

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

М. Е. Капралов

РАДИОАВТОМАТИКА

Учебно-методический комплекс
для студентов специальности 1-39 01 01 «Радиотехника»

Новополоцк
ПГУ
2011

УДК 621.37(075.8)
ББК 32.84я73
К20

Рекомендовано к изданию методической комиссией
радиотехнического факультета в качестве
учебно-методического комплекса (протокол № 4 от 08.02.2011)

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

начальник сектора РУП «Полоцкий центр стандартизации,
метрологии и сертификации» А. А. ВЕРШИЛОВСКАЯ;
канд. техн. наук, доц., зав. каф. «Конструирование и технология РЭС»
УО «Полоцкий государственный университет» Ю. Г. ГРОЗБЕРГ

Капралов, М. Е.

К20 Радиоавтоматика : учеб.-метод. комплекс для студентов специальности 1-39 01 01 «Радиотехника» / М. Е. Капралов. – Новополоцк : ПГУ, 2011. – 360 с.

ISBN 978-985-531-259-9.

Представлен материал изучаемого курса (лекционные и практические занятия, лабораторный практикум). В лекционном курсе изложены принцип действия, способы математического описания и анализа качества работы автоматических систем. Большое внимание уделено описанию непрерывных и цифровых систем РА методами пространства состояний.

Предназначен для студентов и преподавателей вузов радиотехнических специальностей, может быть полезен для специалистов.

УДК 621.37(075.8)

ББК 32.84я73

ISBN 978-985-531-259-9

© Капралов М. Е., 2011
УО «Полоцкий государственный университет», 2011

ВВЕДЕНИЕ

В современных радиотехнических устройствах различного назначения и системах радиопередачи широко применяются автоматические системы, которые называются *системами радиоавтоматики (системами РА)*. К числу таких систем относятся устройства фазовой и частотной автоподстройки частоты, автоматической регулировки усиления, системы измерения координат движущихся объектов, измерители дальности, различные следящие фильтры и др.

Выделение систем РА в самостоятельный класс обусловлено их особенностями, связанными с условиями работы в составе радиотехнических устройств и систем радиопередачи, в которых осуществляется обработка параметров радиосигнала при действии различного вида помех.

Надежность и качество работы систем РА во многом определяют характеристики радиоаппаратуры и систем радиопередачи.

Отметим, что методы анализа и проектирования систем РА основаны на общей теории систем автоматического управления, большой вклад в развитие которой внесли советские ученые А.А. Андронов, Н.Н. Боголюбов, В.С. Кулебакин, А.В. Михайлов, В.А. Бесекерский, Е.П. Попов, В.С. Пугачев, И.Е. Казаков, В.В. Солодовников, Я.З. Цыпкин и многие другие.

Изложение основ указанных методов анализа и проектирования применительно к системам РА является основной задачей книги. Очевидно, что изучение последующих дисциплин учебного плана подготовки радиоспециалистов должно базироваться на тех знаниях, которые студенты получают после ознакомления с курсом «Радиоавтоматика».

Всякий процесс управления, функциональная схема которого приведена на рис. В1, подразумевает наличие некоторого устройства – *объекта управления (ОУ)*, режим работы которого автоматически изменяется в соответствии с *сигналом управления $u(t)$* , сформированным в *устройстве управления (УУ)* по *управляющему воздействию $x(t)$* . Например, в системе фазовой автоподстройки частоты объектом управления является генератор, частота колебаний напряжения которого (выходной сигнал системы) автоматически поддерживается на заданном уровне, определенном частотой входного сигнала. В системе автоматического сопровождения цели РЛС объектом управления является электромеханическое устройство – антенна РЛС, продольная ось которой автоматически следит за направлением на сопровождаемую цель. Угол отклонения продольной оси антенны от выбранного направления отсчета углов определяет выходной сигнал системы автоматического сопровождения цели РЛС.

Выходной сигнал объекта управления $y(t)$ называют регулируемым, он измеряется с помощью специального датчика (Д), связанного с объектом управления. Очевидно, что измерение связано с ошибками, возникающими из-за шума измерения (на рис. В1 это обстоятельство учитывается введением дополнительного сигнала $g_u(t)$).

Объект управления работает в условиях изменения окружающей среды (температуры, давления, влажности и т.п.), колебаний напряжений источников питания. Влияние этих факторов в функциональной схеме учитывается введением случайного сигнала $g(t)$, который называют *возмущающим воздействием*.

Изменение режима работы объекта управления осуществляется сигналом управления $u(t)$, который вырабатывается во второй части системы – устройстве управления.

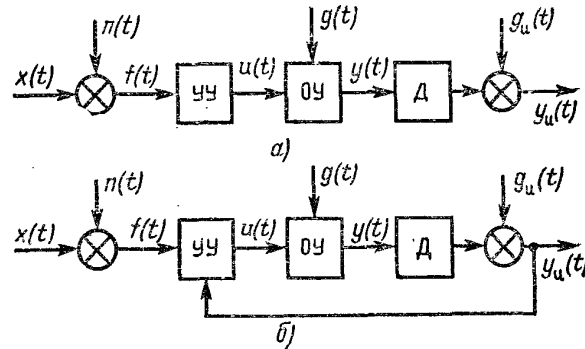


Рис. В1. Схема системы РА: а – разомкнутой; б – замкнутой

Требуемый характер управления выходным сигналом определяется управляющим воздействием (входным сигналом) $x(t)$.

В зависимости от принципа формирования сигнала управления $u(t)$ различают два основных вида систем РА – разомкнутые и замкнутые. В *разомкнутых системах* (см. рис. В1, а) сигнал управления зависит только от управляющего воздействия:

$$u(t) = f(x). \quad (B1)$$

В таких системах РА обеспечивается заранее заданная функциональная связь между управляющим воздействием и выходным сигналом. Из-за помех, действующих на систему, и нестабильности устройств не удается получить высокую точность работы разомкнутых систем РА, поэтому их применяют редко.

В *замкнутых системах* или в *системах с обратной связью* (см. рис. В1, б) сигнал управления формируется на основании измерения управляющего воздействия и выходного сигнала:

$$u(t) = f(x, y_u). \quad (B2)$$

Выражения (B1) и (B2) называют *алгоритмами* или *законами управления систем РА*. За счет обратной связи влияние на качество работы замкнутых систем РА помех и нестабильности устройств в значительной степени компенсируется. Очевидно, что в разомкнутых системах такой компенсации не происходит, поэтому качество их работы намного ниже, чем в замкнутых системах.

Помимо управляющего воздействия на вход систем РА воздействуют различные помехи $n(t)$, снижающие качество работы систем. Например, в системах ав-

томатического сопровождения РЛС возникновение помех обусловлено флуктуациями сигнала из-за неоднородности диаграммы отражения цели, а также перемещением центра отражения радиолокационного сигнала по цели.

В радиотехнических устройствах большое распространение получили системы, в которых сигнал управления $u(t)$ формируется по измеренному отклонению выходного сигнала от входного воздействия $f(t)$. Схема такой системы показана на рис. В2.

Сигнал, поступающий с выхода системы на ее вход, называют *сигналом обратной связи*, разность

$$e(t) = f(t) - y_u(t) \quad (B3)$$

– *сигналом рассогласования* или *сигналом ошибки*, а устройство, измеряющее $e(t)$, – *измерителем рассогласования*, который совместно с устройством управления образует регулятор системы РА. Не следует путать сигнал ошибки с ошибкой системы, которая равна разности управляющего воздействия $x(t)$ и выходного сигнала $y(t)$.

Системы РА, построенные подобным образом, называют *системами, работающими по принципу отклонения или рассогласования*.

Существуют также системы, работающие по принципу компенсации возмущающих воздействий (рис. В3). В таких системах возмущающее воздействие измеряется датчиком (Д) и используется для формирования сигнала управления $u(t)$. При выполнении определенных соотношений можно добиться того, чтобы выходной сигнал не зависел от возмущающего воздействия $g(t)$, что является достоинством таких систем управления.

В УМК рассматриваются несколько конкретных систем РА, используемых в различных по назначению радиотехнических устройствах и системах радиоуправления.

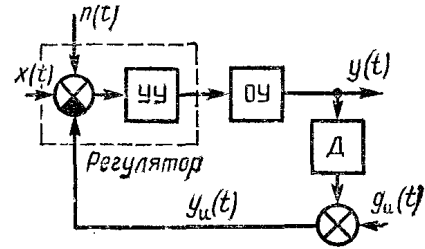


Рис. В2. Функциональная схема одноконтурной системы

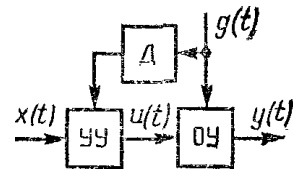


Рис. В3. Функциональная схема системы с компенсацией возмущения

РАЗДЕЛ 1. ТИПОВЫЕ СИСТЕМЫ РАДИОАВТОМАТИКИ

Тема 1. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ И СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ ТИПОВЫХ СИСТЕМ РАДИОАВТОМАТИКИ

1.1. Система автоматической подстройки частоты

Системы автоматической подстройки частоты (АПЧ) применяются в радиоприемных устройствах, доплеровских системах измерения скорости подвижных объектов, устройствах частотной селекции сигналов и др.

Рассмотрим систему АПЧ радиоприемного устройства, предназначенную для поддержания номинала заданной промежуточной частоты сигнала (рис. 1.1).

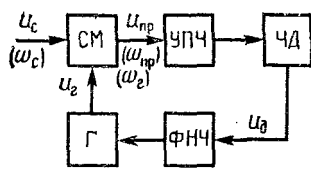


Рис. 1.1. Функциональная схема АПЧ

Входной сигнал – напряжение $u_c(t)$ частотой ω_c – преобразуется в смесителе (СМ) в напряжение промежуточной частоты ω_{np} , усиливается усилителем промежуточной частоты (УПЧ) и подается на частотный дискриминатор (ЧД). Если промежуточная частота сигнала отличается на $\Delta\omega$ от ее номинального значения, равного центральной частоте УПЧ, то на выходе ЧД возникает напряжение, значение и знак которого

зависят от значения и знака отклонения промежуточной частоты $\Delta\omega$. Напряжение с ЧД через фильтр нижних частот (ФНЧ) подается на гетеродин (Г) (перестраиваемый генератор), частота сигнала которого перестраивается таким образом, что отклонение $\Delta\omega$ уменьшается, в результате чего промежуточная частота с заданной точностью оказывается равной центральной частоте УПЧ ω_{np0} .

Рассмотрим основные соотношения, определяющие точность работы системы АПЧ в установившемся режиме, полагая для простоты, что коэффициент передачи ФНЧ равен единице.

Отклонение промежуточной частоты сигнала ω_{np} от ее номинального значения

$$\Delta\omega = (\omega_{np} - \omega_{np0}) = \Delta\omega_c - \Delta\omega_2, \quad (1.1)$$

где $\omega_{np} = \omega_c - \omega_2$; $\omega_c = \omega_{c0} + \Delta\omega_c$ – частота входного сигнала; $\omega_2 = \omega_{20} + \Delta\omega_2$ – частота сигнала гетеродина; $\Delta\omega_c$, $\Delta\omega_2$ – отклонения частот входного сигнала и гетеродина от номинальных значений ω_{c0} , ω_{20} .

Напряжение на выходе ЧД является функцией отклонения промежуточной частоты от номинального значения:

$$u_{чд} = F(\Delta\omega). \quad (1.2)$$

Зависимость $F(\Delta\omega)$ называют *дискриминационной характеристикой* (рис. 1.2). При малых значениях $\Delta\omega$ дискриминационная характеристика линейна и выражение (1.5) принимает вид

$$u_{чд} = k_{чд} \Delta\omega, \quad (1.3)$$

где $k_{чд}$ – коэффициент передачи ЧД (крутизна характеристики).

Под действием напряжения, снимаемого с ЧД, частота сигнала с гетеродина перестраивается на

$$\Delta\omega_2 = k_2 u_{\text{ЧД}}, \quad (1.4)$$

где k_2 – коэффициент передачи гетеродина.

Из выражений (1.1), (1.2) и (1.3) следует, что ошибка регулирования промежуточной частоты в системе АПЧ

$$\Delta\omega = \frac{1}{1+K} \Delta\omega_c, \quad (1.5)$$

где $K = k_{\text{ЧД}} k_2$ – коэффициент передачи системы АПЧ.

Действительно, $\Delta\omega = \Delta\omega_c - \Delta\omega_2 = \Delta\omega_c - k_{\text{ЧД}} k_2 \Delta\omega$, откуда следует вышеприведенное соотношение.

Коэффициент передачи является одной из основных характеристик системы АПЧ, его значение во многом определяет точность стабилизации промежуточной частоты, динамические характеристики системы. Из выражения (1.5) следует, что с увеличением коэффициента передачи ошибка (1.5) уменьшается. Зная допустимую ошибку и максимальное значение $\Delta\omega_c$, по (1.5) можно найти необходимый коэффициент передачи системы АПЧ. По соотношениям (1.1) – (1.4) на рис. 1.3 построена структурная схема системы АПЧ относительно отклонений частот от их номинальных значений.

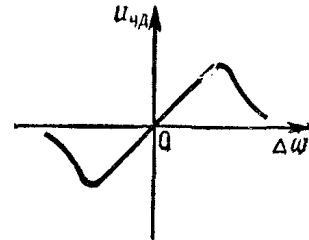


Рис. 1.2. Дискриминационная характеристика ЧД

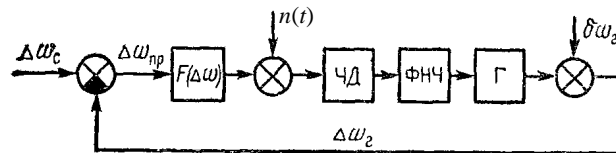


Рис. 1.3. Структурная схема АПЧ

На схеме указаны возмущающие воздействия, влияющие на точность работы системы АПЧ; $n(t)$ – флуктуационная составляющая напряжения, поступающего с частотного дискриминатора; $\delta\omega_2$ – нестабильность частоты гетеродина. Рис. 1.3 используют при анализе устойчивости системы АПЧ, точности ее работы.

1.2. Система фазовой автоподстройки частоты

Системы фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) применяются в радиоприемных устройствах, перестраиваемых по частоте генераторах высокостабильных колебаний и других устройствах. Функциональная схема системы ФАПЧ показана на рис. 1.4. Система стабилизирует частоту подстраиваемого генератора (ПГ) по сигналу с высокостабильного эталонного генератора (ЭГ).

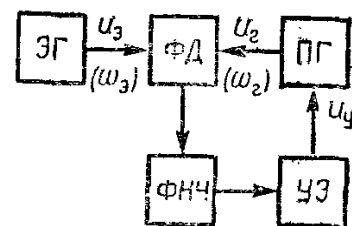


Рис. 1.4. Функциональная схема ФАПЧ

Объектом управления в системе ФАПЧ является ПГ, частота колебаний (или фаза) напряжения которого изменяется в зависимости от напряжения, вырабатываемого управляющим элементом (УЭ), при этом напряжение ПГ остается неизменным. Частота напряжения ПГ является выходным сигналом системы ФАПЧ. На систему действует напряжение от эталонного генератора с частотой $\omega_э$, этот сигнал является управляющим воздействием.

Измерителем рассогласования является фазовый детектор (ФД), выходной сигнал которого является нелинейной периодической функцией разности фаз сигналов, подаваемых от ЭГ и ПГ. Сигнал с ФД через фильтр нижних частот (ФНЧ) подается на УЭ, который перестраивает частоту ПГ, приближая ее к частоте ЭГ. В установившемся режиме в системе устанавливается постоянная разность фаз между напряжениями $u_э$ и $u_г$, при этом напряжение на выходе ФД также будет постоянным, в результате чего частота сигнала ПГ окажется равной частоте сигнала эталонного генератора.

Начальное рассогласование частот от ЭГ и ПГ

$$\Delta\omega_n = \omega_э - \omega_{гн}, \quad (1.6)$$

где $\omega_{гн}$ – начальная частота сигнала ПГ.

После включения системы ФАПЧ частота сигнала ПГ

$$\omega_г = \omega_{гн} + \omega_{гy}. \quad (1.7)$$

Составляющая $\omega_{гy}$ возникает из-за перестройки частоты ПГ и определяется выражением

$$\omega_{гy} = k_г k_{yэ} u_{фд} = k_г k_{yэ} F(\varphi) k_д, \quad (1.8)$$

где $k_г$ – коэффициент передачи ПГ по частоте; $k_{yэ}$ – коэффициент передачи УЭ; $k_д$ – коэффициент, равный максимальному напряжению на выходе ФД; φ – разность фаз напряжений ЭГ и ПГ.

Для простоты принято, что ФНЧ отсутствует (точнее, его коэффициент передачи равен единице) и напряжение с ФД подается на УЭ.

Величина

$$\omega_{yд} = k_г k_{yэ} k_д, \quad (1.9)$$

имеющая размерность круговой частоты, определяет максимальное допустимое начальное рассогласование частот ω_n , которое может быть скомпенсировано в системе ФАПЧ; эту величину называют полосой удержания системы. С учетом выражений (1.8) и (1.9) частота сигнала с ПГ (1.7) оказывается равной

$$\omega_г = \omega_{гн} + F(\varphi)\omega_{yд}. \quad (1.10)$$

Разность фаз сигналов с ЭГ и ПГ, учитывая интегральную связь между фазой и частотой, определяется выражением

$$\varphi = \varphi_0 + \int_0^t (\omega_э - \omega_г) dt, \quad (1.11)$$

где φ_0 – начальное значение разности фаз.

Из последнего выражения следует, что

$$\dot{\varphi} = \omega_э - \omega_г. \quad (1.12)$$

В установившемся режиме разность фаз φ – постоянная величина, поэтому частота сигнала ПГ равна частоте сигнала ЭГ, т.е. ошибка стабилизации частоты сигнала ПГ равна нулю (производная от фазы, как от константы, равна нулю).

Подставив в выражение (1.12) формулу (1.10) и (1.6), получим нелинейное дифференциальное уравнение для системы ФАПЧ:

$$\dot{\varphi} + F(\varphi)\omega_{y\delta} = \Delta\omega_n. \quad (1.13)$$

Уравнение (1.13) – основное дифференциальное уравнение системы ФАПЧ; из этого уравнения следует, что в любой момент времени алгебраическая сумма разности частот $\omega_3 - \omega_2$ и расстройки является постоянной величиной, равной начальному рассогласованию частот сигналов ЭГ и ПГ.

Уравнениям (1.6) – (1.12) соответствует структурная схема системы ФАПЧ, изображенная на рис. 1.5.

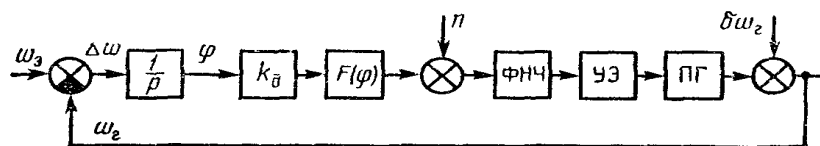


Рис. 1.5. Структурная схема ФАПЧ

Блок $1/p$ (преобразование Лапласа, соответствующее интегрированию) позволяет выполнить операцию интегрирования, соответствующую выражению (1.11), возмущение $n(t)$ учитывает влияние на качество работы системы флуктуационной составляющей напряжения, а воздействие $\delta\omega_2$ – влияние нестабильности частоты ПГ.

1.3. Система автоматического сопровождения цели бортовой РЛС

Радиолокационная станция (РЛС) сопровождения предназначена для автоматического измерения составляющих угла отклонения линии визирования (линия РЛС – сопровождаемая цель) в системе координат $OX_cY_cZ_c$, связанной с летательным аппаратом (рис. 1.6, а).

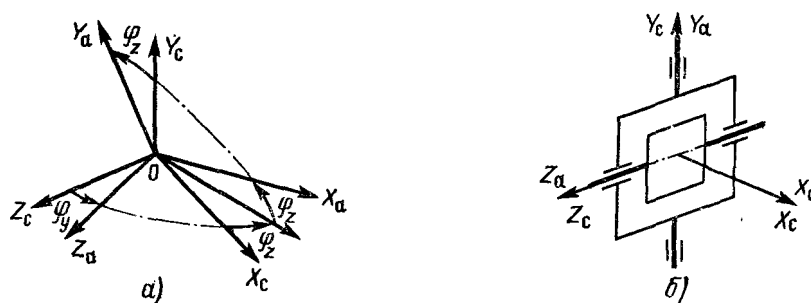


Рис. 1.6. К определению углов отклонения линии визирования:

а – система координат $OX_aY_aZ_a$ относительно $OX_cY_cZ_c$;

б – схема карданного подвеса

Антенна РЛС устанавливается в карданном подвесе, наружная рамка которого вращается в горизонтальной, а внутренняя – в вертикальной плоскостях (см. рис. 1.6, б). С антенной связана система координат $OXYAZA$, ось OXA которой нормальна к плоскости внутренней рамки карданного подвеса и совпадает с продольной осью антенны. Для измерения углов отклонения линии визирования в горизонтальной φ_y и вертикальной φ_z плоскостях на рамках карданного подвеса устанавливаются аналоговые или цифровые датчики.

Современные РЛС строятся как моноимпульсные (одноимпульсные) системы, в которых измерение угловых координат сопровождаемой цели может осуществляться по одному отраженному от цели импульсу. Радиолокационная станция – это многоканальное устройство, два канала требуются для измерения составляющей угла отклонения линии визирования в горизонтальной плоскости и два – для измерения в вертикальной плоскости. Для этого в антенне РЛС формируются одновременно в каждой из плоскостей две остронаправленные перекрещивающиеся диаграммы направленности. На рис. 1.7, а изображены две такие диаграммы направленности для пеленгации цели в вертикальной плоскости; диаграммы разнесены относительно равносигнального направления (РСН) на постоянный угол θ_0 . Если линия визирования отклонена от РСН на угол e , который является сигналом рассогласования в системе автосопровождения, то сигналы, принятые по диаграммам направленности, будут различными: сигнал, принятый по верхней диаграмме направленности, будет больше сигнала, принятого по нижней диаграмме:

$$\begin{cases} E_1 = E_0 + k_A e E_0; \\ E_2 = E_0 - k_A e E_0, \end{cases} \quad (1.14)$$

где E_0 – сигнал, принимаемый по РСН; k_A – постоянный коэффициент.

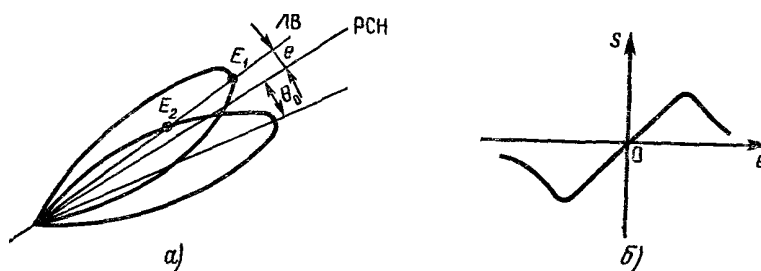


Рис. 1.7. К определению пеленгационной характеристики РЛС:
а – диаграмма направленности; б – пеленгационная характеристика

Разность амплитуд принятых сигналов

$$E_p = E_1 - E_2 = 2 k_A e E_0 \quad (1.15)$$

пропорциональна углу отклонения линии визирования от РСН. Для того чтобы исключить влияние на измерение напряжения, пропорционального углу откло-

нения e от абсолютных значений принимаемых сигналов E_1 и E_2 , разностный сигнал (1.18) нормируется суммарным сигналом:

$$E_c = E_1 + E_2 = 2 E_0. \quad (1.16)$$

В этом случае отношение амплитуды разностного сигнала (1.15) к амплитуде суммарного сигнала

$$E_p/E_c = K_A e = S \quad (1.17)$$

пропорционально углу отклонения линии визирования от РСН. Зависимость (1.17) называют *пеленгационной характеристикой* (см. рис. 1.7, б). Эта характеристика определяет коэффициент передачи приемника РЛС и допустимый диапазон угла рассогласования от РСН.

На рис. 1.8 показана функциональная схема моноимпульсного приемника, в котором реализация соотношения (1.17) обеспечивается устройством автоматической регулировки усиления (АРУ).

Суммарный сигнал (1.16) является также опорным сигналом для фазового детектора системы автосопровождения, напряжение на выходе которого

$$u_{фд} = k_{фд} K_A e, \quad (1.18)$$

где $k_{фд}$ – коэффициент передачи фазового детектора.

На рис. 1.9, а показана структурная схема системы автосопровождения РЛС, из которой видно, что напряжение с приемника (П) через корректирующее устройство (КУ) подается на усилитель мощности (УМ), на который поступает и сигнал с местной обратной связи (МОС). Усилитель мощности вводится для обеспечения нормальной работы электрического двигателя (ЭД), который через редуктор (Р) поворачивает антенну (А) в направлении уменьшения сигнала рассогласования, не превышающего в режиме сопровождения цели допустимого значения. С помощью КУ, включенного после фазового детектора приемника, и местной обратной связи обеспечиваются устойчивость и необходимые динамические свойства системы автосопровождения цели РЛС.

