельного уравнивания перед совместным очевидны:

1. В девять раз уменьшается матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок A , матрица нормальных уравнений $A^T P A$ и обратная к ней матрица, а также матрица $F = (A^T P A)^{-1} A^T P$, используемая при оценке точности в нетрадиционных алгоритмах уравнивания.
2. В 1000 раз уменьшается время вычислений на персональных компьютерах (ПК).
3. Значительно уменьшается число операторов в программе уравнивания спутниковых измерений.
4. По одной и той же программе возможно уравнивание не только GPS измерений, но и нивелирных превышений.

Препятствием к раздельному уравниванию служат наличие полной корреляционной матрицы для вектора между двумя смежными пунктами GPS и необходимость перехода при учете корреляции к обобщенному ме-

тому наименьших квадратов. Однако, как показали исследования А.П. Герасимова и К.К. Насретдинова [17], величина m_{Δ} , полученная по формуле Ферреро, в 5 – 10 раз больше ошибки, определенной с помощью корреляционной матрицы GPS измерений. В результате элементы этой матрицы, полученные по внутренней сходимости измерений, не содержат ни одной верной значащей цифры, и их учет может привести после совместного уравнивания к искажению конечных результатов. Без учета корреляционной зависимости между измеренными приращениями ΔX , ΔY , ΔZ результаты совместного и раздельного уравнивания будут совпадать, однако результаты оценки точности пространственного положения пунктов после раздельной обработки результатов измерений нуждаются в коррекции с использованием известных

$$m_x = \mu \sqrt{Q_{xx}}; \quad m_y = \mu \sqrt{Q_{yy}}; \quad m_z = \mu \sqrt{Q_{zz}};$$

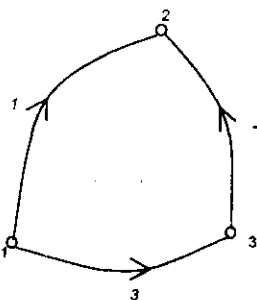
и новой строгой формулы

$$\mu = \sqrt{\frac{\mu_x^2 + \mu_y^2 + \mu_z^2}{3}}.$$

В этом случае $m_{совм.} = \gamma m_{разд.}$, а $\gamma_x = \mu / \mu_x$; $\gamma_y = \mu / \mu_y$; $\gamma_z = \mu / \mu_z$.

Здесь μ_x , μ_y , μ_z , а также m_x , m_y , m_z получены при раздельном уравнивании.

Важным вопросом как при совместной, так и при раздельной обработке является вопрос уравнивания GPS сетей без исходных пунктов. В работе [82] дано решение этой задачи на основе метода регуляризации. Но, как оказалось, для поиска параметра регуляризации необходимо до 10 – 15 раз получать обратную матрицу нормальных уравнений. В этой же статье дано предостережение, что обычные алгоритмы получения псевдообратной матрицы N^+ , основанные на сингулярном разложении матриц, могут привести к неудовлетворительному результату. Например, на рис. 2.2 показана сеть, для которой



$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$N = A^T A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Рис. 2.2. Сеть нивелирования

В этом случае $N^+ = \frac{1}{9}N$. Если веса результатов измерений будут отличаться от единицы на малую величину, то можно получить

$$N = A^T P A = \begin{pmatrix} 2,01 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

и результат N^+ , найденный по стандартным программам на ПК, будет неудовлетворительным, т. к. все элементы матрицы N^+ будут близки к 100.

Для обработки GPS построений и сетей нивелирования в производственных программах рекомендуем следующий метод получения N^+ [16]

$$N^+ = (N + I^t)^{-1} - \frac{1}{t^2} I^t I, \quad (2.24)$$

где $I = (1 \quad 1 \quad \dots \quad 1)_{1 \times t}$, t – число всех пунктов геодезической сети.

Формула (2.24) легко программируется: 1) вычисляем $N = A^T P A$; 2) к каждому элементу этой матрицы прибавляем единицу и получаем обратную матрицу Q обычным путем; 3) из каждого элемента матрицы Q отнимаем $1/t^2$ и получаем N^+ .

Начальные координаты пунктов можно получить любым методом, опубликованным в [45], но не по измеренным приращениям величин $\Delta X_{изм.}$, $\Delta Y_{изм.}$, $\Delta Z_{изм.}$, как это рекомендуется в [5]. Например, в соответствии с правилами работы [5] для нивелирной сети с измеренными превышениями, показанными на рис. 2.2, можно получить три разных вектора H_0 (табл. 2.5), а, следовательно, три варианта уравненных \hat{H} при обработке без исходных пунктов.

Таблица 2.5

Начальные сведения

№ варианта	№ начального пункта	H ₀ по пунктам, мм		
		1	2	3
1	1	0	1	3
2	2	0	1	6
3	3	0	-2	3

Но это не единственная неточность работы [5].

Если

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & N_4 \end{bmatrix},$$

то приведенные в [5] формулы (13) и (14) верны только в частном случае, когда $N_4 = N_3 N_1^{-1} N_2$ [13]. Следовательно, метод зависит от того, как разбита матрица N на блоки.

Там же вместо формулы (15) $X = - N^+ B^T L$ следует читать $X = - N^+ B^T P L$.

При этом в работе [5, табл. 1] по линии 4-5 дано – 16671,17644 м, следует читать – 16761,1764 м; по линии 4-6 дано – 27182,17893 м, следует читать – 27812,1789 м.

Указанные в работе [5] недостатки не снижают ее ценности, поскольку в ней затронуты актуальные вопросы спутниковой геодезии.

По результатам исследований, изложенных во второй главе, можно сделать следующие выводы:

1. Методы многокритериальной оптимизации по МНК значительно упрощают алгоритм минимизации благодаря применению формулы (2.1).
2. Наибольший эффект при разработке программ получается на этапе проектирования геодезических сетей.
3. При уравнивании по МНК можно использовать алгоритмы обработки нуль-свободных (без исходных пунктов) нивелирных и спутниковых геодезических сетей с применением формулы (2.24).

3. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЛИНЕЙНОГО МЕТОДА НЬЮТОНА

3.1. Постановка задачи

Применение отличных от метода наименьших квадратов (МНК) способов уравнивания все чаще привлекает внимание исследователей. Например, в работе [40] рассматривается метод L_p-оценок, предусматривающий обработку наблюдений с учетом закона распределения погрешностей измерений путем соответствующего выбора показателя степени n (при $n = 2,0$ уравнивание выполняется по МНК, при $n = 1,0$ предусматривается метод наименьших модулей (МНМ), возможно применение различных степеней на отрезке $1,0 \leq n \leq 4,0$).

Получаемые в этих случаях оценки совпадают с оценками метода максимального правдоподобия при распределении Лапласа. Недостатком такого подхода к уравниванию является то, что принимается для всех измерений одинаковая степень n .

Так, избирая МНМ для уравнивания сетей полигонометрии, мы полагаем, что погрешности и угловых, и линейных измерений подчиняются одному, отличному от нормального закона распределения при $n = 1,0$.

Более гибким является способ многостепенной оптимизации, когда, например, для угловых измерений принимают степень $n = 2,0$, а для линейных наблюдений степень $n = 1,0$. При реализации многостепенной оптимизации применим целевые функции [19]

$$\Phi_1(X) = \sum_{i=1}^N P_n |L_i(X)|^n, \quad (3.1)$$

$$\Phi_2(X) = f(X), \quad (3.2)$$

где X – вектор координат определяемых пунктов; N – количество измерений; $L(X)$ – свободный член параметрического уравнения, а P – вес результата измерений, вычисляемый для каждого n , по формуле (1.18).

Минимум критериальной функции (3.1) можно отыскивать различными методами нелинейного программирования, предусматривая случаи, когда для каждого измерения берется своя оптимальная степень n , под условием минимума некоторой другой целевой функции. В результате используются два и более критериев оптимальности решения, что соответствует многокритериальному уравниванию. Область применения многокри-

териальной оптимизации может быть обширной. Этим способом возможно уравнивание любых локальных геодезических сетей при числе определяемых пунктов не более десяти, т.е. в тех случаях, когда из-за малости выборки трудно установить закон распределения погрешностей измеренных величин и можно применять любые, даже индивидуальные для каждого измерения, степени.

3.2. Выбор метода минимизации многокритеральной целевой функции

Кроме метода Ньютона (1.22) – (1.27) рассмотрим применение других способов минимизации функций (3.1) и

$$\Phi_2(X) = \min(\max M). \quad (3.3)$$

Ошибка положения M вычислялась по формулам (1.36) – (1.40) и (1.48). Одновременно с этим вычисляется вероятность попадания в круг ошибок методом статистических испытаний с применением формулы

$$\delta X = FL,$$

где L – случайные ошибки, генерируемые 10000 раз.

В таблице 3.1 приведены результаты оценки точности ($\mu = \sqrt{V^T P V} / r$; C – первое число обусловленности Тюринга; M_j – ошибки положения пунктов и P_j – вероятности попадания в круг ошибок, найденные по расширенной псевдообратной матрице из 10000 испытаний) для одной целевой функции $\Phi_1(X)$ при $n_i = 2,0$ (МНК) [61].

Во всех случаях возьмем шесть тестовых примеров из [72]: с. 93, 129, 153 (триангуляция), 179, 202 (трилатерация) и 217 (линейно-угловая сеть).

Таблица 3.1

Обработка тестовых примеров по МНК

Обозначения	Номер тестового примера					
	1	2	3	4	5	6
μ	0,608	1,139	0,831	1,053	1,098	0,452
C	83,1	12,1	34,4	67,8	5,9	55,9
M_1	0,0523	0,0475	0,0424	0,0595	0,0373	0,0077
M_2	0,0536	0,0292	0,0439	0,0766	0,0406	0,0141
M_3	0,0245	0,0387	0,0206	0,0392	–	0,0125
M_4	–	–	–	0,0589	–	–
P_1	0,634	0,635	0,638	0,659	0,640	0,644
P_2	0,635	0,632	0,649	0,673	0,622	0,645
P_3	0,667	0,631	0,637	0,630	–	0,641
P_4	–	–	–	0,658	–	–

В таблице 3.2 приведены результаты многокритериальной оптимизации методом релаксации с поиском n_j с шагом $\delta_j = 0,1$ (j – количество приближений, которые равны одному просмотру N измерений).

Таблица 3.2

Многокритериальная оптимизация с постоянным шагом релаксации $\delta_j = 0,1$

Обозначения	Номер тестового примера					
	1	2	3	4	5	6
μ	0,474	1,084	0,803	0,515	0,989	0,331
C	84,8	11,2	35,2	56,1	5,7	40,0
M ₁	0,0467	0,0436	0,0469	0,0437	0,0381	0,0061
M ₂	0,0435	0,0325	0,0430	0,0549	0,0377	0,0110
M ₃	0,0196	0,0436	0,0208	0,0239	–	0,0111
M ₄	–	–	–	0,0459	–	–
P ₁	0,643	0,639	0,640	0,676	0,642	0,636
P ₂	0,640	0,632	0,648	0,659	0,624	0,651
P ₃	0,668	0,626	0,634	0,619	–	0,641
P ₄	–	–	–	0,676	–	–
K	20	10	8	15	5	20

В таблице 3.3 приведены результаты многокритериальной оптимизации методом релаксации с поиском n_j с шагом $\delta_j = 0,25$ ($j \leq 10$) и $\delta_j = 0,025$ ($11 \leq j \leq 20$), что способствует большему изменению n_j , чем при $\delta_j = 0,1$.

Таблица 3.3

Многокритериальная оптимизация с переменным шагом релаксации

Обозначения	Номер тестового примера					
	1	2	3	4	5	6
μ	0,458	1,071	0,818	0,511	0,873	0,308
C	82,2	11,5	28,8	57,7	5,3	31,5
M ₁	0,0446	0,0439	0,0375	0,0444	0,0383	0,0060
M ₂	0,0408	0,0326	0,0426	0,0534	0,0383	0,0105
M ₃	0,0157	0,0439	0,0248	0,0243	–	0,0106
M ₄	–	–	–	0,0450	–	–
P ₁	0,638	0,638	0,652	0,677	0,647	0,636
P ₂	0,641	0,637	0,648	0,659	0,625	0,645
P ₃	0,672	0,627	0,644	0,622	–	0,632
P ₄	–	–	–	0,678	–	–

В таблице 3.4 приведены результаты вычислений методом многокритериальной оптимизации с использованием способа Якоби

$$(n_i)_{j+1} = (n_i)_j - \frac{\frac{\partial \Phi_2}{\partial n_i}}{\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial n_i^2}}, \quad (3.4)$$

где j – номер приближения ($j < 20$), а

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} &= \frac{1}{2\delta} ([\Phi_2]_\delta - [\Phi_2]_{-\delta}); \\ \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial n^2} &= \frac{1}{\delta^2} ([\Phi_2]_\delta - 2\Phi_2 + [\Phi_2]_{-\delta}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

при $\delta_i = 0,01$, задаваемые в степень n_i . Численно установлено, что в 50 % случаях $\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial n^2} < 0$, что говорит о том, что методом Ньютона из-за седловой точки в окрестностях минимума $\Phi_2(X)$ пользоваться для поиска оптимальных степеней n_i нельзя. Расчетами установлено, что методом Якоби затрачивается в два раза меньше времени, чем методом релаксации.

Таблица 3.4

Многокритериальная оптимизация с применением способа Якоби

Обозначения	Номер тестового примера					
	1	2	3	4	5	6
μ	0,540	1,091	0,801	0,524	1,212	0,310
C	76,5	11,5	34,7	58,1	5,82	37,0
M_1	0,0483	0,0441	0,0408	0,0460	0,0399	0,0066
M_2	0,0477	0,0320	0,0429	0,0573	0,0396	0,0108
M_3	0,0212	0,0441	0,0208	0,0258	–	0,0108
M_4	–	–	–	0,0468	–	–
P_1	0,640	0,636	0,638	0,676	0,636	0,636
P_2	0,637	0,635	0,648	0,660	0,633	0,650
P_3	0,663	0,626	0,637	0,621	–	0,640
P_4	–	–	–	0,673	–	–

В таблице 3.5 приведены результаты вычислений методом многокритериальной оптимизации с использованием способа Коши

$$(n_i)_{j+1} = (n_i)_j - \lambda_j \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial n_i} \right), \quad (3.6)$$

где

$$\lambda_j = \frac{\Phi_2(X)}{\sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial n_i} \right]^2}. \quad (3.7)$$

Первые частные производные, входящие в (3.5), (3.6) и (3.7), определялись численно при $\delta_i = 0,01$.

Расчеты выполнялись комбинированным методом: первые пять приближений методом Якоби при ($n_0 = 2,0$), остальные ($j < 40$) – Коши. Время вычислений оказалось в 2 раза меньше, чем при методе релаксации.

Таблица 3.5
Многокритериальная оптимизация с применением способа Коши

Обозначения	Номер тестового примера					
	1	2	3	4	5	6
μ	0,513	1,09	0,801	0,493	1,094	0,314
C	79,0	11,4	35,3	56,0	5,78	39,0
M_1	0,0479	0,0441	0,0424	0,0420	0,0380	0,0066
M_2	0,0467	0,0311	0,0429	0,0501	0,0385	0,0111
M_3	0,0209	0,0440	0,0209	0,0221	–	0,0111
M_4	–	–	–	0,0433	–	–
P_1	0,641	0,635	0,638	0,682	0,641	0,635
P_2	0,640	0,633	0,647	0,657	0,623	0,652
P_3	0,665	0,626	0,634	0,621	–	0,642
P_4	–	–	–	0,679	–	–

В таблице 3.6 приведены для примера [72, с. 93] значения n_i для 13 направлений (не считая начальные нулевые направления). Здесь можно сравнить n_i . При этом первый столбец – начальные значения n_i (МНК); второй и третий соответствуют методу релаксации; четвертый – Якоби и пятый – Коши.

Таблица 3.6
Величины n_i , найденные для первого примера из [72, с. 93] в пяти случаях

№ п/п	1	2	3	4	5
1	2,0	1,5	1,425	1,59	1,64
2	2,0	2,6	3,475	1,90	2,34
3	2,0	3,7	3,500	2,91	3,27
4	2,0	2,1	2,450	2,08	1,74
5	2,0	2,7	2,150	2,06	2,38
6	2,0	1,7	2,100	2,66	2,64
7	2,0	1,6	1,750	1,62	1,60
8	2,0	1,6	2,250	1,96	1,84
9	2,0	1,7	1,700	1,84	1,99
10	2,0	3,9	3,600	2,66	2,79
11	2,0	2,0	1,275	2,06	1,89
12	2,0	3,9	4,675	3,21	3,43
13	2,0	2,2	1,750	1,56	2,25

Приведенные выше методы могут быть применимы и для пространственных засечек.

Минимизация целевой функции (3.1) выполняется методом релаксации с шагом λ методом деления его пополам до тех пор, пока он не станет меньше $\delta\lambda$.

Начальный шаг вычисляется методом Якоби

$$\lambda_{1,0} = 5 \left[\left| \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} / H_x \right| + \left| \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} / H_y \right| + \left| \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} / H_z \right| \right], \quad (3.8)$$

где $\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}$ — составляющая градиента целевой функции Φ_1 ;

$$d\lambda = \frac{\lambda_{1,0}}{10000} \quad (3.9)$$

$$H_x = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2}; \quad H_y = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2}; \quad H_z = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2}. \quad (3.10)$$

Шаг $\lambda_s = t\lambda_{1,0}$, где

$$t = \left[\frac{\left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} \right)^2}{\left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} \right)^2} \right]^{0.5}. \quad (3.11)$$

Формулы (3.8) – (3.11) позволяют построить самонастраивающийся алгоритм, не зависящий от вида пространственной засечки и длин сторон.

Величина M , входящая в (3.2), вычислялась по формулам

$$M = \mu \sqrt{Q_x + Q_y + Q_z} \quad (3.12)$$

$$\mu = \sqrt{V^T P V / r} \quad (3.13)$$

$$V = L(\hat{X}) \quad (3.14)$$

$$Q = F P^{-1} F^T \quad (3.15)$$

$$F_{3 \times 3} = \frac{\hat{X}_\delta - \hat{X}}{\delta}, \quad (3.16)$$

где $X_\delta = [x_\delta, y_\delta, z_\delta]^T$, $x_\delta, y_\delta, z_\delta$ — уравненные координаты после возмущения i -того измерения на величину δ .

Для измерений наклонной дальности S

$$\delta_s = 10^{\lg(\sqrt{s}) - \frac{m}{3}}, \quad (3.17)$$

$$\delta_\theta = \delta_\nu = \frac{\delta_s \rho''}{S}, \quad (3.18)$$

где m – количество разрядов в числе при его представлении в ЭВМ (мы брали $m = 16$); $\rho'' = 206265$; δ_θ – малое приращение в горизонтальный угол; δ_ν – малое приращение в вертикальный угол.

Матрица $F_{3 \times N}$, вычисляемая численно по формуле (3.1), применялась не только для оценки точности, но и при вычислении вероятности попадания определяемого пункта из 10000 испытаний, что заняло 1 с машинного времени. При этом

$$\delta X = FL, \quad (3.19)$$

$$p = \frac{K_p}{10000}, \quad (3.20)$$

где K_p – количество попаданий в шар ошибок

$$(\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2)^{0.5} < M \quad (3.21)$$

или эллипсоид ошибок

$$\frac{(X')^2}{A^2} + \frac{(Y')^2}{B^2} + \frac{(Z')^2}{C^2} \leq 1, \quad (3.22)$$

A, B, C – полуоси эллипсоида ошибок

$$X' = \ell_1 \delta x + m_1 \delta y + n_1 \delta z,$$

$$Y' = \ell_2 \delta x + m_2 \delta y + n_2 \delta z, \quad (3.23)$$

$$Z' = \ell_3 \delta x + m_3 \delta y + n_3 \delta z,$$

ℓ_j, m_j, n_j – вычислялись по программе EIGEN.

При этом

$$A = \mu \sqrt{\lambda_1},$$

$$B = \mu \sqrt{\lambda_2}, \quad (3.24)$$

$$C = \mu \sqrt{\lambda_3},$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – убывающие собственные значения матрицы Q , вычисленной по (3.15).

Расчеты показали, что независимо от длин сторон вероятность попадания в шар ошибок $P_w = 0,6 - 0,7$, а в эллипсоид ошибок $P_e = 0,18 - 0,38$.

3.3. Уравнивание плановых геодезических сетей

3.3.1. Реализация тестовых примеров многокритериальной оптимизации функций (3.1) и (3.3)

Сравним результаты уравнивания по МНК с многокритериальным методом на шести примерах, взятых из [72]. В качестве дополнительного критерия применим (3.3). В таблице 3.7 приведены результаты решения тестовых примеров по МНК, где μ – средняя квадратическая ошибка единицы веса, полученная из уравнивания; C – число обусловленности (первое число Тюринга); M – ошибки положения пунктов, полученные из уравнивания, в метрах; p – вероятность попадания в круг ошибок, вычисленная по 10000 испытаний, что заняло 1 с машинного времени на IBM PC/AT-486.

Таблица 3.7

Обработка по МНК и многокритериальная оптимизация (в скобках)

№ пп № страницы из [72]	1	2	3	4	5	6
μ	0,608 (0,471)	1,139 (1,084)	0,833 (0,803)	1,053 (0,515)	1,098 (0,989)	1,121 (0,331)
C	83,1 (84,8)	12,1 (11,2)	34,4 (35,2)	67,8 (56,1)	5,9 (5,7)	55,9 (40,0)
M_1	0,0523 (0,0467)	0,0475 (0,0436)	0,0424 (0,0409)	0,0595 (0,0437)	0,0373 (0,0381)	0,0077 (0,0061)
M_2	0,0536 (0,0435)	0,0292 (0,0325)	0,0439 (0,0430)	0,0766 (0,0549)	0,0406 (0,0377)	0,0141 (0,0110)
M_3	0,0245 (0,0196)	0,0387 (0,0436)	0,0206 (0,0208)	0,0392 (0,0239)	--	0,0125 (0,0111)
M_4	--	--	--	0,0589 (0,0459)	--	--
p_1	0,634 (0,643)	0,635 (0,639)	0,638 (0,640)	0,659 (0,676)	0,640 (0,642)	0,644 (0,636)
p_2	0,635 (0,640)	0,632 (0,632)	0,649 (0,648)	0,673 (0,659)	0,622 (0,624)	0,645 (0,651)
p_3	0,667 (0,668)	0,631 (0,626)	0,637 (0,634)	0,630 (0,619)	--	0,641 (0,641)
p_4	--	--	--	0,658 (0,676)	--	--

В таблице 3.7 даны результаты уравнивания в соответствии с минимумом целевых функций (3.1) и (3.3) при поиске индивидуальных степеней для каждого измерения. По данным табл. 3.7 видно, что M_i в скобках по сравнению с другими уменьшились в 1,2 – 1,5 раза, а вероятность попадания в круг ошибок в некоторых случаях даже возросла с одновременным уменьшением числа обусловленности.

3.3.2. Многокритериальное уравнивание с применением уровня значимости в функции (3.2)

Рассмотрим случай многокритериальной оптимизации, когда при минимизации используются две целевые функции

$$\Phi_2(X) = \min \sum_{j=1}^k q_j M_j, \quad (3.25)$$

где N – количество результатов измерений; $P_i = \left(\frac{C_i}{\sigma_i}\right)^n$ – вес результата измерений; $L_i = T_i^{\text{теор}} - T_i^{\text{изм}}$ – свободный член нелинейного параметрического уравнения; n_i – индивидуальный для каждого измерения показатель степени, который отыскивается соответствующим релаксационным способом под условием целевой функции (3.25); k – количество определяемых пунктов; $q = 1 - p$ – уровень значимости, вычисляемый по значению p – вероятности попадания в круг ошибок, определяемый в процессе минимизации численным способом из 10000 испытаний; M – значение ошибки планового положения пункта.

В таблице 3.8 приведены результаты оценки точности $\mu = \sqrt{V^T P V} / r$; M и вероятность попадания в круг ошибок радиуса M .

Таблица 3.8

Результаты минимизации по МНК и многокритериальная оптимизация (в скобках)

Обозначения	Номер страницы из [72] для геодезических сетей					
	93	129	153	179	202	217
μ	0,608 (0,485)	1,139 (1,140)	0,831 (0,822)	1,053 (0,984)	1,098 (0,941)	0,452 (0,426)
M_1	0,0523 (0,0414)	0,0475 (0,0471)	0,0424 (0,0421)	0,0595 (0,0480)	0,0373 (0,0419)	0,0077 (0,0071)
M_2	0,0536 (0,0374)	0,0292 (0,0289)	0,0439 (0,0437)	0,0766 (0,0626)	0,0406 (0,0340)	0,0141 (0,0125)
M_3	0,0245 (0,0115)	0,0387 (0,0388)	0,0206 (0,0208)	0,0392 (0,0261)	– (–)	0,0125 (0,0122)
M_4	– (–)	– (–)	– (–)	0,0589 (0,0477)	– (–)	– (–)
P_1	0,634 (0,645)	0,635 (0,635)	0,638 (0,644)	0,659 (0,677)	0,640 (0,651)	0,644 (0,643)
P_2	0,635 (0,646)	0,632 (0,630)	0,649 (0,650)	0,673 (0,655)	0,622 (0,624)	0,645 (0,654)
P_3	0,667 (0,675)	0,631 (0,632)	0,637 (0,635)	0,630 (0,623)	– (–)	0,641 (0,645)
P_4	– (–)	– (–)	– (–)	0,658 (0,673)	– (–)	– (–)

3.3.3. Многокритериальное уравнивание плановых геодезических сетей по углам и направлениям

Используем для уравнивательных вычислений две целевые функции (3.1) и (3.2), объединенные тем, что степени n_i в первой из них отыскиваются под условием (3.3), в котором M – ошибка положения определяемого пункта.

Сравним результаты оптимизации на примерах триангуляции и линейно-угловой сети при их уравнивании по углам и направлениям. В обоих случаях $L(X)$ вычисляется для углов, но во втором варианте берутся углы, замыкающие горизонт, что близко к уравниванию по направлениям.

В табл. 3.9 обозначено $\mu = \sqrt{V^T P V / r}$; C – число обусловленности Тюринга; M_i – ошибка положения пунктов; P_i – вероятности попадания в круг ошибок. Идентификатор Y означает уравнивание по углам, а H – по направлениям. Примеры взяты из [72], M_i вычисляется в условиях многостепенной оптимизации по формулам, указанным в [57].

Таблица 3.9
Результаты многокритериального уравнивания триангуляции и линейно-угловой сети по углам Y и направлениям H

Обозначения	с. 93		с. 129		с. 153		с. 217	
	Y	H	Y	H	Y	H	Y	H
μ	0,458	0,452	1,071	0,906	0,818	0,696	0,308	0,356
C	82,2	39,3	11,5	10,1	28,8	19,0	31,5	25,9
M_1	0,0446	0,0252	0,0439	0,0260	0,0375	0,0262	0,0060	0,0058
M_2	0,0408	0,0239	0,0326	0,0245	0,0426	0,0262	0,0105	0,0085
M_3	0,0157	0,0131	0,0439	0,0260	0,0248	0,0171	0,0106	0,0085
P_1	0,638	0,627	0,638	0,640	0,652	0,630	0,636	0,633
P_2	0,641	0,633	0,637	0,639	0,648	0,637	0,645	0,634
P_3	0,672	0,652	0,627	0,647	0,644	0,642	0,632	0,638
МНК								
μ	0,608	0,518	1,139	0,967	0,831	0,856	0,452	0,458
M_1	0,0523	0,0289	0,0475	0,0285	0,0424	0,0318	0,0077	0,0064
M_2	0,0536	0,0291	0,0292	0,0226	0,0439	0,0294	0,0141	0,0106
M_3	0,0245	0,0151	0,0387	0,0265	0,0206	0,0189	0,0125	0,0092
$\frac{(M_i)_{\text{мнк}}}{(M_i)_{\text{линейн}}}$	1,3	1,2	1,1	1,1	1,03	1,2	1,3	1,2

По данным табл. 3.9 видно, что M_i больше $M_{i, \text{линейн}}$ примерно в 2 раза, а многокритериальная оптимизация дала улучшение в обоих случаях в 1,2 раза.

3.3.4. Многокритериальное уравнивание нуль-свободных плановых геодезических сетей

Рассмотрим многокритериальную оптимизацию для нуль-свободных геодезических сетей, т. е. для таких сетей, в которых нет исходных пунктов.

В статье [62] предлагается использовать один и тот же нелинейный алгоритм Ньютона, основанный на применении матрицы Гессе, для уравнивания свободных, несвободных и нуль-свободных геодезических сетей при следующих показателях степени $1,5 \leq n \leq 1,99$; $2,01 \leq n \leq 3,0$, за исключением $n = 2,0$, означающей обработку по методу наименьших квадратов (для сетей без исходных пунктов). Полученные результаты уравнивания нуль-свободных сетей сравнивались с вариационным методом регуляризации, с методом, основанным на применении псевдообратной матрицы нормальных уравнений, а также с алгоритмами Lp-оценок, обобщенными на случай регуляризованного решения.

В статье [76] предлагается уравнивать и выполнять оценку точности плановых геодезических сетей методом многостепенной оптимизации. Ниже приводится обобщенная многокритериальная оптимизация на случай уравнивания нуль-свободных геодезических сетей. Это значительно расширило рамки выбора показателя степени n и одновременно позволило уравнивать нуль-свободные сети.

Методика такого уравнивания заключается в следующем. Допустим, что плановая геодезическая сеть имеет K исходных пунктов. Для получения начальных координат, используемых при уравнивании нуль-свободной сети, необходимо взять среднее арифметическое из координат, полученных при уравнивании свободной сети, изменяя номера исходных пунктов по числу сочетаний из K элементов по два. Допустим, число таких сочетаний равно t . Но t раз уравнивать свободную сеть не надо, достаточно уравнивать построение с двумя исходными пунктами, а последующие координаты получать методом трансформирования. Начальное уравнивание сети должно быть многокритериальным, при этом показатели степени останутся прежними при уравнивании нуль-свободной геодезической сети.