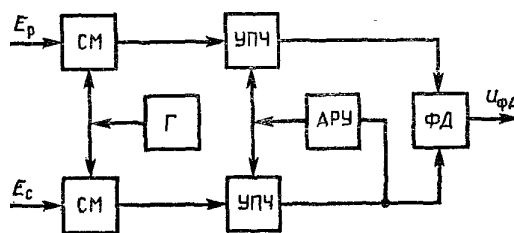


Рис. 1.8. Функциональная схема моноимпульсного приемника

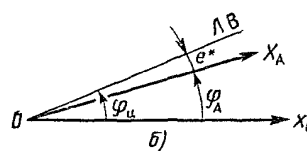
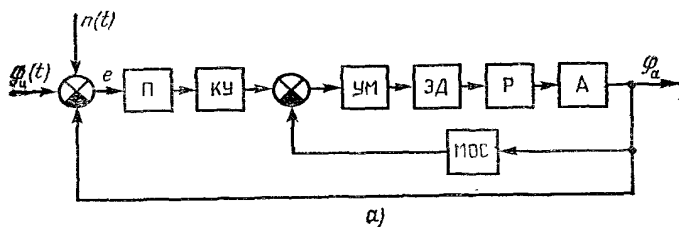


Рис. 1.9. Система автоматического сопровождения:
а – структурная схема; б – к отсчету углов

Система автосопровождения работает в условиях действия ряда возмущающих воздействий (помех), основными из которых являются следующие: флуктуация отраженного от цели радиолокационного сигнала, угловой шум,

обусловленный перемещением по цели центра отражения сигнала (блуждание блестящей точки), шум первых каскадов приемника. Эти возмущающие воздействия снижают точность работы системы автосопровождения. На структурной схеме системы (см. рис. 1.9, а) эти воздействия учитываются введением возмущающего воздействия $n(t)$.

Регулируемым параметром в системе автосопровождения цели является угол отклонения оси антенны РЛС φ_A от продольной оси летательного аппарата OX_A , а управляющим воздействием (входным сигналом) – угол отклонения линии визирования φ_v . Объект управления – антенна РЛС, состояние которой (угол отклонения и его производные) должно изменяться так, чтобы продольная ось антенны с необходимой точностью была направлена на сопровождаемую цель, а производные от ее угла отклонения не превышали допустимых значений.

1.4. Система автоматической регулировки усиления

Системы автоматической регулировки усиления (АРУ) широко применяются в радиоприемных устройствах различного назначения, они предназначены для стабилизации уровня сигнала на выходе усилителей при большом динамическом диапазоне изменения входного сигнала, достигающим, например, в радиолокационных приемниках 60 – 100 дБ. При таком диапазоне изменения входного сигнала и отсутствии системы АРУ нарушается нормальная работа приемных устройств, что проявляется в перегрузке последующих каскадов приемника. В системах автоматического сопровождения цели РЛС перегрузка каскадов приемника приводит к искажению амплитудной модуляции, к снижению коэффициентов усиления, вплоть до срыва сопровождения. В системах стабилизации частоты большой динамический диапазон изменения сигнала вызывает изменение крутизны дискриминационной характеристики, что резко снижает качество работы системы.

Системы АРУ делятся на три основных типа [11]: 1) с обратной связью (с обратным действием); 2) без обратной связи (прямого действия); 3) комбинированные. Существуют одно- и многопетлевые системы АРУ с непрерывной и цифровой регулировкой.

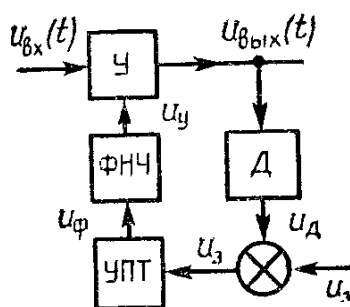


Рис. 1.10. Функциональная схема АРУ

Функциональная схема системы АРУ с обратной связью показана на рис. 1.10. Входное напряжение $u_{вх}(t)$ поступает на усилитель (У) с регулируемым коэффициентом усиления.

Выходное напряжение этого усилителя детектируется, после чего суммируется с напряжением задержки $u_з$. Суммарное напряжение усиливается усилителем постоянного тока (УПТ) и подается на фильтр нижних частот (ФНЧ). Напряжение с ФНЧ $u_у$ используется для регулировки коэффициента усиления входного сигнала.

Зависимость коэффициента усиления усилителя входного сигнала от управляющего напряжения называют *регулирующей характеристикой*. В общем случае эта характеристика нелинейная, однако приближенно она может быть заменена линейной зависимостью вида

$$k(u_y) = k_0 - \alpha u_y, \quad (1.19)$$

где k_0 – коэффициент усиления при управляющем напряжении, равном нулю; α – крутизна регулирующей характеристики.

Изменение коэффициента усиления может быть достигнуто различными способами: путем включения управляемого аттенюатора, изменением крутизны характеристик электронных приборов и др. [9].

В качестве примера на рис. 1.11 показана схема усилителя с регулируемым коэффициентом усиления, в котором управляющее напряжение подается на базу транзистора VT. При увеличении управляющего напряжения напряжение на базе повышается, в результате чего коэффициент усиления каскада уменьшается.

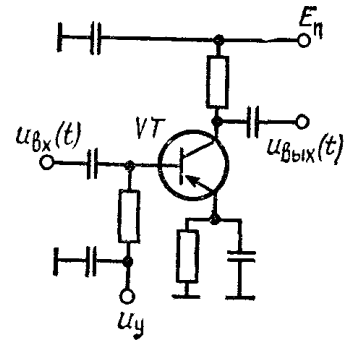


Рис. 1.11. Схема регулируемого каскада

Эффект стабилизации уровня выходного напряжения $u_{вых}(t)$ достигается за счет того, что с ростом уровня $u_{вх}(t)$ увеличивается и управляющее напряжение u_y , под действием которого в соответствии с выражением (1.19) уменьшается коэффициент усиления усилителя входного сигнала, что приводит к снижению уровня выходного сигнала.

Для того чтобы не снижать усиление при слабых входных сигналах и начать управление коэффициентом усиления усилителя только при достижении входным сигналом определенного уровня, в систему АРУ подают напряжение задержки u_3 . В результате напряжение управления появится только в том случае, когда напряжение с амплитудного детектора превысит напряжение задержки.

Фильтр нижних частот в цепи обратной связи системы АРУ предназначен для передачи управляющего напряжения с частотами изменения уровня выходного напряжения АРУ. При этом ФНЧ не должен пропускать колебания напряжения с частотами спектра полезной модуляции сигнала $u_{вх}(t)$, т.е. в управляющем сигнале не должно быть составляющих модуляции, в противном случае происходит демодуляция входного сигнала, ослабляющая выходной сигнал.

Непосредственно из схемы (см. рис. 1.10) следует, что напряжение на выходе УПТ

$$\begin{aligned} u_\phi &= (u_{вых} k_d - u_3), & \text{если } u_{вых} k_d \geq u_3; \\ u_\phi &= 0, & \text{если } u_{вых} k_d < u_3, \end{aligned} \quad (1.20)$$

где k_d – коэффициент передачи детектора.

Управляющее напряжение на выходе ФНЧ находят из следующего дифференциального уравнения:

$$T \dot{u}_y + u_y = u_\phi, \quad (1.21)$$

где T – постоянная времени фильтра.

Напряжение на выходе системы АРУ

$$u_{\text{вых}} = k(u_y) u_{\text{вх}} = (k_0 - \alpha u_y) u_{\text{вх}}. \quad (1.22)$$

Уравнениям (1.20) – (1.22) соответствует структурная схема системы АРУ, изображенная на рис. 1.12. В этой схеме нелинейное звено описывается зависимостью

$$u_d - u_3 = \begin{cases} u_d - u_3 & \text{при } u_d \geq u_3; \\ 0 & \text{при } u_d < u_3. \end{cases} \quad (1.23)$$

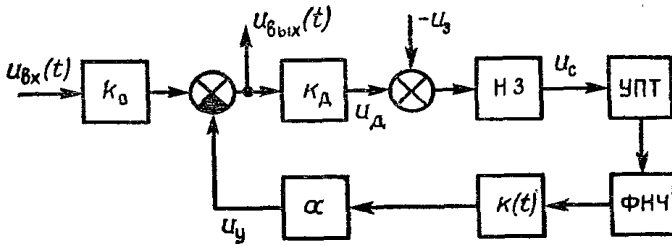


Рис. 1.12. Структурная схема системы АРУ

Отличительной особенностью системы АРУ по сравнению с системами РА, рассмотренными в предыдущих параграфах, является зависимость коэффициента передачи системы от времени, что происходит из-за наличия в системе (см. рис. 1.12) звена с коэффициентом передачи $k(t) = f(u_{\text{вх}}(t))$.

Кроме того, из-за нелинейного звена с характеристикой (1.23) система АРУ является нелинейной. Анализ нелинейных систем с переменными параметрами является сложной задачей.

В установившемся режиме при постоянном уровне напряжения на входе системы АРУ из уравнений (1.23) – (1.26) при предположении, что коэффициент передачи $k(t) = 1$ и с учетом k_{ynm} можно получить следующие соотношения:

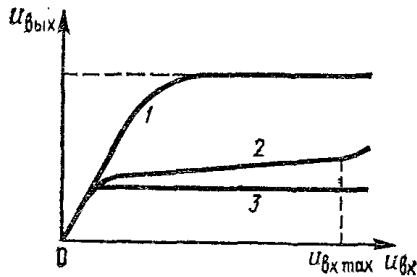


Рис. 1.13. Регулировочные характеристики системы АРУ

$$u_{\text{вых}} = k_0 u_{\text{вх}} \quad \text{при } u_d < u_3;$$

$$u_{\text{вых}} = \frac{k_0 + \alpha k_{\text{ynm}} u_3}{1 + \alpha k_{\text{ynm}} k_0} u_{\text{вх}} \quad \text{при } u_d \geq u_3, \quad (1.24)$$

где k_{ynm} – коэффициент усиления УПТ.

Уравнение (1.24) определяет регулировочную характеристику системы АРУ с обратной связью – кривая 2 на рис. 1.13, на этом же рисунке изображена характеристика без АРУ (кривая 1) и регулировочная характеристика с идеальной системой АРУ (кривая 3).

1.5. Система измерения дальности РЛС

Дальномер РЛС предназначен для измерения дальности до выбранной цели, информация о которой используется в счетно-решающих устройствах систем наведения летательных аппаратов, навигационных комплексах и др.

Принцип работы дальномера базируется на измерении сдвига по времени между зондирующими импульсами, следующими через интервал времени T , и

импульсами, отраженными от цели. Отраженные от цели импульсы искажены шумами, поэтому непосредственное измерение дальности по времени задержки связано с большими ошибками. Для повышения точности измерения в дальномере формируются следящие импульсы, временное положение которых относительно зондирующих импульсов оказывается пропорциональным дальности до цели и незначительно зависит от шумов. На рис. 1.14 приведена упрощенная функциональная схема дальномера импульсной РЛС [19].

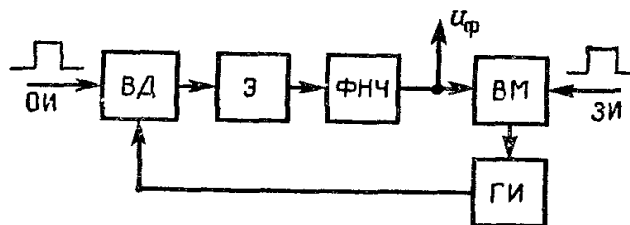


Рис. 1.14. Функциональная схема дальномера импульсной РЛС

В режиме измерения дальности отраженный от цели импульс (ОИ) через приемник поступает на временной дискриминатор (ВД), на второй вход которого с генератора импульсов (ГИ) подаются на два следующих друг за другом следящих импульса. Во временном дискриминаторе вырабатывается напряжение, пропорциональное рассогласованию временного положения отраженного импульса относительно оси симметрии следящих импульсов

$$u = k_{\partial}(t_R - t_u) = k_{\partial}\Delta t, \quad (1.25)$$

где Δt – рассогласование по времени между отраженными и следящими импульсами; $t_R = 2R/c$ – время задержки отраженного импульса относительно зондирующего; t_u – время задержки следящих импульсов относительно зондирующих; R – измеряемая дальность; c – скорость света.

На рис. 1.15 приведены эпюры напряжения, поясняющие принцип работы временного дискриминатора.

Если временное рассогласование Δt не равно нулю, то во временном дискриминаторе вырабатываются два импульса, длительности которых

$$\tau_1 = \tau/2 - \Delta t;$$

$$\tau_2 = \tau/2 + \Delta t, \quad (1.26)$$

где τ – длительность отраженного импульса.

Импульсы длительностями τ_1 и τ_2 детектируются, разность полученных напряжений является выходным напряжением временного дискриминатора u_{∂} . На каждом периоде измерения дальности напряжение с выхода временного дискриминатора фиксируется экстраполятором (Э) и сбрасывается до нуля перед приходом следую-

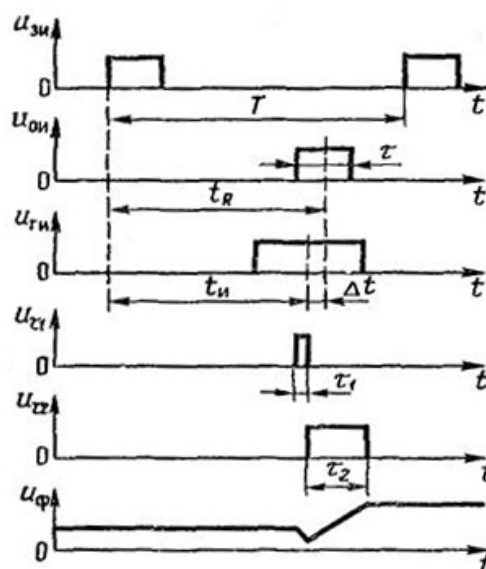


Рис. 1.15. Эпюры напряжений временного дискриминатора

щей пары следящих импульсов. Напряжение с Э через ФНЧ подается на временной модулятор (ВМ), который зондирующим импульсом (ЗИ), задержанным на время, пропорциональное сигналу с ФНЧ, запускает ГИ, формирующий два следящих импульса. Таким образом, образуется замкнутый контур, в котором рассогласование сводится к минимальному значению, определяющему ошибку измерения дальности. Для повышения точности работы в ФНЧ дальномера включают интегратор, при этом рассогласование Δt при измерении постоянного значения дальности сводится к нулю, а напряжение на выходе ФНЧ в установившемся режиме пропорционально измеряемой дальности:

$$u_{\phi} = \frac{1}{k_{\text{вм}}} t_R = \frac{1}{k_{\text{вм}}} \frac{2R}{c}, \quad (1.27)$$

где $k_{\text{вм}}$ – коэффициент передачи временного модулятора.

Для повышения точности измерения дальности в современных РЛС в ФНЧ дальномера включают два интегратора, в такой системе ошибка измерения дальности равна нулю при изменении расстояния до цели по линейному закону.

Описанные процессы поясняют работу дальномера в импульсной РЛС, здесь информация об измеряемой дальности может быть получена только в дискретные моменты времени, отстоящие на период повторения зондирующих импульсов, поэтому рассмотренный дальномер относится к классу импульсных систем РА.

На рис. 1.16 показана структурная схема дальномера, в которой ключ характеризует импульсный характер сигнала, а звено с характеристикой $F(e)$ соответствует временному дискриминатору (вид этой характеристики зависит от отношения сигнал/шум и длительности следящих импульсов); $n(t)$ – случайная помеха, ухудшающая качество работы дальномера.

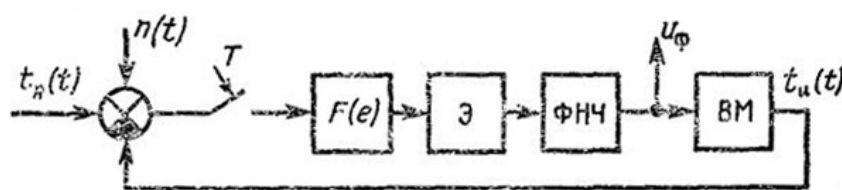


Рис. 1.16. Структурная схема дальномера

1.6. Обобщенная структурная схема системы РА

Сравнивая различные системы РА, рассмотренные в пп. 1.1 – 1.5, нетрудно установить, что их структурные схемы во многом повторяют одна другую. Аналогия структурных схем систем РА позволяет составить их обобщенную структурную схему (рис. 1.17). На этой схеме приняты следующие обозначения: $x(t)$ – входной сигнал или управляющее воздействие (угол поворота линии визирова-

ния в системе автоматического сопровождения цели РЛС, частота эталонного генератора в системе фазовой подстройки частоты и т.п.); $y(t)$ – выходной сигнал, или регулируемый параметр (угол поворота антенны РЛС, частота перестраиваемого генератора); $e(t)$ – сигнал рассогласования, или сигнал ошибки.

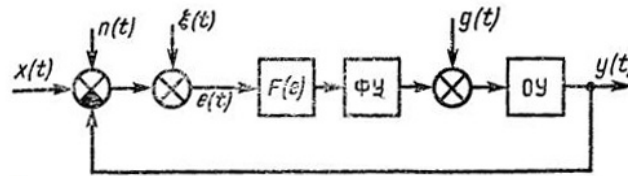


Рис. 1.17. Обобщенная структурная схема системы РА

Работа систем РА осуществляется в условиях действия различных помех. На обобщенной структурной схеме системы влияние помех учитывается введением возмущающего воздействия $n(t)$, поступающего на вход системы. Это воздействие может состоять из нескольких составляющих, например, в системе автоматического сопровождения цели РЛС оно состоит из флуктуации отраженного от цели сигнала, воздействия, возникающего из-за перемещения центра отражения радиолокационного сигнала по поверхности цели, шумов первых каскадов электронных приборов приемника и т.п. Возмущающее воздействие $g(t)$ поступает на объект управления системы РА, это воздействие обусловлено в основном изменением условий окружающей среды (температуры, давления, влажности и т.п.) и флуктуациями источников питания.

Известно, что одним из основных недостатков непрерывных систем РА является дрейф нуля их регулировочных (амплитудных) характеристик. В обобщенной структурной схеме системы РА влияние дрейфа нуля учитывается сигналом сдвига $\xi(t)$, например, в системах автоматического сопровождения цели РЛС сигнал $\xi(t)$ учитывает дрейф нуля пеленгационной характеристики.

Функциональные устройства (ФУ) систем РА, указанные в обобщенной структурной схеме, включают устройства измерения сигнала ошибки, исполнительные и корректирующие устройства, предназначенные для создания необходимых динамических характеристик (например, к этой части системы относится ФНЧ в системе фазовой подстройки частоты (см. рис. 1.8). На рис. 1.20 ОУ – объект управления (антенна в РЛС, перестраиваемый генератор в системе фазовой подстройки частоты), $F(e)$ – дискриминатор, который, как отмечалось, имеет нелинейную характеристику. При малых сигналах ошибки амплитудная характеристика дискриминатора может быть принята линейной:

$$u_n = \kappa_d e. \quad (1.28)$$

Форма дискриминационной характеристики зависит от амплитуды сигнала ошибки, что приводит к нежелательным изменениям динамических характеристик систем РА. Для исключения такой зависимости проводится нормировка сигнала по амплитуде, что достигается путем введения АРУ или ограничителя.

Иногда в радиотехнических устройствах встречаются системы, структурные схемы которых отличаются от рассмотренной обобщенной схемы, напри-

мер, системы автоматического сопровождения бортовых РЛС выполняются как комплексные системы, в которых для повышения точности имеется дополнительный канал. Однако в этих случаях введенная обобщенная структурная схема РА является основной для анализа ее качественных и количественных характеристик.

1.7. Классификация систем РА

Системы РА классифицируются по различным признакам. Например, по принципу построения, как отмечалось, различают *системы с управлением по отклонению и возмущению*.

По виду входного сигнала системы РА делятся на *системы стабилизации*, где входной сигнал является постоянной величиной (например, системы автоматической стабилизации частоты и напряжения); *системы программного управления*, в которых входной сигнал является известной функцией (например, система управления антенной РЛС в режиме поиска); *следающие системы*, в которых входной сигнал является случайным (например, система автоматического сопровождения цели РЛС).

В зависимости от вида уравнений, описывающих процессы в системах, различают *непрерывные* и *дискретные*, *линейные* и *нелинейные*, *стационарные* (с постоянными параметрами) и *нестационарные* (с переменными параметрами) системы РА. Одна и та же система может характеризоваться несколькими признаками, например, система автоматической регулировки усиления – это нестационарная нелинейная система.

В современных радиотехнических устройствах важную группу составляют *цифровые системы*, в состав которых входят вычислительные машины или элементы этих машин. С точки зрения математического описания цифровые системы РА являются дискретными нелинейными.

Для улучшения качества работы систем РА в управляющем устройстве могут не только вырабатываться сигналы управления, но и изменяться алгоритмы управления и перестраиваться параметры системы (коэффициенты усиления звеньев, постоянные времени корректирующих устройств), в результате чего достигается высокое качество работы системы. Подобные системы РА называются *адаптивными*.

Вопросы к теме 1

1. Какой принцип управления реализуется в системах РА с обратными связями? Поясните этот принцип на примере систем АПЧ и ФАПЧ.
2. Что такое регулятор (управляющее устройство) системы РА?
3. Каким образом измеряется сигнал рассогласования в системе автоматического сопровождения цели РЛС?
4. Каким образом система РА должна реагировать на сигнал и возмущающее воздействие?
5. Дайте классификацию систем РА по виду входного сигнала.

Тема 2. ЭЛЕМЕНТЫ СИСТЕМ РАДИОАВТОМАТИКИ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

2.1. Линеаризация уравнений элементов систем РА

Исходными уравнениями для анализа систем РА являются дифференциальные уравнения ее элементов, которые составляются на основании принципов их работы. В большинстве случаев эти уравнения оказываются нелинейными, что усложняет анализ систем. Поэтому всегда, когда это возможно, стремятся провести линеаризацию характеристик нелинейных устройств. Линеаризацию производят по формуле Тейлора, в соответствии с которой разложение нелинейной функции двух аргументов имеет вид

$$y = F(x, z) = F(x_0, z_0) + \left. \frac{dF}{dx} \right|_{\substack{x=x_0 \\ z=z_0}} \Delta x + \left. \frac{dF}{dz} \right|_{\substack{x=x_0 \\ z=z_0}} \Delta z + \left. \frac{d^2 F}{dx^2} \right|_{\substack{x=x_0 \\ z=z_0}} \Delta x^2 + \left. \frac{d^2 F}{dz^2} \right|_{\substack{x=x_0 \\ z=z_0}} \Delta z^2 + R_{n+1}, \quad (2.1)$$

где x_0, z_0 – постоянные установившихся значений, входных переменных x и z ; $\Delta x, \Delta z$ – малые отклонения от установившихся значений x и z ; R_{n+1} – остаточный член.

При работе устройств в составе системы РА отклонения Δx и Δz малы, поэтому в выражении (2.1) можно ограничиться только первыми порядками отклонений этих переменных. В этом случае из (3.1) следует, что приращение выходного сигнала

$$\Delta y = y - F(x_0, z_0) = k_x \Delta x + k_z \Delta z, \quad (2.2)$$

где $k_x = \left. \frac{dF}{dx} \right|_{\substack{x=x_0 \\ z=z_0}}$; $k_z = \left. \frac{dF}{dz} \right|_{\substack{x=x_0 \\ z=z_0}}$ – коэффициенты передачи.

Выражение (2.2) и есть линеаризованное уравнение элемента РА. В общем случае это уравнение содержит не только отклонения переменных, но и их производные, т.е. в результате линеаризации получается дифференциальное уравнение, преобразование Лапласа которого определяет передаточную функцию линеаризованного элемента системы РА.

Далее рассматривают уравнения основных устройств системы РА и определяют их передаточные функции.

2.2. Фазовые детекторы

Фазовым детектором (ФД) называют устройство (рис. 2.1, а), предназначенное для преобразования разности фаз двух синусоидальных колебаний одинаковой частоты в напряжение.