Если начальные координаты всех пунктов получены по вышеизложенному правилу, то, принимая их за основу, получим однозначное решение при уравнивании нуль-свободной геодезической сети по алгоритму, опубликованному в [62].

Рассмотрим пример (рис. 3.1) уравнивания сети триангуляции, взятый из [74, с. 160].

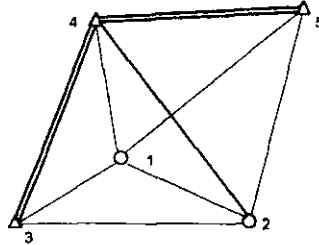


Рис. 3.1. Сеть триангуляции

Предварительные координаты определяемых пунктов и координаты исходных пунктов представлены в табл. 3.10.

Таблица 3.10

Координаты пунктов

№ пп	X	Y
1	83 182,755	51 400,510
2	75 890,329	55 930,318
3	82 700,042	40 904,524
4	93 556,720	59 750,640
5	82 489,340	61 340,410

В таблице 3.11 представлены результаты многокритериального уравнивания сети триангуляции с исходными пунктами 4 и 5. Поиск показателей степени, входящих в целевую функцию, осуществляется под условием наименьшей ошибки положения пунктов.

Таблица 3.11

Многокритериальное уравнивание свободной сети триангуляции с исходными пунктами 4 и 5

Пример из [74, с. 160]				
σ_i''	1,0			
	N_1	N_2	n_1	δ_i''
	1	4	2,0	0,25
	1	5	1,8	0,54
	1	2	2,2	-0,99
	2	4	2,1	1,14
	2	5	2,1	-2,62
	3	4	1,6	-0,19
	3	1	1,7	-0,05

Окончание табл. 3.11

	4	2	2,0	2,22
	4	1	2,0	-2,42
	4	3	1,9	0,62
	5	1	1,6	0,00
	5	4	2,0	-0,98
μ	1,887			
	X	Y	M	
1	83 182,757	51 400,510	0,1028	
2	75 890,335	55 930,315	0,1099	
3	82 700,047	40 904,519	0,2339	

В таблице 3.12 приведены результаты уравнивания свободной геодезической сети. При этом во второй колонке даны координаты из табл. 3.11, в третьей и четвертой колонках получены координаты методом трансформации с использованием исходных пунктов 3, 4 и 3, 5. В колонке 5 представлены начальные координаты для уравнивания нуль-свободной сети, которые получены как среднее арифметическое из колонок 2, 3, 4. В шестой колонке даны координаты нуль-свободной многокритериальной сети, полученные по методике, опубликованной в [62].

Таблица 3.12

Координаты пунктов

№ пп	4, 5	3, 4	3, 5	Начальные координаты	Координаты нуль-свободной сети
1	2	3	4	5	6
1	83 182,757 51 400,510	83 182,656 51 400,616	83 182,648 51 400,553	83 182,687 51 400,560	83 182,687 51 400,557
2	75 890,335 55 930,315	75 890,276 55 930,505	75 890,311 55 930,412	75 890,307 55 930,411	75 890,307 55 930,411
3	82 700,047 40 904,519	82 699,830 40 904,620	82 699,830 40 904,620	82 699,902 40 904,586	82 699,903 40 904,584
4	93 556,720 59 750,640	93 556,720 59 750,640	93 556,647 59 750,531	93 556,696 59 750,604	93 556,697 59 750,604
5	82 489,340 61 340,410	82 489,347 61 340,533	82 489,340 61 340,410	82 489,342 61 340,451	82 489,343 61 340,451

В таблице 3.13 приведены поправки в измерения и ошибки положения из уравнивания после обработки нуль-свободной многокритериальной оптимизации.

Таблица 3.13

Расчеты, соответствующие координатам из колонки шесть таблицы 3.12

N_1	N_2	n_1	θ_1''
1	4	2,1	0,29
1	5	2,1	0,63
1	2	2,1	-1,11
2	4	2,0	1,17
2	5	2,1	-2,71
3	4	2,3	-0,32
3	1	2,0	-0,01
4	2	2,3	2,05
4	1	2,1	-2,42
4	3	2,0	0,53
5	1	2,0	0,19
5	4	2,3	-0,90
μ			3,210
M_1			0,108
M_2			0,195
M_3			0,184
M_4			0,158
M_5			0,175

Результаты оценки точности нуль-свободной сети справедливо оказались завышенными по сравнению с данными табл. 3.11. Если выполнить оценку точности свободной триангуляции с исходными пунктами 4 и 5, то при $n = 2,0$ получим следующую оценку точности положения пунктов:

$$M_1 = 0,103 \text{ м}; \quad M_2 = 0,110 \text{ м}; \quad M_3 = 0,234 \text{ м}.$$

Поскольку степени n , отыскивались под условием минимума ошибки положения, то только что указанные M_i оказались большими по сравнению с данными табл. 3.11.

Выполним одностепенное уравнивание той же нуль-свободной геодезической сети при $n = 2,1$. Получена следующая оценка точности:

$$M_1 = 0,137 \text{ м}; \quad M_2 = 0,279 \text{ м}; \quad M_3 = 0,626 \text{ м}; \quad M_4 = 0,149 \text{ м}; \quad M_5 = 0,173 \text{ м}; \\ \mu = 3,232.$$

При этом M_i оказались меньшими в многокритериальной нуль-свободной сети (табл. 3.14).

Из изложенного можно сделать вывод, что поиск степеней n , достаточно выполнить один раз для свободной геодезической сети, опирающейся на два исходных пункта, с последующим переходом к нуль-свободной сети по вышеизложенной методике.

Таблица 3.14

Одностепенное уравнивание нуль-свободной геодезической сети триангуляции

№ пп	4, 5	3, 4	3, 5	Начальные координаты	Координаты нуль-свободной сети
1	83 182,755	83 182,655	83 182,649	83 182,686	83 182,686
	51 400,510	51 400,612	51 400,551	51 400,558	51 400,555
2	75 890,329	75 890,269	75 890,305	75 890,301	75 890,301
	55 930,318	55 930,503	55 930,412	55 930,411	55 930,411
3	82 700,043	82 699,830	82 699,830	82 699,901	82 699,901
	40 904,524	40 904,620	40 904,620	40 904,588	40 904,588
4	93 556,720	93 556,720	93 556,650	93 556,697	93 556,697
	59 750,640	59 750,640	59 750,533	59 750,604	59 750,604
5	82 489,340	82 489,345	82 489,340	82 489,342	82 489,342
	61 340,410	61 340,530	61 340,410	61 340,450	61 340,450

Возьмем пример триангуляции из [72, с. 153] (три исходных и три определяемых пунктов) и повторим предыдущие вычисления для нового примера. Примем в качестве исходных пунктов точки 2 и 3. Многостепенная, многокритериальная оптимизация свободной сети дает результаты, приведенные в табл. 3.15.

Результаты многостепенного многокритериального уравнивания свободной сети представлены в табл. 3.16.

В таблице 3.17 приведены результаты многокритериального уравнивания и оценки точности нуль-свободной геодезической сети с одним исходным пунктом 3.

Таблица 3.15

Многокритериальное уравнивание свободной сети триангуляции с исходными пунктами 2 и 3

Пример из [72, с. 153]				
σ_i''	1,0			
	N_1	N_2	n_i	ϕ_i''
	1	6	2,1	0,46
	1	5	3,9	0,93
	2	6	1,4	0,10
	2	5	1,7	-0,03
	2	1	1,9	0,01
	3	6	1,7	-0,10
	3	2	2,3	0,58
	4	6	2,1	-0,33
	4	3	1,9	-0,03
	5	2	3,9	1,05

Окончание табл. 3.15

	5	6	3,8	-0,98
	5	4	2,0	-0,18
	6	2	3,9	-0,84
	6	3	2,6	0,70
	6	4	2,0	0,04
	6	5	2,2	-0,06
	Многостепенная		$n = 2,0$	
μ	0,591		0,767	
M_4	0,038		0,049	
M_5	0,054		0,062	
M_6	0,022		0,027	
M_1	0,041		0,045	

Таблица 3.16

Многокритериальное уравнивание нуль-свободной сети триангуляции [72, с. 153]

№ пп	2, 3	1, 2	1, 3	Начальные координаты	Координаты нуль-свободной сети
1	10 043,557 98 997,082	10 043,540 98 997,010	10 043,540 98 997,010	10 043,546 98 997,034	10 043,546 98 997,034
2	16 987,980 94 956,270	16 987,980 94 956,270	16 987,996 94 956,224	16 987,985 94 956,255	16 987,985 94 956,255
3	24 000,160 100 994,210	24 000,088 100 994,256	24 000,160 100 994,210	24 000,136 100 994,225	24 000,136 100 994,225
4	20 662,189 109 240,109	20 662,053 109 240,103	20 662,142 109 240,109	20 662,128 109 240,107	20 662,128 109 240,107
5	10 999,846 107 008,883	10 999,756 107 008,798	10 999,792 107 008,831	10 999,798 107 008,837	10 999,798 107 008,837
6	16 684,262 102 249,807	16 684,199 102 249,785	16 684,242 102 249,774	16 684,234 102 249,789	16 684,234 102 249,789

Таблица 3.17

Многостепенное, многокритериальное уравнивание нуль-свободной геодезической сети триангуляции

Пример из [72, с. 153]				
σ_i''	1,0			
	N_1	N_2	n_1	δ_i''
	1	6	2,1	0,46
	1	5	3,9	0,90
	2	6	1,4	0,09
	2	5	1,7	-0,03
	2	1	1,9	0,04
	3	6	1,7	-0,11

Окончание табл. 3.17

	3	2	2,3	0,59
	4	6	2,1	-0,32
	4	3	1,9	-0,03
	5	2	3,9	1,04
	5	6	3,8	-0,98
	5	4	2,0	-0,13
	6	2	3,9	-0,87
	6	3	2,6	0,70
	6	4	2,0	0,04
	6	5	2,2	-0,06
μ	0,682			
M_4	0,0353			
M_5	0,0493			
M_6	0,0226			
M_1	0,0387			
M_2	0,0314			

Поскольку программа рассчитана на пять определяемых пунктов, то уравнивание выполнялось с одним исходным пунктом № 3, с его координатами, взятыми из табл. 3.16, шестая колонка. Результаты счета показали, что для нуль-свободного уравнивания достаточно выполнить уравнивание свободной сети (табл. 3.16, вторая колонка) и путем трансформирования получить колонки три и четыре, и, взяв среднее из колонок два, три и четыре, получить координаты нуль-свободной геодезической сети. Следовательно, при уравнивании триангуляции программой многокритериального уравнивания, которую мы применили лишь для контроля, пользоваться не надо (см. табл. 3.17). Как показали исследования, этой программой необходимо пользоваться для сетей трилатерации и линейно-угловых сетей, взяв начальные координаты методом трансформирования (см. колонку пять в табл. 3.16).

3.3.5. Многокритериальная оптимизация под условием минимума ошибки определения площади

Рассмотрим случай многокритериальной оптимизации, когда при минимизации используются две целевые функции (3.1)

$$\Phi_2(X) = \min(m_i), \quad (3.26)$$

где m_i – средняя квадратическая ошибка определения только одной площади на весь объект. В результате минимизации функции $\Phi_1(X)$ отыскиваются показатели степени n_i в соответствии с минимумом функции $\Phi_2(X)$.

В табл. 3.18 приведены результаты μ , $M_1 - M_4$ и m_s для случая МНК, когда все $n_i=2,0$. При этом взяты шесть тестовых примеров из [72], с. 93, 129, 153 (триангуляция), 179, 202 (трилатерация) и 217 – линейно-угловая сеть.

Во всех примерах площадь S бралась на границах между определяемыми пунктами: $S_1 = 30652379 \text{ м}^2$; $S_2 = 37593995 \text{ м}^2$; $S_3 = 29333660 \text{ м}^2$; $S_4 = 28370384 \text{ м}^2$; $S_5 = 35074634 \text{ м}^2$; $S_6 = 2677709 \text{ м}^2$.

Величины M_i в табл. 3.18 – 3.21 вычислялись по методике, опубликованной в [60].

Таблица 3.18

Уравнивание по МНК

Обозначения	1	2	3	4	5	6
μ	0,608	1,139	0,831	1,053	1,098	0,452
M_1	0,0523	0,0475	0,0424	0,0595	0,0373	0,0077
M_2	0,0536	0,0292	0,0439	0,0766	0,0406	0,0141
M_3	0,0245	0,0387	0,0206	0,0392	–	0,0125
M_4	–	–	–	0,0589	–	–
m_s	232	173	177	117	131	11,5

В таблице 3.19 приведены результаты многокритериальной оптимизации, заключающейся в поиске n_i методом релаксации под условием (3.26). В процессе оптимизации изменились не только μ , $M_1 - M_4$ и m_s , но и координаты, по которым вычислялись площади: $S_1=30652459 \text{ м}^2$; $S_2=37593944 \text{ м}^2$; $S_3=29333694 \text{ м}^2$; $S_4=28370386 \text{ м}^2$; $S_5=35074635 \text{ м}^2$; $S_6=2677707 \text{ м}^2$.

Таблица 3.19

Многокритериальная оптимизация

Обозначения	1	2	3	4	5	6
μ	0,509	1,074	0,659	0,884	0,565	0,324
M_1	0,0547	0,0505	0,0339	0,0779	0,0598	0,0061
M_2	0,0553	0,0355	0,0429	0,0930	0,0293	0,0134
M_3	0,0258	0,0444	0,0217	0,0537	–	0,0168
M_4	–	–	–	0,0769	–	–
m_s	176	145	109	111	78	7,3
$\frac{(m_i)_{n=2}}{m_s}$	1,3	1,2	1,6	1,05	1,7	1,6

По данным табл. 3.19 видно, что в большинстве случаев минимизация m , приводит к возрастанию ошибок M . В программе, по которой получены данные табл. 3.19, предусмотрена обработка с использованием допуска $M_{\max} \leq M_{\text{дон}}$. Здесь применена оптимизация с ограничениями, когда $M_{\max} > M_{\text{дон}}$ к значению $\Phi_2(X)$ прибавляется произвольно большое число.

В таблицах 3.18 и 3.19 для примеров 1, 2, 3 и 6 применялось уравнение по углам, а в табл. 3.20 и 3.21 – по направлениям, при котором брался в обработку угол, замыкающий горизонт.

Таблица 3.20

Уравнивание по МНК по направлениям

Обозначения	1	2	3	6
μ	0,518	0,967	0,856	0,458
M_1	0,0289	0,0285	0,0318	0,0064
M_2	0,0291	0,0226	0,0294	0,0106
M_3	0,0151	0,0265	0,0189	0,0092
S	30652369	37594000	29333549	2677704
m_s	132	117	122	10,9

Таблица 3.21

Многокритериальная оптимизация функций (3.1) и (3.26) при уравнивании по направлениям

Обозначения	1	2	3	6
μ	0,434	0,921	0,714	0,260
M_1	0,0142	0,0240	0,0224	0,0044
M_2	0,0087	0,0284	0,0249	0,0080
M_3	0,010	0,0325	0,0196	0,0090
S	30652375	37593987	29333610	2677705
m_s	64,6	112	89,0	7,3

3.4. Многокритериальное уравнивание нивелирных сетей

При многокритериальном уравнивании измерений выполняют минимизацию целевой функции

$$\Phi(H) = \sum_{i=1}^N P_i |L_i(H)|^n, \quad (3.27)$$

где H – вектор отметок определяемых пунктов; $P_i = \left(\frac{c_i}{\sigma_i}\right)^{n_i}$ – веса измерен-

ных превышений, при этом $c^2 = \frac{n^{\frac{2}{n}} \Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}$ с использованием гамма-

функции; $L(H) = h^{m_{nv}} - h^{m_{nm}}$ – свободный член линейного параметрического уравнения; n_i – показатель степени ($1, 0 \leq n_i \leq 3, 0$).

Степени n_i для каждого измерения будут индивидуальными и отыскиваются под условием минимакса с использованием целевой функции

$$F(H) = \min(\max(m_H)), \quad (3.28)$$

где m_H – ошибка положения (ошибка какого-либо пункта из всех пунктов нивелирной сети).

Минимум функции (3.27) будем отыскивать методом Ньютона

$$H^{np} = H_0 - (\nabla^2 \Phi(H))^{-1} \nabla \Phi(H), \quad (3.29)$$

где $G = \nabla^2 \Phi(H)$ – матрица Гессе; $\nabla \Phi(H)$ – градиент целевой функции.

Вместо (3.29) можно записать

$$H^{np} = H_0 - \frac{1}{n_{cp} - 1} (A^T D A)^{-1} A^T D L \quad (3.30)$$

где n_{cp} – среднее значение степеней для всех измерений, A – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок; D – весовая матрица, L – вектор свободных членов параметрических уравнений. Если бы степени для всех измерений были одинаковыми, то

$$D = P \text{diag}(|V|)^{n-2}. \quad (3.31)$$

Но для каждого измерения нами используется своя степень, и по этой причине величину D вычислить нельзя. Нетрудно доказать, что обратная матрица весов

$$Q = F P^{-1} F^T = n_{cp}^2 (n_{cp} - 1)^2 F^* P^{-1} (F^*)^T \quad (3.32)$$

$$F = (A^T D A)^{-1} A^T D = n_{cp} (n_{cp} - 1) F^*; \quad (3.33)$$

при этом

$$F = n_{cp} (n_{cp} - 1) G^{-1} A^T D, \quad (3.34)$$

что невозможно вычислить из-за незнания D .

Но матрицу F можно найти численно

$$F = \frac{H_{\delta_i} - H^{sp}}{\delta_i}, \quad (3.35)$$

где H_{δ} – уравнинный вектор отметок после искажения i -того измерения на величину δ .

Зная по формуле (3.32) Q , выполним оценку точности

$$\frac{1}{P_f} = f Q f^T; \quad (3.36)$$

$$m_H = \mu \sqrt{\frac{1}{P_f}}; \quad (3.37)$$

$$\mu = \sqrt{\frac{V^T P V}{r}}. \quad (3.38)$$

Поиск минимума функции (3.2) осуществим методом релаксации, изменяя степени на величину $n \pm 0,1$ с последующей оценкой точности по формуле (3.35).

Приведем пример (рис. 3.2) многокритериального уравнивания нивелирной сети [6, с. 254] для двух эпох с обработкой свободного и нуль-свободного построения [45] (табл. 3.22).

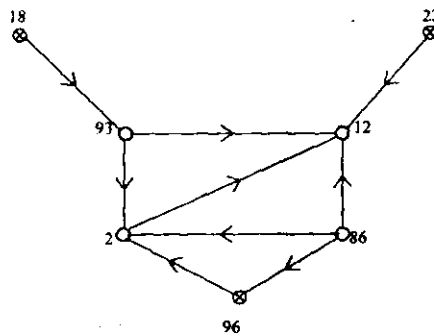


Рис. 3.2 Схема нивелирной сети

Таблица 3.22
 Результаты измерений и степени, полученные при многокритериальной оптимизации

№ пп	Название превышения	Эпоха 1		Эпоха 2		Разность 1 – 2	
		<i>H</i> , м	<i>n</i>	<i>H</i> , м	<i>n</i>	<i>H</i> , м	<i>n</i>
1	18 – 93	6,1250	2,3	6,1070	2,3	-0,0180	1,9
2	93 – 12	8,3200	2,0	8,3270	2,0	0,0070	2,1
3	22 – 12	5,5800	1,8	5,5870	1,8	0,0070	1,9
4	93 – 2	1,3680	2,0	1,3777	2,0	0,0097	2,1
5	86 – 2	4,6940	2,0	4,7014	2,0	0,0074	2,0
6	86 – 12	11,6520	2,0	11,6507	2,0	-0,0013	2,0
7	96 – 2	-0,9050	2,0	-0,8993	2,0	0,0057	2,0
8	2 – 12	6,9440	2,0	6,9456	2,0	0,0016	2,0
9	86 – 96	5,5850	2,0	5,6007	2,0	0,0157	2,0

В таблицах 3.20 – 3.22 указаны следующие сведения:

колонки 2, 3 – результаты уравнивания и оценки точности свободной сети с исходным пунктом № 96 при $n = 2,0$ для всех измерений;

колонка 4 – оценка точности свободной нивелирной сети с исходным пунктом № 96 в случае многокритериальной оптимизации с нахождением степеней n (см. табл. 3.22);

колонки 5, 6 – результаты уравнивания и оценки точности для нуля-свободной нивелирной сети от средней плоскости и в случае многокритериальной оптимизации;

колонки 7, 8 – результаты уравнивания и оценки точности для нуля-свободной нивелирной сети относительно исходных пунктов и в случае многокритериальной оптимизации.

По данным таблиц 3.20 – 3.22 можно сделать следующие выводы:

1. Величины отметок H , указанные в колонках 3, 5 и 7, будут близкими к их соответствующим значениям, найденным без многокритериальной оптимизации. По этой причине мы не стали указывать отметки перед колонкой 4.

2. Результаты оценки точности при изменении степени n принимают другие и меньшие значения после многокритериальной оптимизации.

3. При обработке разности эпох наблюдений следует уравнивать по разностям измерений, чтобы получить адекватную оценку точности.

3.5. Вывод формулы для вычисления весов результатов измерений при многостепенной оптимизации

В случае многостепенной оптимизации в [19] предлагается использовать целевую функцию (3.1).

Для минимизации функции (3.1) применим метод Ньютона

$$\mathbf{X}^{(j+1)} = \mathbf{X}^{(j)} - \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{X}^{(j)}) \nabla \Phi(\mathbf{X}^{(j)}), \quad (3.39)$$

где $\mathbf{H}(\mathbf{X}^{(j)})$ – матрица Гессе вторых частных производных целевой функции по параметрам; $\nabla \Phi(\mathbf{X}^{(j)})$ – градиент целевой функции; j – номер итерации.

Найдем аналитические выражения для этих матриц применительно к целевой функции (3.1).

В дальнейшем будем дифференцировать функцию вида $y = |X|^n$, применяя формулу $y' = n \cdot \text{Sign}(X) |X|^{n-1}$, где $\text{Sign}(X)$ – функция передачи знака (или единица со знаком переменной X).

Чтобы найти $\partial \Phi / \partial x$ запишем равенство (3.1) в виде

$$\Phi(\mathbf{X}) = P_1 |L_1(\mathbf{X})|^n + P_2 |L_2(\mathbf{X})|^n + \dots + P_N |L_N(\mathbf{X})|^n. \quad (3.40)$$

Следовательно, при $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial X_1} &= n_1 \text{Sign}(L_1) |L_1(\mathbf{X})|^{n-1} a_{11} P_1 + \\ &+ n_2 \text{Sign}(L_2) |L_2(\mathbf{X})|^{n-1} a_{21} P_2 + \dots \\ &+ n_N \text{Sign}(L_N) |L_N(\mathbf{X})|^{n-1} a_{N1} P_N, \end{aligned} \quad (3.41)$$

где $a_{ij} = \partial L_i(\mathbf{X}) / \partial x_j$ – коэффициенты параметрических уравнений поправок.

Отсюда градиент целевой функции будет равен

$$\nabla \Phi(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial X_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial X_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N n_i S_i |L_i(\mathbf{X})|^{n-1} a_{i1} P_i \\ \sum_{i=1}^N n_i S_i |L_i(\mathbf{X})|^{n-1} a_{i2} P_i \\ \dots \\ \sum_{i=1}^N n_i S_i |L_i(\mathbf{X})|^{n-1} a_{in} P_i \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

где $S_i = \text{Sign}(L_i)$. Выражение (3.42) можно записать в матричном виде

$$\nabla\Phi(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{L}(\mathbf{X}), \quad (3.43)$$

где $\mathbf{K} = \text{diag}(K_i)$,

$$K_i = n_i P_i |L_i(\mathbf{X})|^{n_i-2}. \quad (3.44)$$

В этом равенстве применена степень $n - 2$, поскольку для всех $L_i(\mathbf{X}) \neq 0$

$$\frac{\text{Sign}(L_i) |L_i(\mathbf{X})|^{n_i-1}}{(L_i)} = |L_i(\mathbf{X})|^{n_i-2}, \quad (3.45)$$

Найдем вторые производные от целевой функции, дифференцируя (3.41)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X_i^2} &= n_1(n_1-1) \text{Sign}(L_1) \text{Sign}(L_1) |L_1(\mathbf{X})|^{n_1-2} a_{1i} \cdot a_{1i} P_1 + \\ &+ n_2(n_2-1) \text{Sign}(L_2) \text{Sign}(L_2) |L_2(\mathbf{X})|^{n_2-2} a_{2i} \cdot a_{2i} P_2 + \dots \\ &+ n_N(n_N-1) \text{Sign}(L_N) \text{Sign}(L_N) |L_N(\mathbf{X})|^{n_N-2} a_{Ni} \cdot a_{Ni} P_N; \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X_i^2} &= n_1(n_1-1) |L_1(\mathbf{X})|^{n_1-2} a_{1i}^2 P_1 + \\ &+ n_2(n_2-1) |L_2(\mathbf{X})|^{n_2-2} a_{2i}^2 P_2 + \dots \\ &+ n_N(n_N-1) |L_N(\mathbf{X})|^{n_N-2} a_{Ni}^2 P_N = \\ &= \sum_{i=1}^N n_i(n_i-1) |L_i(\mathbf{X})|^{n_i-2} a_{ii}^2 P_i. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X_i \partial X_j} &= n_1(n_1-1) |L_1(\mathbf{X})|^{n_1-2} a_{1i} a_{1j} P_1 + \dots + \\ &+ n_N(n_N-1) |L_N(\mathbf{X})|^{n_N-2} a_{Ni} a_{Nj} P_N = \\ &= \sum_{i=1}^N n_i(n_i-1) |L_i(\mathbf{X})|^{n_i-2} a_{ii} a_{ij} P_i. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Отсюда $\mathbf{H}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A}$, где

$$\mathbf{C} = \text{diag}(C_i), \quad (3.48)$$

а

$$C_i = n_i(n_i-1) P_i |L_i(\mathbf{X})|^{n_i-2}. \quad (3.49)$$

Таким образом, для целевой функции (3.1) вместо (3.29) получим

$$X^{(j+1)} = X^{(j)} - (A^T C A)^{-1} A^T K L(X) \quad (3.50)$$

или

$$X^{(j+1)} = X^{(j)} - (A^T C A)^{-1} A^T \text{diag} \left(\frac{1}{n_i - 1} \right) C L(X). \quad (3.51)$$

Матрица C является весовой матрицей при многостепенной оптимизации, а формула (3.51) позволяет выполнять эту оптимизацию аналитически.

Применение изложенного алгоритма эффективно при условии

$$K_1 \leq \frac{N}{N-r} \leq K_2, \quad (3.52)$$

где N – количество результатов измерений.

Цель наших исследований – установить статистическим путем K_1 и K_2 , в пределах которых целесообразно применение нового метода. Воспользуемся моделью пространственной линейной засечки, в которой первоначально используются 36 станций слежения, расположенные вблизи экватора. Шаг сетки по широте и долготе (6×6 по меридиану и параллели) принят 20 минут при $H = 0$ м. Геодезические координаты спутника $B_{cp} = L_{cp} = 70'$, при $H = 200000$ м. Рассматривалось 16 вариантов сети наблюдений с очередным исключением одного северного и южного пунктов слежения так, чтобы схема расположения пунктов оставалась симметричной. В каждом варианте обрабатывались результаты измерений с разными ошибками наблюдений, сгенерированными по нормальному закону из 30 испытаний. Таким образом, общее количество испытаний составило 480. Расчеты по вариантам выполнялись по МНК и новым методам. Время обработки одного испытания на Pentium-III не превышало 1 с.

В 99,8 % случаев $M_{нов} < M_{МНК}$, поскольку всюду при поиске n выполнялся минимум критерия (3.53). Результаты исследований приведены в табл. 3.23.

Таблица 3.23

Результаты сравнения нового метода с МНК

№ п/п	$\frac{N}{N-r}$	A, %	B, %	C, %	№ п/п	$\frac{N}{N-r}$	A, %	B, %	C, %
1	12,0	80	5,6	3,7	9	6,7	97	12	4,3
2	11,3	83	4,8	3,5	10	6,0	97	21	5,4
3	10,7	80	7,4	3,6	11	5,3	93	15	5,4
4	10,0	97	7,7	3,8	12	4,7	96	13	5,6
5	9,3	87	6,9	3,8	13	4,0	87	14	5,0
6	8,7	97	5,9	3,5	14	3,3	90	21	6,4
7	8,0	90	7,8	3,6	15	2,7	100	35	12
8	7,3	90	9,2	3,8	16	2,0	97	32	14

Дополнительный критерий

$$\Phi_2(X) = \sum_{i=1}^N M^2 \quad (3.53)$$

В колонке А таблицы 3.26 дано процентное соотношение количества уменьшений μ' в новом методе из 30 испытаний. Отсюда видно, что даже при $\mu' > \mu$ $M_{\text{НОВ}} < M_{\text{МНК}}$ в 10 – 20 % случаев.

В колонке В таблицы 3.26 указан наибольший из 30 испытаний процент уменьшения M , вычисляемый по формуле

$$m \% = \frac{M_{\text{МНК}} - M_{\text{НОВ}}}{M_{\text{МНК}}} \cdot 100 \%$$

В колонке С таблицы дано $m_{\text{ср}}\%$ из 30 испытаний. По данным таблицы видно, что эффективность нового метода очевидна при $K_1 = 2$ и $K_2 = 7$. При малом количестве измерений $N < 6$ ($r < 3$) новый метод при $M_{\text{НОВ}} < M_{\text{МНК}}$ может привести к случайному результату. При большом значении $N / (N - r)$ величина m мала и не превысит в среднем 5 %.

К особенности нового метода по сравнению с МНК следует отнести то, что μ' имеет произвольную размерность при разных n_i и не является средней квадратической ошибкой измерения, вес которого равен единице. Но, если выполнить оценку точности функций по формуле (3.12) или из выражения

$$m_F = \frac{\mu'}{\sqrt{P_F}} \quad (3.54)$$

для результатов измерений m_S , вес которых P_n , то размерность m_F восстанавливается и будет получена следующая средняя квадратическая ошибка

$$\gamma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N m_S^2}{N}} \approx m_{S_{\text{МНК}}}, \quad (3.55)$$

что доказывает методом статистических испытаний справедливость формулы (3.13).

По результатам исследований третьей главы можно сделать следующие выводы:

1. Эффект от применения многостепенной многокритериальной оптимизации может составить 1,2 раза от уменьшаемой при оценке точности величины.
2. Многокритериальное уравнивание в нелинейном случае эффективно при числе параметров не более 10, что потребует до 20 мин машинного времени на Pentium 3.
3. Многокритериальное уравнивание по методу Lp-оценок в линейном варианте требует в 300 раз меньше машинного времени и позволяет обрабатывать локальные геодезические сети до 100 и более параметров.

4. ЛИНЕЙНЫЕ МЕТОДЫ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

4.1. Вывод формулы вычисления весов результатов измерений при многостепенной оптимизации

В случае многостепенной оптимизации в [55] предлагается использовать целевую функцию

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^N P_i |L_i(X)|^n, \quad (4.1)$$

где N – количество результатов измерений; P – веса результатов измерений, вычисляемые по формуле $P_i = c/\sigma_i^n$; $L(X)$ – свободный член нелинейного параметрического уравнения; n – показатель степени.

Для минимизации функции (4.1) применим метод Ньютона

$$X^{(j+1)} = X^{(j)} - H^{-1}(X^{(j)}) \nabla \Phi(X^{(j)}), \quad (4.2)$$

где $H(X^{(j)})$ – матрица Гессе вторых частных производных целевой функции по параметрам; $\nabla \Phi(X^{(j)})$ – градиент целевой функции; j – номер итерации.

Найдем аналитические выражения для этих матриц применительно к целевой функции (4.1).

В дальнейшем будем дифференцировать функцию вида $y = |X|^n$, применяя формулу $y' = n \cdot \text{Sign}(X) |X|^{n-1}$, где $\text{Sign}(X)$ – функция передачи знака (или единица со знаком переменной X).

Чтобы найти $\partial \Phi / \partial x$, запишем равенство (4.1) в виде

$$\Phi(X) = P_1 |L_1(X)|^n + P_2 |L_2(X)|^n + \dots + P_N |L_N(X)|^n. \quad (4.3)$$

Следовательно, при $X = [X_1, X_2, \dots, X_i]^T$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial X_i} &= n_1 \text{Sign}(L_1) |L_1(X)|^{n-1} a_{i1} P_1 + \\ &+ n_2 \text{Sign}(L_2) |L_2(X)|^{n-1} a_{i2} P_2 + \dots, \quad (4.4) \\ &+ n_N \text{Sign}(L_N) |L_N(X)|^{n-1} a_{iN} P_N, \end{aligned}$$

где $a_{ij} = \partial L_i(X) / \partial x_j$, – коэффициенты параметрических уравнений по правок.

Отсюда градиент целевой функции будет равен

$$\nabla \Phi(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial X_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial X_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N n_i S_i |L_i(\mathbf{X})|^{n_i-1} a_{i1} P_i \\ \sum_{i=1}^N n_i S_i |L_i(\mathbf{X})|^{n_i-1} a_{i2} P_i \\ \dots \\ \sum_{i=1}^N n_i S_i |L_i(\mathbf{X})|^{n_i-1} a_{iN} P_i \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

где $S_i = \text{Sign}(L_i)$. Выражение (4.5) можно записать в матричном виде

$$\nabla \Phi(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{L}(\mathbf{X}), \quad (4.6)$$

где $\mathbf{K} = \text{diag}(K_i)$,

$$K_i = n_i P_i |L_i(\mathbf{X})|^{n_i-2}, \quad (4.7)$$

В этом равенстве применена степень $n - 2$, поскольку для всех $L_i(\mathbf{X}) \neq 0$

$$\frac{\text{Sign}(L_i) |L_i(\mathbf{X})|^{n_i-1}}{L_i(\mathbf{X})} = |L_i(\mathbf{X})|^{n_i-2}. \quad (4.8)$$

Найдем вторые производные от целевой функции, дифференцируя (4.4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X_1^2} &= n_1 (n_1 - 1) \text{Sign}(L_1) \text{Sign}(L_1) |L_1(\mathbf{X})|^{n_1-2} a_{11} \cdot a_{11} P_1 + \\ &+ n_2 (n_2 - 1) \text{Sign}(L_2) \text{Sign}(L_2) |L_2(\mathbf{X})|^{n_2-2} a_{21} \cdot a_{21} P_2 + \dots \\ &+ n_N (n_N - 1) \text{Sign}(L_N) \text{Sign}(L_N) |L_N(\mathbf{X})|^{n_N-2} a_{N1} \cdot a_{N1} P_N; \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X_1^2} &= n_1 (n_1 - 1) |L_1(\mathbf{X})|^{n_1-2} a_{11}^2 P_1 + \\ &+ n_2 (n_2 - 1) |L_2(\mathbf{X})|^{n_2-2} a_{21}^2 P_2 + \dots \\ &+ n_N (n_N - 1) |L_N(\mathbf{X})|^{n_N-2} a_{N1}^2 P_N = \\ &= \sum_{i=1}^N n_i (n_i - 1) |L_i(\mathbf{X})|^{n_i-2} a_{i1}^2 P_i. \end{aligned}$$

Найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X_i \partial X_j} &= n_i (n_i - 1) |L_i(\mathbf{X})|^{n_i-2} a_{i1} a_{ij} P_i + \dots + \\ &+ n_N (n_N - 1) |L_N(\mathbf{X})|^{n_N-2} a_{N1} a_{Nj} P_N = \\ &= \sum_{i=1}^N n_i (n_i - 1) |L_i(\mathbf{X})|^{n_i-2} a_{i1} a_{ij} P_i. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Отсюда

$$H(X) = A^T C A, \quad (4.11)$$

где $C = \text{diag}(C_i)$, а

$$C_i = n_i (n_i - 1) P_i |L_i(X)|^{n_i - 2}. \quad (4.12)$$

Таким образом, для целевой функции (4.1) вместо (4.2) получим

$$X^{(j+1)} = X^{(j)} - (A^T C A)^{-1} A^T C L(X) \quad (4.13)$$

или

$$X^{(j+1)} = X^{(j)} - (A^T X A)^{-1} A^T \text{diag} \left(\frac{1}{n_i - 1} \right) C L(X). \quad (4.14)$$

Матрица C является весовой матрицей при многостепенной оптимизации, а формула (4.14) позволяет выполнять эту оптимизацию аналитически.

4.2. О малости отклонений координат пунктов в методе многокритериальной оптимизации от их истинных значений

Как известно, в методе многокритериальной оптимизации (МК) используются две целевые функции [55]

$$\Phi_1(X) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{m_i^{n_i}} |L_i(X)|^{n_i}, \quad (4.15)$$

$$\Phi_2(X, n) = \min \max M_K, \quad (4.16)$$

в которых N – число измеренных величин; m – СКО измерения, полученная по МНК; n – показатель степени, отыскиваемый в процессе итераций; $L(X) = T^{\text{выч.}} - T^{\text{изм.}}$ – свободный член измерения; $M_K = \mu \sqrt{Q_{K,K} + Q_{K+1,K+1}}$ – ошибка положения пункта;

$$\mu_{MK} = \sqrt{\frac{V_{MK} \text{diag} \left(\frac{1}{m_i} \right)^n V_{MK}^T}{r}}, \quad (4.17)$$

$$V_{MK} = T_{MK}^{\text{выч.}} - T_{MK}^{\text{изм.}}; \quad (4.18)$$

r – количество избыточных измерений.

Минимум функции (4.15) находят как нелинейным, так и линейным методом

$$X_{MK}^{(j+1)} = X_{MK}^{(j)} - (A^T C A)^{-1} A^T \text{diag} \left(\frac{1}{n_i - 1} \right) C L(X^{(j)}) \quad (4.19)$$

или

$$\delta X^{(j)} = -F \text{diag} \left(\frac{1}{n_i - 1} \right) L(X^{(j)}), \quad (4.20)$$

$$C_i = n_i (n_i - 1) \text{diag} \left(\frac{1}{m_i} \right)^n (|V_i(X)| + 10^{-4})^{n-2}, \quad (4.21)$$

а обратная матрица весов

$$Q = F \text{diag} (m_i^n) F^T, \quad (4.22)$$

используется при оценке точности функций измеренных и уравненных величин, включая M .

В статье [55] приводятся значения

$$\mu_{MНК} = \sqrt{\frac{V_{MНК} \text{diag} \left(\frac{1}{\sigma_i} \right)^2 V_{MНК}}{r}}. \quad (4.23)$$

Значение $\mu_{MНК}$, вычисленное по формуле (4.17), и ошибка положения вычисляются с помощью равенства (4.22). Для МНК имеем

$$Q = \left(A^T \text{diag} \left(\frac{1}{\sigma_i} \right)^2 A \right)^{-1}, \quad (4.24)$$

$$X_{MНК}^{(j+1)} = X_{MНК}^{(j)} - F_{MНК} L_{MНК}; \quad F_{MНК} = Q A^T P; \quad (4.25)$$

В формулах (4.19) и (4.24) A - матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок.

Метод МК особенно эффективен при обработке линейно-угловых сетей с завышенным значением числа обусловленности матрицы R с использованием $Q = R^{-1}$.

Приведём результаты обработки сети полигонометрии (рис. 4.1) при $S_{cp} = 1000$ м; $\sigma_B = 2,0''$; $\sigma_s = 0,02$ м, число обусловленности ≈ 11600 .

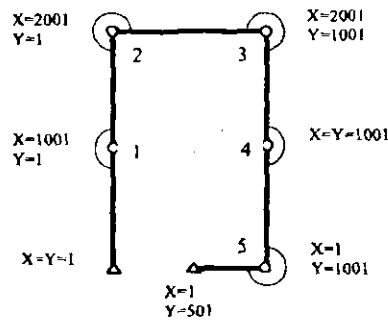


Рис. 4.1. Ход полигонометрии плохого качества

Цель расчётов – сравнить $X^{уст}$ (координаты даны на рис. 4.1.); $X_{МНК}$ и $X_{МК}$, полученные по указанным выше формулам, после задания в каждое измерение (по 10 разным вариантам) поправок (Δ_i – 6 сторон и 5 углов), сгенерированных датчиком псевдослучайных чисел в соответствии с σ_x и σ_y .

Расчёты приведены в табл. 4.1, где $\delta S_{МК}$ и $\delta S_{МНК}$ вычисляются по формуле

$$\delta S_k = \sqrt{\delta x_k^2 + \delta y_k^2}; \quad (4.26)$$

$$\delta_x = X_i - X_i^{уст.}$$

$$\delta_y = X_{i+1} - X_{i+1}^{уст.}$$

Таблица 4.1

Результаты вычислений

№ пп	$M_{МНК}$	$M_{МК}$	$\delta S_{МНК}$	$\delta S_{МК}$	$M_{МНК}$	$M_{МК}$	$\delta S_{МНК}$	$\delta S_{МК}$
Вариант 1					Вариант 2			
μ	1,093	0,833			1,826	0,792		
1	0,093	0,027	0,121	0,079	0,155	0,021	0,107	0,030
2	0,183	0,051	0,256	0,170	0,305	0,039	0,208	0,056
3	0,195	0,062	0,323	0,231	0,325	0,053	0,206	0,009
4	0,110	0,045	0,172	0,121	0,183	0,036	0,114	0,073
5	0,051	0,044	0,089	0,066	0,084	0,025	0,043	0,025
Вариант 3					Вариант 4			
μ	0,704	0,677			0,671	0,628		
1	0,060	0,026	0,016	0,008	0,057	0,020	0,025	0,027
2	0,118	0,051	0,040	0,018	0,112	0,037	0,004	0,033
3	0,126	0,060	0,034	0,012	0,120	0,043	0,024	0,015
4	0,071	0,041	0,023	0,015	0,068	0,029	0,012	0,007
5	0,033	0,033	0,012	0,004	0,031	0,026	0,006	0,012
Вариант 5					Вариант 6			
μ	0,513	0,636			1,637	0,769		
1	0,044	0,023	0,090	0,044	0,140	0,021	0,004	0,005
2	0,086	0,044	0,173	0,082	0,274	0,039	0,010	0,008
3	0,091	0,049	0,156	0,058	0,292	0,050	0,012	0,021
4	0,052	0,034	0,079	0,022	0,165	0,033	0,003	0,012
5	0,024	0,033	0,063	0,054	0,076	0,021	0,021	0,011
Вариант 7					Вариант 8			
μ	0,188	0,179			0,186	0,176		
1	0,016	0,005	0,127	0,106	0,016	0,004	0,050	0,006
2	0,031	0,009	0,267	0,225	0,031	0,008	0,100	0,023
3	0,033	0,010	0,317	0,272	0,033	0,010	0,084	0,021
4	0,019	0,006	0,171	0,148	0,019	0,006	0,051	0,033
5	0,009	0,004	0,100	0,091	0,009	0,005	0,041	0,032

Окончание табл. 4.1

μ	Вариант 9				Вариант 10			
	0,554	0,543			0,698	0,599		
1	0,047	0,022	0,074	0,042	0,059	0,021	0,045	0,007
2	0,093	0,041	0,123	0,060	0,116	0,041	0,105	0,025
3	0,099	0,049	0,130	0,040	0,124	0,051	0,115	0,039
4	0,056	0,033	0,074	0,040	0,070	0,036	0,057	0,019
5	0,026	0,028	0,050	0,0207	0,032	0,033	0,040	0,027

При этом

$$T^{ММ} = T^{МК} + \Delta, \quad (4.27)$$

$$L = T^{МК} - T^{ММ}, \quad (4.28)$$

где $T^{МК}$ получают по $X_{МНК}$ и $X_{МК}$ соответственно.

По данным табл. 4.1. можно сделать следующие выводы:

1. Положение определяемых пунктов в методе МК в девяти случаях из 10 ближе к истинным значениям примерно в 2 – 5 раза (в варианте 2 в 10 раз меньше).

2. Во всех случаях $M_{МК} < M_{МНК}$ при плохой обусловленности системы $R = A^T P A$.

3. Метод МК эффективнее МНК при обработке плохо обусловленных систем нормальных уравнений.

4.3. Сравнение результатов нелинейного и линеаризованного параметрического многокритериального уравнивания геодезических сетей

Вопросы многокритериального уравнивания плановых геодезических сетей нелинейным методом Ньютона были рассмотрены в статьях [42, 47]. Линеаризованный вариант параметрического многокритериального способа изложен в статье [58]. Цель настоящей работы сравнить нелинейный и линеаризованный методы с применением целевых функций, потому что используются не только индивидуальные степени для измерений, но и две целевых функции

$$\Phi_1(X) = \sum_{i=1}^N P_{\sigma_i} |L_i(X)|^n; \quad (4.29)$$

$$\Phi_2(X, n) = \max M; \quad (4.30)$$

$$\Phi_2(X, n) = \sum_{j=1}^K M_j^2; \quad (4.31)$$

где n – показатель степени, определяемый под условиями (4.30) или (4.31) для каждого измерения; M – ошибка положения определяемого пункта.

Две разных целевых функций Φ_2 и Φ_3 необходимы для того, чтобы выяснить, какая из них наилучшая. Результаты сравнения получим, используя 24 тестовых примера, по которым достоверно установлено, что линейризованное многокритериальное уравнивание до 250 раз требует меньше машинного времени по сравнению с нелинейным и для пяти определяемых пунктов полигонометрии занимает 2 – 3 с машинного времени на Pentium 3.

На основе данных из 24 таблиц прил. 1 можно сделать следующие выводы:

1. Нелинейный метод в 250 – 300 раз занимает больше машинного времени, чем линейный, который реализуется за 2 – 3 с.
2. Нелинейный метод получения расширенной псевдообратной матрицы F может дать сбои, как замечено в примерах 17 и 20.
3. Сочетания целевых функций Φ_1 и Φ_2 , или Φ_1 и Φ_3 практически равноценны.

Приведем сведения о тестовых примерах:

пример 1 (рис. 4.2) геодезический четырехугольник триангуляции из статьи [3];

пример 2 (рис. 4.3) ход полигонометрии;

пример 3 (рис. 4.4) сеть триангуляции из статьи [72, с. 93];

пример 4 (рис. 4.5) сеть триангуляции из статьи [72, с. 129];

пример 5 (рис. 4.6) сеть триангуляции из статьи [72, с. 153];

пример 6 (рис. 4.7) сеть трилатерации из статьи [72, с. 179];

пример 7 (рис. 4.8) сеть трилатерации из статьи [72, с. 202];

пример 8 (рис. 4.9) линейно-угловая триангуляция из статьи [72, с. 217];

пример 9 (рис. 4.10) звено триангуляции из статьи [72, с. 145];

пример 10 (рис. 4.11) триангуляция из статьи [72, с. 160];

примеры 11, 12, 13 (рис. 4.12) триангуляция с исходными пунктами (6, 7; 5, 6, 7; 4, 5, 6, 7);

примеры 14, 15, 16 (рис. 4.12) трилатерация с исходными пунктами (6, 7; 5, 6, 7; 4, 5, 6, 7);

примеры 17, 18, 19 (рис. 4.13) полигонометрия с исходными пунктами (6, 7; 5, 6, 7; 4, 5, 6, 7);

примеры 20, 21 (рис. 4.14) полигонометрия с исходными пунктами (5, 6, 7; 4, 5, 6, 7);

примеры 22, 23, 24 (рис. 4.15) полигонометрия с исходными пунктами (6, 7; 5, 6, 7; 4, 5, 6, 7).

Результаты вычислений для 24 примеров – в прил. 1.

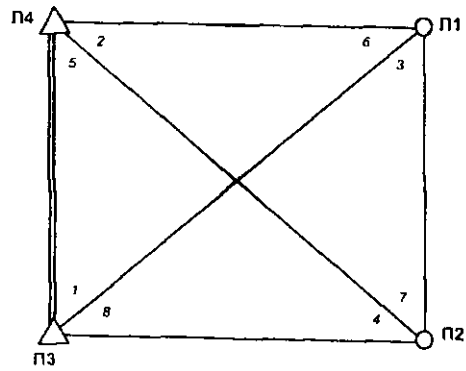


Рис. 4.2. Геодезический четырехугольник

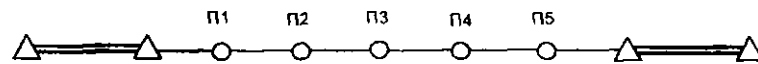


Рис. 4.3. Ход полигонометрии

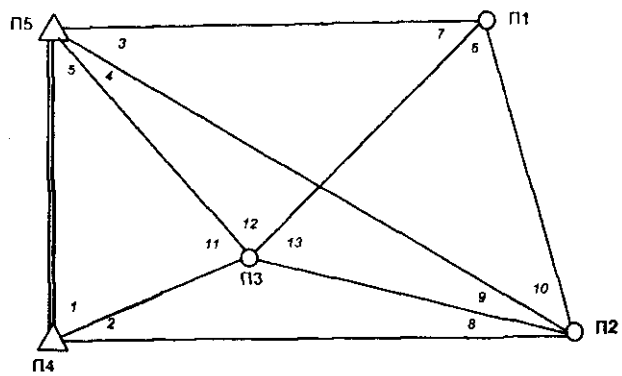


Рис. 4.4. Сеть триангуляции

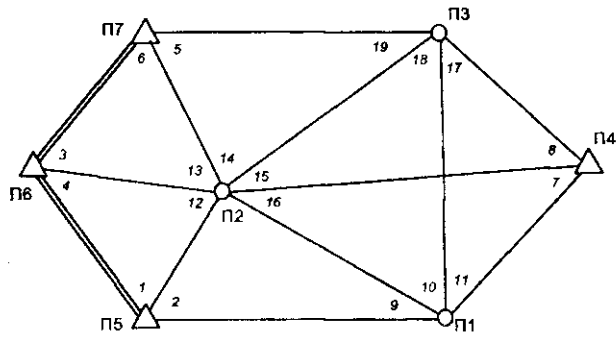


Рис. 4.5. Сеть триангуляции

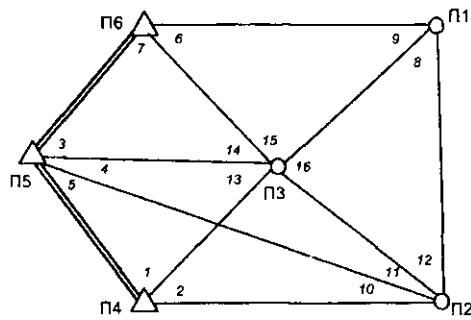


Рис. 4.6. Сеть триангуляции

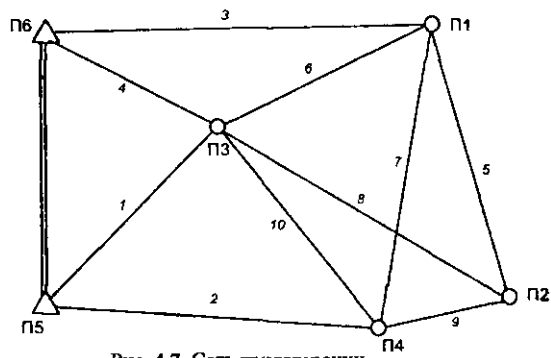


Рис. 4.7. Сеть трилатерации

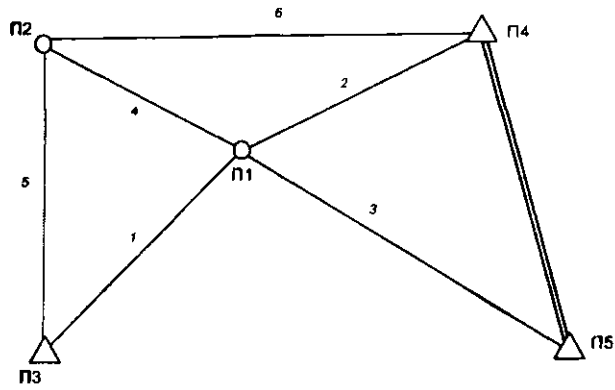


Рис. 4.8. Сеть трилатерации

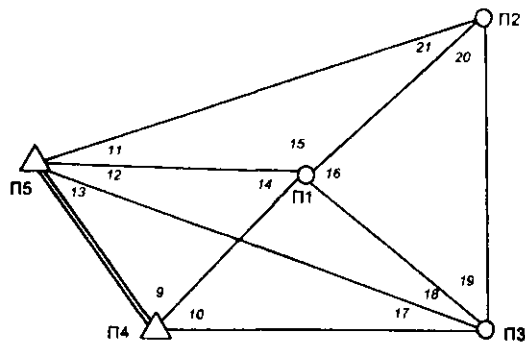


Рис. 4.9. Линейно-угловая сеть

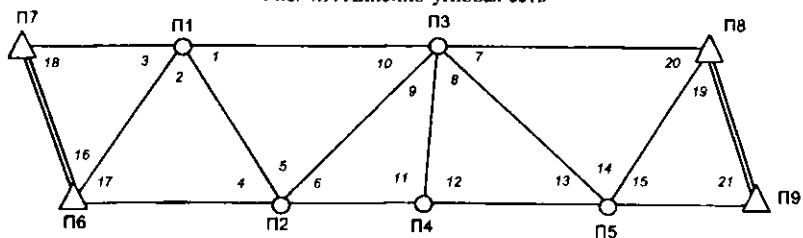


Рис. 4.10. Сеть триангуляции

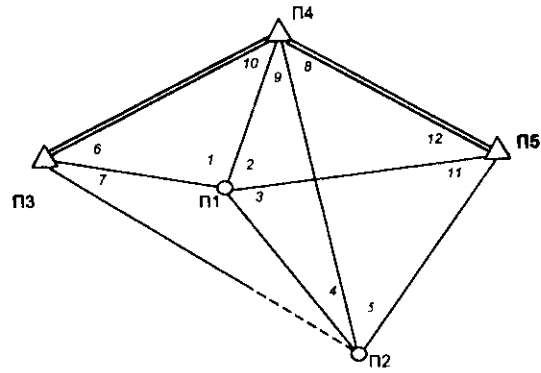


Рис. 4.11. Сеть триангуляции

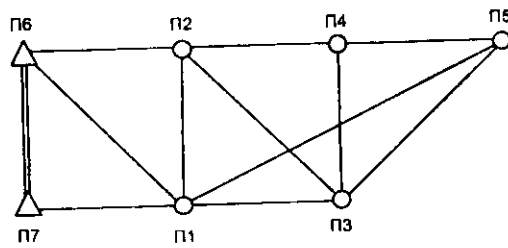


Рис. 4.12. Схема триангуляции и трилатерации

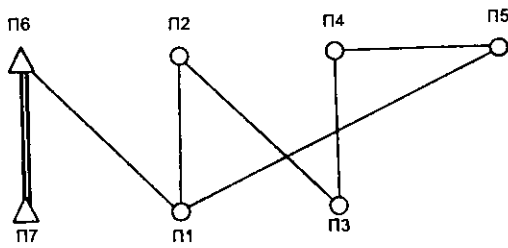


Рис. 4.13. Схема полигонометрии

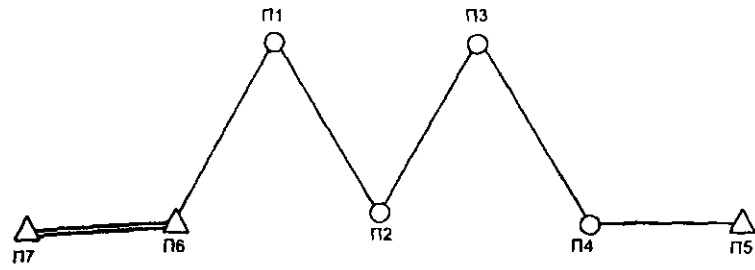


Рис. 4.14. Схема полигонометрии

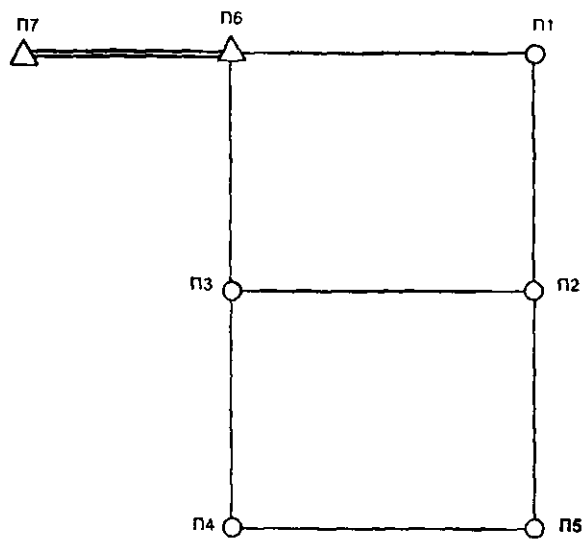


Рис. 4.15. Схема полигонометрии

4.4. О выборе дополнительных целевых функций при многокритериальном коррелятном уравнивании геодезических сетей

Алгоритм многокритериального коррелятного уравнивания заключается в следующем.

При коррелятном способе уравнивания для многокритериальной оптимизации сначала находят матрицу коэффициентов условных уравнений

$$B_{N \times N}^* = E_{N \times N} - A_{N \times r} F_{r \times N}^*, \quad (4.32)$$

выделяя из B^* r строк для избыточных измерений, где

$$F^* = (A^T P_{r=20} A)^{-1} A^T P_{r=20}, \quad (4.33)$$

а

$$W_{r \times l} = - (B_{N \times N}^* L_{N \times l})_{\text{выделенное}}, \quad (4.34)$$

где $L = L(X)_{n=20}$.

Далее вычисляют вектор поправок в результаты измерений из j -той итерации

$$(V_{r \times l})_j = - (P_{n_j}^{-1})_{N \times N} B_{N \times r}^T (K_{n_j})_{r \times l}, \quad (4.35)$$

где

$$K_{n_j} = - (B C_j^{-1} B^T)^{-1} W, \quad (4.36)$$

в которой

$$C_j = \text{diag}(C_i)_{N \times N}, \quad (4.37)$$

а C_i находят по формуле

$$C_i = n_i (n_i - 1) (P_{n_i})_j |V_i|_j^n, \quad (4.38)$$

аналогичной формуле

$$C_i = n_i (n_i - 1) P_{n_i} |L_i(X)|_j^n. \quad (4.39)$$

Величину $|V_i|_j$ получают из равенства (4.35) для K_{n_j} и для P_{n_i} найденного по формуле

$$P_{n_i} = \left(\frac{1}{m_i} \right)^{n_i}. \quad (4.40)$$

Оценку точности в коррелятном способе выполняют по формулам

$$m_i = \mu' \sqrt{\left(\frac{1}{P_j}\right)_i}, \quad (4.41)$$

$$M_K = \sqrt{m_i^2 + m_{i+1}^2}, \quad (4.42)$$

$$\left(\frac{1}{P_j}\right)_i = f_i \left(P_{N \times N}^{-1} - P_{N \times N}^{-1} B_{N \times K}^T (B_{K \times N} P_{N \times N}^{-1} B_{N \times K}^T)^{-1} B_{K \times N} P_{N \times N}^{-1} \right) f_i^T, \quad (4.43)$$

а вектор-строку для функции получают так

$$f_i = F_{i \times N}^*. \quad (4.44)$$

Степени n_i находят методом проб и ошибок с шагом 0,1 для N измерений, что составляет одно приближение. Количество итераций $j \leq 20$.