Основной характеристикой ФД является зависимость выходного напряжения от разности фаз: $u_{\phi\delta} = F(\phi)$, где ϕ – разность фаз напряжений. Функция F периодическая, так что $u_{\phi\delta} = F(\phi + k2\pi)$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

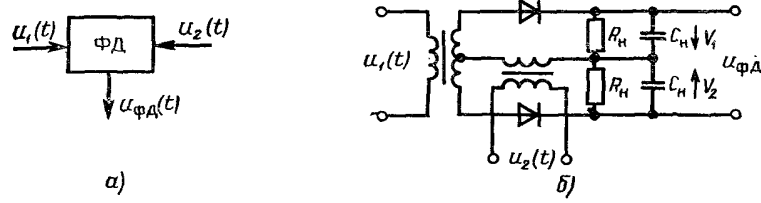


Рис. 2.1. Функциональная (а) и принципиальная (б) схемы фазового детектора

В системах РА применяются ФД двух типов – *балансные (векторомерные)* и *параметрические*. Наиболее часто используют балансные ФД, которые эффективно работают в областях как самых низких, так и высоких частот. Схема балансного ФД показана на рис. 2.1, б; выходное напряжение образуется из векторной суммы и разности двух напряжений – опорного $u_1(t) = U_1 \sin \omega t$ и сигнала

$$u_2(t) = U_2 \sin(\omega t + \varphi). \quad (2.3)$$

Сумма и разность этих напряжений определяются выражениями

$$u_1(t) + u_2(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1);$$

$$u_1(t) - u_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2),$$

где

$$A_1 = [U_1^2 + 2U_1U_2 \cos \varphi + U_2^2]^{1/2};$$

$$A_2 = [U_1^2 - 2U_1U_2 \cos \varphi + U_2^2]^{1/2}.$$

Обычно $U_1 > U_2$,

тогда

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{U_2 \sin \varphi}{U_1 + U_2 \cos \varphi}; \quad \varphi_2 = -\operatorname{arctg} \frac{U_2 \sin \varphi}{U_1 - U_2 \cos \varphi}.$$

В статическом режиме напряжение на выходе ФД, как это следует из рис. 2.1, б, определяется выражением

$$u_{\varphi\delta} = V_1 - V_2 = k_\delta(A_1 - A_2) \approx 2 k_\delta \frac{U_1 U_2 \cos \varphi}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2}},$$

где k_δ – коэффициент детектирования.

При $U_1 > U_2$ получаем:

$$u_{\varphi\delta} = 2k_\delta U_2 \cos \varphi = k \cos \varphi. \quad (2.4)$$

Выражение (2.4) приближенное, оно тем более справедливо, чем больше напряжение U_1 напряжения U_2 , так, при $U_1 = 5U_2$ максимальная ошибка вычисления $u_{\varphi\delta}$ не превышает двух процентов.

Если напряжение (2.3) сдвинуто по фазе относительно опорного на $\pi/2$, то из (2.4) следует, что $u_{\varphi\delta} = -2k_\delta \sin \varphi$.

Проведем линеаризацию нелинейного уравнения (2.4).

В соответствии с (2.2)

$$u_{\varphi\delta} = k \cos \varphi_0 + \frac{d(k \cos \varphi)}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} \Delta\varphi = k \cos \varphi_0 - k \Delta\varphi \sin \varphi_0;$$

$$u_{\phi\delta} = k(\cos \phi_0 - \Delta\phi \sin\phi_0),$$

где ϕ_0 – значение фазы в установившемся режиме.

При малых отклонениях фазы от ϕ_0 приращение напряжения на выходе ФД

$$\Delta u_{\phi\delta} = u_{\phi\delta} - k \cos \phi_0 = k_{\phi\delta} \Delta\phi,$$

где $k_{\phi\delta} = -k \sin\phi_0$ – коэффициент передачи ФД.

Из последнего выражения следует, что передаточная функция ФД $W_{\phi\delta}(p) = k_{\phi\delta}$. Если учесть инерционность однополупериодных выпрямителей, то передаточная функция ФД

$$W_{\phi\delta}(p) = \frac{k_{\phi\delta}}{1 + pT}, \quad (2.5)$$

где $T = 4C_u/(R_n + R_i)$ – постоянная времени ФД; R_i – внутреннее сопротивление диода.

В параметрических ФД зависимость выходного напряжения от сдвига фаз аналогична выражению (2.4).

Найдем статистические характеристики ФД, когда на его вход воздействует помеха со случайной амплитудой и фазой. В этом случае

$$u_2(t) = u_n(t) \sin(\omega t + \phi_n).$$

Автокорреляционная функция сигнала на выходе ФД имеет вид [15]

$$R_{\phi\delta}(\tau) = 4 k_{\phi\delta}^2 R_n(\tau) \cos \omega_0 \tau,$$

где $R_n(\tau)$ – автокорреляционная функция помехи на входе ФД.

Преобразование Фурье последнего выражения позволяет получить спектральную плотность шума на выходе ФД:

$$S_{\phi\delta}(\omega) = 4 k_{\phi\delta}^2 [S_n(\omega_0 + \omega) + S_n(\omega_0 - \omega)].$$

Это выражение определяет известное свойство ФД (и не только ФД): перенос спектра выходных колебаний на нулевые частоты (рис. 2.2).

Спектральная плотность на частоте, равной нулю,

$$S_{\phi\delta}(0) = 8 k_{\phi\delta}^2 S_n(\omega_0).$$

Из последних выражений следует, что статистические характеристики сигнала на выходе ФД не зависят от разности фаз сигнала и опорного напряжения.

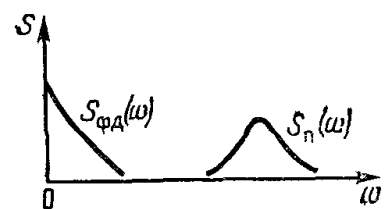


Рис. 2.2. К пояснению переноса спектра колебаний

2.3. Частотные дискриминаторы

Дискриминаторы предназначены для измерения сигнала рассогласования и преобразования его в постоянное или переменное напряжение. Различают частотные, угловые и временные дискриминаторы.

Частотные дискриминаторы (ЧД) – это устройства, выходные напряжения которых зависят от отклонения частоты входных сигналов от переходной частоты: $u_{чд} = F(\omega - \omega_0)$, где ω_0 – переходная частота.

По способу задания переходной частоты ЧД подразделяют на две группы. В дискриминаторах первой группы переходная частота определяется настройкой эталонного фильтра (колебательного контура). В ЧД второй группы переходная частота равна частоте колебаний напряжения с эталонного генератора.

На рис. 2.3 изображена схема наиболее распространенного ЧД первой группы с фазовым детектором. В таком ЧД входной сигнал разделяется на две составляющие, u_1 и u_2 , сдвиг фаз между которыми при точной настройке контура на переходную частоту равен $\pi/2$. При отклонении частоты входного сигнала от переходной сдвиг фаз изменяется в соответствии с фазовой характеристикой резонансного контура.

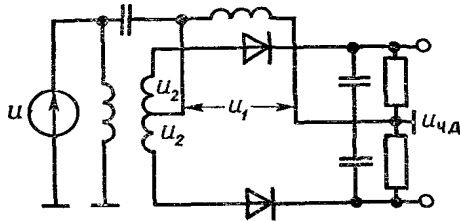


Рис. 2.3. Схема частотного дискриминатора с фазовым детектором

Одновременно с этим уменьшается амплитуда напряжения $U_2(t)$, в результате чего изменяется напряжение на выходе ЧД.

Схеме ЧД, показанной на рис. 2.3, соответствует структурная схема ЧД, изображенная на рис. 2.4, где ФВ – фазовращатель, сдвигающий фазу сигнала на $\pi/2$; Ф – резонансный фильтр.

Непосредственно из схемы (см. рис. 2.4) следует, что на ФД подаются напряжения

$$u_1(t) = u(t) = U_c \sin [(\omega_0 + \Delta\omega)t + \varphi];$$

$$u_2(t) = U_c |jW_\phi(j\Delta\omega)| [\sin (\omega_0 + \Delta\omega)t + \varphi + \frac{\pi}{2} + \varphi_\phi(\Delta\omega)],$$

где $\Delta\omega$ – отклонение частоты напряжения от переходной частоты; $\varphi_\phi(\Delta\omega)$ – фазовый сдвиг, создаваемый фильтром; $|jW_\phi(j\Delta\omega)|$ – амплитудно-частотная характеристика фильтра.

В соответствии с выражением (2.4) напряжение на выходе ЧД

$$u_{чд} = 2k_d U_c |jW_\phi(j\Delta\omega)| \sin \varphi_\phi(\Delta\omega) = 2k_d U_c \text{Im } W_\phi(j\Delta\omega), \quad (2.6)$$

где $\text{Im } W_\phi(j\Delta\omega)$ – мнимая частотная характеристика фильтра.

Выражение (2.6) определяет *дискриминационную характеристику* ЧД, обычно используется нормированная характеристика

$$F(\varphi) = u_{чд} / u_c = 2k_d \text{Im } W_\phi(j\Delta\omega).$$

На рис. 2.5 показан вид дискриминационной характеристики ЧД, из которой видно, что при малых значениях расстройки характеристику можно считать линейной и представить в виде

$$F(\varphi) = k_{чд} \Delta\omega,$$

где $k_{чд}$ – коэффициент передачи частотного дискриминатора.

Из этого выражения следует, что передаточная функция ЧД

$$W_{чд}(p) = k_{чд}.$$

Выражение для передаточной функции справедливо в том случае, когда полоса пропускания ЧД намного шире спектра его входного сигнала, в противном случае необходимо учитывать инерционность ЧД, которая определяется постоянной времени детектора.

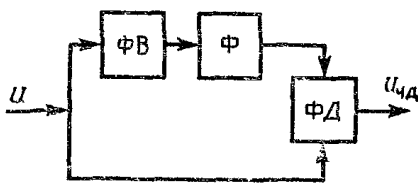


Рис. 2.4. Структурная схема частотного дискриминатора

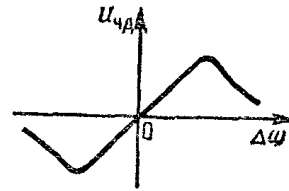


Рис. 2.5. Дискриминационная характеристика частотного дискриминатора

В системах РА используются и ЧД с расстроенными контурами, характеристики которых близки к характеристикам рассмотренного ЧД с фазовращателем.

2.4. Угловые дискриминаторы

Угловые дискриминаторы (пеленгаторы) используются в системах автоматического сопровождения по направлению для измерения рассогласования между продольной осью антенны РЛС и направлением на движущуюся цель и преобразования этого рассогласования в электрическое напряжение. Различают два вида угловых дискриминаторов – с *коническим сканированием диаграммы направленности* (с последовательным сравнением сигналов) и *моноимпульсные* (с мгновенным сравнением сигналов).

В дискриминаторе с коническим сравнением антенной РЛС формируется одна сканирующая (вращающаяся) диаграмма направленности, максимум которой смещен от продольной оси антенны (рис. 2.6, а). Если направление на цель совпадает с продольной осью антенны OX_A , то цель облучается импульсами одной и той же мощности, поэтому амплитуда отраженных от нее импульсов будет постоянной. Если направление на цель не совпадает с продольной осью антенны, то в моменты времени, разделенные интервалом времени, равным половине периода сканирования, отраженные от цели импульсы будут иметь различные амплитуды, т.е. будет осуществляться модуляция отраженного сигнала по амплитуде с частотой сканирования.

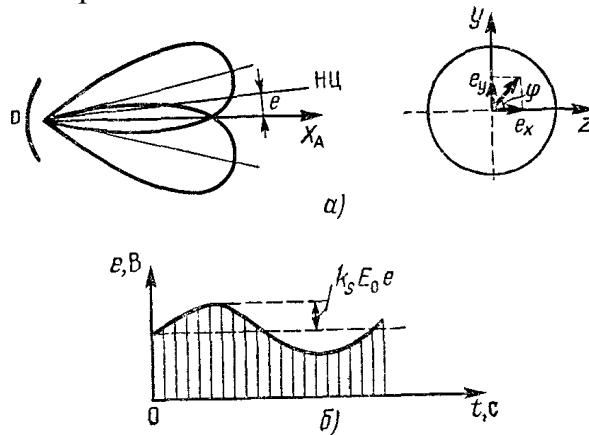


Рис. 2.6. К пояснению принципа конического сканирования:
а – определение составляющих ошибок; б – выделение сигнала ошибок

При небольших отклонениях направления на цель от продольной оси антенны модуляция будет линейной:

$$E(t) = E_0[1 - k_S e \cos(\omega_{ск}t + \varphi)],$$

где $E(t)$ – амплитуда импульса, отраженного от цели и принятого в момент времени t ; E_0 – средняя амплитуда импульсов за период сканирования; k_S – постоянный коэффициент; $\omega_{ск}$ – частота сканирования; e – угловое рассогласование.

Значение e характеризует отклонение направления на цель, φ – знак этого отклонения.

Если $t = 0$ при $\varphi = 0$ (см. рис. 2.6, б), то можно записать, что

$$E(t) = E_0[1 + k_S e \cos\varphi \cos\omega_{ск}t + k_S e \sin\varphi \sin\omega_{ск}t].$$

Сигнал $E(t)$ подается на два фазовых детектора, опорными напряжениями являются два синусоидальных напряжения, сдвинутых относительно друг друга на 90° . Опорные напряжения снимаются с генератора, кинематически связанного с устройством вращения диаграммы направленности так, что частота вращения диаграммы направленности и генератора опорных напряжений одна и та же.

На выходе одного из фазовых детекторов возникает напряжение

$$u_{\varphi\delta 1} = k_{\varphi\delta} k_S e \cos\varphi = k_{y\delta} e_x,$$

на выходе другого –

$$u_{\varphi\delta} = k_{\varphi\delta} k_S e \sin\varphi = k_{y\delta} e_y,$$

где $k_{y\delta}$ – коэффициент передачи углового дискриминатора.

Зависимость напряжения на выходе фазового детектора от сигнала рассогласования называется *пеленгационной характеристикой дискриминатора* (см. рис. 1.10, б).

Передаточная функция углового дискриминатора с учетом инерционности фазового детектора

$$W_{y\delta}(p) = \frac{k_{y\delta}}{1 + pT_{\varphi\delta}}. \quad (2.7)$$

В угловом дискриминаторе с коническим сканированием прием отраженных импульсов происходит последовательно через промежутки времени, равные периоду сканирования. За этот промежуток времени сигнал из-за отражающих свойств цели изменяется (флуктуирует), что приводит к снижению точности измерения угла рассогласования.

В моноимпульсных угловых дискриминаторах прием отраженных от цели сигналов осуществляется одновременно четырьмя антеннами, две из которых предназначены для пеленгации цели в одной плоскости, а две другие – в другой. Так как в каждой плоскости используются по два независимых канала, то амплитудные флуктуации отраженного сигнала не влияют на точность измерения угла рассогласования.

В зависимости от способа обработки принятых сигналов моноимпульсные дискриминаторы подразделяются на фазовые, амплитудные и суммарно-разностные. Ограничимся рассмотрением фазового суммарно-разностного дис-

криминатора. В таком дискриминаторе направление на цель определяется путем сравнения фаз сигналов, принимаемых одновременно двумя антеннами. На рис. 2.7 показано, как осуществляется такое сравнение.

Непосредственно из этого рисунка следует, что

$$R_1 = R + \frac{d}{2} \sin e; \quad R_2 = R - \frac{d}{2} \sin e,$$

где R_1, R_2 – расстояния от антенн до цели; d – расстояние между центрами антенн (т.н. база).

Разность расстояний $\Delta R = R_1 - R_2 = d \sin e$ позволяет найти разность фаз:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta R = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin e, \quad (2.8)$$

где λ – длина волны.

Согласно (2.8) угловое рассогласование определяется через разность фаз, принятых антеннами сигналов:

$$e = \arcsin \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda \Delta\varphi}{d}. \quad (2.9)$$

Формула (2.9) неоднозначна, однако это не является серьезным недостатком, если расстояние между центрами антенн выбрать не больше диаметра антенны.

На рис. 2.8 показана функциональная схема фазового суммарно-разностного моноимпульсного дискриминатора. Сигналы, принятые антеннами, подаются на волновой мост (ВМ), с одного из выходов которого снимается суммарный сигнал, с другого – разностный. Эти сигналы поступают на преобразователи частоты, состоящие из смесителей $СМ_С$, $СМ_Р$ и гетеродина Γ . На выходах смесителей образуются суммарный и разностный сигналы промежуточной частоты, которые усиливаются усилителями промежуточной частоты УПЧ. Для стабилизации уровней сигналов суммарного и разностного каналов в дискриминатор введено устройство автоматической регулировки усиления АРУ. Разностное напряжение поступает на фазовый детектор ФД, опорным сигналом которого является суммарное напряжение. Для обеспечения нормальной работы ФД в разностный канал включен фазовращатель ФВ.

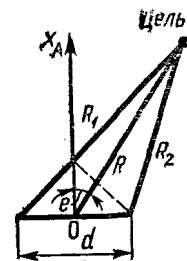


Рис. 2.7. К пояснению фазового метода пеленгации

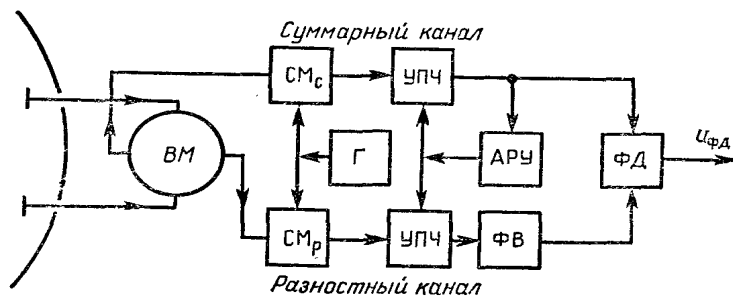


Рис. 2.8. Функциональная схема суммарно-разностного фазового дискриминатора

Напряжение на выходе ФД

$$u_{\phi\partial} = k_{\phi\partial} \frac{k_p}{k_c} \frac{\sin \Delta\varphi}{1 + \cos \Delta\varphi} = k_{\phi\partial} \frac{k_p}{k_c} \operatorname{tg} \frac{\Delta\varphi}{2}, \quad (2.10)$$

где k_p, k_c – коэффициенты усиления разностного и суммарного каналов.

С учетом выражения (2.8) по (2.10) получим:

$$u_{\phi\partial}(e) = k_{\phi\partial} \frac{k_p}{k_c} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin e \right). \quad (2.11)$$

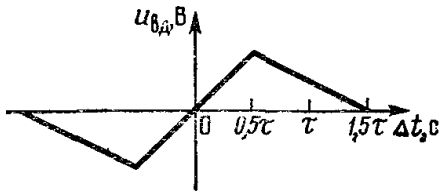


Рис. 2.9. Дискриминационная характеристика временного дискриминатора

Временные дискриминаторы предназначены для измерения временных рассогласований между отраженными от цели импульсами и зондирующими импульсами и преобразования рассогласования в пропорциональное значение напряжения. Принцип работы временного дискриминатора рассмотрен в п. 1.5. Здесь проана-

лизируем связь выходного сигнала дискриминатора с входным сигналом, которым является временное рассогласование Δt (см. рис. 1.18).

Временное рассогласование равно разности времени задержки отраженного от цели импульса t_R и времени задержки следящих импульсов t_u .

Во временном дискриминаторе вырабатываются два импульса, длительности которых определяются выражениями (1.26). После сглаживания этих импульсов образуется усредненная разность напряжений

$$u_{\phi\partial} = U_0 (\tau_1 - \tau_2) / T, \quad (2.12)$$

где U_0 – амплитуда импульсов.

Формула (2.12) справедлива при условии, что $|\Delta t| \leq \tau/2$.

При $|\Delta t| > \tau/2$ напряжение $u_{\phi\partial}$ уменьшается и при $\Delta t = 1,5\tau$ становится равным нулю.

На рис. 2.9 показана дискриминационная характеристика временного дискриминатора. Система работает в условиях действия помех, поэтому при анализе их влияния на качественные характеристики системы необходимо учитывать нелинейную характеристику дискриминатора.

2.5. Исполнительные устройства

В системах РА используются различные исполнительные устройства. В системах, предназначенных для регулирования электрических сигналов, например, частоты напряжения в системах АПЧ, исполнительными устройствами являются электронные приборы. В системах РА, используемых для управления механическими устройствами, например, приводами антенн РЛС, в качестве исполнительных устройств применяются электрические двигатели постоянного и переменного тока, электромагнитные порошковые муфты и другие устройства.

На рис. 2.10 показана схема двигателя, работающего на некоторую нагрузку (Н).

Двигатель состоит из обмотки возбуждения ОВ, подключенной к источнику постоянного тока, и обмотки якоря Я, на которую подается управляющее напряжение с усилителя мощности.

Напряжение на обмотке якоря является входным сигналом двигателя, а угол поворота якоря – выходным сигналом. Зависимость частоты вращения якоря Ω двигателя от входного напряжения u называют *регулирующей характеристикой* (рис. 2.11).

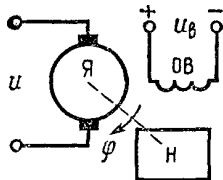


Рис. 2.10. Схема электрического двигателя постоянного тока

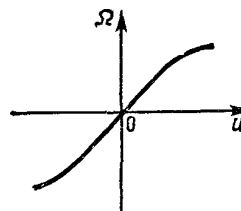


Рис. 2.11. Регулирующая характеристика электрического двигателя

Передаточная функция двигателя определяется следующим выражением:

$$W_{дв}(p) = \frac{\varphi(p)}{U(p)} = \frac{k_{дв}}{p(1 + pT_m)}, \quad (2.13)$$

где $\varphi(p)$ – преобразование Лапласа для угла отклонения якоря; $U(p)$ – преобразование Лапласа для отклонения напряжения на обмотке якоря от установившегося значения.

Коэффициент передачи $k_{дв}$ и электромеханическая постоянная времени T_m двигателя определяются экспериментальным путем. Для нахождения коэффициента передачи необходимо снять регулировочную характеристику, угол наклона касательной к которой, проведенной в точке, соответствующей установившемуся режиму работы двигателя, позволяет найти коэффициент передачи.

Для измерения электромеханической постоянной времени T_m необходимо снять осциллограмму изменения частоты вращения двигателя при скачкообразном изменении напряжения на обмотке якоря. Для этого нужно зарегистрировать напряжение с какого-либо датчика частоты вращения, механически соединенного с якорем двигателя. Время, в течение которого частота вращения двигателя изменится на значение, равное 0,63 от установившегося значения, равно электромеханической постоянной времени.

Передаточные функции электрических двигателей переменного тока описываются выражением (2.13). Исполнительные устройства с электромагнитными порошковыми муфтами рассмотрены в [10].

Вопросы к теме 2

1. Каким образом линеаризуются характеристики устройств систем РА?
2. Как экспериментальным путем определяются коэффициенты передачи устройств систем РА?
3. Зависят ли коэффициенты устройств систем РА от значения переменных в установившемся режиме?

РАЗДЕЛ 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ РАДИОАВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ЗВЕНЬЕВ

Тема 3. МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ И ЗВЕНЬЕВ

3.1. Общее уравнение систем РА

Процессы, происходящие в системах РА, описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, которые могут быть решены лишь в отдельных редких случаях. Однако уравнения большого числа систем могут быть линеаризованы, при этом процессы в системах описываются линейными дифференциальными уравнениями вида

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = b_m x^m(t) + \dots + b_0 x(t). \quad (3.1)$$

В стационарных системах РА коэффициенты дифференциального уравнения (3.1) являются постоянными величинами, в нестационарных – переменными. Методы анализа линейных систем РА основываются на принципе суперпозиции, который заключается в следующем. Если на систему поступает управляющее воздействие, которое можно представить в виде суммы простых воздействий

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \dots + x_k(t), \quad (3.2)$$

то выходной сигнал определяется как сумма реакций на каждое слагаемое (3.2).

Решение дифференциального уравнения (3.1) связано с вычислительными трудностями, а во многих случаях, например, в следящих системах не может быть осуществлено, так как неизвестно управляющее воздействие. По этим причинам исследование систем РА ведется косвенными методами, базирующимися на операционном методе Лапласа и преобразовании Фурье.

Для этой цели в теории систем РА используются следующие основные характеристики: *передаточная функция, переходная функция, импульсная переходная функция, комплексный коэффициент передачи или частотная характеристика.*

При решении дифференциальных уравнений типа (3.1) они приводятся при помощи преобразования Лапласа к обычным алгебраическим уравнениям, а затем, после решения в таком виде, обратным преобразованием получают окончательный результат.

3.2. Дифференциальные уравнения систем

Дифференциальные уравнения широко используются при исследовании систем РА. Проще и удобнее составлять дифференциальные уравнения по структурной схеме системы. Рассмотрим методику определения дифференциальных уравнений систем РА на конкретном примере.

► **Пример 3.1.** Найти дифференциальное уравнение системы АПЧ, структурная схема которой приведена на рис. 1.3.

Решение. Передаточные функции дискриминатора, фильтра нижних частот и гетеродина системы АПЧ описываются соответственно выражениями

$$W_{\text{чд}}(p) = \frac{K_{\text{чд}}}{1 + pT_{\text{чд}}}; \quad W_{\text{фнч}}(p) = \frac{K_{\text{фнч}}}{1 + pT_{\text{фнч}}}; \quad W_z(p) = \frac{K_z}{1 + pT_z}.$$

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p(p) = W_{\text{чд}}(p) W_{\text{фнч}}(p) W_z(p) = \frac{K}{(1 + pT_{\text{чд}})(1 + pT_{\text{фнч}})(1 + pT_z)},$$

где $K = K_{\text{чд}} K_{\text{фнч}} K_z$ – коэффициент усиления системы.

Передаточная функция замкнутой системы в соответствии с формулой (3.47) имеет вид

$$W_3(p) = \frac{K}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0},$$

где $a_3 = T_{\text{чд}} T_{\text{фнч}} T_z$; $a_2 = T_{\text{чд}} T_{\text{фнч}} + T_{\text{чд}} T_z + T_{\text{фнч}} T_z$; $a_1 = T_{\text{чд}} + T_{\text{фнч}} + T_z$; $a_0 = 1 + K$.