Линеаризованный вариант коррелятного многокритериального способа включает минимизацию следующих целевых функций

$$\Phi_1(X) = \sum_{i=1}^N P_{n_i} |L_i(X)|^{n_i}, \quad (4.45)$$

$$\Phi_2(X, n) = \max M, \quad (4.46)$$

$$\Phi_3(X, n) = \sum_{j=1}^K M_j^2, \quad (4.47)$$

где X – вектор координат определяемых пунктов, число которых равно K ; $L(X)$ – свободный член нелинейного параметрического уравнения; M – ошибка положения определяемого пункта; n – показатель степени, определяемый под условиями (4.46) или (4.47) для каждого измерения.

Две разных целевых функции Φ_2 и Φ_3 необходимы для того, чтобы выяснить, какая из них наилучшая. Результаты сравнений получим, используя 24 тестовых примера.

Результаты вычислений для 24 примеров – в прил. 2.

На основе данных из 24 таблиц можно сделать следующие выводы:

1. Условия (4.46), (4.47) по сравнению с МНК всегда приводят к меньшим величинам M . Исключение составляет пример 9.

2. Наибольший эффект уменьшения M достигается для линейно-угловых сетей и построений трилатерации. Уменьшение M по сравнению с МНК иногда составляет 250 %.

3. Применение условий (4.46) и (4.47) практически равноценно, но мы отдаем предпочтение функции (4.46).

4.5. Линеаризованное параметрическое и коррелятное многокритериальное уравнивание геодезических сетей с помощью двух разных дополнительных целевых функций

Алгоритм многокритериального уравнивания геодезических сетей коррелятным и параметрическим способами изложен выше. Здесь рассматривались следующие целевые функции:

$$\Phi_1(X) = \sum_{i=1}^n P_n |L_i(X)|^n, \quad (4.48)$$

$$\Phi_2(X, n) = \sum_{j=1}^k M_j^2, \quad (4.49)$$

где X – вектор координат определяемых пунктов, число которых равно K ; $L(X)$ – свободный член нелинейного параметрического уравнения; M – ошибка положения пункта.

Опыт работы показал, что лучшей по сравнению с (4.49) будет дополнительная целевая функция

$$\Phi_3(X, n) = \max M. \quad (4.50)$$

Замечено, что при использовании многокритериальной оптимизации, наибольшая поправка в измерения там, где индивидуальный показатель степени близок к единице. Как приведено в статье [55], чтобы дать ограничения на величину поправок в результаты измерений $V = L(X)$, вместо (4.50) можно применить целевую функцию

$$\Phi_3(X, n) = \max M \cdot \mu, \quad (4.51)$$

где $\mu = \sqrt{\frac{V^T P_n V}{r}}$.

Цель подраздела – установить, как влияет функция (4.51) на величину поправок в измерения по сравнению с (4.50).

Результаты вычислений для 24 примеров – в прил. 3.

4.6. О свойствах расширенной псевдообратной матрицы, вычисленной при многокритериальной оптимизации

В параметрическом способе уравнивания под расширенной псевдообратной матрицей понимают матрицу

$$F = (A^T P A)^{-1} A^T P, \quad (4.52)$$

где A – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок; P – диагональная матрица весов измерений.

Матрица F названа псевдообратной, так как $FA = E$. Если бы $P = E$, то матрица F была главной псевдообратной, удовлетворяющей условиям Мура-Пенроуза [79]. Поскольку при неравноточных измерениях рассмотрен более общий случай, то матрица F названа расширенной. Недостаток этой матрицы в том, что она занимает много места в памяти ЭВМ при ее использовании, столько же, как и матрица $A_{N \times n}$ ($F_{i \times n}$), где N – количество измерений, i – число параметров. Используя матрицу F , можно записать

$$\delta X = -FL, \quad (4.53)$$

где δX – поправки в приближенные значения параметров; L – вектор свободных членов параметрических уравнений поправок.

При многокритериальном уравнивании вместо (4.52) используется матрица

$$F_1 = (A^T C A)^{-1} A^T C, \quad (4.54)$$

где
$$C = P_n n(n-1) |V|^{n-2}, \quad (4.55)$$

в которой n – показатель степени (при $n = 2$ имеем метод наименьших квадратов (МНК), при $n = 1$ – метод наименьших модулей (МНМ); P_n – вес результатов измерений ($P_i = \frac{1}{m^2}$); m – средняя квадратическая ошибка измерения, найденная при $n = 2,0$ (МНК); V – вектор поправок в измерения, который уточняется при поиске n для каждого измерения.

Вектор уравненных координат определяемых пунктов

$$\hat{X} = X_0 + \delta X, \quad (4.56)$$

и индивидуальные для каждого измерения степени n отыскиваются путем минимизации двух целевых функций

$$\Phi_1(X) = \sum_{i=1}^n P_i |L_i(X)|^n, \quad (4.57)$$

$$\Phi_2(X, n) = \max M_j, \quad (4.58)$$

где M_j – ошибка положения j -того пункта.

Для МНК функция (4.57) имеет вид

$$\Phi_1(X) = \sum_{i=1}^n P_i L_i^2(X),$$

а расширенная псевдообратная матрица будет такой

$$F_2 = (A^T P_{n-2} A)^{-1} A^T P_{n-2}. \quad (4.59)$$

С применением формулы (4.53) можно осуществить оценку точности положения пункта методом статистических испытаний по формулам

$$\left. \begin{aligned} \delta X_1 &= -F_1 L \\ \delta X_2 &= -F_2 L \\ S_{1,2} &= \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2} \\ M_j &= \frac{1,25 \sum_{i=1}^K S_i}{K} \end{aligned} \right\}, \quad (4.60)$$

где K – количество испытаний.

Опыт применения многокритериальной оптимизации показал, что

$$\gamma = \frac{M_{j, \text{мнк}}}{M_{j, \text{н}}} \quad (4.61)$$

может достигать до $\gamma = 2$, т.е. с применением многокритериальной оптимизации ошибка положения пункта по сравнению с МНК может уменьшиться на 200 %.

Задача статьи заключается в том, чтобы установить методом статистических испытаний величину γ при многокритериальной оптимизации, не меняя матрицу C , полученную по реальным измерениям. Величина γ будет характеризовать свойство F_1 , которое заключается в том, что $1 \leq \gamma \leq 1,2$. Иначе говоря, матрица C , полученная по первому испытанию, приводит к уменьшению $M_{j, \text{н}}$ на 20 %, найденных из 10000 испытаний. Такое большое число испытаний заняло 1 с машинного времени на Pentium 3, так как для одного испытания надо сгенерировать случайный вектор L в формулах (4.60) и найти FL .

В таблице 4.2 приведены $M_{j, \text{мнк}}$ и $M_{j, \text{н}}$ (в скобках) для 24 примеров.

Приведем сведения о решаемых примерах:

- 1, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 12, 13 – триангуляция;
- 2, 17 – 24 – полигонометрия;
- 6, 7, 14 – 16 – трилатерация;
- 8 – линейно-угловая триангуляция [74].

Таблица 4.2

Величины ошибок положения пунктов

№ примера	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
M ₁	0,0654	0,0223	0,0612	0,0515	0,0459	0,0684	0,0410	0,0111	0,1560	0,0902	0,0754	0,0487
(M ₁)	(0,0654)	(0,0217)	(0,0578)	(0,0513)	(0,0453)	(0,0647)	(0,0409)	(0,0082)	(0,1560)	(0,0890)	(0,0753)	(0,0478)
M ₂	0,0703	0,0285	0,0622	0,0333	0,0472	0,0863	0,0452	0,0189	0,1554	0,1168	0,0768	0,0475
(M ₂)	(0,0702)	(0,0284)	(0,0590)	(0,0318)	(0,0467)	(0,0827)	(0,0452)	(0,0141)	(0,1554)	(0,1149)	(0,0768)	(0,0464)
M ₃	--	0,0310	0,0287	0,0438	0,0226	0,0443	--	0,0179	0,1644	--	0,1527	0,0617
(M ₃)	--	(0,0307)	(0,0262)	(0,0422)	(0,0221)	(0,0437)	--	(0,0128)	(0,1644)	--	(0,1499)	(0,0555)
M ₄	--	0,0285	--	--	--	0,0679	--	--	0,1788	--	0,1521	0,0509
(M ₄)	--	(0,0284)	--	--	--	(0,0641)	--	--	(0,1787)	--	(0,1514)	(0,0496)
M ₅	--	0,0222	--	--	--	--	--	--	0,1439	--	0,2522	--
(M ₅)	--	(0,0216)	--	--	--	--	--	--	(0,1437)	--	(0,2482)	--
№ примера	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
M ₁	0,0382	0,1532	0,0806	0,0667	0,0799	0,0499	0,0554	0,0718	0,1062	0,0621	0,0696	0,0794
(M ₁)	(0,0380)	(0,1532)	(0,0740)	(0,0614)	(0,0799)	(0,0427)	(0,0427)	(0,0692)	(0,1008)	(0,0610)	(0,0691)	(0,0651)
M ₂	0,0356	0,1719	0,1053	0,0854	0,0985	0,0585	0,0527	0,0929	0,1141	0,0872	0,0630	0,0641
(M ₂)	(0,0352)	(0,1714)	(0,0934)	(0,0715)	(0,0921)	(0,0536)	(0,0497)	(0,0865)	(0,1135)	(0,0866)	(0,0627)	(0,0581)
M ₃	0,0359	0,2638	0,1031	0,0651	0,1390	0,0696	0,0482	0,1031	0,1032	0,0711	0,0625	0,0637
(M ₃)	(0,0336)	(0,2489)	(0,0892)	(0,0582)	(0,1369)	(0,0604)	(0,0465)	(0,0923)	(0,1007)	(0,0709)	(0,0622)	(0,0531)
M ₄	--	0,2755	0,1123	--	0,1417	0,0665	--	0,0928	--	0,1286	0,0764	--
(M ₄)	--	(0,2667)	(0,1041)	--	(0,1337)	(0,0505)	--	(0,0663)	--	(0,1273)	(0,0761)	--
M ₅	--	0,3896	--	--	0,1848	--	--	--	--	0,1357	--	--
(M ₅)	--	(0,3731)	--	--	(0,1777)	--	--	--	--	(0,1351)	--	--

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев, Ю.П. Вычисление оценок точности методом моделирования ошибок / Ю.П. Андреев // Геодезия и картография. – 1971. – № 11. – С. 20 – 24.
2. Аоки, М. Введение в методы оптимизации. Основы и приложения нелинейного программирования. Пер. с англ. / М. Аоки. – М., 1977. – 343 с.
3. Баран, П.И. Исследование точности решения геодезических задач методами математического программирования / П.И. Баран // Инженерная геодезия. – Киев. – 1987. – № 30. – С. 5 – 8.
4. Бард, И. Нелинейное оценивание параметров. Пер. с англ. / И. Бард. – М.: Статистика, 1979. – 349 с.
5. Бойко, Е.Г. Особенности уравнивания сетей, построенных относительно методом спутниковой геодезии / Е.Г. Бойко, С.А. Ванин // Геодезия и картография. – 2001. – № 9. – С. 9 – 14.
6. Большаков, В.Д. Теория математической обработки геодезических измерений / В.Д. Большаков, П.А. Гайдаев. – М.: Недра, 1977. – 367 с.
7. Быков, Н.Н. Уравнивание инженерно-геодезических сетей методом сопряженного градиента / Н.Н. Быков // Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1981. – № 1. – С. 25 – 28.
8. Вергасов, В.А. Вычислительная математика / В.А. Вергасов [и др.]. – М.: Недра, 1976. – 230 с.
9. Видусев, Н.Г. Теория оптимизации в инженерной геодезии / Н.Г. Видусев, Н.Т. Ковтун // Инженерная геодезия. Респ. межведом. науч.-техн. сб. – Киев. – 1975. – Вып. 18. – С. 63 – 73.
10. Волжанин, С.Д. Уравнивание геодезических сетей методом L_p-оценок / С.Д. Волжанин // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. – Львов. – 1984. – № 40. – С. 20 – 23.
11. Волжанин, С.Д. Оценка точности результатов уравнивания методом L_p-оценок / С.Д. Волжанин // Деп. в УкрНИИНТИ. – 1984. – 10 с. – № 622. – УК – Д84.
12. Гайдаев, П.А. Математическая обработка геодезических сетей / П.А. Гайдаев. – М.: Недра, 1977. – 288 с.
13. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1988. – 547 с.

14. Гармаза, В.М. Многокритериальная оптимизация осадок сооружений / В.М. Гармаза, О.Г. Скорик, В.В. Ялтыхов // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 2002. – 7 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 25.11.2002, № 793 – гд. 02.
15. Гармаза, О.Е. К вопросу многокритериального уравнивания нивелирных сетей / О.Е. Гармаза [и др.]. // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 2002. – 5 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 17.09.2002, № 774 – гд. 02.
16. Герасименко, М.Д. Определение современных движений земной коры из повторных измерений / М.Д. Герасименко, Г.А. Шароглазова // Геодезия и картография. – 1985. – № 7. – С. 25 – 29.
17. Герасимов, А.П. Спутниковая технология и пространственное уравнивание геодезических сетей / А.П. Герасимов, К.К. Насретдинов // Геодезия и картография. – 1996. – № 7. – С. 11 – 13.
18. Глебко, М.Г. Многокритериальная оптимизация под условием минимума ошибки определения площади / М.Г. Глебко [и др.] // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 2003. – 4 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 01.09.2003, № 803. – гд. 03.
19. Джунь, И.В. Границы неравенства Рао – Крамера для дисперсий оценок параметров L_p -распределения / И.В. Джунь // Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1986. – № 5. – С. 58 – 61.
20. Джунь, И.В. Некоторые аспекты практического использования L_p - и эксцесс-оценок при обработке геодезических измерений / И.В. Джунь // Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1986. – № 4. – С. 43 – 48.
21. Джунь, И.В. Теория веса геодезического измерения, построенная на принципе правдоподобия / И.В. Джунь // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. – Львов. – 1988. – № 47. – С. 9 – 13.
22. Жданюк, В.Ф. Основы статистической обработки траекторных измерений / В.Ф. Жданюк. – М.: Советское радио, 1978. – 384 с.
23. Зайченко, Ю.П. Исследование операций. Изд. 2-е, перераб. и доп. / Ю.П. Зайченко. – Киев: Вища школа, 1979. – 391 с.
24. Исследование операций: сборник / под ред. А.А. Ляпунова. – М.: Наука, 1972.
25. Канторович, Л.В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений / Л.В. Канторович // Сибирский математический журнал. – 1962, т. III. – № 3. – С. 701 – 709.

26. Карманов, В.Г. Математическое программирование / В.Г. Карманов. – М.: Наука, 1975. – 272 с.
27. Ковтун, Н.Т. Уравнивание триангуляции методом чебышевских приближений / Н.Т. Ковтун // Инженерная геодезия. – Киев. – 1979. – № 22. – С. 72 – 74.
28. Коугия, В.А. Геодезические сети на море / В.А. Коугия, А.И. Сорокин. – М.: Недра, 1979. – 272 с.
29. Красикова, М.В. Оценка точности неизвестных при решении системы нормальных уравнений методом сопряженных градиентов / М.В. Красикова // Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1969. – № 5. – С. 79 – 82.
30. Крохмаль, Е.М. Уравнивание трилатерации методом квадратичного программирования / Е.М. Крохмаль // Тр. Харьковского с.-х. ин-та. – 1972. – Вып. 177. – С. 83 – 100.
31. Левданский, П.М. К вопросу раздельного уравнивания сетей, развиваемых относительным методом спутниковой геодезии / П.М. Левданский [и др.] // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 2002. – 5 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 25.11.2002, № 784 – гд. 02.
32. Левданский, П.М. О вычислении начальных координат пунктов для получения однозначного решения в избранной системе отсчета при использовании различных методов уравнивания нуль-свободных геодезических сетей / П.М. Левданский, В.И. Мицкевич, В.Г. Стержанов // Автоматизированные технологии изысканий и проектирования. – 2001. – № 3(5). – С. 24 – 25.
33. Левданский, П.М. Многокритериальное уравнивание нуль-свободных плановых геодезических сетей / П.М. Левданский, О.Г. Скорик, В.В. Ялтыхов // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 2002. – 9 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 25.11.2002, № 783 – гд. 02.
34. Линник, Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. Изд. 2-е, доп. и испр. / Ю.В. Линник. – М.: Физматгиз, 1962. – 349 с.
35. Макаров, Г.В. Оценка точности при использовании поисковых методов уравнивания / Г.В. Макаров, В.В. Афанасьев, Б.В. Афанасьев // Геодезия и картография. – 1981. – № 11. – С. 20 – 22.

36. Маргулев, М.Л. О законе распределения случайных ошибок измерений / М.Л. Маргулев // Геодезия и картография. – 1984. – № 11. – С. 10 – 15.
37. Маркузе, Ю.И. Алгоритм уравнивания комбинированных геодезических сетей / Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1972. – 152 с.
38. Маркузе, Ю.И. Геодезия. Вычисление и уравнивание геодезических сетей / Ю.И. Маркузе, Е.Г. Бойко, В.В. Голубев. – М.: Картгеоцентр – Геодезиздат, 1994. – 431 с.
39. Машимов, М.М. Уравнивание геодезических сетей / М.М. Машимов. – М.: Недра, 1979. – 367 с.
40. Мещеряков, Г.А. Об уравнивании геодезических измерений с учетом закона распределения ошибок / Г.А. Мещеряков, С.Д. Волжанин, В.В. Киричук // Геодезия и картография. – 1984. – № 2. – С. 9 – 11.
41. Мицкевич, В.И. Вычисление различных видов засечек на ЭЦВМ методом сверхрелаксации / В.И. Мицкевич // Геодезия и картография. – 1974. – № 10. – С. 36 – 40.
42. Мицкевич, В.И. Математическая обработка геодезических сетей методами нелинейного программирования / В.И. Мицкевич. – Новополоцк: ПГУ, 1997. – 64 с.
43. Мицкевич, В.И. Об оценке точности при определении положения пункта из решения системы нелинейных уравнений / В.И. Мицкевич // Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1980. – № 5. – С. 21 – 25.
44. Мицкевич, В.И. Об уравнивании полигонометрического хода без примычных углов (координатная привязка) коррелятным и параметрическим способами / В.И. Мицкевич [и др.] // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 1998. – 15 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 09.06.1998, №638 – гд. 98.
45. Мицкевич, В.И. О вычислении начальных координат пунктов для последующего уравнивания нуль-свободных геодезических сетей / В.И. Мицкевич, П.М. Левданский, В.Г. Стержанов // Автоматизированные технологии изысканий и проектирования. – 2001. – № 2(4). – С. 35 – 36.
46. Мицкевич, В.И. Раздельное уравнивание GPS измерений / В.И. Мицкевич, А.П. Присяжнюк, В.Г. Стержанов // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 2000. – 5 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 25.09.2000, № 720 – гд. 00.
47. Мицкевич, В.И. Анализ предельных числовых характеристик различных формул по вычислению элементов матрицы Гессе при решении

- геодезических засечек методом Ньютона / В.И. Мицкевич, О.Г. Скорик // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 1999. – 4 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 28.06.99, № 673 – гд. 99.
48. Мицкевич, В.И. Выбор наилучших формул для численного получения компонент градиента при решении геодезических засечек методом скорейшего спуска / В.И. Мицкевич, О.Г. Скорик // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 1999. – 4 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 28.06.99, № 672 – гд. 99.
49. Мицкевич, В.И. Экспериментальный анализ области сходимости итераций при решении геодезических засечек на плоскости методом Ньютона – Гаусса / В.И. Мицкевич, О.Г. Скорик // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 1999. – 16 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 28.06.99, № 683 – гд. 99.
50. Мицкевич, В.И. Двухкритериальная многоцелевая оптимизация пространственной засечки под условием минимума погрешности определения пункта с одновременным возрастанием вероятности попадания в шар или эллипсоид ошибок / В.И. Мицкевич [и др.] // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 2003. – 4 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 01.09.2003, № 805 – гд. 03.
51. Мицкевич, В.И. Многокритериальная оптимизация нивелирных сетей традиционными и нетрадиционными методами / В.И. Мицкевич [и др.] // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 2002. – 4 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 17.09.2002, № 778 – гд. 02.
52. Мицкевич, В.И. Применение многокритериальной оптимизации для поиска оптимальных весов результатов измерений / В.И. Мицкевич [и др.] // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 2002. – 4 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 17.09.2002, № 777 – гд. 02.
53. Мицкевич, В.И. О свойствах расширенной псевдообратной матрицы, вычисленной при многокритериальной оптимизации / В.И. Мицкевич [и др.] // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 2004. – 5 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 17.09.2002, № 778 – гд. 02.
54. Мицкевич, В.И. Уравнивание типовых фигур трилатерации коррелятным способом без аналитической линеаризации нелинейных условных уравнений / В.И. Мицкевич, О.Г. Скорик, С.Г. Шнитко // Полоцкий гос. ун-т. –

Новополоцк. – 1998. – 11 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 09.06.1998, № 636 – гд. 98.

55. Мицкевич, В.И. Применение многокритериальной оптимизации при проектировании и уравнивании геодезических сетей / В.И. Мицкевич [и др.] // Вестник Полоцкого гос. ун-та. Фундаментальные науки, вып. 4. – 2004. – С. 77 – 79.
56. Мицкевич, В.И. Многокритериальная оптимизация результатов геодезических измерений, приводящих к меньшей погрешности положения пунктов с одновременным возрастанием вероятности попадания в круг ошибок / В.И. Мицкевич, О.Г. Скорик, В.В. Ялтыхов // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 2003. – 4 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 01.09.2003, № 804 – гд. 03.
57. Мицкевич, В.И. Многокритериальное уравнивание плановых геодезических сетей по углам и направлениям / В.И. Мицкевич, О.Г. Скорик, В.В. Ялтыхов // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 2003. – 3 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 01.09.2003, № 802 – гд. 03.
58. Мицкевич, В.И. Особенности уравнивательных вычислений по методу многокритериальной оптимизации / В.И. Мицкевич, О.Г. Скорик, В.В. Ялтыхов // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 2002. – 4 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 17.09.2002, № 776 – гд. 02.
59. Мицкевич, В.И. Поиск оптимальных весов измерений средствами целочисленного программирования в условиях многокритериальной оптимизации / В.И. Мицкевич, О.Г. Скорик, В.В. Ялтыхов // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 2002. – 3 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 25.11.2002, № 786 – гд. 02.
60. Мицкевич, В.И. Поиск оптимальных весов результатов измерений в условиях многокритериальной оптимизации / В.И. Мицкевич, О.Г. Скорик, В.В. Ялтыхов // Автоматизированные технологии изысканий и проектирования. – 2003. – № 11. – 19 с.
61. Мицкевич, В.И. Сравнение результатов минимизации двух целевых функций при многокритериальной оптимизации плановых геодезических сетей / В.И. Мицкевич, О.Г. Скорик, В.В. Ялтыхов // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 2003. – 7 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 01.09.2003, № 801 – гд. 03.

62. Мицкевич, В.И. Сравнение методик уравнивания геодезических сетей без исходных пунктов / В.И. Мицкевич, В.Г. Стержанов // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 2000. – 10 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 25.09.2000. №723 – гд. 00.
63. Мицкевич, В.И. Исследование области сходимости при вычислении координат способом линеаризованных итераций / В.И. Мицкевич, Хасан Ахмад Али // Геодезия и картография. – 1994. – № 6. – С. 14 – 16.
64. Мицкевич, В.И. Особенности уравнивания геодезических сетей по методу наименьших модулей / В.И. Мицкевич, В.В. Ялтыхов // Геодезия и картография. – 1997. – № 5. – С. 23 – 24.
65. Мицкевич, В.И. Уравнивание и оценка точности геодезических засечек под различными критериями оптимальности решения / В.И. Мицкевич, В.В. Ялтыхов // Геодезия и картография. – 1994. – № 7. – С. 14 – 16.
66. Мудров, В.И. Методы обработки измерений / В.И. Мудров, В.Л. Кушко. – М.: Советское радио, 1976. – 192 с.
67. Назаренко, В.Г. Математическое программирование в уравнивательных вычислениях / В.Г. Назаренко // Инженерная геодезия. Межведом. респ. науч.-техн. сб. – Киев, 1968. – Вып. 4. – С. 134 – 139.
68. Назаренко, В.Г. О решении задач геодезического уравнивания методом квадратичного программирования / В.Г. Назаренко // Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1967. – № 3. – С. 21 – 24.
69. Назаренко, В.Г. Уравнивание триангуляции методом квадратичного программирования / В.Г. Назаренко // Инженерная геодезия. Межведом. респ. науч.-техн. сб. – Киев, 1966. – Вып. 3. – С. 41 – 49.
70. Пермитина, Л.И. О решении систем нелинейных уравнений, возникающих в геодезических задачах / Л.И. Пермитина // Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1968. – № 3. – С. 62 – 74.
71. Полевой, В.А. Математическая обработка результатов радиогеодезических измерений / В.А. Полевой. – М.: Недра, 1971. – 344 с.
72. Практикум по высшей геодезии (вычислительные работы): учеб. пособие для вузов / Н.В. Яковлев [и др.]. – М.: Недра, 1982. – 368 с.
73. Применение геодезических засечек, их обобщенные схемы и способы машинного решения / П.И. Баран [и др.]. – М.: Недра, 1986. – 166 с.
74. Рабинович, Б.Н. Практикум по высшей геодезии / Б.Н. Рабинович. – М.: Геодезиздат, 1961. – 339 с.

75. Скорик, О.Г. Сравнение областей сходимости итераций при решении геодезических засечек линейными и нелинейными методами / О.Г. Скорик // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 1999. – 13 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 25.09.2000, № 724 – гд. 00.
76. Скорик, О.Г. Выбор показателей степени в целевой функции для параметрических уравнений под условием минимума ошибок положения пунктов / О.Г. Скорик, В.Г. Стержанов // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 1999. – 5 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 25.09.2000, № 714 – гд. 00.
77. Скорик, О.Г. Оценка точности функций измеренных и уравненных величин при обработке геодезических сетей методами одно- и многокритериальной оптимизации / О.Г. Скорик, В.Г. Стержанов, С.Г. Шнитко // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 1999. – 10 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 25.09.2000, № 713 – гд. 00.
78. Станеев, И. Изчисляване на многократно обратни засечки с помощта на ЦЕИМ / И. Станеев // Геодезия, картография, землеустройство. – 1973. – 13. – № 2. – С. 8 – 9.
79. Тамутис, З.П. Проектирование инженерных геодезических сетей / З.П. Тамутис. – М.: Недра, 1990. – 138 с.
80. Тараничев, Н.А. Применение способа Ньютона для обработки результатов геодезических измерений / Н.А. Тараничев // Геодезия и картография. – 1964. – № 4. – С. 22 – 21.
81. Тимов, Х.И. Приложение теории выпуклого программирования для уравнивания условных и посредственных измерений / Х.И. Тимов // Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1968. – Вып. 1. – С. 49 – 50.
82. Тихонов, А.Н. О вариационном методе регуляризации при уравнивании свободных геодезических сетей / А.Н. Тихонов // Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1978. – № 3. – С. 3 – 10.
83. Химмельблау, Д.М. Прикладное нелинейное программирование. Пер. с англ. / Д.М. Химмельблау. – М.: Мир, 1975. – 534 с.
84. Шнитко, С.Г. О выборе шага численного дифференцирования в нелинейном методе Ньютона при уравнивании геодезических сетей / С.Г. Шнитко // Тр. молодых специалистов Полоцкого гос. ун-та. Прикладные науки, вып. 3. – 2004. – С. 23 – 24.

85. Adamczewski, Z. Algorytmy nieliniowe obliczania wcięc kombinowanych płaskich i przetrzennych / Z. Adamczewski, B. Chmielewska // Przegląd geodezyjny. – 1972. – 44. – №12. – S. 494 – 496.
86. Adamczewski, Z. Nieliniowa analiza dokładności sieci geodezyjnej / Z. Adamczewski // Geodezja i kartografia. (PRL). – 1971. – 20. – № 3. – S. 251 – 268.
87. Adamczewski, Z. Problemy numeryczne nieliniowego rachunku wyrównawczego / Z. Adamczewski // Geodezja i kartografia. (PRL). – 1970. – 19. – № 4. – S. 251 – 268.
88. Adamczewski, Z. Rachunek wyrównawczy w ujęciu nieliniowym / Z. Adamczewski // Geodezja i kartografia. – 1969. – 18. – № 4. – S. 823 – 342.
89. Fletcher, R. The calculation of linear best Lp-approximations / R. Fletcher, I.A. Grant, M.D. Hebden // Computer Journal. – 1971. – V14. – № 3. – P. 277 – 279.
90. Werkmeister, P. Über die Genauigkeit trigonometrischer Punktbestimmungen / P. Werkmeister // Zeitschrift für Vermessungswesen. – 1920. – 13. – S. 401 – 412.
91. Wolf, H. Das dreidimensionale Analogon eines Satzes von Werkmeister / H. Wolf // Zeitschrift für Vermessungswesen. – 1968. – 93. – Jvsl 1. – S.429–420.

Таблица ПП.1. Обработка примера 1 (геодезический четырехугольник из [43])

	$\Phi_2(X, n) = \max M$				$\Phi_1(X, n) = \sum_{i=1}^n M^2$			
	великий		линейный		великий		линейный	
	n	v	n	v	n	v	n	v
при $n = 2,0$								
И	1,000		0,989		0,992		0,990	
M1	0,060 м		0,060 м		0,060 м		0,060 м	
M2	0,064		0,064		0,064		0,064	
V1	-0,08"		-0,13"		-0,09"		-0,11"	
V2	0,10	2,70	0,21	2,30	0,12	2,30	0,19	2,10
V3	-1,09	1,80	-1,14	1,84	-1,11	1,80	-1,15	2,00
V4	-0,64	1,62	-0,60	1,81	-0,62	1,69	-0,60	2,00
V5	0,72	1,60	0,71	1,70	0,73	1,70	0,70	2,00
V6	0,86	1,63	0,81	1,83	0,85	1,70	0,82	2,00
V7	-0,57	1,69	-0,58	1,80	-0,55	1,70	-0,56	2,00
V8	0,09	2,70	0,12	2,30	0,09	2,30	0,11	2,10

Таблица ПП.2. Обработка примера 2 (полигонометрия)

	$\Phi_2(X, n) = \max M$				$\Phi_1(X, n) = \sum_{i=1}^n M^2$			
	великий		линейный		великий		линейный	
	n	v	n	v	n	v	n	v
при $n = 2,0$								
И	1,004		1,194		1,096		1,051	
M1	0,025 м		0,04 м		0,017 м		0,016 м	
M2	0,038		0,017		0,017		0,017	
M3	0,040		0,018		0,021		0,020	
M4	0,038		0,017		0,017		0,017	
M5	0,029		0,014		0,016		0,016	
V81	0,004	2,50	0,003	2,67	0,003	2,70	0,004	2,75
V82	0,003	2,50	0,003	2,84	0,003	2,80	0,004	2,81
V83	0,004	2,50	0,003	2,68	0,003	2,60	0,003	2,71
V84	0,003	2,50	0,003	2,70	0,003	2,70	0,003	2,74
V85	0,004	2,50	0,003	2,81	0,004	2,70	0,004	2,80
V86	0,003	2,50	0,003	2,71	0,003	2,70	0,003	2,80
V7	-1,07"	3,10	-1,05"	2,11	-1,08"	3,10	-1,05"	2,00
V8	-1,00	1,80	-0,96	2,50	-0,86	2,40	-1,01	2,50
V9	-1,06	1,50	-1,18	1,97	-1,26	2,10	-1,03	1,95
V10	-0,96	1,80	-0,95	2,52	-0,85	2,60	-1,02	2,40
V11	-1,06	3,10	-1,04	2,10	-1,08	3,10	-1,05	2,00
V12	-1,01	1,50	-1,02	2,18	-1,01	2,00	-1,02	2,07
V13	-1,03	1,50	-1,00	2,13	-1,04	1,90	-1,02	2,08

Таблица III.3. Обработка параметра 3 (треугольник из [72, с. 93])

	v при n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$						$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^i$					
		нелинейный			линейный			нелинейный			линейный		
		n	v	n	n	v	n	n	v	n	v	n	v
M	1,003			0,940			0,975			0,922			0,942
M1	0,652 м			0,046 м			0,046 м			0,046 м			0,045 м
M2	0,054			0,046			0,046			0,046			0,044
M3	0,024			0,021			0,020			0,021			0,019
V1	0,14°	3,10	0,14°	0,14°	2,83	3,10	0,14°	3,10	0,14°	2,83	3,10	0,11°	0,11°
V2	-0,58	1,70	1,81	-0,52	1,81	1,64	-0,52	1,64	-0,52	1,81	1,64	-0,55	-0,55
V3	0,95	1,70	1,46	0,93	1,46	1,14	0,93	1,14	0,95	1,31	1,31	1,14	1,14
V4	0,24	3,10	2,86	0,23	2,86	3,10	0,23	3,10	0,23	2,90	2,90	0,22	0,22
V5	-0,48	1,50	0,32	-0,32	3,00	1,50	-0,30	1,50	-0,50	3,00	1,50	-0,27	-0,27
V6	0,05	2,80	0,10	0,10	2,73	2,70	0,04	2,70	0,10	2,82	2,82	0,06	0,06
V7	0,09	2,90	0,12	0,12	2,99	2,80	0,15	2,80	0,08	3,00	3,00	0,14	0,14
V8	0,21	3,10	0,22	0,22	3,00	2,70	0,23	2,70	0,22	3,00	2,70	0,24	0,24
V9	0,09	2,70	0,08	0,08	2,82	2,70	-0,11	2,70	0,06	2,95	2,95	-0,11	-0,11
V10	-0,50	1,30	-0,56	-0,56	1,57	1,20	-0,45	1,20	-0,53	1,35	1,35	-0,47	-0,47
V11	0,02	2,30	0,06	0,06	2,97	2,40	0,13	2,40	-0,04	3,00	3,00	-0,16	-0,16
V12	0,82	1,60	0,82	0,82	1,52	1,50	0,89	1,50	0,84	1,33	1,33	0,88	0,88
V13	-0,22	2,04	-0,20	-0,20	2,86	2,30	-0,07	2,30	-0,20	2,90	2,90	-0,05	-0,05

Таблица III.4. Обработка параметра 4 (треугольник из [72, с. 129])

	v при n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$						$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^i$					
		нелинейный			линейный			нелинейный			линейный		
		n	v	n	n	v	n	n	v	n	v	n	v
I	2			1,017			1,020			1,016			1,021
M	0,048 м			0,047 м			0,046 м			0,047 м			0,047 м
M1	0,029			0,032			0,030			0,029			0,028
M3	0,039			0,044			0,040			0,038			0,038
V1	-0,24°	1,70	-0,19°	-0,19°	1,66	1,60	-0,26°	1,60	-0,24°	1,62	1,62	-0,26°	-0,26°
V2	0,40	1,50	0,32	0,32	1,48	1,80	0,41	1,80	0,37	1,68	1,68	0,40	0,40
V3	-0,15	1,60	-0,16	-0,16	1,58	1,40	-0,18	1,40	-0,15	1,46	1,46	-0,18	-0,18
V4	-0,08	1,60	-0,06	-0,06	1,11	1,91	-0,05	1,91	-0,08	2,08	2,08	-0,05	-0,05
V5	0,70	2,80	0,69	0,69	1,75	1,99	0,63	1,99	0,68	1,87	1,87	0,70	0,70
V6	0,27	2,35	0,34	0,34	1,78	1,80	0,28	1,80	0,27	1,85	1,85	0,28	0,28
V7	-0,64	1,84	-0,61	-0,61	1,59	1,96	-0,60	1,96	-0,66	1,81	1,81	-0,63	-0,63

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V8	0,17	3,08	0,23	2,12	0,05	1,80	0,14	1,29	0,12
V9	-0,11	1,12	-0,07	1,14	-0,10	1,80	-0,09	1,16	-0,07
V10	-0,98	1,73	-1,00	1,67	-1,04	1,99	-0,99	1,90	-1,02
V11	0,34	1,71	0,32	1,61	0,39	1,81	0,37	1,81	0,38
V12	1,75	2,50	1,68	2,28	1,74	2,09	1,75	2,03	1,74
V13	-0,71	2,10	-0,76	1,98	-0,70	2,06	-0,71	1,97	-0,69
V14	0,94	3,10	0,88	2,57	0,94	2,02	0,92	1,95	0,94
V15	0,95	3,10	1,00	2,55	0,99	2,01	0,97	1,93	1,00
V16	-0,75	1,70	-0,75	1,67	-0,78	1,93	-0,76	1,83	-0,77
V17	0,75	1,84	0,67	1,87	0,78	1,97	0,77	1,84	0,75
V18	0,68	1,73	0,65	1,62	0,74	1,98	0,68	1,86	0,69
V19	-0,71	3,10	-0,74	1,76	-0,64	2,00	-0,68	1,89	-0,70

Таблица П1.5. Обработка примера 5 (триангуляция из [72, с. 153])

	$\Phi_2(X, n) = \max M$										$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^2$									
	неспящий					дневной					ночной					пальный				
	n	y	n	y	n	y	n	y	n	y	n	y	n	y	n	y				
ц																				
M1	1,028	1,021		1,011		1,008		1,000												
M2	0,042 м	0,041 м		0,040 м		0,040 м		0,040 м												
M3	0,044	0,044		0,043		0,044		0,043												
V1	0,10"	0,08"		0,08"		0,06"		0,06"												
V2	0,74	0,78		0,78		0,79		0,84		2,60		2,48		2,48		2,48		2,48		0,08"
V3	0,98	1,80		1,67		1,70		1,71		1,72		1,71		1,71		1,71		1,71		0,75
V4	0,26	3,10		2,97		2,97		3,00		3,09		3,00		3,00		3,00		3,00		0,99
V5	0,69	2,01		1,81		1,73		1,68		1,73		1,68		1,68		1,68		1,68		0,71
V6	-0,36	3,10		3,00		3,10		3,00		3,10		3,00		3,00		3,00		3,00		-0,25
V7	-0,11	2,50		2,69		2,69		2,70		2,60		2,70		2,70		2,70		2,70		-1,14
V8	-0,52	2,00		1,90		1,90		1,90		1,90		1,90		1,90		1,90		1,90		-0,54
V9	0,04	2,01		2,01		2,01		2,01		2,01		2,01		2,01		2,01		2,01		0,01
V10	0,92	1,91		1,77		1,84		1,84		1,74		1,71		1,71		1,71		1,71		0,90
V11	-1,07	1,85		1,77		1,77		1,77		1,74		1,74		1,74		1,74		1,74		-1,14
V12	-0,13	2,30		2,33		2,33		2,33		2,33		2,33		2,33		2,33		2,33		-0,06
V13	1,46	1,90		1,76		1,76		1,76		1,76		1,76		1,76		1,76		1,76		-1,42
V14	0,51	1,68		1,55		1,55		1,55		1,57		1,59		1,59		1,59		1,59		0,53
V15	0,22	1,80		1,70		1,70		1,70		1,70		1,70		1,70		1,70		1,70		0,14
V16	0,14	2,30		1,98		1,98		1,98		2,60		2,56		2,56		2,56		2,56		0,09

Таблица П1.6. Обработка примера 6 (трилатерация из [72, с. 179])

	у при n = 2,0	$\Phi_1(X, n) = \max M$						$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^K M^2$					
		нелинейный			линейный			нелинейный			линейный		
		n	у	n	у	n	у	n	у	n	у	n	у
И	0,952		1,648		0,560		0,496		0,678				
M1	0,060 м		0,044 м		0,020 м		0,041 м		0,021 м				
M2	0,077		0,052		0,023		0,053		0,023				
M3	0,039		0,026		0,012		0,022		0,012				
M4	0,059		0,045		0,022		0,041		0,021				
VS53	0,008	2,00	0,007	2,34	0,004	2,00	0,007	2,50	0,005				
VS54	-0,005	2,20	-0,006	2,50	-0,004	2,10	-0,006	2,55	-0,004				
VS16	-0,006	2,20	-0,006	2,48	-0,004	2,10	-0,005	2,56	-0,004				
VS16	0,008	2,00	0,007	2,39	0,004	2,00	0,006	2,52	0,005				
VS12	0,011	1,96	0,009	2,59	-0,001	1,73	0,008	2,56	0,001				
VS13	0,020	1,80	0,016	2,35	0,004	1,70	0,017	2,46	0,005				
VS14	-0,022	1,20	-0,032	1,11	-0,080	1,20	-0,034	1,13	-0,075				
VS23	-0,017	1,80	-0,014	2,40	0,001	1,50	-0,013	2,36	0,000				
VS24	0,011	1,94	0,010	2,40	0,000	1,71	0,009	2,54	0,001				
VS34	0,020	1,80	0,017	2,20	0,004	1,70	0,017	2,45	0,005				

Таблица П1.7. Обработка примера 7 (трилатерация из [72, с. 202])

	у при n = 2,0	$\Phi_1(X, n) = \max M$						$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^K M^2$					
		нелинейный			линейный			нелинейный			линейный		
		n	у	n	у	n	у	n	у	n	у	n	у
И	1,001		0,987		0,889		0,929		0,611				
M1	0,037 м		0,038 м		0,037 м		0,040 м		0,016 м				
M2	0,041		0,038		0,040		0,035		0,014				
VS13	0,026	1,97	0,026	1,90	0,027	1,90	0,026	1,11	0,074				
VS14	0,024	1,97	0,024	1,90	0,025	1,90	0,025	2,55	0,003				
VS15	0,015	1,98	0,015	2,10	0,013	1,98	0,014	2,42	-0,005				
VS12	-0,017	2,03	-0,017	1,90	-0,016	1,92	-0,016	2,26	-0,007				
VS23	0,014	2,03	0,014	2,00	0,013	2,09	0,014	2,38	0,006				
VS24	0,014	2,03	0,015	2,00	0,014	2,08	0,015	2,37	0,006				

Таблица П1.8. Обработка примера 8 (линейно-угловая сеть [72, с. 217])

	у при n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$						$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^2$					
		нелинейный			линейный			нелинейный			линейный		
		n	у	n	у	n	у	n	у	n	у	n	у
И	0,990	1,185		1,371		1,181						1,336	
M1	0,007 м	0,007 м		0,006 м		0,006 м						0,006 м	
M2	0,012	0,010		0,009		0,010						0,009	
M3	0,011	0,009		0,008		0,008						0,007	
VS14	0,001	0,001	2,60	0,001	2,64	0,001	2,50	0,001	2,50	0,001	2,66	0,001	
VS34	0,004	0,003	2,50	0,003	2,65	0,002	2,50	0,003	2,50	0,003	2,67	0,002	
VS25	-0,008	-0,007	2,40	-0,007	2,46	-0,005	2,25	-0,007	2,25	-0,007	2,37	-0,005	
VS15	0,007	0,006	2,30	0,006	2,43	0,006	2,26	0,006	2,26	0,006	2,41	0,006	
VS15	-0,006	0,006	2,31	0,006	2,40	-0,006	2,30	-0,006	2,30	-0,006	2,41	-0,006	
VS12	0,005	0,005	2,30	0,005	2,38	0,004	2,18	0,005	2,18	0,005	2,30	0,004	
VS13	-0,001	0,001	2,30	0,001	2,15	0,003	2,30	0,001	2,30	0,001	2,32	0,003	
VS23	-0,001	0,002	2,50	0,002	2,52	0,002	2,47	0,001	2,47	0,001	2,44	0,002	
V9	0,25"	0,10"	3,10	0,10"	3,00	0,06"	3,10	0,16"	3,10	0,16"	3,00	0,06"	
V10	1,72	1,57	1,57	1,91	1,37	2,19	1,63	1,88	1,39	1,88	2,18	1,88	
V11	0,16	0,13	3,06	0,13	3,00	-0,17	2,67	0,10	2,60	0,10	2,60	-0,16	
V12	-0,64	-0,47	1,30	-0,47	2,90	-0,25	1,41	-0,50	2,70	-0,50	2,70	-0,25	
V13	1,11	1,06	1,31	1,06	1,11	0,89	1,32	1,06	1,11	1,06	1,11	0,90	
V14	-0,42	-0,39	1,20	-0,39	1,11	-0,40	1,20	-0,41	1,11	-0,41	1,11	-0,40	
V15	0,67	0,84	1,20	0,84	1,52	1,40	1,20	0,85	1,40	0,85	1,40	1,38	
V16	-0,56	-0,52	1,20	-0,52	1,48	-0,77	1,20	-0,56	1,60	-0,56	1,60	-0,76	
V17	-0,98	-0,98	1,46	-0,98	1,52	-1,04	1,70	-0,99	1,45	-0,99	1,45	-1,04	
V18	0,55	0,59	1,12	0,59	1,19	0,69	1,20	0,59	1,46	0,59	1,46	0,68	
V19	0,42	0,38	1,20	0,38	1,53	0,40	1,20	0,39	1,43	0,39	1,43	0,39	
V20	-0,77	-0,77	1,30	-0,77	1,13	-0,54	1,30	-0,74	1,14	-0,74	1,14	-0,54	
V21	0,87	0,74	2,80	0,74	2,70	0,48	2,10	0,76	2,30	0,76	2,30	0,49	

Таблица ПП.9. Обработка примера 9 (применяющая юс [74, с. 145])

	v при n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \text{шах M}$				$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^n M^i$			
		неллинейный		линейный		неллинейный		линейный	
		n	v	n	v	n	v	n	v
M	0,978	0,978	0,979	0,978	0,978	0,979	0,978	0,979	
M1	0,141 M	0,141 M	0,141 M	0,141 M	0,141 M	0,141 M	0,141 M	0,141 M	
M2	0,140	0,140	0,140	0,140	0,140	0,140	0,140	0,140	
M3	0,147	0,147	0,147	0,147	0,147	0,147	0,147	0,147	
M4	0,161	0,161	0,161	0,161	0,161	0,161	0,161	0,161	
M5	0,129	0,129	0,129	0,129	0,129	0,129	0,129	0,129	
V1	-0,96*	-0,95*	2,00	-0,96*	2,01	-0,96*	2,00	-0,96*	
V2	-1,39	-1,38	2,00	-1,37	2,01	-1,38	2,00	-1,37	
V3	-0,58	-0,57	2,00	-0,59	1,99	-0,58	2,00	-0,59	
V4	-0,46	-0,47	2,00	-0,46	1,99	-0,47	2,00	-0,46	
V5	-0,05	-0,05	2,00	-0,04	2,00	-0,46	2,00	-0,46	
V6	0,81	0,82	2,00	0,81	2,00	0,82	2,00	0,81	
V7	-0,70	-0,68	2,00	-0,70	1,99	-0,68	2,00	-0,70	
V8	-0,60	-0,63	2,00	-0,64	1,98	-0,62	2,00	-0,64	
V9	0,44	0,43	2,00	0,43	1,98	0,44	2,00	0,43	
V10	-0,54	-0,55	2,00	-0,54	1,99	-0,54	2,00	-0,54	
V11	0,66	0,67	2,00	0,68	2,02	0,66	2,00	0,68	
V12	-0,40	-0,38	2,00	-0,39	1,96	-0,38	2,00	-0,39	
V13	-0,58	-0,57	2,00	-0,55	1,97	-0,58	2,00	-0,55	
V14	-0,75	-0,76	2,00	-0,72	1,99	-0,75	2,00	-0,72	
V15	-0,66	-0,66	2,00	-0,61	2,00	-0,66	2,00	-0,61	
V16	0,04	0,04	2,00	0,04	2,01	0,04	2,00	0,04	
V17	-0,11	-0,11	2,00	-0,13	1,96	-0,11	2,00	-0,13	
V18	-1,43	-1,43	2,00	-1,42	2,01	-1,43	2,00	-1,42	
V19	-0,50	-0,48	2,00	-0,43	1,98	-0,48	2,00	-0,43	
V20	-0,03	-0,04	2,00	-0,06	1,99	-0,04	2,00	-0,06	
V21	-1,06	-1,08	2,00	-1,17	2,01	-1,08	2,00	-1,17	

Таблица П1.10. Обработка примера 10 (триангуляция из [74, с. 166])

	v при n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$						$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^2$					
		нелинейный			линейный			нелинейный			линейный		
		n	v	п	n	v	п	n	v	п	n	v	п
μ	0,980		0,920		0,957		0,927		0,927		0,963		
M1	0,080 м		0,077 м		0,075 м		0,073 м		0,073 м		0,073 м		
M2	0,102		0,092		0,090		0,089		0,089		0,090		
V1	1,14"	2,31	1,40"	2,08	1,30"	2,13	1,35"	1,96	1,35"	1,88	1,40"	1,96	
V2	0,94	2,10	0,83	1,95	0,91	2,10	0,86	1,88	0,89	1,88	0,89		
V3	-0,70	2,00	-0,77	1,84	-0,72	1,90	-0,75	1,94	-0,75	1,94	-0,79		
V4	1,31	2,40	1,37	2,28	1,29	2,28	1,38	2,13	1,35	2,13	1,35		
V5	-3,13	2,10	-3,14	2,06	-3,15	2,20	-3,09	2,06	-3,09	2,06	-3,12		
V6	0,15	1,40	0,07	1,26	0,10	1,50	0,10	1,24	0,10	1,24	0,11		
V7	-0,55	2,42	-0,64	2,15	-0,62	1,80	-0,62	1,94	-0,62	1,94	-0,66		
V8	1,23	2,25	1,28	1,81	1,25	2,25	1,30	1,85	1,30	1,85	1,26		
V9	-3,29	2,30	-3,17	2,15	-3,22	2,20	-3,22	2,16	-3,22	2,16	-3,17		
V10	0,22	1,60	0,04	1,40	0,13	1,40	0,08	1,15	0,08	1,15	0,07		
V11	0,05	1,50	0,07	1,27	0,12	1,60	0,00	1,26	0,00	1,26	0,11		
V12	0,48	1,60	0,41	1,59	0,41	2,00	0,42	1,59	0,42	1,59	0,38		

Таблица П1.11. Обработка примера 11 (треугольная № 1)

	v	$\Phi_2(X, n) = \max M$						$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^K M^i$					
		нелинейный			линейный			нелинейный			линейный		
		n	v	n	n	v	n	n	v	n	v	n	v
μ	0,959		0,910		0,906				0,925				0,870
M1	0,066 м		0,052 м		0,051 м				0,047 м				0,050 м
M2	0,066		0,056		0,054				0,054				0,052
M3	0,132		0,110		0,112				0,106				0,110
M4	0,132		0,120		0,121				0,118				0,118
M5	0,217		0,197		0,193				0,199				0,194
V1	-5,00*	1,80	-4,99*	1,80	-5,22*	1,70	1,80	-5,00*	1,80	-5,22*	1,80	-5,22*	1,80
V2	-5,00	1,80	-4,99	1,80	-5,22	1,70	1,80	-5,00	1,80	-5,22	1,80	-5,22	1,80
V3	-5,00	1,94	-5,01	1,90	-4,56	1,80	1,90	-4,99	1,90	-4,56	1,90	-4,56	1,90
V4	-5,00	2,05	-5,02	2,00	-4,66	2,06	2,00	-5,03	2,00	-4,66	2,00	-4,66	2,00
V5	-5,00	1,90	-4,99	1,90	-5,17	1,90	1,90	-4,99	1,90	-5,17	1,90	-5,17	1,90
V6	-5,00	1,90	-4,99	1,90	-5,17	1,90	1,90	-4,99	1,90	-5,17	1,90	-5,17	1,90
V7	-5,02	1,97	-5,02	2,00	-4,90	1,98	2,10	-5,02	2,10	-4,92	2,10	-4,92	2,10
V8	-5,00	1,95	-4,98	2,00	-5,02	1,97	2,10	-4,98	2,10	-5,02	2,10	-5,02	2,10
V9	-4,99	2,05	-4,99	2,00	-5,08	2,09	2,10	-5,00	2,10	-5,07	2,10	-5,07	2,10
V10	-6,33	2,40	-6,29	2,40	-6,35	2,40	2,40	-6,29	2,40	-6,35	2,40	-6,35	2,40
V11	6,34	2,30	6,38	2,40	6,27	2,30	2,40	6,38	2,40	6,26	2,40	6,26	2,40
V12	-6,32	2,30	-6,33	2,40	-6,38	2,40	2,40	-6,33	2,40	-6,38	2,40	-6,38	2,40
V13	-5,02	2,07	-4,94	2,10	-5,33	2,20	2,30	-4,95	2,30	-5,09	2,30	-5,09	2,30
V14	-4,99	2,07	-4,98	2,10	-5,23	2,20	2,20	-4,98	2,20	-5,31	2,20	-5,31	2,20
V15	-4,99	2,40	-5,07	2,50	-4,43	2,50	2,60	-5,08	2,60	-4,60	2,60	-4,60	2,60
V16	-0,06	1,92	-0,06	1,20	0,02	1,93	1,20	-0,07	1,20	0,02	1,20	0,02	1,20

Таблица III.12. Обработка примера 12 (триангуляция № 2)

	у при n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$				$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^n M_i^2$			
		великий		малый		великий		малый	
		n	у	n	у	n	у	n	у
И	0,994		0,842		0,862		0,959		0,904
M1	0,043 м		0,044 м		0,042 м		0,041 м		0,041 м
M2	0,042		0,045		0,043		0,041		0,040
M3	0,050		0,045		0,043		0,047		0,044
M4	0,045		0,042		0,042		0,044		0,043
V1	-4,55"	2,02	-4,55"	2,00	-4,68"	1,90	-4,57"	1,96	-4,69"
V2	-4,85	2,05	-4,81	2,04	-4,88	1,90	-4,82	1,97	-4,88
V3	-5,60	2,21	-5,63	2,13	-5,64	2,02	-5,60	2,08	-5,43
V4	-4,57	2,40	-4,58	2,32	-4,23	2,09	-4,53	2,10	-4,26
V5	-5,41	2,30	-5,43	2,24	-5,54	2,00	-5,47	2,05	-5,63
V6	-5,02	2,30	-4,98	2,15	-5,22	1,96	-5,00	2,02	-5,11
V7	-4,67	2,30	-4,67	2,28	-4,69	2,06	-4,67	2,17	-4,66
V8	-4,91	2,20	-4,92	2,21	-5,07	2,05	-4,93	2,14	-4,96
V9	-5,42	2,40	-5,41	2,36	-5,24	2,20	-5,40	2,19	-5,38
V10	-6,16	2,18	-6,09	2,18	-6,15	2,20	-6,03	2,25	-5,98
V11	-6,61	2,20	-6,55	2,26	-6,35	2,10	-6,59	2,24	-6,48
V12	-6,23	2,10	-6,35	2,14	-6,49	2,06	-6,38	2,17	-6,53
V13	-4,74	1,90	-4,74	1,93	-4,94	1,90	-4,78	1,96	-4,97
V14	-5,44	2,03	-5,45	2,03	-5,52	1,94	-5,40	2,02	-5,48
V15	-4,82	2,15	-4,81	2,03	-4,53	2,17	-4,82	2,07	-4,55
V16	0,10	1,60	0,05	1,11	0,03	1,60	0,05	1,11	0,04

Таблица П1.13. Обработка примера 13 (сравнительная № 3)

	ν при $n = 2,0$		$\Phi_1(X, n) = \max M$						$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^2$					
	нелинейный		линейный		нелинейный		линейный		нелинейный		линейный			
	n	ν	n	ν	n	ν	n	ν	n	ν	n	ν		
Д	1,003	0,988		0,978		0,973		1,042		0,973		1,042		
М1	0,034 м	0,032 м		0,032 м		0,032 м		0,032 м		0,032 м		0,032 м		
М2	0,031	0,031		0,031		0,031		0,030		0,031		0,030		
М3	0,031	0,031		0,031		0,029		0,030		0,029		0,030		
V1	-3,64"	-3,59"	1,80	-3,68"	1,80	-3,64"	1,80	-3,67"	1,80	-3,64"	1,80	-3,67"		
V2	-4,00	-3,99	1,80	-3,70	1,80	-4,03	1,80	-4,05	1,80	-4,03	1,80	-4,05		
V3	-7,36	-7,42	2,00	-7,62	2,00	-7,33	2,00	-7,27	2,00	-7,33	2,00	-7,27		
V4	-5,67	-5,97	2,00	-6,31	2,00	-5,92	2,00	-5,60	2,00	-5,92	2,00	-5,60		
V5	-6,09	-6,28	2,00	-6,10	2,00	-6,17	2,00	-6,58	2,00	-6,17	2,00	-6,58		
V6	-3,24	-2,75	1,70	-2,59	1,70	-2,91	1,70	-2,81	1,70	-2,91	1,70	-2,81		
V7	-3,75	-3,59	1,80	-3,42	1,80	-3,78	1,80	-3,67	1,80	-3,78	1,80	-3,67		
V8	-6,36	-6,79	2,00	-7,06	2,00	-6,60	2,00	-6,70	2,00	-6,60	2,00	-6,70		
V9	-4,88	-4,62	2,00	-4,52	2,00	-4,62	2,00	-4,63	2,00	-4,62	2,00	-4,63		
V10	-8,80	-8,50	2,20	-7,85	2,20	-8,41	2,10	-8,41	2,10	-8,41	2,10	-8,41		
V11	-5,70	-5,73	2,07	-5,73	2,00	-5,98	2,01	-5,62	1,90	-5,98	1,90	-5,62		
V12	-4,30	-4,77	2,10	-5,05	2,10	-4,61	1,90	-4,96	1,90	-4,61	1,90	-4,96		
V13	-2,45	-2,55	1,80	-2,56	1,80	-2,78	1,70	-2,49	1,70	-2,78	1,70	-2,49		
V14	-4,11	-4,21	2,01	-4,01	1,99	-4,19	1,90	-4,06	1,90	-4,19	1,90	-4,06		
V15	-8,44	-8,23	2,20	-8,43	2,10	-8,53	2,10	-8,45	2,10	-8,53	2,10	-8,45		
V16	-1,61	-1,58	1,90	-1,59	1,60	-1,39	1,60	-1,76	1,60	-1,39	1,60	-1,76		

Таблица ПП.14. Обработка примера 14 (трисегментация № 1)

	у при n = 2,0	$\Phi_1(X, n) = \max M$				$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^2$			
		нелинейный		линейный		нелинейный		линейный	
		n	у	n	у	n	у	n	у
μ	0,994	0,731		0,538		0,848		0,401	
M1	0,142 м	0,069 м		0,020 м		0,076 м		0,019 м	
M2	0,158	0,072		0,042		0,078		0,029	
M3	0,237	0,072		0,127		0,065		0,107	
M4	0,250	0,082		0,116		0,089		0,085	
M5	0,360	0,146		0,127		0,170		0,158	
VS16	0,000	0,001	3,00	0,000	2,27	0,000	2,72	0,000	
VS17	0,000	-0,001	3,00	0,000	2,37	0,000	3,00	0,000	
VS26	0,000	0,001	3,00	0,000	2,40	0,000	3,00	0,000	
VS12	-0,018	-0,016	2,04	-0,005	2,01	-0,018	2,19	-0,003	
VS23	0,025	0,025	1,18	0,046	1,98	0,025	2,17	0,004	
VS13	-0,036	-0,032	1,22	-0,084	1,87	-0,035	1,11	-0,054	
VS34	0,000	0,000	1,90	0,000	1,93	0,000	2,51	0,000	
VS24	-0,018	-0,018	2,21	-0,006	1,96	-0,017	2,12	-0,002	
VS45	-0,018	-0,018	2,12	-0,006	2,00	0,018	2,13	-0,002	
VS35	-0,025	-0,025	1,70	-0,005	1,94	-0,025	1,87	-0,002	
VS15	0,040	0,043	2,12	0,012	1,70	0,040	1,12	0,072	