Из последнего выражения следует, что дифференциальное уравнение системы АПЧ определяется выражением

$$(a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0) \Delta \omega_c(t) = K \Delta \omega_c(t),$$

где $p = d/dt$ – символ дифференцирования.

Аналогичным образом можно найти дифференциальные уравнения системы АПЧ относительно ошибки, для чего нужно использовать передаточную функцию ошибки. ◀

3.3. Передаточная функция

Применив к дифференциальному уравнению (3.1) преобразование Лапласа, получим:

$$D(p)Y(p) = N(p)X(p) + M_n(p), \quad (3.3)$$

где $D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0$; $N(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0$; $Y(p)$ – преобразование Лапласа для выходного сигнала системы; $X(p)$ – преобразование Лапласа для входного сигнала; $M_n(p)$ – многочлен, отображающий начальные условия.

Введем следующие обозначения:

$$W(p) = N(p)/D(p); \quad W_n(p) = M_n(p)/D(p). \quad (3.4)$$

Тогда выражение (2.3) примет вид:

$$Y(p) = W(p)X(p) + W_n(p). \quad (3.5)$$

Это уравнение связывает изображение выходного сигнала системы с изображением входного сигнала и начальным состоянием системы.

Функция $W(p)$ характеризует динамические свойства системы РА, она не зависит от управляющего воздействия и полностью определяется параметрами системы a_i и b_i , эту функцию называют *передаточной*, а функцию $W_n(p)$ – *передаточной функцией относительно начального состояния системы РА*.

При нулевых начальных условиях *передаточная функция системы РА равна отношению изображения по Лапласу выходного сигнала к преобразованию Лапласа входного сигнала*. Передаточная функция является дробно-рациональной функцией относительно оператора преобразования Лапласа (p):

$$W(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}. \quad (3.6)$$

Степень полинома знаменателя передаточной функции определяет порядок системы РА. В реальных системах степень полинома числителя передаточной функции не превышает степени полинома знаменателя.

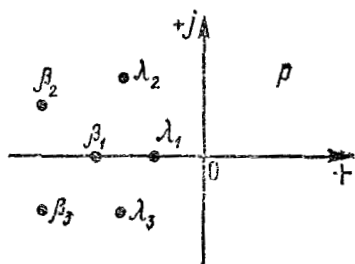


Рис. 3.1. Расположение нулей и полюсов передаточной функции на плоскости комплексного переменного

Это условие называют *физической реализуемостью системы РА*; оно означает, что нельзя создать систему РА, передаточная функция которой не удовлетворяла бы этому условию.

Корни полинома числителя передаточной функции β_i называют нулями, а корни полинома знаменателя λ_i – *полюсами системы РА*. Так как коэффициенты передаточной функции – действительные числа, то невещественные нули и полюсы могут быть только комплексно-сопряженными величинами. При анализе систем РА нули и полюсы (*особенности передаточной функции*) удобно изображать точками на плоскости комплексного переменного p (рис. 3.1).

Если передаточная функция системы не содержит особенностей в правой части плоскости p , то систему называют *минимально-фазовой*, в противном случае ее считают *неминимально-фазовой*.

3.4. Переходная и импульсная переходная функции

Рассмотрим случай, когда на систему РА действует единичный сигнал:

$$x(t) = 1(t), \quad (3.7)$$

где $1(t)$ – единичная функция, удовлетворяющая условию

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Преобразование Лапласа для выходного сигнала системы в соответствии с выражением (3.5) при нулевых начальных условиях имеет вид:

$$Y(p) = W(p)/p. \quad (3.8)$$

(Изображение по Лапласу функции $1(t)$: $1(t) = L[1(t)] = \frac{1}{p}$, и если входной сигнал – единичная функция, то имеем (3.8).

Переходный процесс в системе РА, вызванный входным сигналом в виде единичной функции, называют *переходной функцией*:

$$h(t) = L^{-1} [W(p)/p], \quad (3.9)$$

где $1/p$ – преобразование Лапласа для единичной функции. Здесь знак L^{-1} означает обратное преобразование Лапласа.

Переходная функция вычисляется по формуле обращения:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{W(p)}{p} e^{pt} dp = \sum_{i=0}^n \operatorname{Res} \frac{W(p)}{p} e^{pt} \Big|_{p=\lambda_i}, \quad (3.10)$$

где λ_i – полюсы подынтегрального выражения; n – число полюсов.

Напомним, что вычет в простом полюсе вычисляется по формуле

$$\operatorname{Res} W(p) \frac{e^{pt}}{p} \Big|_{p=\lambda_i} = \lim_{p \rightarrow \lambda_i} (p - \lambda_i) W(p) \frac{e^{pt}}{p}, \quad (3.11)$$

а в полюсе кратности k

$$\operatorname{Res} W(p) \frac{e^{pt}}{p} \Big|_{p=\lambda_i^k} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{p \rightarrow \lambda_i} \frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}} (p - \lambda_i)^k W(p) \frac{e^{pt}}{p}. \quad (3.12)$$

Рассмотрим случай, когда на невозмущенную систему РА действует единичный мгновенный импульс или, что то же самое, сигнал вида δ -функции

$$x(t) = \delta(t), \quad (3.13)$$

который, как известно, удовлетворяет следующим условиям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1; \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - \tau) dt = x(\tau). \quad (3.14)$$

Так как преобразование Лапласа для δ -функции ($L[\delta(t)]$) равно единице, то для выходного сигнала

$$Y(p) = W(p)L[\delta(t)] = W(p). \quad (3.15)$$

Переходный процесс, возникающий в системе РА при действии единичного импульса, называют *импульсной переходной* (или *весовой*) *функцией*. Из выражения (3.15) следует, что

$$w(t) = L^{-1}[W(p)] = \sum_{i=1}^n \operatorname{Res} W(p) e^{pt} \Big|_{p=\lambda_i}. \quad (3.16)$$

Импульсная переходная функция $w(t)$ системы РА удовлетворяет следующим условиям:

$$w(t) = 0 \quad \text{при } t < 0; \quad \int_0^{\infty} |w(t)| dt < \infty. \quad (3.17)$$

Первое условие называют *условием физической реализуемости системы*; оно показывает, что в реальной системе переходный процесс не может возникнуть раньше подачи на вход системы единичного импульса. Второе условие является условием устойчивости системы РА.

Согласно выражениям (3.9) и (3.15)

$$w(t) = \frac{d}{dt} h(t). \quad (3.18)$$

Интервал времени, на котором импульсная переходная функция отлична от нуля, называют *памятью системы* (рис. 3.2, а).

Итак, определена импульсная переходная функция стационарной системы РА. В стационарных системах РА импульсная переходная функция зависит только от разности времени наблюдения выходного сигнала и времени приложения к входу системы сигнала δ -функции. В нестационарных системах РА импульсная переходная функция зависит не только от времени наблюдения, но и от времени возникновения входного сигнала (это происходит из-за изменения во времени параметров системы). Если на вход нестационарной системы подать в момент времени $\tau_2 > \tau_1$ сигнал вида δ -функции, то импульсная переходная функция не только сдвинется по времени, как в случае стационарных систем (см. рис. 3.2, а), но и изменится по форме (см. рис. 3.2, б):

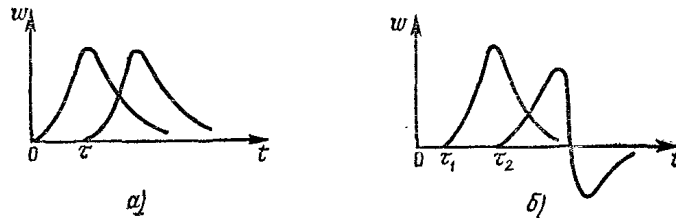


Рис. 3.2. Импульсные переходные функции:
а – стационарной системы; б – нестационарной системы

Условие физической реализуемости для нестационарных систем РА имеет вид:

$$w(t, \tau) = 0 \quad \text{при } t < \tau. \quad (3.19)$$

► **Пример 3.2.** Определить переходную и импульсную переходную функции системы РА с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)}.$$

Решение. Преобразование Лапласа для переходной функции находится по формуле (3.8):

$$h(p) = \frac{b_0}{p(p - \lambda_1)(p - \lambda_2)},$$

где λ_1, λ_2 – полюсы системы; b_0 – постоянный коэффициент.

В соответствии с выражением (3.10)

$$h(t) = 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2}.$$

Импульсная переходная функция, согласно (3.16),

$$w(t) = \frac{1}{T_1 - T_2} \left[e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2} \right].$$

Импульсную переходную функцию можно вычислить и по формуле (3.18). ◀

3.5. Выходной сигнал системы РА при произвольном воздействии

Из определения передаточной функции системы РА следует, что преобразование Лапласа для выходного сигнала при нулевых начальных условиях $Y(p) = W(p)X(p)$.

На основании теоремы свертки сигнал на выходе

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(t - \tau)w(\tau)d\tau. \quad (3.20)$$

В нестационарных системах РА

$$y(t) = \int_{t_0}^t x(\tau)w(t, \tau)d\tau. \quad (3.21)$$

где t_0 – время подачи входного сигнала.

Выражения (3.20) и (3.21) позволяют определить выходной сигнал системы РА при произвольном виде входных сигналов.

3.6. Комплексный коэффициент передачи и частотные характеристики

В практике анализа систем часто рассматривается воздействие гармонического сигнала на устройство.

Итак, рассмотрим случай, когда на вход системы РА действует гармонический сигнал с амплитудой X_m и частотой ω :

$$x(t) = X_m \sin \omega t. \quad (3.22)$$

Сигнал на выходе системы при нулевых начальных условиях в соответствии с выражением (3.5) имеет вид

$$Y(p) = W(p) X(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \frac{X_m \omega}{p^2 + \omega^2}. \quad (3.23)$$

Изображению (3.23) соответствует оригинал

$$y(t) = X_m \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} \sin \omega t + X_m \sum_{i=1}^n \operatorname{Re} s Y(p) e^{pt} \Big|_{p=\lambda_i}. \quad (3.24)$$

В устойчивой системе все полюсы имеют отрицательные вещественные части, поэтому в установившемся режиме

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = W(j\omega)X_m \sin \omega t = W(j\omega)x(t), \quad (3.25)$$

т.е. на выходе системы также получается гармонический сигнал, частота которого равна частоте входного сигнала.

Однако процессы, происходящие с амплитудой и фазой выходного сигнала в установившемся режиме, следует рассмотреть подробнее.

Отношение гармонического сигнала на выходе в установившемся режиме к гармоническому сигналу на входе называют *комплексным коэффициентом передачи* или *частотной характеристикой системы РА*. Из выражения (3.25) следует, что

$$W(j\omega) = W(p)|_{p=j\omega}. \quad (3.26)$$

Частотная характеристика системы РА может быть представлена в виде

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (3.27)$$

где $P(\omega)$ – вещественная частотная характеристика; $Q(\omega)$ – мнимая частотная характеристика.

Частотная характеристика системы РА в показательной форме имеет вид

$$W(j\omega) = |W(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}, \quad (3.28)$$

где $|W(j\omega)| = [P^2(\omega) + Q^2(\omega)]^{1/2}$ – амплитудно-частотная характеристика; $\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$ – фазочастотная характеристика.

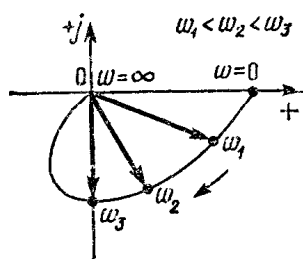


Рис. 3.3. Годограф частотной характеристики системы РА

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) определяет зависимость амплитуды сигнала от частоты отношения на выходе системы к амплитуде сигнала на входе. Фазочастотная характеристика (ФЧХ) устанавливает зависимость сдвига фаз между входным и выходным сигналами.

На плоскости комплексного переменного частотная характеристика изображается в виде вектора (рис. 3.3), который при изменении частоты от нуля до бесконечности своей конечной точкой описывает кривую, называемую *амплитудно-фазовой характеристикой* или *годографом частотной характеристики системы РА*.

В инженерной практике применяют *логарифмические частотные характеристики* (ЛЧХ). Логарифмическая АЧХ

$$\Lambda(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)|. \quad (3.29)$$

При построении логарифмической АЧХ (рис. 3.4) по оси ординат откладывают значение (3.29) в децибелах, а по оси абсцисс – частоту ω в логарифмическом масштабе.

При построении логарифмической ФЧХ по оси ординат откладывают ее значения в радианах или в угловых градусах, а частоту – в том же порядке. Основным достоинством ЛЧХ является возможность их построения без вычислений.

Десятикратное изменение частоты называют *изменением на декаду*, а двукратное – *изменением на октаву*. Число декад и октав в заданном диапазоне частот $\omega_1 \dots \omega_2$ вычисляют по формулам:

$$N_d = \lg \frac{\omega_2}{\omega_1};$$

$$N_{ок} = \lg \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{1}{\lg 2} \approx 3,33 \lg \frac{\omega_2}{\omega_1}. \quad (3.30)$$

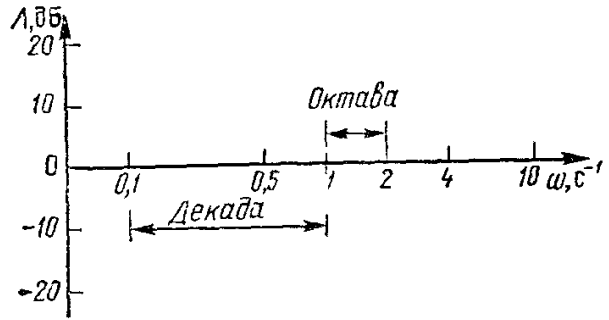


Рис 3.4. К описанию ЛЧХ

3.7. Типовые звенья

Устройства систем РА, имеющие различное конструктивное исполнение и принципы работы, могут описываться одинаковыми дифференциальными уравнениями. Устройства систем РА, классифицируемые по виду передаточных функций, называют *типовыми (основными) звеньями*. Различают семь типовых звеньев. Рассмотрим их основные характеристики.

1. Безынерционное звено. К числу таких звеньев относятся устройства с передаточной функцией $W(p) = k$, где k – коэффициент передачи звена. Амплитудная и фазовая характеристики звена: $|W(j\omega)| = k$, $\varphi(\omega) = 0$; переходная функция $h(t) = k1(t)$. Примерами таких звеньев являются потенциометр, полупроводниковый усилитель, зубчатая передача и т.п.

2. Инерционное звено. К подобным звеньям относятся устройства с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k}{1 + pT}. \quad (3.31)$$

Пример инерционных звеньев – RC -цепочка, изображенная на рис. 3.5. Частотная характеристика инерционного звена

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T}.$$

Вещественная и мнимая частотные характеристики:

$$P(\omega) = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2}; \quad Q(\omega) = -\frac{k\omega T}{1 + \omega^2 T^2},$$

амплитудная и фазовая характеристики:

$$|W(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}; \quad \varphi(\omega) = -\arctg \omega T. \quad (3.32)$$

На рис. 3.6 изображен годограф частотной характеристики инерционного звена, где $\omega_c = 1/T$ – сопряженная частота.

Переходная функция звена (выходной сигнал при действии на вход единичного скачка) имеет вид

$$h(t) = k[1(t) - e^{-t/T}].$$

Импульсная переходная функция, т.е. реакция схемы на δ -функцию (иными словами на «щелчок»),

$$w(t) = \sum_{i=1}^n \operatorname{Res} W(p) e^{p t} \Big|_{p=\lambda_i}.$$

Здесь $\lambda_1 = -\frac{1}{T}$.

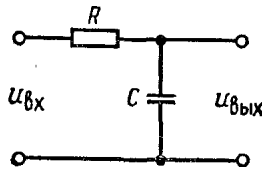


Рис. 3.5. Схема RC-цепи инерционного звена

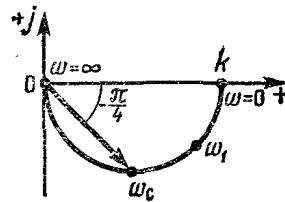


Рис. 3.6. Годограф частотной характеристики инерционного звена

3. Интегрирующее звено. К числу таких звеньев относятся устройства с передаточной функцией

$$W(p) = k/p. \tag{3.33}$$

Примеры интегрирующего звена – электрический двигатель с передаточной функцией (2.13), если в ней пренебречь электромеханической постоянной времени; усилитель постоянного тока с большим коэффициентом усиления, в цепь обратной связи которого включен конденсатор (*интегрирующий усилитель* или *интегратор*).

Вещественная мнимая и частотные характеристики:

$$P(\omega) = 0; \quad Q(\omega) = -k/\omega,$$

амплитудная и фазовая:

$$|W(j\omega)| = k/\omega; \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}. \tag{3.34}$$

На рис. 3.7 показан годограф частотной характеристики интегрирующего звена. Переходная и импульсная переходная функции звена следующие:

$$h(t) = kt \cdot 1(t); \quad w(t) = k \cdot 1(t).$$

4. Колебательное звено. Передаточная функция звена

$$W(p) = \frac{k}{p^2 T^2 + 2\xi p T + 1}, \tag{3.35}$$

где ξ – относительный коэффициент затухания.

Примером колебательного звена является контур, состоящий из индуктивной катушки, резистора и конденсатора (рис. 3.8).

Амплитудная и фазовая частотные характеристики:

$$|W(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}}; \quad \varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{2\xi\omega T}{1 - \omega^2 T^2}. \quad (3.36)$$

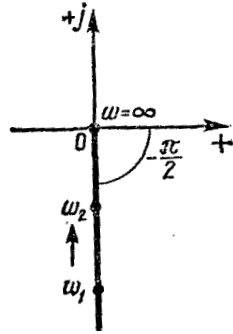


Рис. 3.7. Годограф частотной характеристики интегрирующего звена

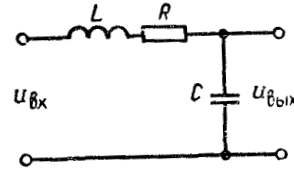


Рис. 3.8. Схема электрической цепи колебательного звена

Переходная функция звена

$$h(t) = k \left[1(t) - e^{-\xi t/T} \left(\frac{\xi}{b} \sin \frac{b}{T} t + \cos \frac{b}{T} t \right) \right],$$

где $b = \sqrt{1 - \xi^2}$.

Если $\xi > 1$, то полюсы передаточной функции (3.35) – отрицательные действительные числа, поэтому передаточную функцию звена можно представить в следующем виде:

$$W(p) = \frac{k}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)},$$

где $T_1 = -\frac{1}{\lambda_1}$; $T_2 = -\frac{1}{\lambda_2}$.

На рис. 3.9 изображен годограф частотной характеристики колебательно-го звена.

5. Идеальное дифференцирующее звено. Передаточная функция звена $W(p) = kp$ не удовлетворяет условиям физической реализуемости, поэтому звено называется идеальным. Частотные характеристики звена $|W(j\omega)| = k\omega$; $\varphi(\omega) = \pi/2$.

На рис. 3.10 изображен годограф частотной характеристики звена.

Переходная функция звена

$$h(t) = k\delta(t),$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция.

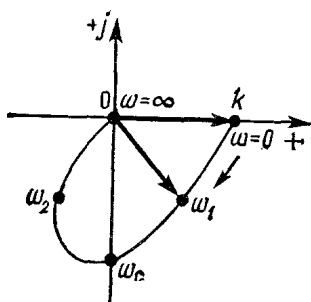


Рис. 3.9. Годограф частотной характеристики колебательного звена

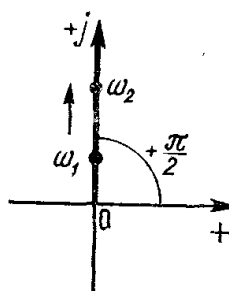


Рис. 3.10. Годограф частотной характеристики дифференцирующего звена

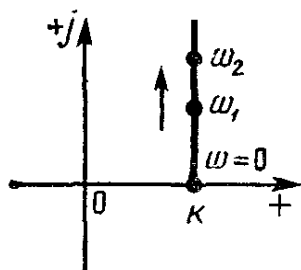


Рис. 3.11. Годограф частотной характеристики форсирующего звена

6. Дифференцирующее звено первого порядка (форсирующее звено). Передаточная функция звена

$$W(p) = k[1 + pT].$$

Частотные характеристики:

$$|W(j\omega)| = k\sqrt{1 + \omega^2 T^2}, \quad \varphi(\omega) = \arctg\omega T.$$

Годограф частотной характеристики показан на рис. 3.11, переходная функция звена

$$h(t) = k[1(t) + T\delta(t)].$$

7. Звено запаздывания. Это звено не искажает формы входного сигнала, а сдвигает его по времени. Передаточная функция

$$W(p) = e^{-pT},$$

где T – время запаздывания.

Частотные характеристики:

$$|W(j\omega)| = 1, \quad \varphi(\omega) = -\omega T.$$

На рис. 3.12 изображен годограф частотной характеристики звена запаздывания.

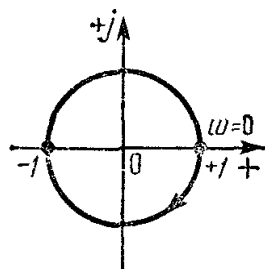


Рис. 3.12. Годограф частотной характеристики звена запаздывания

3.8. Логарифмические частотные характеристики типовых звеньев

Безынерционное звено. Логарифмические частотные характеристики имеют вид:

$$\Lambda(\omega) = 20 \lg|k|; \quad \varphi(\omega) = \arctg 0.$$

Инерционное звено. Логарифмическая АЧХ звена в соответствии с выражением (3.32)

$$\Lambda(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}. \quad (3.37)$$

Предварительно построим приближенную характеристику. С этой целью в диапазоне частот от 0 до сопряженной частоты $\omega_c = 1/T$ пренебрежем в выражении (3.37) слагаемым, зависящим от частоты, так как при малом значении ωT оно меньше единицы.

В результате получим: $\Lambda_1(\omega) = 20 \lg k$.

На рис. 3.13, а этому выражению соответствует прямая линия, параллельная оси частот. На частотах, больших сопряженной частоты ω_c , пренебрежем единицей. Тогда формула (3.37) приобретает вид:

$$\Lambda_2(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega T.$$

Так как частота по оси абсцисс откладывается в логарифмическом масштабе, то этому выражению соответствует прямая линия с наклоном минус 20 дБ/дек.

Характеристику, составленную из прямолинейных отрезков $\Lambda_1(\omega)$ и $\Lambda_2(\omega)$, называют *асимптотической*. Наибольшее отклонение асимптотической характеристики от точной получается на сопряженной частоте ω_c , оно равно 3 дБ. На частотах, отличающихся от сопряженной на одну октаву, отклонение составляет 1 дБ.

Логарифмическую ФЧХ (см. рис. 3.13, б) инерционного звена строят в соответствии с выражением (3.32).

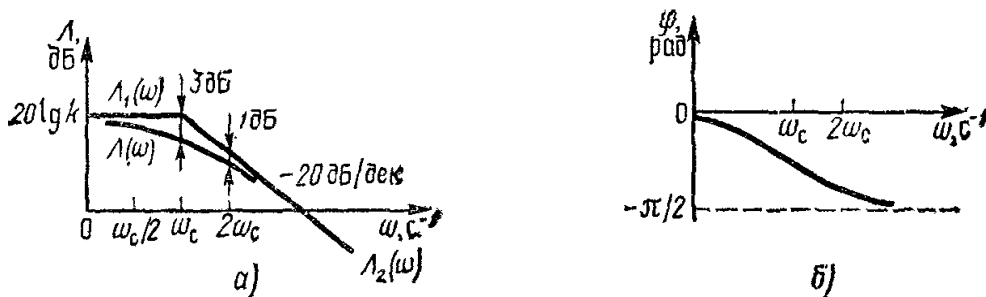


Рис. 3.13. ЛЧХ инерционного звена: а – амплитудная; б – фазовая

Интегрирующее звено. Логарифмическая АЧХ звена с учетом (3.33) определяется выражением

$$\Lambda(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega.$$

На рис. 3.14, а этому уравнению соответствует прямая линия с наклоном минус 20 дБ/дек. Логарифмическая ФЧХ (3.34) не зависит от частоты и равна минус $\pi/2$ (см. рис. 3.10, б).

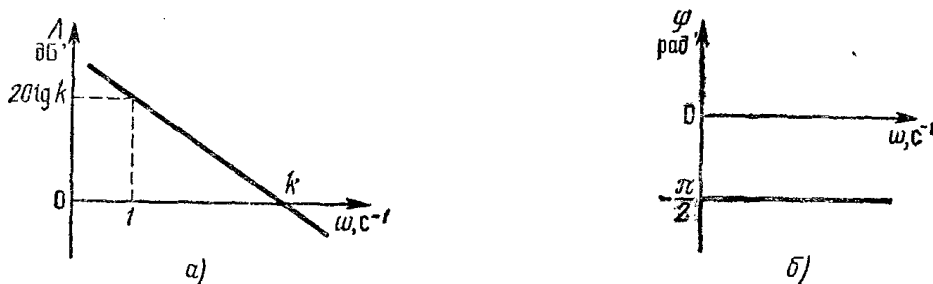


Рис. 3.14. ЛЧХ интегрирующего звена: а – амплитудная; б – фазовая

Колебательное звено. С учетом (3.36) логарифмическая амплитудная характеристика (ЛАХ) звена

$$\Lambda(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}.$$

Приближенная характеристика звена состоит из двух участков. На участке до сопряженной частоты $\Lambda_1(\omega) = 20 \lg k$, в диапазоне частот больше сопряженной $\Lambda_2(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega$. На графике характеристике $\Lambda_1(\omega)$ соответствует прямая линия с наклоном 0 дБ/дек, а характеристике $\Lambda_2(\omega)$ – прямая с наклоном минус 40 дБ/дек (рис. 3.15, а, б). Максимальное отклонение точной характеристики от приближенной получается на сопряженной частоте, оно равно $20 \lg \xi$. Уточнение приближенной характеристики производится расчетным путем.