Таблица П1.15. Обработка примера 15 (трилатерация № 2)

	$\Phi_2(X, n) = \max M$						$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^i$					
	нелинейный			линейный			нелинейный			линейный		
	n	v	n	v	n	v	n	v	n	v	n	v
	при $n = 2,0$											
Ц	0,997	0,564		0,463		0,705						0,353
M1	0,068 M	0,042 M		0,021 M		0,042 M						0,018 M
M2	0,085	0,065		0,026		0,038						0,023
M3	0,082	0,054		0,027		0,045						0,024
M4	0,096	0,068		0,026		0,085						0,032
VS16	0,006	0,005	2,10	0,000	2,37	0,000	2,40	0,000	2,37	0,000	2,40	0,000
VS17	-0,012	-0,010	2,07	0,000	2,30	-0,011	2,42	0,000	2,43	0,000	2,43	0,000
VS16	-0,034	-0,016	1,80	0,004	2,30	-0,025	1,90	0,004	2,33	-0,003	2,33	-0,003
VS12	-0,015	-0,014	2,00	0,003	2,50	-0,015	2,10	0,003	2,37	-0,003	2,37	-0,003
VS23	0,021	0,018	1,84	0,005	1,93	0,005	1,86	0,005	1,11	0,004	2,30	0,004
VS13	-0,030	-0,026	1,72	0,000	1,11	-0,027	1,86	0,000	1,11	-0,027	1,11	-0,027
VS34	0,000	0,000	1,95	0,000	2,77	0,000	1,83	0,000	2,99	0,000	2,99	0,000
VS24	-0,048	-0,078	1,20	0,121	1,11	-0,052	1,50	0,121	1,11	-0,052	1,11	-0,052
VS45	-0,048	-0,036	1,70	0,004	2,20	-0,036	1,50	0,004	1,11	-0,036	1,11	-0,036
VS35	-0,021	-0,020	2,04	0,004	2,32	-0,020	2,08	0,004	2,28	-0,020	2,28	-0,020
VS15	0,024	0,022	1,68	0,005	2,40	0,024	1,79	0,005	2,20	0,024	2,20	0,004

Таблица П1.16. Обработка примера 16 (трилатерация № 3)

	$\Phi_2(X, n) = \max M$						$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^i$					
	нелинейный			линейный			нелинейный			линейный		
	n	v	n	v	n	v	n	v	n	v	n	v
	при $n = 2,0$											
Ц	0,998	0,657		0,431		0,727						0,472
M1	0,056 M	0,036 M		0,015 M		0,033 M						0,017 M
M2	0,066	0,041		0,020		0,041						0,024
M3	0,053	0,040		0,020		0,034						0,016
VS16	0,016	0,016	2,30	0,002	2,50	0,015	2,30	0,002	2,60	0,003	2,60	0,003
VS17	-0,010	-0,008	1,90	0,001	2,29	-0,009	2,20	0,001	2,50	-0,002	2,50	-0,002
VS26	-0,033	-0,012	2,32	0,003	2,53	-0,012	2,20	0,003	2,50	-0,012	2,50	-0,004
VS12	-0,024	-0,021	2,10	0,005	2,52	-0,021	2,09	0,005	2,40	-0,005	2,40	-0,005
VS23	0,034	0,030	1,80	0,081	1,16	0,029	1,90	0,030	1,20	0,029	1,20	0,077
VS13	-0,024	-0,021	1,80	0,006	2,05	-0,022	2,04	0,006	2,30	-0,022	2,30	-0,008
VS34	-0,023	-0,019	1,93	0,001	2,40	-0,020	2,10	0,001	2,50	-0,020	2,50	-0,003
VS24	-0,057	-0,077	1,20	0,087	1,16	-0,078	1,20	0,087	1,20	-0,078	1,20	-0,086
VS45	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
VS35	-0,001	-0,001	1,89	0,005	2,17	-0,002	2,20	0,005	2,40	-0,002	2,40	-0,003
VS15	0,029	0,025	1,80	0,008	2,41	0,026	2,00	0,008	2,40	0,026	2,40	0,009

Таблица П.17. Обработка примера 17 (полигонометрия № 1)

μ	v при n = 2,0		Φ ₂ (X, n) = max M				Φ ₂ (X, n) = ∑ _{i=1} ^k M ²			
	v		нелинейный		линейный		нелинейный		линейный	
	n	v	n	v	n	v	n	v	n	v
μ	0,995	0,473		0,355		0,378		0,366		0,366
M1	0,072 м	8,65 м		0,009 м		0,060 м		0,009 м		0,009 м
M2	0,084	7,54		0,018		0,061		0,015		0,015
M3	0,126	5,74		0,032		0,074		0,026		0,026
M4	0,126	4,64		0,035		0,078		0,025		0,025
M5	0,169	12,43		0,049		0,103		0,050		0,050
VS16	0,000	0,007	2,60	0,000	2,95	0,000	2,30	0,000	3,00	0,000
VS12	-0,013	-0,008	1,80	-0,008	2,00	-0,004	1,92	-0,008	2,24	-0,004
VS23	-0,016	-0,010	1,70	-0,010	2,01	0,000	1,73	-0,010	2,23	0,000
VS34	-0,013	-0,008	1,80	-0,008	1,99	0,004	1,80	-0,006	2,18	-0,004
VS45	-0,036	-0,058	1,20	-0,058	1,14	0,058	1,20	-0,038	1,11	-0,054
VS15	0,039	0,024	1,30	0,024	1,18	0,052	1,20	0,045	1,14	0,059
V7	0,00"	-0,29"	1,60	0,00"	1,19	0,00"	1,60	0,00"	1,16	0,00"
V8	0,00	-1,02	1,80	0,00	1,11	0,00	1,70	0,00	1,17	0,00
V9	3,58	3,59	2,80	1,09	2,17	3,06	2,80	3,06	1,88	0,70
V10	-3,13	-3,75	3,00	-0,15	2,57	-3,49	2,80	-3,49	1,54	0,00
V11	1,79	2,44	2,80	0,70	2,33	2,22	2,80	2,22	1,78	0,26
V12	1,35	-0,07	1,40	-0,38	1,18	-0,38	1,40	0,26	1,11	-0,38

Таблица П.1.18. Обработка примера 18 (полигонометрия № 2)

	при $n = 2,0$		$\Phi_2(X, n) = \max M$				$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M_i^2$			
	нелинейный		линейный		нелинейный		линейный		нелинейный	
	n	y	n	y	n	y	n	y	n	y
μ	0,993	0,578		0,429		0,562		0,471		0,471
M1	0,038 м	0,024 м		0,016 м		0,021 м		0,016 м		0,016 м
M2	0,049	0,028		0,017		0,024		0,016		0,016
M3	0,054	0,029		0,017		0,028		0,017		0,017
M4	0,046	0,029		0,017		0,026		0,017		0,017
VS16	-0,006	-0,009	2,30	-0,007	2,30	-0,009	2,38	-0,007	2,38	-0,007
VS12	-0,011	-0,008	2,20	-0,002	2,20	-0,008	2,49	-0,002	2,49	-0,002
VS23	-0,019	-0,013	2,45	-0,002	2,06	-0,012	2,51	-0,002	2,51	-0,002
VS34	-0,011	-0,008	2,39	-0,002	2,10	-0,008	2,45	-0,002	2,45	-0,002
VS45	-0,038	-0,047	1,20	-0,068	1,20	-0,052	1,11	-0,067	1,11	-0,067
VS15	0,042	0,049	1,11	0,050	1,10	0,049	1,11	0,049	1,11	0,049
V7	-3,44*	-2,50*	2,10	-2,46*	2,00	-2,45*	1,90	-2,32*	1,90	-2,32*
V8	-2,32	-2,37	2,30	-1,97	2,00	-2,18	1,86	-2,00	1,86	-2,00
V9	2,92	1,65	1,90	0,37	1,48	1,01	1,12	0,47	1,12	0,47
V10	-3,52	-1,90	1,76	0,00	1,41	-1,21	1,11	0,00	1,11	0,00
V11	1,42	0,23	1,50	0,00	1,50	0,26	1,11	0,00	1,11	0,00
V12	-0,22	-1,09	2,30	-1,92	2,30	-1,28	2,03	-1,83	2,03	-1,83

Таблица П.1.9. Обработка примера 19 (полноточностра № 3)

	v при n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$				$\Phi_1(X, n) = \sum_{i=1}^K M^2$			
		нелнейный		линейный		нелнейный		линейный	
		n	v	n	v	n	v	n	v
μ	1,001	0,917		0,906		0,906		0,728	
M1	0,039 м	0,032 м		0,027 м		0,029 м		0,024 м	
M2	0,045	0,037		0,033		0,037		0,028	
M3	0,042			0,033		0,034		0,020	
VS16	0,014	2,20	0,012	2,45	0,005	2,40	0,011	2,31	0,001
VS12	-0,034	2,08	-0,033	2,10	-0,028	1,91	-0,035	1,11	-0,095
VS23	0,005	2,30	0,007	2,38	0,010	2,40	0,008	2,40	-0,003
VS34	-0,034	2,11	-0,033	2,12	-0,028	2,10	-0,032	2,67	-0,005
VS45	-	-	-	-	-	-	-	-	-
VS15	0,039	1,50	0,044	1,11	0,060	1,40	0,044	1,13	0,044
V7	-2,92"	1,87	-2,18"	1,21	-0,02"	1,88	-2,17"	1,85	-2,80"
V8	-4,02	2,07	-4,67	2,15	-4,89	2,02	-4,86	1,76	-4,18
V9	0,59	1,60	0,10	1,66	1,26	1,60	0,09	1,93	2,97
V10	-7,71	2,20	-7,06	2,13	-6,39	2,20	-6,93	1,88	-4,48
V11	-3,94	2,20	-4,18	2,00	-5,44	1,96	-4,13	1,88	-3,57
V12	-0,93	1,70	-0,97	1,80	-2,27	1,50	-0,78	1,21	0,24

Таблица П.1.20. Обработка примера 20 (полгонометрия № 2)

	$\Phi_2(X, n) = \max M$				$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^n M^2$			
	нелинейный		линейный		нелинейный		линейный	
	н	у	н	у	н	у	н	у
при $n = 2,0$								
И		1,009		0,978		0,974		1,161
М1		0,064 м		0,044 м		0,570 м		0,056 м
М2		0,081		0,58		0,690		0,074
М3		0,086		2,87		1,440		0,682
М4		0,062		1,66		0,490		0,055
VS16	2,09	0,022	2,50	0,009	2,10	0,023	2,30	0,021
VS19	2,08	0,012	2,57	-0,003	2,10	0,013	2,20	0,015
VS12	2,09	0,022	2,30	0,009	1,97	0,022	2,00	0,024
VS34	2,20	0,015	2,43	-0,005	2,09	0,014	2,20	0,015
VS45	1,99	0,026	1,11	0,091	2,01	0,025	2,10	0,026
V6	-3,82"	1,11	1,94	-5,30"	2,09	4,85"	1,90	-3,99"
V7	-6,51	2,40	2,00	4,36	2,30	-6,60	2,10	-5,98
V8	-2,29	1,20	1,80	3,42	1,20	-0,49	1,70	-2,62
V9	-5,02	1,97	1,70	-2,96	2,05	-5,09	2,00	-2,22
V10	-0,73	1,50	1,43	-0,89	1,50	-0,89	1,30	-0,93

Таблица П.1.21. Обработка примера 21 (полгонометрия № 3)

	$\Phi_2(X, n) = \max M$				$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^n M^2$			
	нелинейный		линейный		нелинейный		линейный	
	н	у	н	у	н	у	н	у
при $n = 2,0$								
И		0,980		1,010		0,845		1,012
М1		0,062 м		0,074 м		0,052 м		0,065 м
М2		0,102		0,085		0,081		0,086
М3		0,091		0,082		0,083		0,081
VS16	-0,004	2,40	2,60	-0,004	2,40	-0,009	2,50	-0,004
VS12	0,035	2,20	2,20	0,035	2,03	0,041	2,00	0,039
VS23	-0,004	2,40	2,40	-0,003	2,40	-0,009	2,60	-0,005
VS34	0,034	2,20	2,20	0,035	2,10	0,041	2,30	0,034
VS45								
V6	1,04"	1,40	1,50	1,08"	1,30	0,17"	1,40	1,09"
V7	-5,58	2,09	2,10	-5,84	2,11	-5,68	2,00	-6,10
V8	-6,42	2,02	2,00	-6,51	2,00	-6,50	2,00	-6,30
V9	-13,07	2,10	2,10	-12,31	2,30	-12,45	2,10	-12,15
V10	-13,96	2,10	2,10	-14,42	2,20	-13,54	2,10	-14,34

Таблица III.22. Обработка примера 22 (полигометрия № 1)

	v для n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \text{тах } M$				$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^2$			
		неотрицательный		линейный		неотрицательный		линейный	
		n	v	n	v	n	v	n	v
ц	0,997		0,661		0,554		0,729		0,540
M1	0,055 M		0,041 M		0,037 M		0,031 M		0,030 M
M2	0,081		0,041		0,045		0,041		0,040
M3	0,065		0,036		0,037		0,036		0,036
M4	0,118		0,064		0,073		0,075		0,074
M5	0,127		0,062		0,073		0,075		0,074
VS16	0,010	1,90	0,013	1,70	0,015	2,20	0,013	1,96	0,014
VS12	-0,004	2,60	-0,006	2,17	-0,005	2,40	-0,005	2,23	-0,005
VS23	-0,011	1,86	-0,012	1,65	-0,012	2,10	-0,011	1,85	-0,013
VS36	0,004	2,30	0,004	2,13	0,005	2,40	0,005	2,23	0,005
VS25	-0,002	2,40	-0,001	2,32	-0,002	2,50	-0,002	2,33	-0,002
VS45	0,002	1,80	0,000	1,90	-0,002	2,10	0,000	2,11	-0,002
VS34	0,002	2,50	-0,002	2,48	0,003	2,50	0,002	2,32	0,002
V8	0,00*	1,20	0,00*	1,11	0,00*	1,20	0,00*	1,11	0,00*
V9	-6,89	2,20	-7,08	2,43	-7,32	2,10	-7,05	2,45	-7,20
V10	-8,20	2,70	-7,51	2,52	-7,56	2,30	-7,74	2,55	-7,54
V11	-7,61	2,70	-7,36	2,67	-6,80	2,40	-7,34	2,60	-7,05
V12	-6,30	2,06	-7,05	2,38	-7,32	2,04	-6,87	2,40	-7,21
V13	-6,99	2,60	-6,92	2,58	-7,37	2,40	-7,13	2,71	-7,26
V14	-7,16	2,30	-7,31	2,63	-7,23	2,40	-7,18	2,74	-7,20
V15	-7,05	2,60	-6,94	2,84	-6,65	2,70	-6,86	2,91	-6,79
V16	-6,79	2,70	-6,83	2,81	-6,75	2,70	-6,83	2,91	-6,74

Таблица П.1.23. Обработка примера 23 (полигонометрия № 2)

	у при n = 2,0	$\Phi_1(X, n) = \max M$				$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^2$			
		нелинейный		линейный		нелинейный		линейный	
		n	у	n	у	n	у	n	у
И	1,001	0,731		0,834		0,841			0,878
M1	0,063 м	0,049 м		0,056 м		0,045 м			0,044 м
M2	0,057	0,049		0,056		0,049			0,038
M3	0,057	0,049		0,056		0,049			0,034
M4	0,070	0,049		0,056		0,048			0,045
VS16	-0,019	-0,017	2,20	-0,017	2,30	-0,018	2,40	-0,018	2,42
VS12	-0,063	-0,092	1,20	-0,072	1,80	-0,091	1,20	-0,091	2,69
VS23	-0,033	-0,026	2,00	-0,030	2,20	-0,029	2,20	-0,029	2,59
VS36	-0,078	-0,108	1,20	-0,081	1,80	-0,108	1,20	-0,108	2,60
VS25	-0,079	-0,052	2,00	-0,052	1,80	-0,051	2,20	-0,051	1,11
VS45	-0,028	-0,021	2,20	-0,020	2,20	-0,024	2,40	-0,024	2,58
VS34	-0,061	-0,040	2,10	-0,060	1,90	-0,039	2,10	-0,039	1,11
V8	2,46"	3,05"	1,90	4,58"	2,00	2,57"	1,70	2,57"	1,85
V9	-11,30	-10,52	2,40	-9,65	2,30	-10,76	2,20	-10,76	2,04
V10	-8,73	-9,65	2,20	-9,04	2,20	-9,62	2,10	-9,62	1,93
V11	-8,54	-8,50	2,08	-8,38	2,10	-8,24	2,02	-8,24	1,79
V12	-0,42	-0,32	1,30	-1,93	1,80	-0,37	1,40	-0,37	1,70
V13	-6,63	-6,74	2,12	-6,55	2,00	-6,60	2,03	-6,60	1,80
V14	-9,06	-9,01	2,10	-8,21	2,10	-9,18	2,05	-9,18	1,88
V15	-2,06	-3,28	1,80	-2,39	1,80	-3,10	1,70	-3,10	1,79
V16	-10,25	-8,97	2,08	-10,84	2,00	-9,12	2,00	-9,12	1,84

Таблица П1.24. Обработка примера 24 (полигонометрия № 3)

	у при n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$						$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^2$					
		нелинейный		линейный		нелинейный		линейный		нелинейный		линейный	
		н	у	н	у	н	у	н	у	н	у	н	у
μ	1,000	0,830	0,721	0,824	0,835								
M1	0,060 м	0,043 м	0,041 м	0,040 м	0,037 м								
M2	0,053	0,044	0,041	0,042	0,034								
M3	0,049	0,043	0,038	0,036	0,024								
VS16	-0,018	-0,016	-0,028	-0,021	-0,024								
VS12	-0,063	-0,079	-0,114	-0,091	-0,143								
VS23	-0,056	-0,060	-0,078	-0,065	-0,074								
VS36	-0,084	-0,100	-0,129	-0,111	-0,153								
VS25	-0,061	-0,050	-0,016	-0,038	0,007								
VS45	-	-	-	-	-								
VS34	-0,086	-0,070	-0,041	-0,059	-0,017								
V8	-1,37"	-0,23"	0,03"	-0,21"	1,25"								
V9	-11,88	-11,24	-10,62	-11,28	-10,96								
V10	-9,42	-9,95	-9,40	-9,61	-8,04								
V11	-2,83	-1,17	-2,15	-1,38	-1,75								
V12	-4,86	-6,63	-6,83	-6,73	-8,24								
V13	-8,70	-9,09	-8,26	-8,73	-8,26								
V14	-15,04	-13,88	-12,74	-13,14	-11,90								
V15	-5,02	-5,16	-7,20	-6,18	-7,84								
V16	0,77	0,13	0,21	0,05	0,01								

Таблица П2.1. Обработка примера 1 (геодезический четырехугольник из [43])

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
μ	1,000		1,010		1,010
M1	0,060 м		0,059 м		0,059 м
M2	0,064		0,063		0,063
V1	- 0,08"	2,90	- 0,13"	2,90	- 0,13"
V2	0,10	2,90	0,13	2,90	0,13
V3	- 1,09	2,00	- 1,15	2,00	- 1,15
V4	- 0,63	2,90	- 0,48	2,90	- 0,48
V5	0,72	2,00	0,69	2,00	0,69
V6	0,85	1,90	0,90	1,90	0,90
V7	- 0,58	2,10	- 0,60	2,10	- 0,60
V8	0,10	2,90	0,02	2,90	0,02

Таблица П2.2. Обработка примера 2 (полигонометрия)

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
μ	1,000		1,088		1,036
M1	0,028 м		0,014 м		0,014 м
M2	0,038		0,013		0,013
M3	0,040		0,014		0,013
M4	0,038		0,014		0,005
M5	0,028		0,014		0,013
VS1	0,004	2,00	0,005	1,90	0,004
VS2	0,003	3,00	0,002	3,00	0,001
VS3	0,004	2,60	0,006	2,51	0,006
VS4	0,003	2,91	0,002	2,80	0,001
VS5	0,004	2,00	0,005	1,90	0,004
VS6	0,003	2,92	0,002	3,00	0,001
V7	- 1,07"	2,38	- 0,97"	3,00	- 0,86"
V8	- 1,00	2,84	- 0,83	2,92	- 0,78
V9	- 1,06	2,51	- 0,88	2,02	- 1,15
V10	- 1,00	1,92	- 1,30	1,90	- 1,26
V11	- 1,05	2,45	- 0,87	1,83	- 1,43
V12	- 1,01	2,28	- 1,02	2,49	- 0,89
V13	- 0,99	1,89	- 1,29	2,40	- 0,80

Таблица П2.3. Обработка примера 3 (триангуляция из [72, с. 93])

	$n = 2,0$	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^K M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
μ	1,000		0,955		0,926
M1	0,052 м		0,046 м		0,045 м
M2	0,053		0,044		0,044
M3	0,024		0,020		0,019
V1	0,14"	2,90	0,12"	2,90	0,11"
V2	- 0,58	1,60	- 0,67	1,40	- 0,70
V3	0,95	1,60	1,04	1,50	0,94
V4	0,24	2,90	0,22	2,90	0,20
V5	- 0,48	2,80	- 0,29	2,90	- 0,26
V6	0,05	2,50	0,06	2,90	0,06
V7	0,09	2,90	0,03	2,90	0,00
V8	0,19	2,90	0,22	2,90	0,24
V9	0,07	2,90	- 0,02	2,90	- 0,01
V10	- 0,50	1,50	- 0,55	1,40	- 0,42
V11	0,07	2,90	- 0,10	2,90	- 0,12
V12	0,80	1,60	0,79	1,40	0,94
V13	- 0,25	2,80	- 0,13	1,40	- 0,27

Таблица П2.4. Обработка примера 4 (триангуляция из [72, с. 129])

	$n = 2,0$	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^K M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
μ	1,000		0,990		0,996
M1	0,047 м		0,045 м		0,045 м
M2	0,029		0,028		0,028
M3	0,039		0,038		0,038
V1	- 0,24"	1,51	- 0,24"	1,80	- 0,29"
V2	0,40	1,11	0,34	1,11	0,35
V3	- 0,15	1,67	- 0,21	1,48	- 0,23
V4	- 0,08	1,11	- 0,02	1,11	0,00
V5	0,70	1,99	0,65	2,57	0,71
V6	0,27	3,00	0,33	1,11	0,30
V7	- 0,64	1,65	- 0,62	1,64	- 0,64
V8	0,17	2,92	0,12	1,11	0,10
V9	- 0,11	1,11	0,00	1,11	0,00
V10	- 0,98	1,87	- 1,02	2,12	- 1,01
V11	0,54	2,09	0,56	2,47	0,62
V12	1,72	2,79	1,65	2,49	1,68
V13	- 2,65	2,12	- 2,65	2,09	- 2,60
V14	0,94	3,00	1,03	2,90	0,96
V15	0,95	3,00	0,98	2,17	1,03
V16	- 0,75	1,11	- 0,76	1,33	- 0,80
V17	0,74	1,11	0,74	1,11	0,72
V18	0,66	2,14	0,68	2,01	0,67
V19	- 0,64	1,51	- 0,68	1,11	- 0,68

Таблица П2.5. Обработка примера 5 (триангуляция из [72, с. 153])

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^K M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
μ	1,002		1,005		0,974
M1	0,041 м		0,039 м		0,038 м
M2	0,043		0,041		0,041
M3	0,020		0,020		0,020
V1	0,10"	2,90	0,20"	2,90	0,10"
V2	0,74	2,20	0,79	1,80	0,74
V3	0,98	1,20	1,01	1,20	0,95
V4	0,26	2,90	0,21	1,20	0,27
V5	0,69	1,80	0,70	1,20	0,71
V6	-0,36	2,90	-0,34	2,90	-0,30
V7	-0,11	2,90	-0,03	2,90	-0,09
V8	-0,52	2,90	-0,43	1,80	-0,52
V9	0,04	2,90	0,05	2,90	0,01
V10	0,78	2,90	0,62	2,00	0,76
V11	-1,07	2,10	-1,18	2,00	-1,08
V12	-0,04	2,90	-0,12	2,90	-0,06
V13	-1,36	1,90	-1,42	1,80	-1,39
V14	0,68	1,20	0,56	1,40	0,69
V15	0,19	2,90	0,16	2,90	0,15
V16	0,11	2,90	0,09	2,90	0,13

Таблица П2.6. Обработка примера 6 (трилатерация из [72, с. 179])

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^K M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
μ	0,958		0,528		0,465
M1	0,060 м		0,033 м		0,031 м
M2	0,077		0,032		0,025
M3	0,039		0,014		0,012
M4	0,059		0,033		0,032
VS53	0,007	2,30	0,004	2,22	0,003
VS54	-0,005	2,40	-0,003	2,36	-0,003
VS16	-0,005	2,40	-0,003	2,34	-0,003
VS36	0,006	2,30	0,004	2,32	0,003
VS12	0,012	2,20	0,002	2,39	0,001
VS13	0,019	1,20	0,005	2,22	0,004
VS14	-0,022	1,20	-0,074	1,11	-0,080
VS23	-0,018	1,90	-0,002	2,20	-0,001
VS24	0,013	2,10	0,002	2,40	0,001
VS34	0,020	2,20	0,005	2,24	0,004

Таблица П2.7. Обработка примера 7 (трилатерация из [72, с. 202])

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^K M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
μ	1,000		0,596		0,537
M1	0,037 м		0,022 м		0,025 м
M2	0,040		0,023		0,015
VS13	0,026	1,30	0,062	1,20	0,070
VS14	0,024	2,40	0,007	2,20	0,004
VS15	0,015	2,30	0,000	2,40	- 0,003
VS12	- 0,017	2,00	- 0,009	2,20	- 0,008
VS23	0,014	2,00	0,008	2,10	0,006
VS24	0,015	2,00	0,008	2,10	0,007

Таблица П2.8. Обработка примера 8 (линейно-угловая сеть из [72, с. 217])

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^K M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
μ	1,000		1,057		1,058
M1	0,007 м		0,006 м		0,006 м
M2	0,012		0,010		0,010
M3	0,011		0,010		0,009
VS14	0,001	3,00	0,000	3,00	0,000
VS34	0,004	2,60	0,000	2,65	0,001
VS25	- 0,008	2,15	- 0,007	2,08	- 0,007
VS15	0,007	2,08	0,008	2,06	0,008
VS35	- 0,006	2,03	- 0,007	2,11	- 0,006
VS12	0,005	2,21	0,004	2,19	0,003
VS13	- 0,001	1,90	- 0,001	2,71	0,000
VS23	0,000	3,00	0,000	3,00	0,000
V9	0,25"	3,00	0,36"	3,00	0,41"
V10	1,72	1,78	1,95	1,89	1,99
V11	0,16	3,00	0,03	3,00	- 0,02
V12	- 0,64	1,30	- 0,47	1,73	- 0,46
V13	1,11	2,57	0,82	3,00	0,77
V14	- 0,20	2,98	- 0,18	3,00	- 0,20
V15	0,58	1,67	0,76	1,68	0,79
V16	- 0,60	1,58	- 0,46	1,50	- 0,46
V17	- 0,83	2,81	- 0,87	2,42	- 0,91
V18	1,00	1,11	1,16	1,11	1,17
V19	0,43	1,62	0,35	1,94	0,31
V20	- 0,77	1,81	- 0,82	1,90	- 0,78
V21	0,87	1,11	0,82	1,13	0,85

Таблица П2.9. Обработка примера 9 (триангуляция из [74, с. 145])

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^i$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
μ	1,000		1,001		1,000
M1	0,144 м		0,144 м		0,143 м
M2	0,143		0,143		0,142
M3	0,151		0,150		0,150
M4	0,165		0,165		0,165
M5	0,132		0,132		0,131
V1	-0,96°	2,00	-0,95°	2,09	-0,96°
V2	-1,39	2,00	-1,36	2,07	-1,38
V3	-0,58	2,10	-0,59	2,21	-0,59
V4	-0,46	2,10	-0,44	2,16	-0,44
V5	-0,05	1,70	-0,04	1,20	-0,04
V6	0,81	2,00	0,81	2,11	0,82
V7	-0,70	2,00	-0,71	1,95	-0,70
V8	-0,60	2,00	-0,62	2,15	-0,60
V9	0,44	2,00	0,43	2,03	0,44
V10	-0,59	2,00	-0,60	2,13	-0,60
V11	0,60	2,00	0,62	2,20	0,60
V12	-0,42	2,00	-0,42	1,94	-0,42
V13	-0,68	2,00	-0,66	2,01	-0,68
V14	-0,81	2,00	-0,76	1,98	-0,81
V15	-0,75	2,00	-0,70	1,83	-0,75
V16	0,26	1,50	0,27	1,11	0,27
V17	0,03	2,90	0,02	1,11	0,00
V18	-1,34	2,00	-1,33	2,12	-1,34
V19	-0,50	2,10	-0,44	2,18	-0,50
V20	-0,03	1,20	-0,06	1,11	-0,02
V21	-1,22	2,00	-1,33	1,99	-1,23

Таблица П2.10. Обработка примера 10 (триангуляция из [74, с. 160])