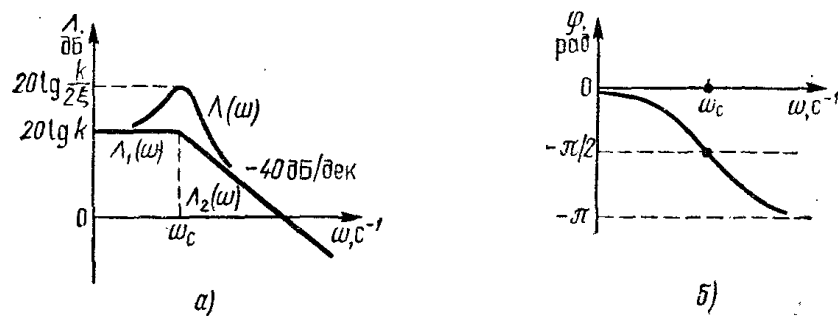


Рис. 3.15. ЛЧХ колебательного звена: а – амплитудная; б – фазовая

Логарифмическую ФЧХ строят в соответствии с выражением (3.36). Аналогичным образом строят логарифмические характеристики и других типовых звеньев.

Дифференцирующее звено. Логарифмические частотные характеристики имеют вид:

$$\Lambda(\omega) = 20 \lg \omega T, \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{\pi}{2},$$

т.е. фаза на выходе системы опережает фазу на входе на $\frac{\pi}{2}$.

Дифференцирующее звено первого порядка (форсирующее звено). Логарифмическая АЧХ имеет вид:

$$\Lambda(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg(1 + \omega T).$$

Логарифмическую ФЧХ звена строят в соответствии: $\varphi(\omega) = \arctg \omega T$.

Фаза на выходе имеет опережающий характер и зависит от частоты.

Звено запаздывания. Логарифмическая АЧХ имеет вид:

$$\Lambda(\omega) = 20 \lg 1 = 0; \quad \varphi(\omega) = -\omega T.$$

Поскольку частота при построении ЛФЧХ откладывается в логарифмическом масштабе, то фазовая характеристика имеет вид запятой, направленной вниз. При $T = \omega$ фаза на выходе системы отстает на $\varphi = 1$ рад.

3.9. Виды соединений звеньев в системах РА

Структурная схема системы РА, состоящая из типовых звеньев, позволяет без сложных математических вычислений находить передаточные функции различных систем РА.

В системах РА встречаются три вида соединений звеньев – последовательное, параллельное и соединение звеньев по схеме с обратной связью.

Последовательное соединение типовых звеньев изображено на рис. 3.16. В соответствии с определением передаточной функции можно записать, что

$$W_1(p) = \frac{Y_1(p)}{X(p)}; \quad W_2(p) = \frac{Y_2(p)}{Y_1(p)}; \quad \dots; \quad W_n(p) = \frac{Y(p)}{Y_{n-1}(p)}.$$

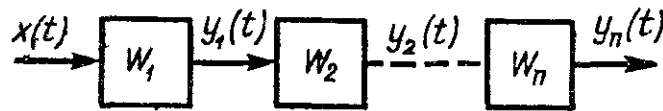


Рис. 3.16. Последовательное соединение звеньев

Перемножив передаточные функции, получим:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = W_1(p) W_2(p) \dots W_n(p). \quad (3.38)$$

Таким образом, передаточная функция последовательно соединенных звеньев равна произведению передаточных функций звеньев.

Частотная характеристика последовательно соединенных звеньев

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) W_2(j\omega) \dots W_n(j\omega) = |W(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}, \quad (3.39)$$

где $|W(j\omega)| = |W_1(j\omega)| |W_2(j\omega)| \dots |W_n(j\omega)|$; $\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \dots + \varphi_n(\omega)$ – фазовая характеристика.

Логарифмическая АЧХ звеньев, соединенных последовательно, согласно (2.29),

$$\Lambda(\omega) = \Lambda_1(\omega) + \Lambda_2(\omega) + \dots + \Lambda_n(\omega). \quad (3.40)$$

Следовательно, логарифмическая АЧХ звеньев, соединенных последовательно, равна сумме логарифмических АЧХ отдельных звеньев. Это существенно упрощает построение логарифмических частотных характеристик по сравнению с обычными характеристиками.

На рис. 3.17 изображено *параллельное соединение* звеньев, на вход которых подается один и тот же сигнал, а выходные сигналы суммируются.

Так как

$$Y_1(p) = W_1(p)X(p); \quad Y_2(p) = X(p); \quad \dots \quad Y_n(p) = W_n(p) X(p),$$

то

$$Y(p) = [W_1(p) + W_2(p) + \dots + W_n(p)]X(p).$$

Таким образом, передаточная функция параллельно соединенных звеньев равна сумме передаточных функций отдельных звеньев:

$$W(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p). \quad (3.41)$$

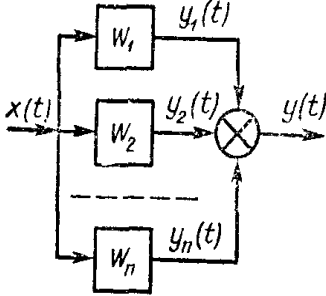


Рис. 3.17. Параллельное соединение звеньев

Частотная характеристика таких звеньев

$$W(j\omega) = \sum_{i=1}^n W_i(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega),$$

где $P(\omega) = \sum_{i=1}^n P_i(\omega)$ – вещественная частотная характеристика звеньев, соединенных параллельно; $Q(\omega) = \sum_{i=1}^n Q_i(\omega)$ – их мнимая частотная характеристика.

Амплитудная и фазовая частотные характеристики звеньев, соединенных параллельно, определяются по формулам

$$|W(j\omega)| = [P^2(\omega) + Q^2(\omega)]^{1/2};$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}.$$

Для построения логарифмических частотных характеристик параллельно соединенных звеньев необходимо сначала найти амплитудную и фазовую частотные характеристики каждого звена, а затем построить логарифмические частотные характеристики параллельно соединенных звеньев.

На рис. 3.18 показано соединение звеньев по схеме с обратной связью. На вход звена, охваченного обратной связью, подается сигнал рассогласования, для которого преобразование Лапласа

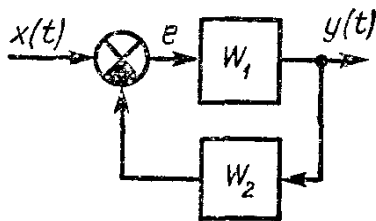


Рис. 3.18. Соединение звеньев по схеме с обратной связью

$$E(p) = X(p) - W_2(p)Y(p).$$

В соответствии с определением передаточной функции

$$Y(p) = W_1(p)E(p).$$

Исключив из последних двух уравнений $E(p)$, получим:

$$Y(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)} X(p).$$

Следовательно, передаточная функция звеньев, соединенных по схеме с обратной связью,

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)}. \quad (3.42)$$

Передаточная функция (3.42) найдена для случая отрицательной обратной связи. Если обратная связь положительная, то

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p)W_2(p)}.$$

Частотные характеристики звеньев с обратной связью имеют вид:

$$|W(j\omega)| = |W_1(j\omega) [(1 + P_{12}(\omega))^2 + Q_{12}^2(\omega)]^{-1/2}; \quad (3.43)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) - \arctg \frac{Q_{12}}{1 + P_{12}}, \quad (3.44)$$

где $P_{12}(\omega)$, $Q_{12}(\omega)$ – вещественная и мнимая частотные характеристики звеньев, образующих замкнутый контур.

После вычисления частотных характеристик (3.43) и (3.44) могут быть построены их ЛЧХ.

3.10. Передаточные функции

При анализе и синтезе систем РА, обобщенная структурная схема которых дана на рис. 1.17, используют следующие передаточные функции.

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p(p) = \frac{Y(p)}{E(p)}. \quad (3.45)$$

Для системы, структурная схема которой показана на рис. 3.19, при условии, что обратная связь отсутствует, передаточная функция

$$W_p(p) = W_1(p) W_2(p).$$

Передаточная функция замкнутой системы

$$W_3(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}. \quad (3.46)$$

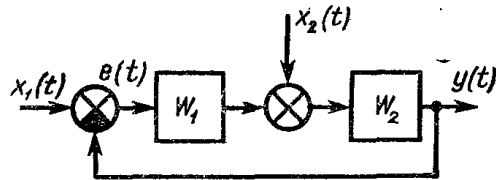


Рис. 3.19. Структурная схема системы

Передаточную функцию замкнутой системы можно выразить через передаточную функцию разомкнутой системы с помощью выражения (3.42), в котором передаточную функцию обратной связи считают равной единице. В результате получают:

$$W_3(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)}. \quad (3.47)$$

Передаточная функция замкнутой системы зависит от места приложения сигнала. Так, передаточная функция относительно сигнала $x_1(t)$ (см. рис. 3.19) определяется формулой (3.47), а относительно сигнала $x_2(t)$ – выражением

$$W_{32}(p) = \frac{Y(p)}{X_2(p)} = \frac{W_2(p)}{1 + W_p(p)}. \quad (3.48)$$

Передаточная функция ошибки

$$W_e(p) = \frac{E(p)}{X(p)}. \quad (3.49)$$

Из уравнения замыкания системы $E(p) = X(p) - Y(p)$ и из выражения (3.46) следует, что

$$E(p) = [1 - W_3(p)] X(p).$$

Таким образом, передаточную функцию ошибки найдем с помощью передаточной функции замкнутой системы:

$$W_e(p) = 1 - W_3(p). \quad (3.50)$$

Подставив в последнее выражение формулу (3.47), получим:

$$W_e(p) = \frac{1}{1 + W_p(p)}. \quad (3.51)$$

3.11. Передаточные функции статических и астатических систем

Как уже отмечалось, системы РА подразделяются на статические и астатические. В статических системах ошибка в установившемся режиме не равна нулю (кривая 1 на рис. 3.20), а в астатических равна нулю (кривая 2 на рис. 3.20).

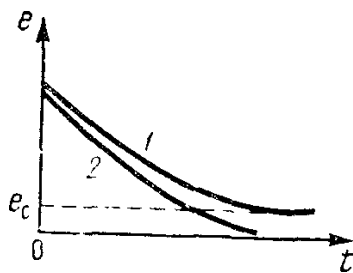


Рис. 3.20. К пояснению статической ошибки системы

Установим, какими особенностями должны обладать передаточные функции астатических систем РА относительно сигнала $x(t) = c \cdot 1(t)$.

Согласно определению передаточной функции ошибки (3.49)

$$E(p) = W_e(p) X(p) = W_e(p) \frac{c}{p}.$$

(Изображение по Лапласу единичной функции $\frac{1}{p}$).

Ошибка в установившемся режиме, называемая статической, на основании теоремы преобразования Лапласа о конечном значении функции

$$e_c = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p E(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot W_e(p) \cdot \frac{c}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} W_e(p) c. \quad (3.52)$$

Из выражения (3.52) следует, что ошибка равна нулю, если передаточная функция ошибки содержит множитель p (имеет нуль в точке $p = 0$, т.е. система имеет *астатизм*), в противном случае ошибка не равна нулю.

Аналогичным образом можно установить условия, при которых система РА является астатической относительно других видов сигналов. Оказывается, что передаточная функция ошибки системы с астатизмом порядка ν содержит множитель p^ν (имеет нуль порядка ν в точке $p = 0$). В такой системе ошибка в установившемся режиме равна нулю при входном сигнале $x(t) = ct^{\nu-1}$.

Из передаточной функции ошибки (3.51) следует, что система РА имеет порядок ν астатизма, если передаточная функция разомкнутой системы содержит ν интегрирующих звеньев (имеет полюс порядка ν в точке $p = 0$).

► **Пример 3.3.** Найти передаточные функции и ошибку в системе ФАПЧ (см. рис. 1.5), в которой ФНЧ описывается передаточной функцией

$$W_{\text{фнч}}(p) = k_{\text{ф}} \frac{1 + pT_2}{1 + pT_1}.$$

Решение. Все звенья в цепи сигнала ошибки от $\Delta\omega$ до ω_2 включены последовательно, поэтому

$$W_p(p) = \frac{K(1 + pT_2)}{p(1 + pT_1)(1 + pT_{\text{фд}})}, \quad (3.53)$$

где $K = k_{\text{фд}}k_{\text{ф}}k_{\text{у}}k_{\text{нз}}$ – коэффициент передачи системы ФАПЧ; $T_{\text{фд}}$ – постоянная времени фазового детектора.

Передаточная функция замкнутой системы в соответствии с выражением (3.47)

$$W_3(p) = \frac{K(1 + pT_2)}{p(1 + pT_1)(1 + pT_{\text{фд}}) + K(1 + pT_2)}.$$

Передаточная функция ошибки определяется по (3.50):

$$W_e(p) = \frac{p(+pT_1)(1 + pT_{\text{фд}})}{p(1 + pT_1)(1 + pT_{\text{фд}}) + K(1 + pT_2)}.$$

Из найденных передаточных функций следует, что система ФАПЧ имеет первый порядок астатизма, поэтому ее статическая ошибка равна нулю. При линейно изменяющемся сигнале $\omega_s = ct$ ошибка определяется по (3.52):

$$e = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot W_e(p) \cdot \frac{c}{p^2} = \frac{c}{K}.$$

Это выражение определяет динамическую ошибку системы ФАПЧ. ◀

3.12. Передаточные функции многоконтурных систем

К многоконтурным относятся системы РА, в которых помимо замкнутого контура с главной обратной связью имеются контуры, образованные стабилизирующими обратными связями, введенными для придания системе нужных динамических характеристик. Передаточные функции таких систем находятся путем последовательного сведения структурной схемы многоконтурной системы к эквивалентной одноконтурной.

На рис. 3.21 изображена структурная схема двухконтурной системы РА.

Для сведения такой системы к эквивалентной одноконтурной находят передаточную функцию внутреннего контура, которая в соответствии с выражением (3.42) имеет вид

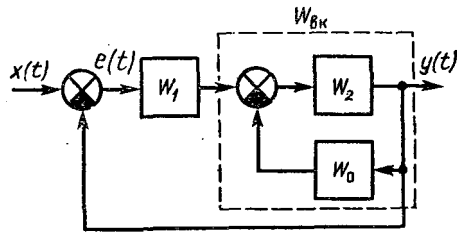


Рис. 3.21. Структурная схема двухконтурной системы

$$W_{\text{вк}}(p) = \frac{W_2(p)}{1 + W_2(p)W_0(p)}$$

После этого структурную схему системы можно представить как одноконтурную, для которой

$$W_p(p) = W_1(p) W_{\text{вк}}(p) = \frac{W_1(p)W_2(p)}{1 + W_2(p)W_0(p)}$$

На рис. 3.22, а дана структурная схема системы с перекрестными связями. Из этого рисунка видно, что несложными преобразованиями можно структурную схему системы привести к виду, в котором перекрестные связи отсутствуют (см. рис. 3.22, б).

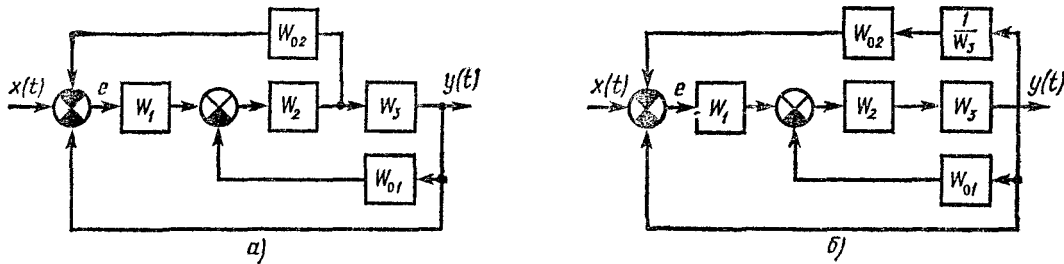


Рис. 3.22. Схемы моноконтурной системы: а – с перекрестными обратными связями; б – с неперекрестными обратными связями

После таких преобразований передаточные функции находятся по методу последовательного свертывания двухконтурной системы к одноконтурной.

Передаточная функция разомкнутой системы (см. рис. 3.22, б)

$$W(p) = \frac{W_1(p)W_{\text{вк}}(p)}{1 + W_1(p)W_{\text{вк}}(p)W_3^{-1}(p)W_02(p)}$$

где $W_{\text{вк}}(p) = \frac{W_2(p)W_3(p)}{1 + W_2(p)W_3(p)W_01(p)}$.

3.13. Определение параметров элементов систем

В ряде случаев передаточные функции и параметры устройств системы РА из-за их сложности не могут быть определены расчетным путем, поэтому приходится использовать различные экспериментальные методы. Определение

характеристик как отдельных устройств, так и всей системы в целом по экспериментальным данным называют *задачей идентификации*. Известно большое число методов решения задачи идентификации. Выбор того или иного метода зависит от конкретных условий работы и априорных сведений о системе. В системах РА для идентификации параметров устройств широко применяют следующие методы: частотные, по переходным функциям и статистические.

Частотный метод идентификации базируется на логарифмических частотных характеристиках, построенных по экспериментальным данным. В соответствии с этим методом логарифмическая АЧХ аппроксимируется прямолинейными отрезками с наклонами, кратными ± 20 дБ/дек. Если характеристика до первой сопряженной частоты имеет наклон минус $\nu 20$ дБ/дек, то исследуемое устройство содержит ν интегрирующих звеньев. Изменение наклона характеристики на какой-либо частоте на $+k20$ дБ/дек означает, что идентифицируемое устройство содержит k форсирующих звеньев. Если наклон изменяется на минус $k20$ дБ/дек, то исследуемый элемент имеет k инерционных или $k/2$ колебательных звеньев. Постоянные времени звеньев определяются через сопряженные частоты. Фазочастотная характеристика используется для более точной аппроксимации амплитудной характеристики прямолинейными отрезками.

► **Пример 3.4.** Определить передаточную функцию устройства, экспериментальная логарифмическая АЧХ которого изображена на рис. 3.23.

Решение. Заменяя логарифмическую АЧХ прямолинейными отрезками, запишем:

$$W(p) = \frac{K(1 + pT_1)}{p(1 + pT_2)(1 + pT_3)^2},$$

где $T_1 = \frac{1}{\omega_1}$; $T_2 = \frac{1}{\omega_2}$; $T_3 = \frac{1}{\omega_3}$ – постоянные

времени; $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – сопряженные частоты;

K – коэффициент передачи устройства, опре-

деляемый по логарифмической АЧХ на частоте, равной единице: $\Lambda(1) = 20 \lg K$. ◀

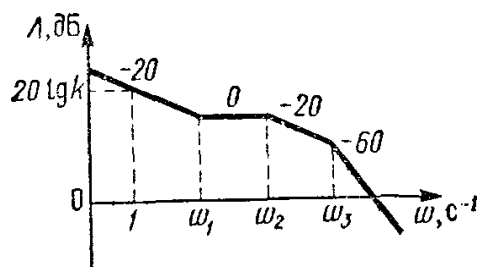


Рис. 3.23. Экспериментальная амплитудная ЛЧХ

Для идентификации параметров можно использовать и переходную функцию исследуемого устройства. Для этого необходимо зарегистрировать выходной сигнал устройства при скачкообразном входном сигнале. Далее следует найти передаточную функцию устройства. Это сложная задача, так как в устройствах с различными передаточными функциями могут быть сходные переходные процессы. Поэтому данный метод целесообразно применять в тех случаях, когда передаточная функция известна и нужно только по экспериментальным данным найти параметры передаточной функции.

Статистические методы идентификации основываются на определении взаимной корреляционной функции выходного сигнала исследуемого устройства с его входным сигналом:

$$R_{yx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} y(t)x(t-\tau)dt, \quad (3.54)$$

где $x(t)$ – стационарный случайный сигнал; $y(t)$ – выходной сигнал.

Если в качестве сигнала $x(t)$ принять белый шум интенсивностью N , то согласно (3.14) из выражения (3.54) находят, что $R_{yx}(\tau) = Nw(\tau)$, т.е. взаимная корреляционная функция оказывается равной импульсной переходной функции, по которой и рассчитывают параметры и передаточную функцию исследуемого устройства.

Вопросы к теме 3

1. Дайте определение основных характеристик систем РА.
2. Как по дифференциальному уравнению системы РА найти ее передаточную функцию?
3. Что такое условие физической реализуемости системы РА?
4. Какие частотные характеристики используются для исследования систем РА?
5. Чем отличаются импульсные переходные функции стационарных и нестационарных систем РА?
6. Почему ЛЧХ нашли широкое применение в технике?
7. По каким признакам классифицируются типовые звенья?
8. Определите основные характеристики типовых звеньев.
9. Какие частотные характеристики используются для исследования систем РА?
10. Постройте логарифмические частотные характеристики типовых звеньев.
11. Какие способы соединения звеньев используются в системах РА?
12. Дайте определения передаточных функций, применяемых в системах РА.
13. Какие системы относятся к статическим системам, а какие к астатическим?
14. Каким условиям должна удовлетворять передаточная функция замкнутой системы с астатизмом первого и второго порядков?
15. Как находятся передаточные функции многоконтурных систем РА?
16. Поясните способы идентификации параметров элементов систем РА.

РАЗДЕЛ 3. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ РАДИОАВТОМАТИКИ

Тема 4. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

4.1. Постановка задачи устойчивости

Устойчивость линейной системы определяется ее характеристиками и не зависит от внешних воздействий. Процессы в системах РА описываются дифференциальными уравнениями вида

$$[1 + W_p(p)]y(t) = W_p(p) x(t), \quad (4.1)$$

где $p = d/dt$ – символ дифференцирования; $x(t)$, $y(t)$ – входной и выходной сигналы системы.

Решение уравнения (4.1) состоит из двух составляющих:

$$y(t) = y_e(t) + y_n(t), \quad (4.2)$$

где $y_e(t)$ – решение неоднородного уравнения; $y_n(t)$ – переходная составляющая решения.

Система РА устойчива, если переходная составляющая решения стремится к нулю. Это означает, что если система выведена из состояния равновесия каким-либо возмущением, то она возвращается в исходное состояние после устранения этого возмущения.

Переходная составляющая решения уравнения (4.1) зависит от корней характеристического уравнения, которое получают из выражения (4.1), приравняв левую часть к нулю:

$$1 + W_p(p) = 0. \quad (4.3)$$

Переходная составляющая решения

$$y_n(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}, \quad (4.4)$$

где λ_i – корни характеристического уравнения (полюсы системы); C_i – постоянные интегрирования.

Действительному корню характеристического уравнения λ_i в выражении (5.4) соответствует слагаемое $y_{ni}(t) = C_i e^{\lambda_i t}$. Если $\lambda_i < 0$, то переходная составляющая с ростом времени стремится к нулю, если $\lambda_i > 0$, то эта составляющая неограниченно возрастает (рис. 4.1, а).

Паре комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения (4.3) соответствует колебание

$$y_{ni}(t) = A_i e^{\gamma_i t} \sin(\beta_i t + \varphi_i),$$

где $\gamma_i \pm j\beta_i$ – корни характеристического уравнения; A_i , φ_i – постоянные интегрирования, определяемые через C_i .

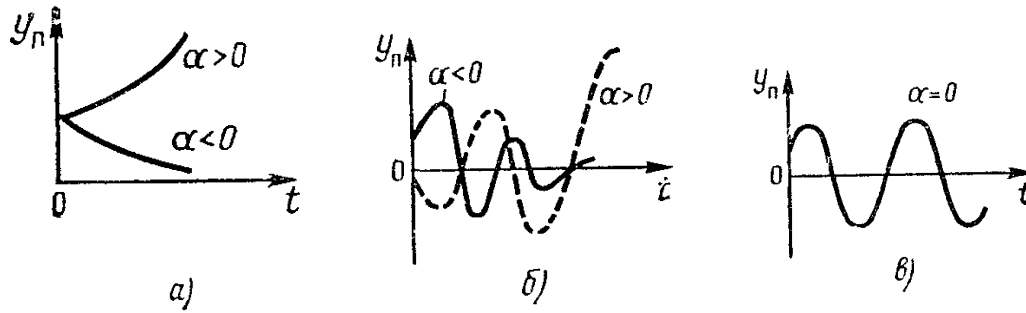


Рис. 4.1. К пояснению устойчивости системы РА; переходные составляющие:
 а – для вещественных корней; б – для комплексно-сопряженных корней;
 в – для пары мнимых корней

При этом переходная составляющая стремится к нулю, если вещественные части корней отрицательны, в противном случае амплитуда колебаний переходной составляющей непрерывно возрастает (см. рис. 4.1, б).

Пара мнимых корней характеристического уравнения позволяет получить переходную составляющую в виде колебаний с постоянной амплитудой (см. рис. 4.1, в)

$$y_{ni}(t) = A_i \sin(\beta_i t + \varphi_i).$$

Таким образом, для устойчивости системы РА необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные знаки, или чтобы эти корни на плоскости комплексного переменного были расположены слева от мнимой оси. Только при этом все слагаемые в выражении (4.4) будут стремиться к нулю.

Если корни характеристического уравнения расположены на мнимой оси, то система РА находится на границе устойчивости. При этом возможны два случая: корень в начале координат и пара мнимых корней. Нулевой корень появляется, когда свободный член характеристического уравнения равен нулю. Если остальные корни этого уравнения отрицательные, то система РА устойчива не относительно выходного сигнала, а относительно его производной, выходной сигнал в установившемся режиме имеет произвольное значение. Такие системы называют нейтрально устойчивыми. В том случае, когда характеристическое уравнение имеет пару мнимых корней, границу устойчивости называют колебательной.

В большинстве случаев корни характеристического уравнения системы вычислить невозможно, поэтому были разработаны правила (критерии), позволяющие судить о расположении корней на плоскости комплексного переменного без их расчета. Прежде чем воспользоваться для оценки устойчивости тем или иным критерием, следует проверить выполнение необходимого условия устойчивости, в соответствии с которым все коэффициенты характеристического уравнения (4.1) должны быть больше нуля. Для доказательства этого положения представим уравнение (4.1) в виде

$$a_n(p - \lambda_1)(p - \lambda_2) \dots (p - \lambda_n) = 0. \quad (4.5)$$

Если система устойчива, т.е. все корни λ_i отрицательные, то, раскрыв скобки в (4.5), получим уравнение с положительными коэффициентами. Если система неустойчива, т.е. хотя бы один из корней положительный, то, перемножив сомножители в (4.5), получим уравнение с несколькими отрицательными коэффициентами. В дальнейшем будем полагать, что необходимое условие устойчивости выполняется.

4.2. Критерий устойчивости Гурвица

Для оценки устойчивости системы РА по критерию Гурвица необходимо из коэффициентов характеристического уравнения (4.1) составить матрицу Гурвица. С этой целью уравнение (4.1) запишем в виде:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0 = 0.$$

Матрица Гурвица имеет вид:

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_0 \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Порядок составления матрицы Гурвица следующий. В левом верхнем углу матрицы записывается коэффициент a_{n-1} , по главной диагонали располагаются коэффициенты характеристического уравнения с младшими индексами, над элементами главной диагонали записываются коэффициенты с убывающими индексами, под элементами – с возрастающими.

Для оценки устойчивости системы РА необходимо вычислить определители Гурвица, которые получают из матрицы (4.6) путем отчеркивания равного числа строк и столбцов в левом верхнем углу матрицы.

Например, первый определитель

$$\Delta_1 = a_{n-1},$$

второй

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix},$$

третий:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}.$$

Система РА устойчива, если при $a_n > 0$:

$$\Delta_1 > 0; \quad \Delta_2 > 0; \quad \Delta_3 > 0; \quad \dots \quad \Delta_n > 0. \quad (4.7)$$

Раскрыв Δ_n по последнему столбцу, получим:

$$\Delta_n = a_0 \Delta_{n-1}. \quad (4.8)$$

Так как $a_0 > 0$, то для проверки устойчивости системы достаточно уточнить знаки только до определителя Δ_{n-1} .

Если определитель $\Delta_n = 0$, то система РА находится на границе устойчивости. Возможны два случая: 1) свободный член характеристического уравнения равен нулю, что соответствует нейтрально устойчивой системе; 2) определитель $\Delta_{n-1} = 0$, что соответствует колебательной границе устойчивости. Из условия $\Delta_{n-1} = 0$ можно определить параметры, при которых система РА находится на границе устойчивости. Например, можно вычислить критический коэффициент усиления $K_{кр}$, соответствующий границе устойчивости. Отношение

$$\alpha = K_{кр}/K \quad (4.9)$$

называют *запасом устойчивости по усилению*. Для нормального функционирования системы необходимо, чтобы $\alpha \geq 2$.

► **Пример 4.1.** Найти условия устойчивости системы ФАПЧ (см. рис. 1.5), передаточная функция которой в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W_p(p) = \frac{K(1 + pT_2)}{p(1 + pT_1)(1 + pT_{\phi\delta})}. \quad (4.10)$$

Решение. Характеристическое уравнение системы ФАПЧ

$$T_1 T_{\phi\delta} p^3 + (T_1 + T_{\phi\delta}) p^2 + (1 + K T_2) p + K = 0.$$

Матрицу Гурвица можно представить так:

$$\begin{vmatrix} T_1 + T_{\phi\delta}, & K, & 0 \\ T_1 T_{\phi\delta}, & 1 + K T_2, & 0 \\ 0, & T_1 + T_{\phi\delta}, & K \end{vmatrix}.$$

В соответствии с (4.7) условия устойчивости получаются следующими:

$$T_1 T_{\phi\delta} > 0; \quad \Delta_1 = T_1 + T_{\phi\delta} > 0; \quad \Delta_2 = (T_1 + T_{\phi\delta})(1 + K T_2) - K T_1 T_{\phi\delta} > 0.$$

Первые два условия выполняются при любых значениях параметров, последнее – в том случае, когда

$$K < K_{кр} = \frac{T_1 + T_{\phi\delta}}{T_{\phi\delta}(T_1 - T_2) - T_1 T_2}.$$

Из этого выражения следует, что форсирующее звено улучшает устойчивость системы, повышает *критический коэффициент усиления*.

Действительно, если при $T_2 = 0$ $K_{кр} = 1/T_1 + T_{\phi\delta}$, то при $T_2 = \frac{T_{\phi\delta} T_1}{T_{\phi\delta} + T_1}$

$K_{кр} = \infty$. ◀

4.3. Частотные критерии устойчивости

Частотные критерии устойчивости базируются на принципе аргумента. Рассмотрим этот принцип, для чего запишем выражение для *характеристического вектора*, которое получим из характеристического уравнения (4.5) путем замены p на $j\omega$:

$$G(j\omega) = a_n (j\omega - \lambda_1)(j\omega - \lambda_2) \dots (j\omega - \lambda_n). \quad (4.11)$$

На рис. 4.2 изображены множители характеристического вектора. Определим изменение аргумента вектора $G(j\omega)$ при изменении частоты от минус ∞ до плюс ∞ :

$$\Delta \arg G(j\omega) = \sum_{i=1}^n \arg(j\omega - \lambda_i).$$

Если корень характеристического уравнения λ_i расположен на комплексной плоскости слева от мнимой оси, то вектор $j\omega - \lambda_i$ поворачивается на угол π , если этот корень находится на комплексной плоскости справа от мнимой оси, то вектор $j\omega - \lambda_i$ поворачивается на угол минус π . Допустим, что m корней характеристического уравнения расположены справа от мнимой оси, а остальные $n - m$ корней – слева. Тогда изменение аргумента характеристического вектора равно: $\Delta \arg G(j\omega) = (n - 2m)\pi$. Это выражение и определяет принцип аргумента.

В устойчивой системе $m = 0$, и учитывая, что реально частота может изменяться от нуля до бесконечности, изменение аргумента характеристического вектора получаем следующим:

$$\Delta \arg G(j\omega) = n \frac{\pi}{2}. \quad (4.12)$$

Из выражения (4.12) следует критерий устойчивости Михайлова, согласно которому изменение аргумента характеристического вектора определяется по годографу вектора, который записывают в виде

$$G(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega),$$

где $U(\omega)$, $V(\omega)$ – действительная и мнимая части характеристического вектора.

Система РА устойчива, если годограф характеристического вектора, начинаясь на положительной части действительной оси, обходит последовательно в положительном направлении n квадрантов, где n – порядок характеристического уравнения системы. Только в этом случае выполняется условие (4.12). На рис. 4.3, а – в приведены примеры годографов для устойчивых и неустойчивых систем. Если годограф проходит через начало координат (см. рис. 4.3, в), то система находится на границе устойчивости.

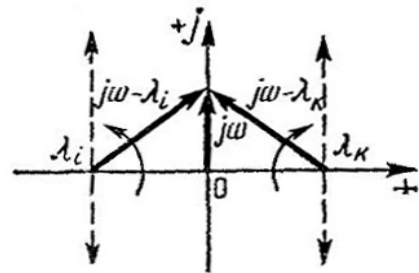


Рис. 4.2. К оценке изменения аргумента характеристического вектора

В этом случае

$$U(\omega_{кр}) = 0; \quad V(\omega_{кр}) = 0. \quad (4.13)$$

Из этих уравнений можно определить значения параметров, при которых система находится на границе устойчивости.

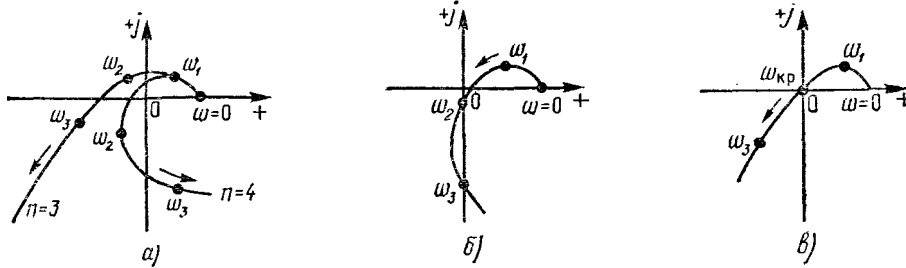


Рис. 4.3. Общий вид характеристического вектора: *а* – устойчивой системы; *б* – неустойчивой системы; *в* – системы на границе устойчивости

► **Пример 4.2.** Найти критическое значение коэффициента усиления в системе ФАПЧ, которая рассматривалась в примере 4.1.

Решение. Характеристический вектор определяется из выражения (4.10):

$$G(j\omega) = K - \omega^2(T_1 + T_{\phi\delta}) + j\omega(1 + KT_2 - \omega^2 T_1 T_{\phi\delta}).$$

В соответствии с выражениями (4.13) условия, определяющие границу устойчивости, получаются следующими:

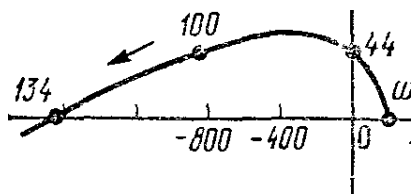


Рис. 4.4. Годограф характеристического вектора системы ФАПЧ

$$K_{кр} - \omega_{кр}^2(T_1 + T_{\phi\delta}) = 0;$$

$$\omega_{кр}(1 + K_{кр} T_2) - \omega_{кр}^3 T_1 T_{\phi\delta} = 0.$$

Следовательно,

$$\omega_{кр}^2 = \frac{1 + K_{кр} T_2}{T_1 T_{\phi\delta}}; \quad K_{кр} = \frac{T_1 + T_{\phi\delta}}{T_{\phi\delta}(T_1 - T_2) - T_1 T_2}.$$

При значениях коэффициента усиления меньше критического система ФАПЧ устойчива, в противном случае она неустойчива. На рис. 4.4 показан годограф характеристического вектора устойчивости системы ФАПЧ при $T_1 = 0,1$ с, $T_2 = 0,04$ с, $T_{\phi\delta} = 0,005$ с, $K = 200$ с⁻¹. ◀

На практике более широкое по сравнению с критерием Михайлова применение нашел частотный критерий Найквиста, который позволяет судить об устойчивости системы по частотным характеристикам разомкнутой системы.

Рассмотрим случай, когда разомкнутая система РА устойчива и не содержит интегрирующих звеньев. Для доказательства критерия Найквиста введем вектор

$$F(j\omega) = \frac{D(j\omega) + N(j\omega)}{D(j\omega)} = 1 + W_p(j\omega), \quad (4.14)$$

где $W_p(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$ – частотная характеристика разомкнутой системы.

Числитель (4.14) является характеристическим вектором замкнутой системы, а знаменатель – характеристическим вектором разомкнутой системы. Определим изменение аргумента вектора (4.14) для случая, когда замкнутая система устойчива:

$$\Delta \arg F(j\omega) = \Delta \arg [D(j\omega) + N(j\omega)] - \Delta \arg D(j\omega) = 0.$$

$0 \leq \omega \leq \infty$ $0 \leq \omega \leq \infty$ $0 \leq \omega \leq \infty$

Таким образом, если разомкнутая и замкнутая системы устойчивы, то изменение аргумента вектора $F(j\omega)$ при изменении частоты от нуля до бесконечности равно нулю, следовательно, его годограф не охватывает начала координат (рис. 4.5, а). В противном случае, когда годограф $F(j\omega)$ охватывает начало координат, изменение его аргумента не равно нулю и система в замкнутом состоянии неустойчива. Очевидно, что об изменении аргумента вектора $F(j\omega)$ удобнее судить по годографу частотной характеристики разомкнутой системы. Действительно, изменение аргумента вектора $F(j\omega)$ будет равно нулю (см. рис. 4.5, б), если годограф частотной характеристики разомкнутой системы не охватывает точку с координатами $(-1, j0)$. Эти два годографа отличаются на единицу по действительной оси.

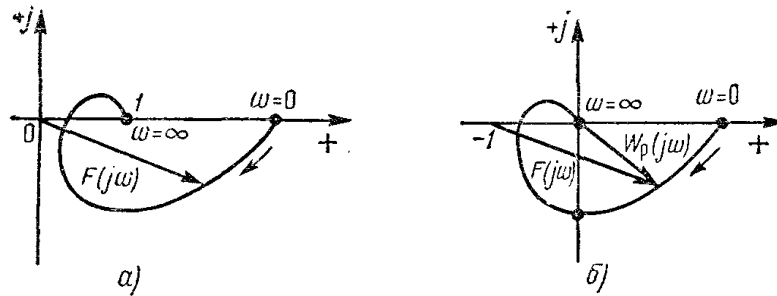


Рис. 4.5. К выводу критерия устойчивости Найквиста:

а – годограф $F(j\omega)$ устойчивой системы; б – годограф $W_p(j\omega)$ устойчивой системы

Отсюда следует формулировка критерия Найквиста. Система РА, устойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчива и в замкнутом состоянии, если годограф частотной характеристики разомкнутой системы не охватывает точку с координатами $(-1, j0)$. В том случае, когда годограф частотной характеристики охватывает эту точку, система неустойчива.

Если система РА содержит ν интегрирующих звеньев, то начальное значение фазочастотной характеристики равно минус $\nu \frac{\pi}{2}$, а амплитудно-частотной – бесконечности, система в разомкнутом состоянии нейтральна. В таких астатических системах для удобства оценки устойчивости годограф дополняют дугой бесконечного радиуса (рис. 4.6). Формулировка критерия устойчивости при этом не изменяется.

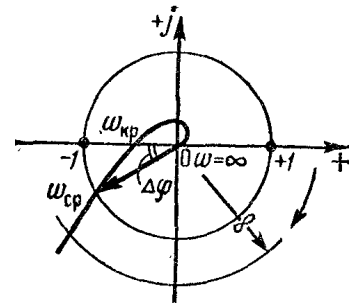


Рис. 4.6. Годограф $W_p(j\omega)$ астатической системы

Если годограф частотной характеристики разомкнутой системы проходит через точку $(-1, j0)$, то система в замкнутом состоянии находится на границе устойчивости.

Аналогичным образом доказывается критерий Найквиста и для случая, когда разомкнутая система неустойчива. При этом система в замкнутом состоянии будет устойчивой, если годограф частотной характеристики разомкнутой системы m раз охватывает точку с координатами $(-1, j0)$, где m – число полюсов разомкнутой системы, расположенных на комплексной плоскости справа от мнимой оси.

4.4. Запасы устойчивости

В процессе эксплуатации системы РА ее параметры (коэффициенты усиления, постоянные времени) из-за изменения внешних условий, колебаний напряжений источников энергии и других причин отличаются от расчетных значений. Если не принять определенных мер, то система РА может стать неустойчивой. Для исключения этого явления при проектировании следует обеспечить определенные запасы устойчивости системы, которые характеризуют близость годографа частотной характеристики разомкнутой системы к точке с координатами $(-1, j0)$. Запасы устойчивости определяются на двух частотах – *частоте среза* и *критической частоте*. На частоте среза АЧХ разомкнутой системы равна единице, на критической частоте ФЧХ принимает значение, равное минус π .

Различают запас устойчивости по фазе и усилению. *Запас устойчивости по фазе* показывает, на какое значение ФЧХ разомкнутой системы на частоте среза отличается от минус π (см. рис. 4.6):

$$\Delta\varphi = \pi - \varphi_p(\omega_{cp}).$$

Запас устойчивости по усилению определяет, во сколько раз нужно увеличить коэффициент усиления, чтобы система оказалась на границе устойчивости. Так как фазочастотная характеристика разомкнутой системы не зависит от коэффициента усиления, то при его изменении меняется только масштаб годографа, поэтому запас устойчивости по усилению вычисляется по формуле

$$\alpha = \frac{1}{|W_p(j\omega_{кр})|}.$$

Системы РА, годографы частотных характеристик которых пересекают ось только справа от точки с координатами $(-1, j0)$ (см. рис. 4.6), называют *абсолютно устойчивыми*. В таких системах неустойчивость может наступить только при увеличении коэффициента усиления.

Если годограф частотной характеристики разомкнутой системы пересекает вещественную ось и слева от точки с координатами $(-1, j0)$, то систему называют *условно устойчивой* (рис. 4.7). Неустойчивой такая система может быть как при увеличении, так и при уменьшении коэффициента усиления.

Для нормальной работы системы РА необходимо, чтобы запас устойчивости по усилению, как указывалось ранее, был не менее двух, а запас устойчивости по фазе – 0,5 ... 1 рад.

► **Пример 4.3.** Рассчитать запасы устойчивости в системе ФАПЧ, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии определяется выражением (4.10). Параметры системы: $T_1 = 0,1$ с; $T_2 = 0,04$ с; $T_{\phi\delta} = 0,005$ с; $K = 200$ с⁻¹.

Решение. АЧХ разомкнутой системы

$$|W_p(j\omega)| = \frac{K}{\omega} \frac{\sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2} \sqrt{1 + \omega^2 T_{\phi\delta}^2}};$$

ФЧХ

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} + \arctg\omega T_2 - \arctg\omega T_1 - \arctg\omega T_{\phi\delta}.$$

На рис. 4.8 построен годограф частотной характеристики разомкнутой системы ФАПЧ, из которого видно, что запас устойчивости по усилению равен бесконечности, а по фазе – 0,7 рад. ◀

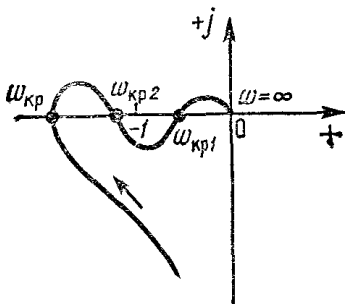


Рис. 4.7. Годограф $W_p(j\omega)$ условно устойчивой системы

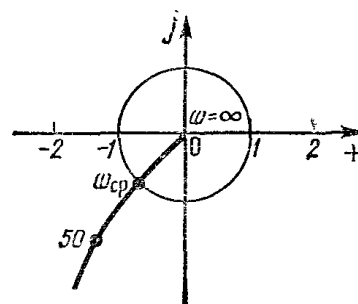


Рис. 4.8. Годограф частотной характеристики разомкнутой системы ФАПЧ

4.5. Оценка устойчивости по ЛЧХ

Построение годографов частотных характеристик разомкнутых систем РА связано с громоздкими вычислениями, поэтому целесообразно оценивать их устойчивость по ЛЧХ.

Для этого необходимо построить логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы.

В том случае, когда годограф $W_p(j\omega)$ не имеет точек пересечения с вещественной осью слева от точки с координатами $(-1, j0)$, для устойчивости замкнутой системы РА необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\omega_{ср} < \omega_{кр}$ (рис. 4.9, а).

В условно устойчивых системах РА для оценки устойчивости следует вести анализ в диапазоне частот, где логарифмическая АЧХ больше нуля, подсчитать число переходов логарифмической ФЧХ через прямую $-\pi$. Если при этом число положительных переходов через эту прямую равно числу отрицательных, то система в замкнутом состоянии устойчива (рис. 4.10).

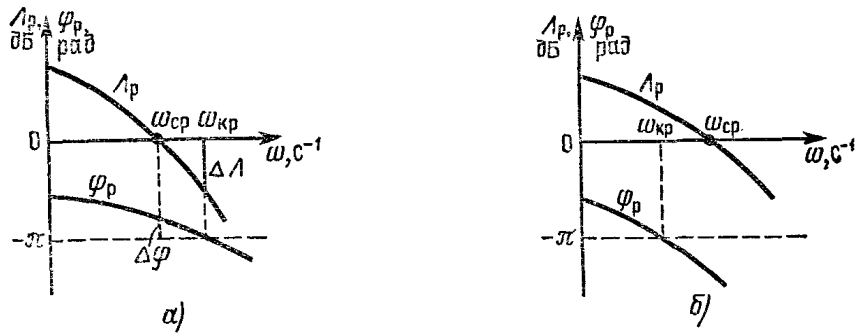


Рис. 4.9. ЛЧХ разомкнутой системы: а – устойчивой; б – неустойчивой

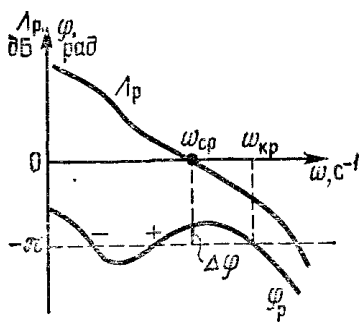


Рис. 4.10. К оценке устойчивости условно устойчивой системы

По ЛЧХ разомкнутой системы можно определить запасы устойчивости – запас по фазе отсчитывают по ФЧХ на частоте среза, а запас по усилению соответствует значению АЧХ на критической частоте, взятому с обратным знаком (см. рис. 4.9, а).

Если $\omega_{cp} = \omega_{kp}$, то система РА находится на границе устойчивости.

Критический коэффициент усиления вычисляют по формуле

$$20 \lg K_{kp} = 20 \lg K + \Delta L. \quad (4.15)$$

► **Пример 4.4.** Определить запасы устойчивости системы автоматического сопровождения цели РЛС, структурная схема которой показана на рис. 4.11.

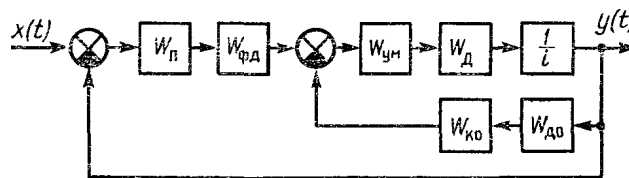


Рис. 4.11. Структурная схема системы автосопровождения цели РЛС

Решение. Передаточная функция цепи сигнала ошибки системы, согласно (3.38),

$$W_1(p) = W_n(p)W_{fd}(p) = \frac{k_1}{(1 + pT_n)(1 + pT_{fd})},$$

где $W_n(p) = k_n/(1 + pT_n)$ – передаточная функция приемника системы; $W_{\phi\delta}(p) = k_{\phi\delta}/(1 + pT_{\phi\delta})$ – передаточная функция фазового детектора; $k_1 = k_n k_{\phi\delta} = 0,175$ В/рад – коэффициент передачи цепи сигнала ошибки; $T_n = T_{\phi\delta} = 0,01$ с – постоянные времени приемника и фазового детектора.

Передаточная функция внутреннего контура системы, образованного усилителем мощности, электрическим двигателем с редуктором и цепью обратной связи, в соответствии с выражением (3.42),

$$W_{\text{вк}}(p) = \frac{W_2(p)}{1 + W_2(p)W_0(p)},$$

где $W_2(p) = W_{\text{ум}}(p)W_{\delta}(p)/i = k_2/p(1 + pT_M)(1 + pT_{\text{ум}})$ – передаточная функция усилителя мощности с двигателем и редуктором;

$k_2 = k_{\text{ум}} k_{\delta} / i = 573$ рад/(с·В) – коэффициент передачи; i – передаточное число редуктора;

$T_M = 0,04$ с; $T_{\text{ум}} = 0,01$ с – постоянные времени двигателя и усилителя мощности;

$W_0(p) = W_{\delta 0}(p)W_{\kappa 0}(p) = k_0 p^2/(1 + pT_0)(1 + pT_{\delta 0})$ – передаточная функция цепи обратной связи;

$W_{\delta 0}(p) = k_{\delta 0}p$ – передаточная функция датчика частоты вращения антенны;

$W_{\kappa 0}(p) = k_{\kappa 0}p/(1 + pT_{\kappa 0})$ – передаточная функция корректирующего устройства в цепи обратной связи системы;

$k_0 = k_{\delta 0}k_{\kappa 0} = 0,0175 \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{рад}}$ – коэффициент передачи

цепи обратной связи;

$T_0 = 0,25$ с – постоянная времени корректирующего звена в цепи обратной связи;

$T_{\delta 0} = 0,002$ с – постоянная времени датчика угловой частоты вращения антенны (влиянием этой постоянной времени на устойчивость системы пренебрежем).