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^i$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
μ	1,000		0,890		0,899
M1	0,082 м		0,073 м		0,071 м
M2	0,104		0,086		0,087
V1	1,14°	2,60	1,51°	2,50	1,48°
V2	0,94	2,30	1,16	1,90	1,07
V3	-0,70	1,80	-1,19	2,20	-1,19
V4	1,31	2,90	1,49	2,50	1,50
V5	-3,13	2,50	-2,84	2,40	-2,98
V6	0,15	1,20	0,48	1,20	0,38
V7	-0,55	2,70	-0,83	2,50	-0,77
V8	1,23	1,70	1,22	1,90	1,16
V9	-3,45	2,50	-3,35	2,50	-3,27
V10	0,12	1,20	0,03	1,20	0,01
V11	0,08	1,20	0,10	1,20	0,24
V12	0,50	1,20	0,20	1,20	0,26

Таблица П2.11. Обработка примера 11 (триангуляция № 1)

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
ц	0,958		1,144		1,135
M1	0,066 м		0,050 м		0,051 м
M2	0,066		0,080		0,068
M3	0,132		0,111		0,107
M4	0,132		0,120		0,110
M5	0,216		0,121		0,145
V1	-5,00"	1,57	-5,17"	1,59	-5,10"
V2	-5,00	1,56	-5,35	1,60	-4,95
V3	-5,00	1,62	-4,48	1,60	-4,95
V4	-5,00	1,68	-6,03	2,60	-3,62
V5	-5,00	2,51	-3,34	1,80	-5,69
V6	-5,00	1,71	-5,62	1,80	-5,69
V7	-5,02	2,32	-4,07	1,70	-5,52
V8	-5,00	2,10	-4,65	1,84	-4,76
V9	-4,99	1,84	-6,28	1,88	-4,72
V10	-6,33	2,19	-6,58	2,00	-6,79
V11	-6,36	2,10	-6,98	1,90	-7,30
V12	-6,32	2,53	-5,44	2,50	-4,91
V13	-4,97	1,75	-5,73	2,30	-4,40
V14	-4,99	1,75	-5,44	1,93	-5,48
V15	-4,96	2,24	-3,75	2,10	-5,04
V16	-0,05	1,11	0,29	2,70	1,24

Таблица П2.12. Обработка примера 12 (триангуляция № 2)

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
ц	1,000		1,124		1,172
M1	0,044 м		0,032 м		0,023 м
M2	0,042		0,030		0,029
M3	0,050		0,033		0,034
M4	0,045		0,033		0,035
V1	-4,68"	2,40	-4,69"	2,20	-4,39"
V2	-4,85	1,90	-4,88	1,90	-4,76
V3	-5,79	2,40	-5,75	2,30	-6,17
V4	-4,42	1,70	-5,03	1,50	-6,00
V5	-5,41	2,50	-4,68	2,50	-4,52
V6	-4,84	1,70	-4,97	1,80	-4,14
V7	-4,76	2,20	-4,73	2,00	-4,79
V8	-4,91	1,90	-5,39	1,90	-5,15
V9	-5,56	2,50	-5,09	2,40	-5,28
V10	-6,16	1,80	-5,49	1,80	-5,41
V11	-6,78	1,80	-7,88	1,90	-7,23
V12	-6,23	1,70	-5,80	1,70	-6,54
V13	-4,74	1,70	-5,40	1,60	-4,97
V14	-5,44	1,80	-5,91	1,80	-6,38
V15	-4,82	1,80	-3,68	1,70	-3,64
V16	0,10	1,80	1,34	1,80	0,98

Таблица П2.13. Обработка примера 13 (триангуляция № 3)

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^K M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
μ	1,000		0,894		1,152
M1	0,034 м		0,025 м		0,023 м
M2	0,032		0,016		0,013
M3	0,031		0,025		0,028
V1	- 3,64"	2,75	- 3,07"	2,60	- 2,31"
V2	- 4,00	3,00	- 3,44	2,72	- 3,40
V3	- 7,32	2,13	- 8,44	1,94	- 9,25
V4	- 5,67	2,34	- 5,94	1,75	- 7,50
V5	- 6,09	2,60	- 4,99	2,40	- 3,90
V6	- 3,28	1,84	- 4,11	1,42	- 3,64
V7	- 3,75	1,59	- 4,62	1,40	- 4,50
V8	- 6,36	2,45	- 5,31	2,32	- 4,72
V9	- 4,88	1,94	- 5,07	1,70	- 5,77
V10	- 8,80	2,28	- 8,56	2,06	- 8,59
V11	- 5,70	1,98	- 5,70	1,87	- 5,63
V12	- 4,50	1,93	- 4,73	1,67	- 4,78
V13	- 2,45	1,90	- 2,58	1,78	- 3,08
V14	- 4,11	1,82	- 3,47	1,73	- 3,51
V15	- 8,28	2,29	- 8,79	2,16	- 8,25
V16	- 1,61	1,83	- 1,70	1,50	- 1,82

Таблица П2.14. Обработка примера 14 (трилатерация № 1)

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^K M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
μ	1,000		0,521		0,523
M1	0,143 м		0,023 м		0,023 м
M2	0,158		0,054		0,046
M3	0,239		0,146		0,125
M4	0,251		0,138		0,110
M5	0,362		0,185		0,186
VS16	0,000	2,90	0,000	2,90	0,000
VS17	0,000	2,90	0,000	2,90	0,000
VS26	0,000	2,90	0,000	2,90	0,000
VS12	- 0,018	1,80	- 0,005	2,00	- 0,006
VS23	0,025	1,30	0,018	1,90	0,009
VS13	- 0,036	1,40	- 0,024	1,40	- 0,024
VS34	0,000	2,00	0,000	2,80	0,000
VS24	- 0,018	2,10	- 0,007	2,10	- 0,007
VS45	- 0,018	2,10	- 0,007	2,00	- 0,006
VS35	- 0,025	1,80	- 0,008	1,30	- 0,018
VS15	0,040	1,40	0,081	1,40	0,080

Таблица П2.15. Обработка примера 15 (трилатерация № 2)

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^K M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
μ	1,000		0,504		0,727
M1	0,068 м		0,041 м		0,046 м
M2	0,086		0,041		0,040
M3	0,082		0,036		0,013
M4	0,097		0,041		0,046
VS16	0,006	2,60	0,003	2,73	0,005
VS17	- 0,012	1,18	- 0,001	1,21	- 0,009
VS26	- 0,034	2,41	- 0,002	2,38	- 0,002
VS12	- 0,015	2,28	- 0,006	2,40	- 0,011
VS23	0,021	2,24	0,008	2,37	0,015
VS13	- 0,030	1,28	- 0,054	1,71	- 0,029
VS34	0,000	2,54	0,000	3,00	0,000
VS24	- 0,048	1,16	- 0,122	1,28	- 0,116
VS45	- 0,048	2,15	- 0,006	2,15	- 0,012
VS35	- 0,021	2,18	- 0,008	2,23	- 0,015
VS15	0,024	2,08	0,009	2,12	0,019

Таблица П2.16. Обработка примера 16 (трилатерация № 3)

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^K M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
μ	1,000		0,426		0,438
M1	0,056 м		0,030 м		0,027 м
M2	0,065		0,048		0,048
M3	0,053		0,038		0,028
VS16	0,016	2,36	0,004	2,44	0,004
VS17	- 0,011	2,27	- 0,004	2,32	- 0,003
VS26	- 0,033	2,60	- 0,001	2,69	- 0,001
VS12	- 0,024	2,01	- 0,007	2,02	- 0,007
VS23	0,034	1,29	0,069	1,28	0,071
VS13	- 0,025	1,76	- 0,010	1,97	- 0,009
VS34	- 0,023	2,11	- 0,004	2,21	- 0,004
VS24	- 0,057	1,22	- 0,089	1,21	- 0,089
VS45	-	-	-	-	-
VS35	- 0,001	1,47	- 0,003	2,12	- 0,004
VS15	0,029	1,74	0,012	1,92	0,011

Таблица П2.17. Обработка примера 17 (полигонометрия № 1)

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{j=1}^K M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
μ	1,000		0,435		0,371
M1	0,072 м		0,012 м		0,009 м
M2	0,084		0,052		0,018
M3	0,126		0,057		0,034
M4	0,127		0,053		0,036
M5	0,170		0,057		0,054
VS16	0,000	2,90	0,000	3,00	0,000
VS12	-0,013	1,20	-0,017	2,14	-0,004
VS23	-0,016	2,00	-0,004	2,28	-0,002
VS34	-0,013	1,90	-0,004	2,04	-0,004
VS45	-0,037	1,30	-0,068	1,78	-0,049
VS15	0,039	1,40	0,033	1,20	0,062
V7	0,00"	1,20	0,00"	1,11	0,00"
V8	0,00	1,20	0,00	1,11	0,00
V9	3,60	2,30	1,40	2,25	1,10
V10	-3,15	2,10	-0,84	1,44	-0,04
V11	1,80	2,70	1,10	1,72	0,31
V12	1,35	1,20	0,01	1,11	-0,17

Таблица П2.18. Обработка примера 18 (полигонометрия № 2)

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{j=1}^K M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
μ	1,000		0,840		0,927
M1	0,039 м		0,037 м		0,033 м
M2	0,049		0,038		0,037
M3	0,054		0,034		0,008
M4	0,046		0,038		0,059
VS16	-0,006	2,00	-0,013	2,00	-0,007
VS12	-0,010	2,40	-0,008	2,20	-0,010
VS23	-0,019	2,00	-0,017	2,00	-0,016
VS34	-0,010	1,90	-0,008	2,10	-0,009
VS45	-0,038	2,00	-0,032	1,90	-0,039
VS15	0,042	1,60	0,054	1,90	0,044
V7	-3,38"	1,90	-2,04"	2,10	-3,25"
V8	-2,44	2,00	-3,14	1,90	-2,66
V9	2,83	2,10	2,04	2,00	2,58
V10	-3,64	2,00	-3,30	1,90	-3,49
V11	1,42	2,00	1,06	2,00	1,29
V12	-0,22	1,90	-0,80	1,60	-0,38

Таблица П2.19. Обработка примера 19 (полигонометрия № 3)

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
μ	1,000		1,037		0,980
M1	0,038 м		0,025 м		0,026 м
M2	0,045		0,026		0,019
M3	0,042		0,026		0,025
VS16	0,014	1,90	0,010	1,90	0,013
VS12	-0,034	2,00	-0,035	2,00	-0,035
VS23	0,004	2,00	-0,001	2,00	-0,002
VS34	-0,034	2,00	-0,035	2,00	-0,035
VS45	-	-	-	-	-
VS15	0,039	2,00	0,042	2,00	0,040
V7	-2,88"	2,00	-2,62"	2,00	-2,75"
V8	-4,04	2,10	-4,10	2,10	-4,02
V9	0,66	2,00	1,10	2,00	0,64
V10	-7,71	2,20	-6,42	2,10	-7,21
V11	-3,94	1,70	-5,87	1,90	-4,57
V12	-0,93	2,30	-0,88	2,70	-1,02

Таблица П2.20. Обработка примера 20 (полигонометрия № 2)

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
μ	0,999		0,577		1,028
M1	0,062 м		0,060 м		0,057 м
M2	0,079		0,071		0,072
M3	0,084		0,072		0,080
M4	0,060		0,070		0,054
VS16	0,022	1,88	0,015	2,20	0,021
VS12	0,014	2,37	0,001	2,20	0,014
VS23	0,022	1,87	0,015	1,90	0,025
VS34	0,014	2,45	0,001	2,10	0,014
VS45	0,025	1,29	0,069	2,00	0,026
V6	-3,65"	2,60	-4,41"	2,00	-3,92"
V7	-6,33	3,00	-4,61	2,20	-5,51
V8	-2,19	2,42	-3,31	1,80	-2,59
V9	-4,87	2,24	-3,51	2,00	-5,12
V10	-0,73	2,00	-1,31	1,40	-0,75

Таблица П2.21. Обработка примера 21 (полигометрия № 3)

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
μ	1,000		0,935		0,983
M1	0,091 м		0,089 м		0,064 м
M2	0,102		0,087		0,005
M3	0,091		0,087		0,088
VS16	- 0,005	2,50	- 0,004	2,29	- 0,006
VS12	0,034	1,90	0,043	2,10	0,036
VS23	- 0,005	2,50	- 0,004	1,40	- 0,002
VS34	0,034	2,00	0,039	2,11	0,036
VS45	-	-	-	-	-
V6	0,99"	1,90	0,66"	2,00	1,45"
V7	- 5,59	2,10	- 6,26	2,00	- 5,90
V8	- 6,49	2,00	- 7,11	1,90	- 7,54
V9	- 13,07	2,30	- 10,43	2,11	- 12,18
V10	- 13,96	2,10	- 14,99	2,06	- 13,95

Таблица П2.22. Обработка примера 22 (полигометрия № 1)

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
μ	1,000		1,068		0,982
M1	0,055 м		0,060 м		0,016 м
M2	0,081		0,083		0,007
M3	0,065		0,054		0,041
M4	0,119		0,066		0,074
M5	0,127		0,083		0,037
VS16	0,010	2,10	0,013	2,33	0,014
VS12	- 0,004	2,00	- 0,003	2,09	- 0,002
VS23	- 0,011	1,80	- 0,012	1,88	- 0,011
VS36	0,004	2,00	0,003	2,00	0,002
VS25	- 0,002	2,00	- 0,006	2,90	- 0,004
VS45	0,002	2,00	- 0,002	2,07	- 0,004
VS34	0,002	1,80	0,005	2,31	0,002
V8	0,00"	1,90	0,00"	1,11	0,00"
V9	- 6,89	1,90	- 7,32	1,86	- 8,19
V10	- 8,20	2,00	- 8,14	2,06	- 7,86
V11	- 7,61	2,10	- 6,80	2,14	- 6,98
V12	- 6,30	1,90	- 6,74	2,05	- 5,97
V13	- 7,02	1,80	- 8,16	1,96	- 8,30
V14	- 7,28	2,00	- 6,70	2,09	- 7,09
V15	- 7,05	2,10	- 6,19	2,17	- 6,85
V16	- 6,79	2,00	- 7,09	2,36	- 5,90

Таблица П2.23. Обработка примера 23 (полигонометрия № 2)

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^K M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
μ	1,001		1,049		1,036
M1	0,063 м		0,040 м		0,022 м
M2	0,057		0,037		0,071
M3	0,057		0,024		0,058
M4	0,069		0,058		0,080
VS16	-0,019	2,00	-0,014	1,90	-0,019
VS12	-0,062	2,00	-0,055	2,00	-0,059
VS23	-0,033	2,00	-0,035	2,00	-0,033
VS36	-0,078	2,00	-0,076	2,00	-0,072
VS25	-0,080	1,90	-0,085	1,90	-0,085
VS45	-0,027	2,00	-0,024	2,00	-0,024
VS34	-0,061	2,00	-0,059	2,00	-0,060
V8	2,46"	1,90	2,10"	2,00	2,81"
V9	-11,30	1,80	-13,44	1,90	-11,97
V10	-8,73	2,00	-7,63	2,00	-7,68
V11	-8,54	2,00	-7,93	1,80	-9,53
V12	-0,42	1,50	-0,01	1,20	0,17
V13	-6,55	2,00	-6,66	2,00	-6,68
V14	-9,04	2,10	-7,73	2,10	-8,00
V15	-2,06	1,70	-1,90	1,80	-1,74
V16	-10,25	2,00	-11,60	2,00	-11,49

Таблица П2.24. Обработка примера 24 (полигонометрия № 3)

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^K M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
μ	1,000		1,049		1,063
M1	0,060 м		0,025 м		0,026 м
M2	0,053		0,028		0,031
M3	0,049		0,031		0,032
VS16	-0,019	2,10	-0,018	2,10	-0,021
VS12	-0,062	2,00	-0,060	2,00	-0,062
VS23	-0,055	1,90	-0,055	1,90	-0,058
VS36	-0,084	2,00	-0,086	2,00	-0,090
VS25	-0,061	2,00	-0,062	2,00	-0,058
VS45	-	-	-	-	-
VS34	-0,086	2,00	-0,083	2,10	-0,080
V8	-1,28"	2,00	-1,54"	2,00	-2,03"
V9	-12,00	1,90	-12,83	1,90	-12,42
V10	-9,42	1,90	-9,69	1,80	-10,41
V11	-2,83	1,80	-2,37	1,90	-1,70
V12	-4,86	2,10	-4,23	1,90	-4,58
V13	-8,70	1,80	-9,90	2,00	-8,89
V14	-15,04	2,00	-13,98	2,00	-14,36
V15	-5,02	1,90	-5,34	1,90	-5,04
V16	0,77	2,10	1,44	1,90	0,30

Таблица П3.1. Обработка примера 1 (геодезический четырехугольник из [43])

	Коррелятный способ		Параметрический способ	
	$\Phi_1(X, n) = \max M$	$\Phi_2(X, n) = \max M_{x, \mu}$	$\Phi_1(X, n) = \max M$	$\Phi_2(X, n) = \max M_{x, \mu}$
μ	1,000	1,010	0,991	1,003
M1	0,060 м	0,059 м	0,060 м	0,061 м
M2	0,064	0,063	0,063	0,064
V1	-0,08 ^m	-0,13 ^m	2,90	2,30
V2	0,10	0,13	2,90	2,46
V3	-1,09	-1,15	1,90	1,84
V4	-0,63	-0,48	1,80	1,81
V5	0,72	0,69	1,80	0,73
V6	0,83	0,90	1,70	0,83
V7	-0,58	-0,60	1,90	0,55
V8	0,10	0,02	2,90	0,09

Таблица П3.2. Обработка примера 2 (полигонометрия)

	Коррелятный способ		Параметрический способ	
	$\Phi_1(X, n) = \max M$	$\Phi_2(X, n) = \max M_{x, \mu}$	$\Phi_1(X, n) = \max M$	$\Phi_2(X, n) = \max M_{x, \mu}$
μ	1,000	1,008	0,981	1,096
M1	0,028 м	0,014 м	0,015 м	0,017 м
M2	0,038	0,013	0,013	0,017
M3	0,040	0,014	0,015	0,021
M4	0,038	0,014	0,015	0,017
M5	0,028	0,014	0,014	0,016
VS1	0,004	0,005	2,00	0,003
VS2	0,003	0,002	2,87	0,003
VS3	0,004	0,006	2,63	0,003
VS4	0,003	0,002	2,74	0,003
VS5	0,004	0,005	2,00	0,004
VS6	0,003	0,002	2,92	0,003
V7	-1,07 ^m	-0,92 ^m	2,38	-1,08 ^m
V8	-1,00	-0,83	2,84	-0,86
V9	1,06	0,88	2,98	1,26
V10	1,00	1,30	2,35	0,85
V11	1,05	0,87	2,78	1,08
V12	-1,01	-1,02	2,28	-1,01
V13	-0,99	-1,29	2,18	-1,04

Таблица ПЗ.3. Обработка примера 3 (триангуляция № [72, с. 93])

	v при n = 2,0	Корреляционный способ						Параметрический способ					
		$\Phi_2(X, n) = \max M$			$\Phi_2(X, n) = \max M_{x, \mu}$			$\Phi_2(X, n) = \max M$			$\Phi_2(X, n) = \max M_{x, \mu}$		
		n	v	n	n	v	n	n	v	n	v	n	
μ	1,000		0,955			0,883			0,975			0,976	
M1	0,052 M		0,046 M			0,045 M			0,046 M			0,048 M	
M2	0,053		0,044			0,045			0,046			0,049	
M3	0,024		0,020			0,021			0,020			0,022	
V1	0,14"	2,90	0,12"	2,96	0,17"	2,83	0,17"	2,83	0,11"	3,00	0,18"	3,00	
V2	-0,58	1,60	-0,67	1,37	-0,55	1,81	-0,52	1,69	-0,52	1,69	-0,53	1,69	
V3	0,95	1,60	1,04	1,45	0,95	1,46	1,14	1,99	1,14	1,99	0,81	1,81	
V4	0,24	2,90	0,22	2,67	0,19	2,86	0,22	2,00	0,22	2,00	0,21	2,00	
V5	-0,48	2,90	-0,29	1,36	-0,46	3,00	-0,30	1,60	-0,30	1,60	-0,55	1,60	
V6	0,05	2,50	0,06	2,21	0,04	2,73	0,04	2,40	0,04	2,40	0,21	2,40	
V7	0,09	2,90	0,03	3,00	0,04	2,99	0,15	3,00	0,15	3,00	0,22	3,00	
V8	0,19	2,90	0,22	2,87	0,21	3,00	0,23	3,00	0,23	3,00	0,22	3,00	
V9	0,07	2,90	-0,02	3,00	0,01	2,82	-0,11	2,64	-0,11	2,64	0,10	2,64	
V10	-0,50	1,50	-0,55	1,32	-0,45	1,57	-0,45	1,30	-0,45	1,30	-0,65	1,30	
V11	0,07	2,90	-0,10	3,00	0,03	2,97	-0,13	2,48	-0,13	2,48	0,05	2,48	
V12	0,80	1,60	0,79	1,37	0,89	1,52	0,89	1,70	0,89	1,70	0,87	1,70	
V13	-0,25	2,80	-0,13	1,25	-0,24	2,86	-0,24	1,70	-0,07	1,70	-0,24	1,70	

Таблица ПЗ.4. Обработка примера 4 (триангуляция из [72, с. 129])

	v при n = 2,0	Корреляционный способ				Параметрический способ			
		$\Phi_1(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_1(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M$	
		n	v	n	v	n	v	n	v
ц	1,000		0,990		0,979		1,020		1,020
M1	0,047 м		0,045 м		0,045 м		0,046 м		0,047 м
M2	0,029		0,028		0,029		0,030		0,030
M3	0,039		0,038		0,039		0,040		0,039
V1	-0,24"	1,51	-0,24"	1,70	-0,25"	1,66	-0,26"	1,90	-0,38"
V2	0,40	1,11	0,34	1,11	0,35	1,48	0,41	1,70	0,51
V3	-0,15	1,67	-0,21	1,69	-0,17	1,58	-0,18	2,00	-0,26
V4	-0,08	1,11	-0,02	1,52	-0,06	1,31	-0,05	1,98	-0,03
V5	0,70	1,99	0,65	3,00	0,68	1,75	0,63	1,88	0,71
V6	0,27	3,00	0,33	3,00	0,28	1,78	0,28	1,90	0,24
V7	-0,64	1,65	-0,62	2,07	-0,65	1,59	-0,60	1,84	-0,58
V8	0,17	2,92	0,12	3,00	0,13	2,12	0,05	2,00	0,01
V9	-0,11	1,11	0,00	1,11	-0,07	1,14	-0,10	1,14	-0,06
V10	-0,98	1,87	-1,02	2,24	-0,98	1,67	-1,04	1,81	-1,02
V11	0,54	2,89	0,56	2,61	0,58	1,61	0,59	1,78	0,60
V12	1,72	2,79	1,65	2,70	1,71	2,28	1,74	2,15	1,77
V13	-2,65	2,12	-2,65	2,22	-2,64	1,98	-2,70	2,10	-2,56
V14	0,94	3,00	1,03	3,00	0,95	2,37	0,94	2,00	1,01
V15	0,95	3,00	0,98	3,00	0,97	2,35	0,99	2,22	0,96
V16	-0,75	1,11	-0,76	1,30	-0,80	1,62	-0,78	1,81	-0,84
V17	0,74	1,11	0,74	1,66	0,75	1,67	0,78	1,95	0,79
V18	0,66	2,14	0,68	2,94	0,69	1,62	0,74	1,82	0,80
V19	-0,64	1,51	-0,68	2,62	-0,64	1,76	-0,64	2,00	-0,79

Таблица ПЗ.5. Обработка примера 5 (триангуляция из [72, с. 153])

	y при n = 2,0	Корректичный способ				Параметрический способ			
		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M_{\times \mu}$		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M_{\times \mu}$	
		n	y	n	y	n	y	n	y
μ	1,002	1,005	0,951	1,011	1,011	1,032			
M1	0,041 м	0,039 м	0,038 м	0,040 м	0,042 м	0,042 м			
M2	0,043	0,041	0,042	0,043	0,044	0,044			
M3	0,020	0,020	0,020	0,020	0,021	0,021			
V1	0,10"	0,20"	0,10"	0,06"	0,06"	0,06"			
V2	0,74	2,20	0,79	1,42	0,79	0,80			
V3	0,98	1,20	1,01	1,11	1,67	0,98			
V4	0,26	2,90	0,21	1,44	0,23	0,27			
V5	0,69	1,80	0,70	1,11	0,76	0,68			
V6	-0,36	2,90	-0,34	3,00	-0,28	-0,40			
V7	-0,11	2,90	-0,03	3,00	2,69	-0,15			
V8	-0,52	2,90	-0,43	1,50	-0,36	-0,43			
V9	0,04	2,90	0,05	3,00	0,03	0,06			
V10	0,78	2,90	0,62	1,60	1,77	0,91			
V11	-1,07	2,10	-1,18	1,72	-1,20	-1,10			
V12	-0,04	2,90	-0,12	3,00	-0,14	-0,14			
V13	-1,36	1,90	-1,42	1,54	-1,44	-1,42			
V14	0,68	1,20	0,56	1,23	1,55	0,56			
V15	0,19	2,90	0,16	2,96	0,14	0,24			
V16	0,11	2,90	0,09	3,00	-0,01	0,06			

Таблица ПЗ.6. Обработка примера 6 (трилатерация из [72, с. 179])

	ν при $n = 2,0$	Корреляционный способ			Параметрический способ		
		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M_{x, \mu}$	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M_{x, \mu}$
		n	ν	n	n	ν	n
μ	0,958			0,340			
M1	0,060 м	0,528		0,047 м		0,560	0,627
M2	0,077	0,032		0,054		0,023	0,024 м
M3	0,039	0,014		0,023		0,012	0,025
M4	0,059	0,033		0,049		0,022	0,015
VS3	0,007	2,30	0,004	1,80	0,001	2,34	0,024
VS4	0,005	2,40	-0,003	2,00	-0,001	2,50	0,004
VS16	-0,005	2,40	-0,003	2,00	-0,001	2,48	-0,004
VS36	0,006	2,30	0,004	1,90	0,001	2,39	0,004
VS12	0,012	2,00	0,002	1,90	0,002	2,59	0,001
VS13	0,019	2,20	0,005	1,30	0,009	2,35	0,004
VS14	-0,022	1,20	-0,074	1,30	-0,013	1,11	0,006
VS23	-0,018	1,90	-0,002	1,20	-0,024	2,40	-0,072
VS24	0,013	2,10	0,002	1,90	0,002	2,40	0,001
VS34	0,020	2,20	0,005	1,30	0,052	2,20	0,000
						2,28	0,004
							2,28
							0,005

Таблица ПЗ.7. Обработка примера 7 (трилатерация из [72, с. 202])

	ν при $n = 2,0$	Корреляционный способ			Параметрический способ		
		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M_{x, \mu}$	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M_{x, \mu}$
		n	ν	n	n	ν	n
μ	1,000			0,318			
M1	0,037 м	0,596		0,038 м		0,889	0,889
M2	0,040	0,023		0,034		0,037 м	0,040
VS13	0,026	1,30	0,062	1,26	0,036	1,90	0,027
VS14	0,024	2,40	0,007	2,26	0,030	0,027	1,90
VS15	0,015	2,30	0,000	1,80	0,002	2,10	0,023
VS12	-0,017	2,00	-0,009	1,20	-0,025	1,90	0,013
VS23	0,014	2,00	0,008	1,43	0,002	2,00	-0,016
VS24	0,015	2,00	0,008	1,54	0,002	2,00	0,013
						2,00	0,014
							2,00
							0,014

Таблица ПЗ.8. Обработка примера 8 (линейно-угловая сеть из [72, с. 2.17])

	v при n = 2, θ	Коррелятный способ						Параметрический способ					
		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M_{x, \mu}$		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M_{x, \mu}$		$\Phi_2(X, n) = \max M$	
		n	v	n	v	n	v	n	v	n	v	n	v
М	1,000		1,057		0,977		1,371					1,175	
М1	0,007 м		0,006 м		0,006 м		0,006 м					0,006 м	
М2	0,012		0,010		0,011		0,009					0,010	
М3	0,011		0,010		0,011		0,008					0,010	
VS14	0,001	3,00	0,000	2,99	0,000	2,64	0,001	2,45	2,45	0,002	2,45	0,002	
VS34	0,004	2,60	0,000	2,11	0,003	2,65	0,002	2,23	2,23	0,005	2,23	0,005	
VS25	-0,008	2,15	-0,007	1,98	-0,008	2,46	-0,005	2,30	2,30	-0,006	2,30	-0,006	
VS15	0,007	2,08	0,008	1,97	0,008	2,43	0,006	2,20	2,20	0,007	2,20	0,007	
VS35	-0,006	2,03	-0,007	1,93	-0,006	2,40	-0,006	2,18	2,18	-0,006	2,18	-0,006	
VS12	0,005	2,21	0,004	2,06	0,004	2,38	0,004	2,25	2,25	0,006	2,25	0,006	
VS13	-0,001	1,90	-0,001	1,62	-0,001	2,15	-0,003	2,08	2,08	-0,002	2,08	-0,002	
VS23	0,000	3,00	0,000	3,00	0,000	2,32	0,002	2,43	2,43	0,002	2,43	0,002	
V9	0,25°	3,00	0,36°	3,00	0,38°	3,00	0,06°	3,00	3,00	0,17°	3,00	0,17°	
V10	1,72	1,78	1,95	1,80	1,72	1,37	2,19	2,00	2,00	1,54	2,00	1,54	
V11	0,16	3,00	0,03	3,00	0,22	3,00	-0,17	2,00	2,00	0,97	2,00	0,97	
V12	-0,64	1,30	-0,47	1,39	-0,68	2,90	-0,25	1,70	1,70	-0,67	1,70	-0,67	
V13	1,11	2,57	0,82	1,93	1,01	1,11	0,89	1,60	1,60	1,31	1,60	1,31	
V14	-0,20	2,98	-0,18	2,49	-0,19	1,11	-0,40	1,50	1,50	-0,50	1,50	-0,50	
V15	0,58	1,67	0,76	2,59	0,41	1,52	1,40	1,40	1,40	0,90	1,40	0,90	
V16	-0,60	1,58	-0,46	1,56	-0,44	1,48	-0,77	1,40	1,40	-0,81	1,40	-0,81	
V17	-0,83	2,81	-0,87	1,93	0,85	1,52	-1,04	1,88	1,88	-0,91	1,88	-0,91	
V18	1,00	1,11	1,16	1,11	1,03	1,19	0,69	1,88	1,88	0,56	1,88	0,56	
V19	0,43	1,62	0,35	1,11	0,37	1,53	0,40	1,60	1,60	0,58	1,60	0,58	
V20	-0,77	1,81	-0,82	1,70	-0,87	1,13	-0,54	1,40	1,40	-0,68	1,40	-0,68	
V21	0,87	1,11	0,82	1,11	0,99	2,70	0,48	1,75	1,75	0,74	1,75	0,74	