Передаточная функция разомкнутой системы автоматического сопровождения

$$W_p(p) = W_1(p) \frac{W_2(p)}{1 + W_2(p)W_0(p)}.$$

На рис. 4.12 построены ЛЧХ разомкнутой системы, из которых видно, что частота среза меньше критической частоты, поэтому система автоматического сопровождения устойчива с запасами устойчивости по фазе 0,7 рад, а по усилению – 25 дБ. Согласно формуле (4.15) критический коэффициент усиления системы равен 65 дБ, если $k = 100$ или 20 дБ. ◀

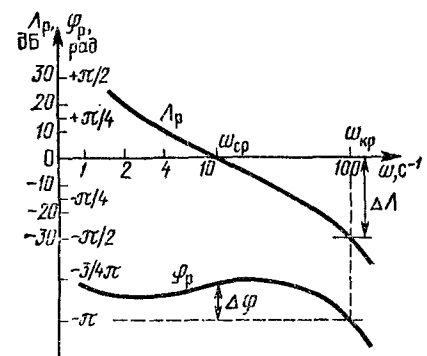


Рис. 4.12. Частотные характеристики системы автосопровождения

В заключение дадим некоторые рекомендации, которые следуют из практики проектирования систем РА. Во-первых, для того чтобы в системе были обеспечены необходимые запасы устойчивости, наклон логарифмической АЧХ в диапазоне частот, в котором расположена частота среза, должен быть равен минус 20 дБ/дек. При наклоне характеристики, равном минус 40 дБ/дек, трудно обеспечить необходимый запас устойчивости по фазе. При наклоне 0 дБ/дек получают излишне большие запасы устойчивости по фазе, система становится передемпфированной с длительным переходным процессом. Во-вторых, запас устойчивости по фазе в системе РА зависит от диапазона частот, в котором логарифмическая АЧХ разомкнутой системы на частоте среза имеет наклон минус 20 дБ/дек. Чем больше этот диапазон частот, тем выше запас устойчивости по фазе, и наоборот.

4.6. Устойчивость систем с запаздыванием

Рассмотрим устойчивость систем РА, в состав которых входят устройства запаздывания (цифровые элементы, запоминающие устройства на магнитных лентах и др.).

Передающую функцию разомкнутой системы с запаздыванием запишем в виде

$$W_p(p) = W_{pu}(p) e^{-p\tau}, \quad (4.16)$$

где $W_{pu}(p)$ – передаточная функция разомкнутой системы без запаздывания; τ – время запаздывания.

Передающей функции (4.16) соответствуют следующие амплитудно- и фазочастотные характеристики разомкнутой системы:

$$|W_p(j\omega)| = |W_{pu}(j\omega)|; \quad \varphi_p = \varphi_{pu}(\omega) - \omega\tau,$$

где $\varphi_{pu}(\omega)$ – фазочастотная характеристика разомкнутой системы без запаздывания.

Из этих характеристик следует, что запаздывание влияет только на фазочастотную характеристику, создавая на каждой частоте дополнительный фазовый сдвиг. Поэтому системы РА, устойчивые без запаздывания, могут быть неустойчивыми при включении в их состав устройств запаздывания. Для оценки устойчивости систем с запаздыванием могут быть использованы ЛЧХ. Проиллюстрируем это на конкретном примере.

► **Пример 4.5.** Передаточная функция системы РА в разомкнутом состоянии

$$W_p(p) = \frac{10}{p(1 + p0,02)} e^{-p0,05}.$$

Определить запасы устойчивости системы.

Решение. На рис. 4.13 построены ЛЧХ разомкнутой системы, из которых видно, что запас устойчивости по фазе равен 0,87 рад, а по усилению – 8 дБ. Отметим, что в системе без запаздывания запас устойчивости по фазе равен 81° , а по усилению – бесконечности.

Нетрудно установить, что при времени запаздывания $\tau > 0,14$ с рассматриваемая система неустойчива. ◀

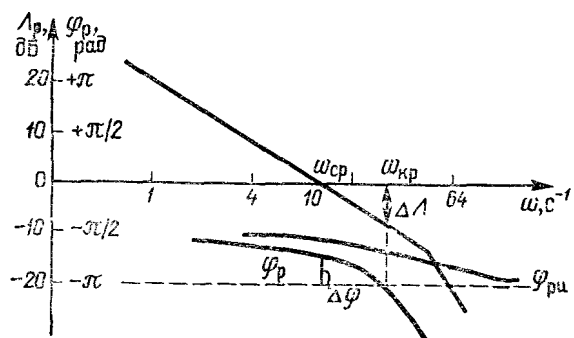


Рис. 4.13. ЛЧХ системы с запаздыванием

Вопросы к теме 4

1. Дайте определение устойчивости системы РА с физической и математической точек зрения.
2. Какой характер имеет переходный процесс в устойчивой и неустойчивой системах?
3. Докажите необходимое условие устойчивости.
4. Докажите достаточное условие устойчивости.
5. Что такое критерии устойчивости? Каким образом они связаны с необходимым и достаточным условиями устойчивости?
6. Что такое граница устойчивости? Каким образом при этом расположены корни характеристического уравнения системы РА на плоскости комплексного переменного?
7. Сформулируйте критерий устойчивости Гурвица.
8. Каким образом по критерию Гурвица вычисляется критический коэффициент усиления и запас устойчивости по усилению?
9. Сформулируйте критерий устойчивости Найквиста.
10. Что такое частота среза и критическая частота? Каким образом определяются эти частоты по годографу частотной характеристики разомкнутой системы?
11. Что такое запасы устойчивости? Каким образом они определяются по годографу частотной характеристики разомкнутой системы?
12. Почему для оценки близости системы РА к границе устойчивости необходимо использовать запасы как по усилению, так и по фазе?
13. Как определяются запасы устойчивости по ЛЧХ?
14. Как вычисляется критический коэффициент усиления по ЛЧХ?

РАЗДЕЛ 4. АНАЛИЗ КАЧЕСТВА РАБОТЫ СИСТЕМ

Тема 5. АНАЛИЗ КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

5.1. Постановка задачи

При анализе качества работы систем РА исходят из того, что структурная схема и параметры устройств системы известны. Требуется оценить качество ее работы. Помимо устойчивости (см. тему 4) системы РА оцениваются рядом качественных показателей, основными из которых являются точность работы, характер переходного процесса и частотные свойства. Показатели качества работы зависят не только от характеристик системы РА, но и от свойств действующих на нее сигналов. Известно, что на систему РА помимо сигналов (управляющих воздействий) действуют возмущающие воздействия (помехи), снижающие точность ее работы. Например, в системах стабилизации промежуточной частоты, в системах автоматического сопровождения цели РЛС изменение температуры окружающей среды, отклонения напряжений источников энергии от номинальных значений, блуждание центра отражения радиолокационного сигнала по цели, шум электронных приборов приемника являются возмущающими воздействиями.

Законы изменения управляющих воздействий и помех обычно заранее неизвестны, поэтому качество работы систем РА определяется косвенными признаками, которые называют *показателями качества работы системы*.

По реакции системы РА на скачкообразный сигнал судят о показателях качества переходного процесса и статической ошибке системы.

Динамическая ошибка работы РА оценивается при управляющем воздействии вида

$$x(t) = \sum_{i=0}^k \alpha_i t^i. \quad (5.1)$$

Частотные показатели качества работы системы РА определяются при гармоническом входном сигнале.

Качество работы систем РА относительно случайных сигналов и помех характеризуется по суммарной средней квадратической ошибке.

В системах автоматической стабилизации входной сигнал является постоянной величиной, поэтому основными показателями качества таких систем являются характеристики переходного процесса и суммарная средняя квадратическая ошибка. Качество работы следящих систем, входной сигнал которых является случайной функцией, оценивается не только по переходному процессу, но и по частотным характеристикам, динамической точности работы и суммарной средней квадратической ошибке.

Для оценки качества работы систем РА применяются и косвенные методы. Эти методы базируются на вычислении интегральных оценок.

Широко используется *квадратичная интегральная оценка*

$$J = \int_0^{\infty} \left\{ e^2(t) + \alpha_1 \dot{e}^2(t) + \alpha_2 \ddot{e}^2(t) + \dots + \alpha_k \left[e^{(k)}(t) \right]^2 \right\} dt, \quad (5.2)$$

где $e(t)$ – ошибка системы, равная разности входного $x(t)$ и выходного $y(t)$ сигналов; α_i – постоянные коэффициенты.

Качество работы системы РА определяется интегральной оценкой (5.2). Чем меньше ее значение, тем выше качество работы системы, и наоборот. Меняя значения коэффициентов α_i , можно изменять влияние на интегральную оценку производных от ошибки системы. Применение интегральных оценок наталкивается на ряд трудностей, одна из которых связана с тем, что по значению интегральной оценки нельзя судить о показателях качества и точности работы системы РА, другая – с вычислением интеграла (5.2).

5.2. Показатели качества переходного процесса

На переходные процессы в системах РА накладываются определенные ограничения, связанные с особенностями работы систем. Например, в системах автоматического сопровождения цели РЛС не допускаются большие углы отклонения антенны от установившегося значения, так как может произойти срыв сопровождаемой цели. Для повышения надежности работы механических узлов ограничивается число колебаний антенны в переходном процессе.

К основным показателям качества переходного процесса в системе РА относятся следующие параметры (рис. 5.1):

- 1) *длительность переходного процесса* t_n , равная интервалу времени с момента подачи сигнала до момента времени, когда выходной сигнал будет отличаться от его установившегося значения не более чем на 5 %;
- 2) *перерегулирование* γ , равное отношению максимального значения выходного сигнала в переходном процессе к установившемуся значению: $\gamma = y_{\max} / y_u$;
- 3) *время установления первого максимума выходного сигнала* t_p , характеризующее скорость изменения выходного сигнала в переходном процессе;
- 4) *частота колебаний в переходном процессе* $\omega = 2\pi/T$, где T – период колебаний.

Для нахождения кривой переходного процесса используются аналитические методы или она определяется с помощью ЭВМ.

Установившееся значение выходного сигнала системы вычисляется по теореме о конечном значении (см. прил. 1).

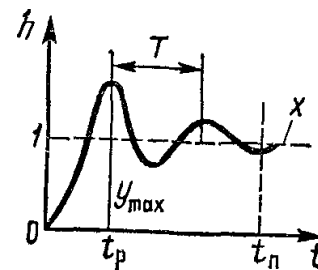


Рис. 5.1. К оценке показателей переходного процесса системы РА

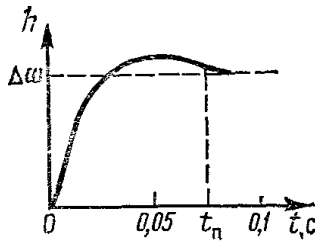


Рис. 5.2. К определению параметров переходного процесса в системе ФАПЧ

При единичном входном сигнале

$$y_y = \lim_{p \rightarrow 0} pW_3(p) \frac{1}{p} = W_3(0),$$

где $W_3(p)$ – передаточная функция замкнутой системы.

В астатических системах РА установившееся значение выходного сигнала в переходном процессе равно единице, в статических системах – $K/(1 + K)$.

Если сигнал на входе системы отличается от единицы, то в переходном процессе изменяется только масштаб выходного сигнала.

► **Пример 5.1.** Найти переходный процесс в системе ФАПЧ, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии определяется выражением (4.10).

Решение. Для упрощения постоянной времени фазового детектора пренебрежем. Тогда передаточная функция замкнутой ФАПЧ (числовые данные – из примера 4.2)

$$W_3(p) = \frac{200(1 + p0,04)}{p(1 + p0,1) + 200(1 + p0,04)}.$$

Преобразование Лапласа для отклонения частоты генератора при изменении эталонной частоты на $\Delta\omega \cdot 1(t)$

$$h(p) = W_3(p) \frac{\Delta\omega}{p} = \frac{200(1 + p0,04)}{0,1p^2 + 9p + 200} \cdot \frac{\Delta\omega}{p}.$$

Полюсы системы: $\lambda_1 = -40$, $\lambda_2 = -50$.

Применив теорему о вычетах (3.10), найдем:

$$h(t) = \Delta\omega \left[1 + 3e^{-40t} - 4e^{-50t} \right].$$

На рис. 5.2 показан график переходного процесса, из которого видно, что длительность переходного процесса $t_n = 0,075c$, а $\gamma = 1,08$. ◀

5.3. Частотные показатели качества

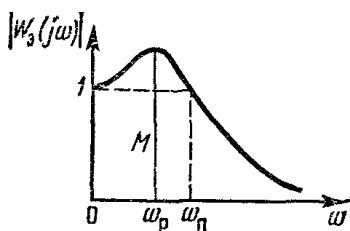


Рис. 5.3. АЧХ замкнутой системы

Частотные показатели качества работы систем РА определяются по АЧХ замкнутой системы (рис. 5.3). Нетрудно установить, что значение этой характеристики при частоте, равной нулю, равно единице в астатических системах и $K/(1 + K)$ в статических системах РА. Для удобства АЧХ статических систем нормируется, т.е. ее значения делятся на ее начальное значение; в этом случае АЧХ статических систем начинается с единицы.

К частотным показателям качества работы систем РА относятся следующие параметры:

1) *полоса пропускания* ω_n – диапазон частот, в котором АЧХ больше или равна единице. Если АЧХ замкнутой системы РА во всем диапазоне частот меньше единицы, то полоса пропускания отсчитывается по уровню 0,7;

2) *резонансная частота* ω_p – частота, соответствующая максимуму АЧХ замкнутой системы, эта частота характеризует частоту колебаний в переходном процессе;

3) *показатель колебательности* M – максимальное значение АЧХ замкнутой системы. Обычно стремятся, чтобы показатель колебательности не превышал двух.

Рассмотрим некоторые приближенные соотношения, устанавливающие связь между параметрами частотных характеристик замкнутой и разомкнутой систем, которые позволяют оценить частотные показатели качества работы системы РА без построения АЧХ замкнутых систем.

Частотные характеристики замкнутой и разомкнутой систем связаны соотношением

$$W_3(j\omega) = \frac{W_p(j\omega)}{1 + W_p(j\omega)} = \left[1 + \frac{1}{|W_p(j\omega)|} e^{-j\varphi_p(\omega)} \right]^{-1},$$

где $|W_p(j\omega)|$, $\varphi_p(\omega)$ – АЧХ и ФЧХ разомкнутой системы.

Из последнего выражения находим, что:

$$|W_3(j\omega)| = \left[1 + \frac{1}{|W_p(j\omega)|^2} + \frac{2}{|W_p(j\omega)|} \cos \varphi_p(\omega) \right]^{-1/2};$$

$$\varphi_3(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\sin \varphi_p(\omega)}{|W_p(j\omega)| + \cos \varphi_p(\omega)}, \quad (5.3)$$

или при $\Delta\varphi = \pi - \varphi_p(\omega)$:

$$|W_3(j\omega)| = \left[1 + \frac{1}{|W_p(j\omega)|^2} - \frac{2}{|W_p(\omega)|} \cos \Delta\varphi(\omega) \right]^{-1/2};$$

$$\varphi_3(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{\sin \Delta\varphi(\omega)}{|W_p(j\omega)| - \cos \Delta\varphi(\omega)}. \quad (5.4)$$

Из уравнений (5.3) и (5.4) следует, что в полосе пропускания обычно $|W_p(j\omega)| \gg 1$, т.е. АЧХ замкнутой системы мало отличается от единицы, а ФЧХ мало отличается от нуля. В диапазоне частот, в котором $|W_p(j\omega)| < 1$, характеристики $|W_3(j\omega)|$ и $\varphi_3(\omega)$ практически совпадают с характеристиками разомкнутой системы.

На частоте, равной полосе пропускания, АЧХ замкнутой системы равна единице.

Тогда, согласно (5.4),

$$W_p(j\omega_n) = \frac{1}{2 \cos \Delta\varphi(\omega_n)}. \quad (5.5)$$

В диапазоне частот среза и пропускания логарифмическая АЧХ разомкнутой системы имеет наклон минус 20 дБ/дек. Поэтому ФЧХ в этом диапазоне частот изменяется незначительно и можно принять, что $\Delta\varphi(\omega_n) \approx \Delta\varphi(\omega_{cp}) = \Delta\varphi$. Тогда выражение (5.5) принимает вид:

$$|W_p(j\omega_n)| = \frac{1}{2 \cos \Delta\varphi}.$$

Полоса пропускания и частота среза связаны соотношением

$$20 \lg \frac{\omega_n}{\omega_{cp}} = -20 \lg |W_p(j\omega_n)|.$$

Отсюда

$$\omega_n = 2\omega_{cp} \cos \Delta\varphi. \quad (5.6)$$

Значение показателя колебательности системы РА можно определить, если исследовать на максимум выражение (5.4). В диапазоне частот, в котором расположена резонансная частота, ФЧХ разомкнутой системы изменяется незначительно и приблизительно равна этой характеристике на частоте среза. Поэтому для отыскания максимума (5.4) можно продифференцировать это выражение по $|W_p(j\omega)|$ приравнять его нулю. В результате получим, что максимум АЧХ замкнутой системы получается при $|W_p(j\omega)| = 1/\cos \Delta\varphi$. Подставив это выражение в (5.4), найдем, что колебательность системы связана с запасом устойчивости по фазе выражением

$$M = 1/\sin \Delta\varphi. \quad (5.7)$$

► **Пример 5.2.** Оценить частотные показатели качества работы системы, частотная характеристика которой в разомкнутом состоянии

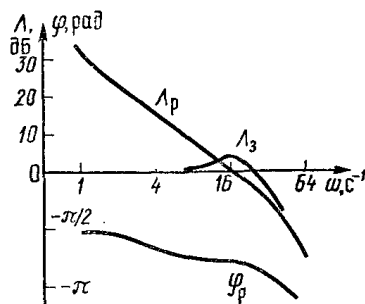


Рис. 5.4. К оценке частотных показателей качества работы систем РА

$$W_p(j\omega) = \frac{40}{j\omega (1 + j\omega 0,5)(1 + j\omega 0,025)^2}.$$

Решение. На рис. 5.4 построены ЛЧХ разомкнутой и замкнутой системы. Из этих характеристик видно, что запас устойчивости по фазе равен 0,89 рад; $\omega_n = 12,5 \text{ с}^{-1}$; $M = 1,2$.

Оценка показателей по формулам (5.6) и (5.7) позволяет получить следующие результаты: $\omega_n = 12,6 \text{ с}^{-1}$, $M = 1,28$, т.е. оценка параметров АЧХ по этим формулам обеспечивает достаточную для практики точность. ◀

Быстродействие системы может определяться по длительности переходного процесса t_n . Длительность переходного процесса определяется как время,

протекающее от момента приложения на вход единичного скачка до момента, после которого имеет место неравенство

$$|y(t) - y(\infty)| \leq \Delta y(\infty) = \Delta_1.$$

Обычно Δ_1 берется равным 1 – 5 % от величины скачка на входе.

Допустимое значение времени переходного процесса определяется обычно на основании опыта эксплуатации реальных систем.

Иногда дополнительно к величине перерегулирования y_{\max} задается допустимое число колебаний, которое может наблюдаться в течение переходного процесса. Обычно это 1 – 2 колебания, иногда до 4-х, а в некоторых случаях колебания вообще не допускаются.

Так как резонансная частота ω_p приблизительно соответствует частоте колебаний замкнутой системы в переходном процессе, то время достижения первого максимума t_p на переходной характеристике может быть определено как

$$t_p \approx \frac{\pi}{\omega_p} \approx \frac{\pi}{\omega_{cp}}.$$

Если переходный процесс в системе заканчивается за 1 – 2 колебания, то время переходного процесса можно определить по приближенной зависимости

$$t_n \approx (1...2) \frac{2\pi}{\omega_p} \approx (1...2) \frac{2\pi}{\omega_{cp}}.$$

В качестве критерия быстродействия часто используется критерий

$$I' = \int_0^{\infty} w^2(t) dt,$$

где $w(t)$ – импульсная переходная (весовая) функция системы по задающему или возмущающему воздействию; $x(t)$ – отклонение регулируемой величины от нового установившегося значения в переходном процессе при действии единичной ступеньки задающего или возмущающего воздействия.

На основании теоремы Парсеваля

$$\begin{aligned} I' &= \int_0^{\infty} w^2(t) dt = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{dh(t)}{dt} \right\}^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |W(j\omega) \cdot 1|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega, \end{aligned}$$

поскольку $H(j\omega) = W(j\omega) \cdot 1$, где 1 – изображение δ -функции. Обычно наилучшими параметрами считаются такие, при которых величина I' имеет минимальное значение.

Вопросы к теме 5

1. Какие характеристики определяют качество работы системы РА?
2. Определите показатели качества переходного процесса и частотные показатели, поясните их физический смысл.
3. Поясните связь частотных показателей качества работы с частотными характеристиками разомкнутой системы РА.

Тема 6. АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ПРИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

6.1. Анализ точности работы систем

Помимо статических ошибок, которые были рассмотрены в п. 3.11, точность работы систем РА характеризуется динамическими и переходными ошибками (рис. 6.1).

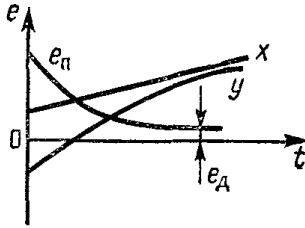


Рис. 6.1. К пояснению точности работы системы РА

Динамическая ошибка – ошибка в установившемся режиме работы системы при действии на нее нестационарного сигнала.

Переходная ошибка – ошибка при работе системы в переходном процессе, который возникает при обработке начального рассогласования.

Динамическая точность работы систем РА определяется при медленно изменяющихся входных сигналах, число производных от которых ограничено. Сигнал

$x(t) = \sum_{i=0}^k \alpha_i t^i$ относится к медленно изменяющему воздействию, так как число

производных от этого сигнала, не равных нулю, равно K , а $(K + 1)$ -я производная равна нулю. Гармонический сигнал не является медленно изменяющимся, так как число производных от него равно бесконечности. Переходные процессы в системах РА затухают значительно быстрее по сравнению с изменением медленно изменяющегося сигнала, поэтому и достигается установившийся динамический режим работы системы.

В соответствии с определением передаточной функции ошибки преобразование Лапласа для ошибки системы

$$E(p) = W_e(p)X(p) = [C_0 + C_1 p + \frac{1}{2} C_2 p^2 + \dots + \frac{1}{k!} C_k p^k] X(p), \quad (6.1)$$

или в области действительного переменного

$$e(t) = C_0 x(t) + C_1 \dot{x}(t) + \frac{1}{2} C_2 \ddot{x}(t) + \dots + \frac{1}{k} C_k x^{(k)}(t). \quad (6.2)$$

Число слагаемых в последнем выражении ограничено, так как сигнал $x(t)$ является медленно изменяющимся воздействием. Для нахождения неизвестных коэффициентов C_i , которые называют *коэффициентами ошибки*, известны три способа.

Первым способом эти коэффициенты вычисляются по формуле

$$C_k = k! \frac{d^k}{dp^k} W_e(p) \Big|_{p=0}.$$

Вторым способом коэффициенты ошибок находятся путем деления числителя передаточной функции ошибки на ее знаменатель.

Наиболее удобным является третий способ. Передаточную функцию ошибки представим в виде

$$W_e(p) = \frac{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}.$$

Перемножив полином знаменателя последнего выражения на выражение (6.1), получим:

$$\begin{aligned} \left[a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 \right] \left[C_0 + C_1 p + \frac{1}{2} C_2 p^2 + \dots + \frac{1}{k!} C_k p^k \right] = \\ = b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях p слева и справа в последнем выражении, определим формулы для последовательного вычисления коэффициентов ошибок. В результате найдем, что

$$C_0 = \frac{b_0}{a_0}; C_1 = \frac{1}{a_0} [b_1 - a_1 C_0]; C_2 = \frac{2}{a_0} [b_2 - a_2 C_0 - a_1 C_1].$$

Из выражения (6.2) следует, что коэффициенты ошибок имеют размерность c^i .

В инженерных расчетах коэффициенты ошибок удобнее рассчитывать через коэффициенты передаточной функции разомкнутой системы:

$$W_p(p) = \frac{K}{p^\gamma} \frac{d_m p^m + \dots + d_2 p^2 + d_1 p + d_0}{b_n p^n + \dots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0}. \quad (6.4)$$

В табл. 6.1 приведены формулы для расчета первых трех коэффициентов ошибок статических и астатических систем РА через параметры передаточной функции (6.4).

Первое слагаемое в выражении (6.2) называют *ошибкой по положению*, а коэффициент C_0 – *коэффициентом ошибки по положению*, второе слагаемое – *ошибкой по скорости*, а коэффициент C_1 – *коэффициентом ошибки по скорости*.