Таблица ПЗ.9. Обработка параметра 9 (треугольника из [74, с. 145])

	γ при $n = 2,0$	Корреляционный способ				Параметрический способ			
		$\Phi_2(X, n) = \max M$	$\Phi_2(X, n) = \max M$	$\Phi_2(X, n) = \max M$	$\Phi_2(X, n) = \max M$	$\Phi_2(X, n) = \max M$	$\Phi_2(X, n) = \max M$	$\Phi_2(X, n) = \max M$	$\Phi_2(X, n) = \max M$
μ	1,000	1,001	1,001	1,001	1,001	0,979	0,979	0,980	
M1	0,144 M	0,144 M	0,144 M	0,144 M	0,141 M	0,141 M	0,141 M		
M2	0,143	0,143	0,143	0,143	0,140	0,140	0,140		
M3	0,151	0,150	0,151	0,151	0,147	0,147	0,148		
M4	0,165	0,165	0,165	0,165	0,161	0,161	0,162		
M5	0,132	0,132	0,132	0,132	0,129	0,129	0,129		
V1	-0,96"	-0,95"	-0,96"	-0,96"	-0,96"	-0,96"	-0,94"		
V2	-1,39	-1,36	-1,36	-1,36	-1,37	-1,37	-1,33		
V3	-0,58	-0,59	-0,59	-0,60	-0,59	-0,59	-0,58		
V4	-0,46	-0,44	-0,44	-0,46	-0,46	-0,46	-0,48		
V5	-0,05	0,81	0,81	0,81	0,81	0,81	0,80		
V6	0,81	0,71	0,71	0,72	0,70	0,70	0,69		
V7	-0,70	-0,62	-0,62	-0,63	-0,64	-0,64	-0,62		
V8	-0,50	-0,44	-0,44	-0,43	-0,43	-0,43	-0,45		
V9	0,44	0,60	0,60	0,60	0,54	0,54	0,51		
V10	-0,59	-0,60	-0,60	-0,60	-0,62	-0,62	-0,67		
V11	0,60	0,62	0,62	0,62	0,59	0,59	0,57		
V12	-0,42	-0,42	-0,42	-0,42	-0,42	-0,42	-0,42		
V13	-0,68	-0,66	-0,66	-0,65	-0,65	-0,65	-0,69		
V14	-0,81	-0,76	-0,76	-0,77	-0,77	-0,77	-0,72		
V15	-0,75	-0,70	-0,70	-0,69	-0,69	-0,69	-0,63		
V16	0,26	0,27	0,27	0,26	0,26	0,26	0,12		
V17	0,03	0,02	0,02	0,00	0,00	0,00	-0,15		
V18	-1,34	-1,33	-1,33	-1,32	-1,32	-1,32	-1,52		
V19	-0,50	-0,44	-0,44	-0,44	-0,44	-0,44	-0,46		
V20	-0,03	-0,06	-0,06	-0,05	-0,05	-0,05	-0,10		
V21	-1,22	-1,33	-1,33	-1,33	-1,17	-1,17	-1,13		

Таблица П.10. Обработка примера 10 (трангуляция из [74, с. 160])

	y при n = 2,0	Коррелятивный способ				Параметрический способ			
		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M_{\times \mu}$		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M_{\times \mu}$	
		n	v	n	v	n	v	n	v
μ	1,000								
M1	0,082 м	0,890			0,767			0,957	0,960
M2	0,104	0,073 м		0,068 м			0,075 м		0,078 м
V1	1,14"	0,086		0,084			0,090		0,093
V2	0,94	2,60	1,51"	2,94	1,70"	2,08	1,30"	2,08	1,34"
V3	-0,70	1,80	1,16	2,96	1,20	1,95	0,92	1,80	0,90
V4	1,31	2,90	1,49	2,73	-1,39	1,84	-0,72	1,80	-1,02
V5	-3,13	2,50	-2,84	3,00	1,55	2,28	1,29	2,00	1,54
V6	0,15	1,20	0,48	2,97	-2,81	2,06	-3,15	2,11	-3,05
V7	-0,55	2,70	-0,83	1,63	0,54	1,26	0,10	1,57	0,25
V8	1,23	1,70	1,22	3,00	-0,94	2,15	-0,62	2,00	-0,63
V9	-3,45	2,50	-3,35	2,98	3,25	1,81	1,25	1,86	1,21
V10	0,12	1,20	0,05	1,19	-0,05	2,15	-3,22	2,20	-3,15
V11	0,08	1,20	0,10	1,11	0,22	1,40	0,13	2,00	0,10
V12	0,50	1,20	0,20	1,11	0,08	1,27	0,12	1,19	0,07
						1,59	0,41	1,60	0,40

Таблица ПЗ.11. Обработка примера 11 (триангуляция № 1)

	v при n = 2,0	Коррелятный способ				Параметрический способ			
		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$		$\Phi_1(X, n) = \max M$		$\Phi_1(X, n) = \max M \times \mu$	
		n	v	n	v	n	v	n	v
μ	0,958	1,144		0,344					0,876
M1	0,066 м	0,050 м		0,060 м					0,050 м
M2	0,066	0,080		0,063					0,054
M3	0,132	0,111		0,122					0,111
M4	0,132	0,120		0,123					0,121
M5	0,216	0,121		0,197					0,192
V1	-5,00"	1,57	-5,17"	2,90	-4,99"	1,80	-5,22"	1,82	-5,17"
V2	-5,00	1,56	-5,35	2,77	-5,14	1,80	-5,22	1,81	-5,18
V3	-5,00	1,62	-4,48	2,99	-4,87	1,90	-4,56	1,88	-4,71
V4	-5,00	1,68	-6,03	2,77	-5,14	2,00	-4,66	2,03	-4,73
V5	-5,00	2,51	-3,34	3,00	-4,85	1,90	-5,17	1,94	-5,16
V6	-5,00	1,71	-5,62	2,88	-5,02	1,90	-5,17	1,95	-5,11
V7	-5,02	2,32	-4,07	3,00	-5,00	2,00	-4,90	2,06	-4,90
V8	-5,00	2,10	-4,65	2,94	-5,05	2,00	-5,02	2,03	-5,13
V9	-4,99	1,84	-6,28	3,00	-4,95	2,00	-5,08	2,08	-4,97
V10	-6,33	2,19	-6,58	3,00	-6,32	2,40	-6,15	2,40	-6,51
V11	-6,36	2,10	-6,98	3,00	-6,36	2,40	-6,27	2,48	-6,16
V12	-6,32	2,53	-5,44	3,00	-6,32	2,40	-6,38	2,46	-6,32
V13	-4,97	1,75	-5,73	2,96	-4,98	2,10	-5,33	2,13	-5,25
V14	-4,99	1,75	-5,44	3,00	-5,01	2,10	-5,23	2,10	-5,29
V15	-4,96	2,24	-3,75	3,00	-4,93	2,50	-4,43	2,50	-4,46
V16	-0,05	1,11	0,29	1,11	0,03	1,20	0,02	1,15	0,01

Таблица ПЗ.12. Обработка примера 12 (триангуляция № 2)

	v при n = 2,0	Коррелятный способ				Параметрический способ			
		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M_{x \mu}$		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M_{x \mu}$	
		n	v	n	v	n	v	n	v
M	1,000		1,124		0,373		0,862		0,871
M1	0,044 м		0,032 м		0,044 м		0,042 м		0,043 м
M2	0,042		0,030		0,042		0,043		0,043
M3	0,050		0,033		0,049		0,043		0,043
M4	0,045		0,033		0,045		0,042		0,042
V1	-4,68"	2,40	-4,69"	3,00	-4,69"	2,00	-4,68"	2,00	-4,69"
V2	-4,85	1,90	-4,88	3,00	-4,85	2,04	-4,68	2,06	-4,78
V3	-5,79	2,40	-5,75	3,00	-5,78	2,13	-5,64	2,13	-5,52
V4	-4,42	1,70	-5,03	3,00	-4,39	2,32	-4,23	2,33	-4,34
V5	-5,41	2,50	-4,68	3,00	-5,43	2,24	-5,54	2,23	-5,53
V6	-4,84	1,70	-4,97	3,00	-4,85	2,15	-5,22	2,21	-5,13
V7	-4,76	2,20	-4,73	3,00	-4,76	2,28	-4,69	2,27	-4,60
V8	-4,91	1,90	-5,39	3,00	-4,91	2,21	-5,07	2,19	-4,96
V9	-5,56	2,50	-5,09	3,00	-5,55	2,36	-5,24	2,21	-5,44
V10	-6,16	1,80	-5,49	3,00	-6,20	2,18	-6,15	2,15	-6,08
V11	-6,78	1,80	-7,88	3,00	-6,73	2,26	-6,35	2,23	-6,37
V12	-6,23	1,70	-5,80	2,98	-6,25	2,14	-6,49	2,09	-6,55
V13	-4,74	1,70	-5,40	2,88	-4,75	1,93	-4,94	1,94	-4,98
V14	-5,44	1,80	-5,91	3,00	-5,49	2,03	-5,52	2,05	-5,55
V15	-4,82	1,80	-5,68	3,00	-4,76	2,03	-4,53	2,06	-4,47
V16	6,10	1,80	1,34	2,59	0,09	1,11	0,03	1,11	0,03

Таблица ПЗ.13. Обработка примера 13 (триангуляция № 3)

μ	ν при n = 2,0	Корреляционный способ				Параметрический способ														
		Φ ₂ (X, n) = max M		Φ ₁ (X, n) = max M		Φ ₂ (X, n) = max M		Φ ₁ (X, n) = max M												
		n	ν	n	ν	n	ν	n	ν											
μ	1,000		0,894			0,445														
M1	0,034 м		0,025 м			0,028 м					0,032 м									0,031 м
M2	0,032		0,016			0,026					0,032									0,031
M3	0,031		0,025			0,028					0,031									0,031
V1	-3,64"	2,75	-3,07"	3,00	-3,07"	3,00	-3,73"	1,80	-3,68"	1,74	-3,68"	1,80	-3,68"	1,74	-3,68"	1,74	-3,68"	1,74	-3,68"	-3,57"
V2	-4,00	3,00	-3,44	3,00	-4,15	3,00	-3,70	1,80	-3,70	1,71	-3,70	1,80	-3,70	1,71	-3,70	1,71	-3,70	1,71	-3,71	-3,71
V3	-7,32	2,13	-8,44	3,00	-7,07	3,00	-7,62	2,00	-7,62	1,91	-7,62	2,00	-7,62	1,91	-7,62	1,91	-7,62	1,91	-7,72	-7,72
V4	-5,67	2,34	-5,94	3,00	-5,94	3,00	-6,31	2,00	-6,31	1,93	-6,31	2,00	-6,31	1,93	-6,31	1,93	-6,31	1,93	-6,20	-6,20
V5	-6,09	2,60	-4,99	2,91	-4,99	2,91	-6,30	2,00	-6,10	1,90	-6,10	2,00	-6,10	1,90	-6,10	1,90	-6,10	1,90	-6,22	-6,22
V6	-3,28	1,84	-4,11	2,29	-4,11	2,29	-2,79	1,70	-2,59	1,60	-2,59	1,70	-2,59	1,60	-2,59	1,60	-2,59	1,60	-2,58	-2,58
V7	-3,75	1,59	-4,62	2,15	-4,62	2,15	-3,10	1,80	-3,42	1,72	-3,42	1,80	-3,42	1,72	-3,42	1,72	-3,42	1,72	-3,45	-3,45
V8	-6,36	2,45	-5,31	3,00	-5,31	3,00	-6,30	2,00	-6,06	1,90	-6,06	2,00	-6,06	1,90	-6,06	1,90	-6,06	1,90	-7,21	-7,21
V9	-4,88	1,94	-5,07	2,56	-5,07	2,56	-5,60	2,00	-5,52	1,89	-5,52	2,00	-5,52	1,89	-5,52	1,89	-5,52	1,89	-4,34	-4,34
V10	-8,80	2,28	-8,56	3,00	-8,56	3,00	-8,52	2,50	-7,85	2,18	-7,85	2,50	-7,85	2,18	-7,85	2,18	-7,85	2,18	-8,20	-8,20
V11	-5,70	1,98	-5,70	2,87	-5,70	2,87	-5,52	2,00	-6,09	1,98	-6,09	2,00	-6,09	1,98	-6,09	1,98	-6,09	1,98	-5,79	-5,79
V12	-4,50	1,93	-4,73	2,85	-4,73	2,85	-4,96	2,10	-5,05	2,01	-5,05	2,10	-5,05	2,01	-5,05	2,01	-5,05	2,01	-5,01	-5,01
V13	-2,45	1,90	-2,58	2,46	-2,58	2,46	-2,75	1,80	-2,56	1,81	-2,56	1,80	-2,56	1,81	-2,56	1,81	-2,56	1,81	-2,74	-2,74
V14	-4,11	1,82	-3,47	2,65	-3,47	2,65	-3,88	2,00	-4,01	1,91	-4,01	2,00	-4,01	1,91	-4,01	1,91	-4,01	1,91	-4,17	-4,17
V15	-8,28	2,29	-8,79	3,00	-8,79	3,00	-8,22	2,20	-8,43	2,16	-8,43	2,20	-8,43	2,16	-8,43	2,16	-8,43	2,16	-8,09	-8,09
V16	-1,61	1,83	-1,70	2,63	-1,70	2,63	-2,30	1,90	-1,59	1,77	-1,59	1,90	-1,59	1,77	-1,59	1,77	-1,59	1,77	-1,58	-1,58

Таблица П.14. Обработка прибора 14 (триггерная № 1)

μ	ν при n = 2,0	Корреляция способ			Параметрический способ		
		Φ ₂ (X, n) = max M	Φ ₂ (X, n)	Φ ₂ (X, n) = max M	Φ ₂ (X, n) = max M	Φ ₂ (X, n)	Φ ₂ (X, n) = max M
		π	ν	π	ν	π	ν
μ	1,000		0,521		0,476		0,538
M1	0,143 M		0,023 M		0,021 M		0,022 M
M2	0,158		0,054		0,096		0,039
M3	0,239		0,146		0,151		0,127
M4	0,251		0,138		0,146		0,135
M5	0,362		0,185		0,190		0,127
VS16	0,000	2,90	0,000	2,90	0,000	3,00	0,000
VS17	0,000	2,90	0,000	2,90	0,000	3,00	0,000
VS26	0,000	2,90	0,000	2,90	0,000	3,00	0,000
VS12	-0,018	1,80	-0,005	1,20	-0,016	2,04	-0,005
VS23	0,025	1,30	0,018	1,30	0,017	1,18	0,046
VS13	-0,036	1,40	-0,024	1,40	-0,023	1,22	-0,084
VS34	0,000	2,00	0,000	1,90	0,000	1,90	0,000
VS24	-0,018	2,10	-0,007	2,00	-0,006	2,21	-0,006
VS45	-0,018	2,10	-0,007	2,00	-0,006	2,12	-0,006
VS35	-0,025	1,80	-0,008	1,30	-0,017	1,70	-0,005
VS15	0,040	1,40	0,081	1,40	0,073	2,12	0,012
						2,00	0,012

Таблица ПЗ.15. Обработка примера 15 (трилатерация № 2)

	Коррелятный способ				Параметрический способ			
	$\Phi_1(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_1(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M$	
	n	y	n	x, μ	n	y	n	x, μ
n	1,000	0,504		0,353		0,463		0,519
M1	0,068 м	0,041 м		0,051 м		0,021 м		0,034 м
M2	0,086	0,041		0,047		0,026		0,041
M3	0,082	0,036		0,038		0,027		0,040
M4	0,097	0,041		0,050		0,026		0,040
VS16	0,006	0,003	2,60	0,002	2,37	0,000	2,30	0,002
VS17	-0,012	-0,001	1,11	-0,023	2,30	0,000	2,10	-0,003
VS76	-0,034	2,41	2,63	-0,004	2,50	-0,004	2,30	-0,004
VS12	-0,015	2,28	2,04	-0,003	2,50	-0,003	2,20	-0,006
VS23	0,021	2,24	2,06	0,008	2,55	0,005	2,30	0,009
VS13	-0,030	1,28	1,18	-0,054	1,11	-0,065	1,30	-0,053
VS34	0,000	2,54	2,91	0,000	2,77	0,000	2,60	0,000
VS24	-0,048	1,16	1,20	-0,122	1,11	-0,121	1,20	-0,119
VS45	-0,048	2,15	2,00	-0,063	2,30	-0,064	2,00	-0,068
VS35	-0,021	2,18	2,11	-0,008	2,52	-0,004	2,30	-0,009
VS15	0,024	2,08	1,13	0,037	2,40	0,005	2,00	0,010

Таблица ПЗ.16. Обработка примера 16 (трилатерация № 3)

	Коррелятный способ				Параметрический способ			
	$\Phi_1(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_1(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M$	
	n	y	n	x, μ	n	y	n	x, μ
n	1,000	0,426		0,307		0,431		0,436
M1	0,056 м	0,030 м		0,045 м		0,015 м		0,018 м
M2	0,065	0,048		0,053		0,020		0,022
M3	0,053	0,038		0,049		0,020		0,022
VS16	0,016	0,004	2,36	0,004	2,50	0,002	2,40	0,002
VS17	-0,011	-0,004	1,22	-0,014	2,29	-0,001	2,01	-0,001
VS26	-0,033	2,60	1,90	-0,001	2,53	-0,003	2,49	-0,004
VS12	-0,024	2,01	1,91	-0,004	2,52	-0,005	2,41	-0,005
VS23	0,034	1,29	0,069	0,032	1,16	0,081	1,18	0,081
VS13	-0,025	1,76	1,20	-0,025	2,03	-0,006	1,99	-0,007
VS34	-0,023	2,11	2,00	-0,023	2,40	-0,001	2,19	-0,001
VS24	-0,057	1,22	1,11	-0,091	1,16	-0,087	1,20	-0,086
VS45	-	-	-	-	-	-	-	-
VS35	-0,001	1,47	1,69	-0,001	2,17	-0,005	2,20	-0,005
VS15	0,029	1,74	1,12	0,025	2,41	0,008	2,31	0,008

Таблица П3.17. Обработка примера 17 (полигонометрия № 1)

	ν при $n = 2,0$	Корреляционный способ						Параметрический способ					
		$\Phi_1(X, n) = \max M$			$\Phi_2(X, n) = \max M$			$\Phi_1(X, n) = \max M$			$\Phi_2(X, n) = \max M$		
		n	ν	μ	n	ν	μ	n	ν	μ	n	ν	μ
μ	1,000												
M1	0,072		0,435		0,403		0,011		0,009		0,355		0,362
M2	0,084		0,012		0,038		0,050		0,018		0,009		0,010
M3	0,126		0,057		0,051		0,050		0,032		0,035		0,039
M4	0,127		0,053		0,058		0,058		0,035		0,049		0,039
M5	0,170		0,057		0,058		0,058		0,035		0,049		0,049
VS16	0,000	2,90	0,000	2,90	0,000	0,000	2,90	0,000	0,000	2,95	0,000	0,000	0,000
VS12	-0,013	1,20	-0,017	1,50	-0,003	-0,003	2,00	-0,004	-0,004	2,01	-0,004	-0,004	-0,004
VS23	-0,016	2,00	-0,004	1,90	-0,003	-0,003	2,01	0,000	0,000	1,70	0,000	0,000	0,000
VS34	-0,013	1,90	-0,004	1,80	-0,004	-0,004	1,99	-0,004	-0,004	1,92	-0,004	-0,004	-0,004
VS45	-0,037	1,30	-0,068	1,30	-0,044	-0,044	1,14	-0,058	-0,058	1,17	-0,058	-0,058	-0,058
VS15	0,039	1,40	0,033	1,30	0,061	0,061	1,18	0,052	0,052	1,21	0,052	0,054	0,054
V7	0,00"	1,20	0,00"	1,20	0,00"	0,00"	1,19	0,00"	0,00"	1,20	0,00"	0,00"	0,00"
V8	0,00	1,20	0,00	1,20	0,00	0,00	1,11	0,00	0,00	1,11	0,00	0,00	0,00
V9	3,60	2,30	1,40	2,60	1,53	1,53	2,17	1,09	1,09	2,19	1,09	1,22	1,22
V10	-3,15	2,10	-0,84	2,40	-0,89	-0,89	2,57	-0,15	-0,15	2,51	-0,15	-0,28	-0,28
V11	1,80	2,70	1,10	2,80	1,11	1,11	2,53	0,70	0,70	2,21	0,70	0,69	0,69
V12	1,35	1,20	0,01	1,20	0,00	0,00	1,18	-0,38	-0,38	1,22	-0,38	-0,19	-0,19

Таблица ГЗ.18. Обработка примера 18 (полигонометрия № 2)

	v при n = 2,0	Корреляционный способ				Параметрический способ			
		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M_{x \mu}$		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M_{x \mu}$	
		n	y	n	y	n	y	n	y
μ	1,000	0,840		0,691		0,429		0,473	
M1	0,039 M	0,037 M		0,040 M		0,016 M		0,019 M	
M2	0,049	0,038		0,040		0,017		0,021	
M3	0,054	0,034		0,036		0,017		0,021	
M4	0,046	0,038		0,040		0,017		0,021	
VS16	-0,006	-0,013	2,00	-0,017	2,30	-0,007	2,30	-0,007	
VS12	-0,010	-0,008	2,40	-0,006	2,30	-0,002	2,45	-0,002	
VS23	-0,019	-0,017	2,00	-0,016	2,45	-0,002	2,34	-0,003	
VS34	-0,010	-0,008	1,90	-0,005	2,39	-0,002	2,30	-0,003	
VS45	-0,038	-0,032	2,00	-0,031	1,11	-0,068	1,26	-0,063	
VS15	0,042	0,054	1,60	0,062	1,11	0,030	1,26	0,050	
V7	-3,58"	-2,04"	1,90	-1,02"	2,07	-2,26"	2,11	-2,30"	
V8	-2,44	-3,14	2,00	-3,34	2,04	-1,97	2,22	-2,01	
V9	2,83	2,04	2,10	1,44	1,33	0,37	1,38	0,57	
V10	-3,64	-3,30	2,00	-2,96	1,11	0,00	1,47	-0,43	
V11	1,42	1,06	2,00	0,80	1,11	0,00	1,18	0,13	
V12	-0,22	-0,80	1,90	-1,45	2,14	-1,92	2,34	-1,79	

Таблица ПЗ.19. Обработка примера 19 (полигонометрия № 3)

	y при n = 2,0	Коррелятный способ						Параметрический способ					
		$\Phi_2(X, n) = \max M$			$\Phi_2(X, n) = \max M_{x, \mu}$			$\Phi_2(X, n) = \max M$			$\Phi_2(X, n) = \max M_{x, \mu}$		
		n	y	n	n	y	n	y	n	y	n	y	
И	1,000	1,037			0,970				0,906				0,874
M1	0,038 м	0,025 м			0,024 м				0,027 м				0,028 м
M2	0,045	0,026			0,025				0,033				0,035
M3	0,042	0,026			0,026				0,033				0,035
VS16	0,014	0,010	1,90	0,012	0,012	1,90	0,005	2,45	0,005	2,30	0,006		
VS12	-0,034	-0,035	2,00	-0,036	-0,036	2,00	-0,028	2,10	-0,028	2,10	-0,029		
VS23	0,004	-0,001	2,00	0,000	0,000	2,00	0,010	2,38	0,010	2,30	0,011		
VS34	-0,034	-0,035	2,00	-0,036	-0,036	2,00	-0,028	2,12	-0,028	2,10	-0,029		
VS45	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
VS15	0,039	0,042	2,00	0,041	0,041	2,00	0,060	1,11	0,060	1,20	0,059		
V7	-2,88"	-2,62"	2,00	-2,61"	-2,61"	2,00	-0,02"	1,21	-0,02"	1,50	-0,21"		
V8	-4,04	-4,10	2,10	-4,42	-4,42	2,10	-4,89	2,15	-4,89	2,10	-5,21		
V9	0,66	1,10	2,00	0,51	0,51	2,00	1,26	1,66	1,26	1,90	1,29		
V10	-7,71	-6,42	2,20	-6,38	-6,38	2,20	-6,39	2,13	-6,39	2,20	-6,21		
V11	-3,94	-5,87	1,70	-5,02	-5,02	1,90	-5,44	2,00	-5,44	2,10	-5,08		
V12	-0,93	-0,88	2,30	-0,70	-0,70	2,40	-2,77	1,80	-2,77	2,00	-2,31		

Таблица ПЗ.22. Обработка примера 22 (полигонометрия № 1)

	ν при $n = 2.0$	Коррелятивный способ		Параметрический способ	
		$\Phi_2(X, n) = \max M$	$\Phi_2(X, n) = \max M$ $\times \mu$	$\Phi_2(X, n) = \max M$	$\Phi_2(X, n) = \max M$ $\times \mu$
μ	1,000				
M1	0,055 м	1,068	0,937	0,554	1,006
M2	0,081	0,060 м	0,029 м	0,037 м	0,038 м
M3	0,065	0,083	0,020	0,045	0,053
M4	0,115	0,054	0,059	0,037	0,044
M5	0,127	0,066	0,070	0,073	0,083
VS16	0,010	0,013	0,016	0,015	0,009
VS12	-0,004	2,00	-0,003	2,10	-0,005
VS23	-0,011	1,80	-0,012	1,65	-0,012
VS36	0,004	2,00	0,003	2,13	0,005
VS25	-0,002	2,00	-0,006	2,32	-0,002
VS45	0,002	2,00	-0,002	1,90	-0,002
VS34	0,002	1,80	0,005	2,48	0,003
V8	0,007*	1,90	0,007*	1,11	0,007*
V9	-6,89	1,90	-7,32	2,43	-7,32
V10	-8,20	2,00	-8,14	2,52	-7,56
V11	-7,61	2,10	-6,80	2,67	-6,80
V12	-6,30	1,90	-6,74	2,38	-7,32
V13	-7,02	1,80	-8,16	2,58	-7,37
V14	-7,28	2,00	-6,70	2,61	-7,23
V15	-7,05	2,10	-6,19	2,84	-6,65
V16	-6,79	2,00	-7,09	2,81	-6,75

Таблица ПЗ.24. Обработка примера 24 (полигонометрия № 3)

	v при n = 2,0	Корректирующий способ						Параметрический способ					
		Φ ₁ (X, n) = max M			Φ ₁ (X, n) = max M × ц			Φ ₂ (X, n) = max M			Φ ₂ (X, n) = max M × μ		
		n	v	п	n	v	п	n	v	п	n	v	п
μ	1,000	1,049			1,033			0,721				0,835	
M1	0,060 м	0,025 м			0,025 м			0,041 м				0,041 м	
M2	0,053	0,028			0,028			0,041				0,041	
M3	0,049	0,031			0,030			0,038				0,040	
VS16	-0,019	-0,018	2,10		-0,019	2,10		-0,028	2,30			-0,028	
VS12	-0,062	-0,060	2,00		-0,060	2,00		-0,114	2,54			-0,026	
VS23	-0,055	-0,055	1,90		-0,057	1,63		-0,070	1,60			-0,068	
VS36	-0,084	-0,086	2,00		-0,086	1,12		-0,129	2,38			-0,033	
VS25	-0,061	-0,062	2,00		-0,061	2,48		-0,016	1,67			-0,105	
VS45	--	--	--		--	--		--	--			--	
VS34	-0,086	-0,083	2,00		-0,084	1,97		-0,041	1,30			-0,137	
V8	-1,28"	-1,54"	2,00		-1,72"	1,17		-0,03"	1,30			-0,04"	
V9	-12,00	-12,83	1,90		-12,83	2,35		-10,62	2,12			-10,72	
V10	-9,42	-9,69	1,90		-9,51	2,21		-9,40	2,08			-7,68	
V11	-2,83	-2,37	1,80		-2,40	1,82		-2,15	1,95			-4,08	
V12	-4,86	-4,23	2,10		-4,38	2,38		-6,83	2,34			-6,51	
V13	-8,70	-9,90	1,80		-9,21	2,18		-8,26	2,17			-6,96	
V14	-15,04	-13,89	2,00		-14,24	2,11		-12,74	2,05			-14,29	
V15	-5,02	-5,34	1,90		-5,36	1,98		-7,20	1,93			-7,27	
V16	0,77	1,14	2,10		0,80	1,31		0,21	1,75			0,52	

Научное издание

МИЦКЕВИЧ Валерий Иванович
СУББОТЕНКО Петр Валерьевич
ЯЛТЫХОВ Вадим Викторович

**ОСНОВЫ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО УРАВНИВАНИЯ
ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ**

Редактор Г.А. Тарасова

Дизайн обложки В.А. Виноградовой

Подписано в печать 12.09.08. Формат 60x84 1/16. Гарнитура Таймс. Бумага офсетная.
Ризография. Усл. печ. л. 7,43. Уч.-изд. л. 7,15. Тираж 50. Заказ 1609.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Полоцкий государственный университет»

ЛИ № 02330/0133020 от 30.04.2004 ЛП № 02330/0133128 от 27.05.2004

211440 г. Новополоцк, ул. Блохяна, 29