Аналогично, третье слагаемое в (6.2) называют *ошибкой по ускорению*, а коэффициент C_2 – *коэффициентом ошибки по ускорению*. Учитывая особенности передаточных функций астатических систем РА, нетрудно установить, что в таких системах γ первых коэффициентов ошибок равны нулю, где γ – порядок астатизма системы РА.

При анализе качества работы систем РА помимо определения точности при медленно изменяющихся сигналах приходится оценивать точность и при гармонических воздействиях. В этом случае нельзя применять метод коэффици-

ентов ошибок, так как число производных от гармонического сигнала не ограничено. Очевидно, что при этом для расчета ошибок необходимо использовать частотные характеристики. По АЧХ ошибки вычисляется амплитуда колебаний ошибки, а по ФЧХ – сдвиг колебаний ошибки относительно входного сигнала.

Таблица 6.1

γ	C_i	Формулы для расчета
0	C_0	$\frac{1}{1+K}$
	C_1	$K \frac{b_1 - d_1}{(1+K)^2}$
	C_2	$2 \left[K \frac{b_2 - d_2}{(1+K)^2} + K \frac{b_1(d_1 - b_1)}{(1+K)^3} + K^2 \frac{2d_1(d_1 - b_1)}{(1+K)^3} \right]$
1	C_0	0
	C_1	$\frac{1}{K}$
	C_2	$2 \left[\frac{b_1 - d_1}{K} - \frac{1}{K^2} \right]$
2	C_0	0
	C_1	0
	C_2	$\frac{2}{K}$

► **Пример 6.1.** Найти динамическую ошибку при входном сигнале

$$x(t) = \alpha_1 t + \frac{1}{2} \alpha_2 t^2$$

следящей системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии

$$W_p(p) = \frac{K}{p} \frac{1 + pT_2}{(1 + pT_1)(1 + pT_3)}$$

Решение. Коэффициенты ошибок вычисляются по формулам табл. 6.1,

$$\text{для } C_0 = 0; \quad C_1 = \frac{1}{K}; \quad C_2 = 2 \left[\frac{T_1 + T_3 - T_2}{K} - \frac{1}{K^2} \right].$$

Динамическая ошибка системы в соответствии с выражением (6.2)

$$e(t) = \frac{1}{K}(\alpha_1 + \alpha_2 t) + \frac{1}{K} \left[T_1 + T_3 - T_2 - \frac{1}{K} \right] \alpha_2.$$

Из этого выражения следует, что при увеличении коэффициента усиления системы и введении форсирующего звена ошибка уменьшается, увеличение же постоянных времени инерционных звеньев ухудшает динамическую ошибку системы. ◀

Вопросы к теме 6

1. Что такое статическая и динамическая ошибки системы РА?
2. Какие воздействия относятся к медленно изменяющимся сигналам?
3. Каким образом экспериментальным путем можно определить ошибку системы РА по положению и по скорости?
4. При каком сигнале статическая ошибка совпадает с ошибкой по положению?
5. Чему равны первые два коэффициента ошибок в системах РА с астатизмом первого и второго порядков?

Тема 7. АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

7.1. Средняя квадратическая ошибка системы

Качество работы систем РА при случайных воздействиях оценивается по суммарной средней квадратической ошибке. В большинстве случаев закон распределения ошибки системы можно считать гауссовским, поэтому для расчета составляющих суммарной средней квадратической ошибки достаточно учесть математическое ожидание и корреляционную функцию ошибки или ее спектральную плотность.

Прежде чем рассматривать методы вычисления суммарной средней квадратической ошибки, установим, через какие передаточные функции в выражение для суммарной ошибки входят сигнал и помеха, полагая, что на вход системы подается воздействие вида

$$f(t) = x(t) + n(t),$$

где $x(t)$ – случайный сигнал; $n(t)$ – случайная помеха.

Суммарная ошибка системы (рис. 7.1)

$$e_{\Sigma}(t) = x(t) - y(t),$$

где $y(t)$ – выходной сигнал системы.

Здесь $W_3(p)$ – система со стопроцентной обратной связью, т.е. с коэффициентом передачи, равным единице;

схема представлена, чтобы сравнить входной и выходной сигналы.

Преобразование Лапласа для суммарной ошибки:

$$E(p) = X(p) - W_3(p)F(p) = X(p) - W_3(p)[X(p) + n(p)] = X(p) - W_3(p)X(p) - W_3(p)n(p) = X(p)[1 - W_3(p)] - W_3(p)n(p) = W_e(p)X(p) - W_3(p)n(p), \quad (7.1)$$

где $W_3(p)$ – передаточная функция замкнутой системы; $W_e(p)$ – передаточная функция ошибки анализируемой системы; $X(p)$, $n(p)$ – преобразования Лапласа для сигнала и помехи.

Из выражения (7.1) следует, что суммарная ошибка состоит из двух составляющих, одна из которых, определяющая точность воспроизведения сигнала, зависит от передаточной функции ошибки, вторая, обусловленная действием помехи, – от передаточной функции замкнутой системы.

При анализе средней квадратической ошибки ограничимся случаем, когда сигнал и помеха являются стационарными случайными функциями.

При этом математическое ожидание помехи будем полагать равным нулю, а случайный сигнал представим в виде

$$x(t) = m_x + \overset{\circ}{x}(t),$$

где m_x – математическое ожидание сигнала; $\overset{\circ}{x}(t)$ – случайная составляющая сигнала.

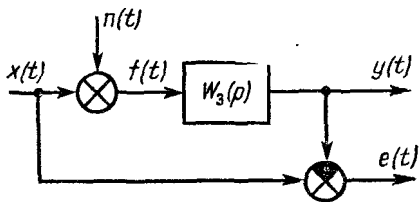


Рис. 7.1. К определению суммарной ошибки

Математическое ожидание суммарной ошибки рассчитывают по теореме о конечном значении функции (см. прил. 1):

$$m_e = \lim_{p \rightarrow 0} p W_e(p) m_x(p). \quad (7.2)$$

Точность системы относительно случайных составляющих сигнала и помехи оценивается дисперсией ошибки:

$$\sigma_e^2 = M \left[e^2(t) \right] = R_e(\tau) \Big|_{\tau=0}, \quad (7.3)$$

где σ_e^2 – дисперсия шибки; σ_e – средняя квадратическая ошибка системы; $e(t)$ – ошибка системы; M – математическое ожидание от квадрата ошибки; $R_e(\tau)$ – автокорреляционная функция ошибки.

На основании эргодической теоремы автокорреляционную функцию ошибки находят как среднее по времени от произведения случайных составляющих ошибки, разделенных промежутком времени τ :

$$R_e(\tau) = \overset{\circ}{e}(t) \overset{\circ}{e}(t + \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \overset{\circ}{e}(t) \overset{\circ}{e}(t + \tau) dt, \quad (7.4)$$

где $\overset{\circ}{e}(t) = \overset{\circ}{x}(t) - \overset{\circ}{y}(t)$ – случайная составляющая суммарной ошибки.

По теореме свертки и учитывая, что $E(p) = W_e(p)X(p) - W_3(p)n(p)$ (см. прил. П.1 и (7.1),

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{e}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[w_e(\lambda) \overset{\circ}{x}(t - \lambda) - w_3(\lambda) \overset{\circ}{n}(t - \lambda) \right] d\lambda; \\ \overset{\circ}{e}(t + \tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[w_e(\eta) \overset{\circ}{x}(t + \tau - \eta) - w_3(\eta) \overset{\circ}{n}(t + \tau - \eta) \right] d\eta, \end{aligned} \quad (7.5)$$

где $w_e(t)$ – импульсная переходная функция ошибки системы; $w_3(t)$ – импульсная переходная функция замкнутой системы.

Так как рассматривают стационарный режим работы системы, то интегрирование в выражениях (7.5) берут от минус бесконечности.

Подставив выражения (7.5) в (7.4), после несложных преобразований найдем автокорреляционную функцию ошибки:

$$R_e(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[w_e(\lambda) w_e(\eta) R_x(\tau + \lambda + \eta) + w_3(\lambda) w_3(\eta) R_n(\tau + \lambda - \eta) + \right. \\ \left. + w_e(\lambda) w_3(\eta) R_{xn}(\tau + \lambda - \eta) + w_3(\lambda) w_e(\eta) R_{nx}(\tau + \lambda - \eta) \right] d\lambda d\eta, \quad (7.6)$$

где $R_x(\tau)$ – автокорреляционная функция сигнала; $R_n(\tau)$ – автокорреляционная функция помехи; $R_{xn}(\tau)$, $R_{nx}(\tau)$ – взаимные корреляционные функции.

Подставив в последнее выражение вместо τ нуль, получим дисперсию ошибки системы:

$$\begin{aligned}\sigma_e^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[w_e(\lambda)w_e(\eta)R_x(\lambda - \eta) + w_3(\lambda)w_3(\eta)R_{\Pi}(\lambda - \eta) + \right. \\ &\quad \left. + w_e(\lambda)w_3(\eta)R_{x\Pi}(\lambda - \eta) + w_3(\lambda)w_e(\eta)R_{\Pi x}(\lambda - \eta) \right] d\lambda d\eta = \\ &= \sigma_{ex}^2 + \sigma_{e\Pi}^2 + \sigma_{ex\Pi}^2 + \sigma_{e\Pi x}^2.\end{aligned}\quad (7.7)$$

Дисперсия ошибки может быть вычислена и через ее спектральную плотность, которая, как известно, равна преобразованию Фурье от автокорреляционной функции ошибки системы (7.6):

$$S_e(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_e(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau.$$

Подставив в это выражение формулу (7.6), определим спектральную плотность ошибки системы:

$$\begin{aligned}S_e(\omega) &= |W_e(j\omega)|^2 S_x(\omega) + |W_3(j\omega)|^2 S_n(\omega) + \\ &+ W_e(-j\omega)W_3(j\omega)S_{xn}(\omega) + W_e(j\omega)W_3(-j\omega)S_{nx}(\omega),\end{aligned}\quad (7.8)$$

где $S_e(\omega)$ – спектральная плотность сигнала; $S_n(\omega)$ – спектральная плотность помехи; $S_{xn}(\omega)$, $S_{nx}(\omega)$ – взаимные спектральные плотности.

Так как

$$R_e(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_e(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega,$$

то в соответствии с выражением (7.3) дисперсия ошибки

$$\begin{aligned}\sigma_e^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[|W_e(j\omega)|^2 S_x(\omega) + |W_3(j\omega)|^2 S_n(\omega) + W_e(-j\omega)W_3(j\omega)S_{xn}(\omega) + \right. \\ &\quad \left. + W_e(j\omega)W_3(-j\omega)S_{nx}(\omega) \right] d\omega = \\ &= \sigma_{ex}^2 + \sigma_{en}^2 + \sigma_{exn}^2 + \sigma_{enx}^2.\end{aligned}\quad (7.9)$$

Если сигнал и помеха некоррелированы, то

$$R_{xn}(\tau) = R_{nx}(\tau) = 0; \quad S_{xn}(\omega) = S_{nx}(\omega) = 0$$

и выражения (7.5) – (7.9) упрощаются.

Первое слагаемое в (7.9) зависит как от АЧХ ошибки системы, так и от статистических характеристик сигнала, оно определяет среднюю квадратическую ошибку воспроизведения сигнала $x(t)$. Второе слагаемое в (7.9) зависит от АЧХ замкнутой системы и характеристик помехи, оно характеризует ошибку системы вследствие действия помехи $n(t)$. Последние два слагаемых в (7.9) – составляющие ошибки из-за корреляции сигнала с помехой и помехи с сигналом.

Величину

$$\sigma_{\Sigma} = \left[m_e^2 + \sigma_e^2 \right]^{1/2}\quad (7.10)$$

называют *суммарной средней квадратической ошибкой системы РА*.

Вычисление средней квадратической ошибки через ее автокорреляционную функцию (7.6) связано с некоторыми трудностями, одна из которых связана с нахождением импульсной переходной функции анализируемой системы РА, другая – с вычислением (7.7). Поэтому на практике среднюю квадратическую ошибку рассчитывают через спектральную плотность ошибки по формуле (7.9), вычисление интеграла в которой производится по формулам, приведенным в прил. 2. В инженерной практике среднеквадратическая ошибка также находится с помощью графоаналитического метода. Для этого строят графики, соответствующие отдельным слагаемым выражения (7.8). Дисперсия ошибки для некоррелированных сигнала и помехи $\sigma^2 = (Q_x + Q_n/\pi)$, где Q_x и Q_n – площади под графиками спектральных плотностей (рис. 7.2, а, б).

На практике часто встречаются случаи, когда помеху можно считать белым шумом, спектральная плотность которого в пределах полосы пропускания системы РА постоянна.

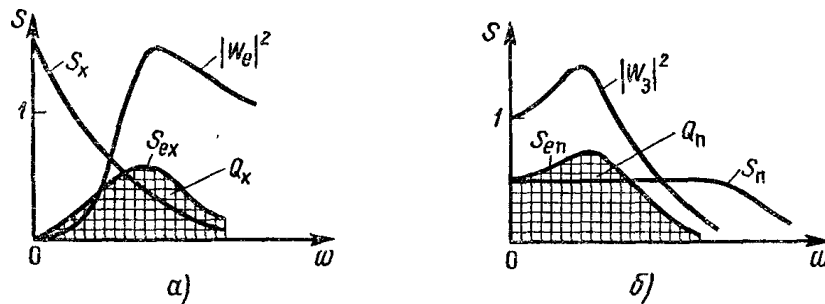


Рис. 7.2. К определению средней квадратической ошибки системы РА

При этом дисперсия ошибки системы из-за действия помехи

$$\sigma_{en}^2 = \frac{S_n(0)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |W_3(j\omega)|^2 d\omega.$$

Величину

$$f_{\text{эф}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |W_3(j\omega)|^2 d\omega; \quad \omega_{\text{эф}} = \int_{-\infty}^{+\infty} |W_3(j\omega)|^2 d\omega \quad (7.11)$$

называют *эффективной полосой пропускания системы РА*. Из рис. 7.3 видно, что $\omega_{\text{эф}}$ – это основание прямоугольника, площадь которого равна площади, ограниченной графиком квадрата АЧХ. Дисперсия ошибки системы РА из-за действия помехи

$$\sigma_{en}^2 = S_n(\omega)\omega_{\text{эф}} / \pi. \quad (7.12)$$

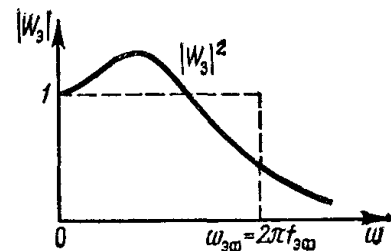


Рис. 7.3. К определению эффективной полосы пропускания системы РА

В табл. 7.1 даны выражения для вычисления эффективной полосы пропускания систем РА, наиболее часто встречающихся в радиотехнических устройствах.

Таблица 7.1

$W_p(p)$	$f_{эф}$
$\frac{K}{p}$	$\frac{K}{2}$
$\frac{K}{1+pT}$	$\frac{K^2}{2T(1+K)}$
$\frac{K}{p(1+pT_1)(1+pT_3)}$	$\frac{K}{2(T_1+T_3-KT_1T_3)}$
$\frac{K(+pT_2)}{p(1+pT_1)}$	$\frac{K(T_1+T_2^2K)}{2T_1(1+KT_2)}$
$\frac{K(1+pT_2)}{p^2}$	$\frac{1+KT_2^2}{2T_2}$

7.2. Система с белым шумом на входе

Помехи обычно являются белыми шумами, а сигналы, как правило, не относятся к белым шумам. Однако если использовать формирующий фильтр, то анализ систем РА относительно сигналов сводится к случаю действия на систему белых шумов.

Формирующий фильтр – устройство, позволяющее генерировать случайный сигнал с заданной спектральной плотностью из сигнала белого шума. Характеристики формирующего фильтра для стационарных случайных сигналов определяются следующим образом. Так как спектральная плотность сигнала является четной дробно-рациональной функцией частоты, то она может быть представлена в виде двух комплексно-сопряженных сомножителей:

$$S_x(\omega) = N_x \psi(j\omega) \psi(-j\omega),$$

откуда и находится передаточная функция формирующего фильтра:

$$W_\phi(p) = \psi(j\omega) \Big|_{j\omega=p}$$

Для расчета коэффициентов передаточной функции формирующего фильтра выражение для спектральной плотности сигнала нужно записать в виде

$$S_x(\omega) = N_x \frac{c_{2m}(j\omega)^{2m} + \dots + c_2(j\omega)^2 + c_0}{d_{2n}(j\omega)^{2n} + \dots + d_2(j\omega)^2 + d_0} = \left| \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + \dots + a_1(j\omega) + a_0} \right|^2 N_x. \quad (7.13)$$

Вычислив квадрат модуля в правой части (7.13) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях частоты слева и справа, получим уравнения для определения коэффициентов передаточной функции формирующего фильтра a_i и b_i .

Формирующий фильтр и анализируемая система РА образуют некоторую расширенную систему, на вход которой действует белый шум. На рис. 7.4 показана схема такой системы для случая, когда помеха является белым шумом. Если помеха не белый шум, то в схему расширенной системы нужно включить формирующий фильтр, который из белого шума будет генерировать случайную помеху с заданной спектральной плотностью.

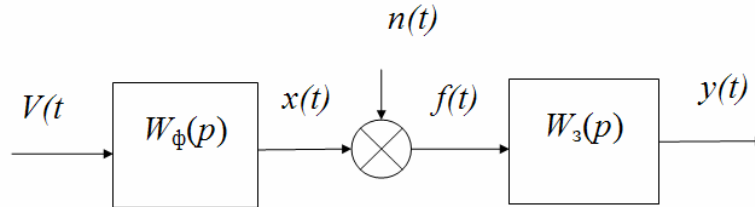


Рис. 7.4. Схема включения формирующего фильтра

► **Пример 7.1.** Найти передаточную функцию формирующего фильтра для сигнала, возникающего из-за колебаний летательного аппарата, спектральная плотность которого

$$S_k(\omega) = N_k \frac{1 + T_{k0}\omega^2}{\omega^2 [T_k^4 \omega^4 + 4\xi^2 T_k^2 \omega^2 + 1]}.$$

Решение. В соответствии с выражением (7.13)

$$N_k \frac{1 + T_{k0}\omega^2}{\omega^2 [T_k^4 \omega^4 + 4\xi^2 T_k^2 \omega^2 + 1]} = N_k \left| \frac{b_0 + b_1(j\omega)}{\omega [a_2(j\omega)^2 + a_1(j\omega) + a_0]} \right|^2.$$

Из последнего выражения найдем, что

$$b_0 = 1; \quad b_1 = T_{k0};$$

$$a_0 = 1; \quad a_1 = 2T_k^2(1 + 2\xi^2), \quad a_2 = T_k^2.$$

Таким образом, передаточная функция формирующего фильтра имеет вид

$$W_{\phi k}(p) = \frac{1 + T_{k0}}{p [T_k^2 p^2 + 2\xi_k T_k p + 1]}, \quad (7.14)$$

где $2\xi_k = [2(2\xi^2 + 1)]^{1/2}$.

На вход формирующего фильтра с передаточной функцией (7.14) нужно подать белый шум с уровнем спектральной плотности N_k . ◀

► **Пример 7.2.** Определить среднюю квадратическую ошибку системы автоматического сопровождения цели РЛС, передаточная функция которой в замкнутом состоянии имеет вид

$$W_3(p) = \frac{1 + pT_2}{(1 + pT_1)(1 + pT_3)},$$

где $T_1 = 0,37$ с; $T_2 = 0,5$ с, $T_3 = 0,14$ с.

На систему поступают:

1) сигнал, обусловленный перемещением сопровождаемой цели относительно РЛС, установленной на летательном аппарате. Математическое ожидание и спектральная плотность случайной составляющей этого сигнала определяются выражениями

$$m_x = \alpha t; \quad S_x(\omega) = \frac{N_x}{\omega^2(1 + T_x^2\omega^2)},$$

где $\alpha = 0,175$ рад·с⁻¹; $N_x = 3,05 \cdot 10^{-4}$ рад²·с; $T_x = 20$ с;

2) случайное воздействие, возникающее из-за колебаний летательного аппарата относительно центра масс.

Спектральная плотность этого воздействия

$$S_k(\omega) = N_k \frac{1 + T_{k0}^2\omega^2}{\omega^2 [T_k^4\omega^4 + 4\xi^2 T_k^2\omega^2 + 1]},$$

где $N_k = 0,15 \cdot 10^{-4}$ рад²·с; $T_k = 0,4$ с; $T_{k0} = 2,5$ с; $4\xi^2 = 1$;

3) угловой шум, возникающий из-за того, что центр отражения радиолокационного сигнала «блуждает» по сопровождаемой цели. Этот шум можно считать белым с уровнем спектральной плотности [18] $S_{yu} = (0,25 L/R)^2$, где L – геометрический размер цели; R – дальность до сопровождаемой цели;

4) помехи, обусловленные тепловым шумом приемника РЛС и флуктуациями отраженного от цели сигнала. Эти воздействия при анализе точности системы можно считать белыми шумами и объединить в одно воздействие с уровнем спектральной плотности $S_\phi(\omega) = N_\phi$, где $N_\phi = 0,31 \cdot 10^{-6}$ рад·с.

Решение. Математическое ожидание (динамическая ошибка системы) в соответствии с (7.2)

$$m_e = \lim_{p \rightarrow 0} p W_e(p) \frac{\alpha}{p^2} = (T_1 + T_3 - T_2)\alpha = 0,17 \cdot 10^{-2} \text{ рад},$$

где $W_e(p) = 1 - W_3(p)$ – передаточная функция ошибки системы автоматического сопровождения цели РЛС.

Дисперсия ошибки системы относительно случайной составляющей сигнала вычисляется по формуле (7.9), в которой спектральная плотность под знаком интеграла:

$$S_{ex}(\omega) = N_x \left| W_e(j\omega) W_{\phi x}(j\omega) \right|^2,$$

где $W_{\phi x}(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1+j\omega T_x)}$ – частотная характеристика формирующего фильтра сигнала.

Таким образом, дисперсия ошибки относительно сигнала

$$\begin{aligned} \sigma_{ex}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} N_x \left| \frac{c_1(j\omega) + c_0}{d_3(j\omega)^3 + d_2(j\omega)^2 + d_1(j\omega) + d_0} \right| d\omega = \\ &= N_x \frac{c_1^2 d_0 + c_0^2 d_2}{2d_0(d_1 d_2 - d_0 d_3)}, \end{aligned}$$

где $c_1 = T_1 T_3$; $c_0 = T_1 + T_3 - T_2$; $d_3 = T_1 T_3 T_x$; $d_2 = T_1 T_3 + T_1 T_x + T_3 T_x$; $d_1 = T_1 + T_3 + T_x$; $d_0 = 1$.

Последний интеграл найден по формуле, приведенной в прил. 2, для $n = 3$. Подставив значения параметров системы и сигнала в последнее выражение, найдем, что

$$\sigma_{ex}^2 = 0,21 \cdot 10^{-6} \text{ рад}^2.$$

Случайный сигнал, возникающий из-за колебаний летательного аппарата, является управляющим воздействием, поэтому в формуле для дисперсии ошибки он определяется через передаточную функцию ошибки. Дисперсия ошибки системы относительно сигнала колебаний летательного аппарата, согласно (7.9),

$$\begin{aligned} \sigma_{ek}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} N_k \left| W_e(j\omega) W_{\phi k}(j\omega) \right|^2 d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} N_k \left| \frac{c_{2k}(j\omega)^2 + c_{1k}(j\omega) + c_{0k}}{d_{4k}(j\omega)^4 + d_{3k}(j\omega)^3 + d_{2k}(j\omega)^2 + d_{1k}(j\omega) + d_{0k}} \right| d\omega, \end{aligned}$$

где $W_{\phi k}(j\omega)$ – частотная характеристика формирующего фильтра для колебаний летательного аппарата, определяемая выражением (7.14);

$$\begin{aligned} c_{2k} &= T_1 T_3 T_{k0}; \quad c_{1k} = T_{k0}(T_1 + T_3 - T_2); \quad c_{0k} = T_1 + T_3 - T_2; \\ d_{4k} &= T_k^2 T_1 T_3; \quad d_{3k} = T_k^2(T_1 + T_3) + 2\xi_k T_1 T_3 T_k; \quad d_{2k} = T_k^2 + T_1 T_3 + 2\xi_k T_k(T_1 + T_3); \\ d_{1k} &= 2\xi_k T_k + T_1 + T_3; \quad d_{0k} = 1. \end{aligned}$$

Этот интеграл вычисляется по формуле, данной в прил. 2, для случая $n = 4$;

$$\sigma_{ek}^2 = \frac{c_{2k}^2 d_{0k} d_{1k} d_{4k} + (c_{1k}^2 - 2c_{0k} c_{2k}) d_{0k} d_{3k} d_{4k} + c_{0k}^2 (-d_{1k} d_{4k}^2 + d_{2k} d_{3k} d_{4k})}{2d_{0k} d_{4k} (-d_{0k} d_{3k}^2 - d_{1k}^2 d_{4k} + d_{1k} d_{2k} d_{3k})}.$$

После подстановки в это выражение заданных значений параметров системы и сигнала получим:

$$\sigma_{ек}^2 = 2,31 \cdot 10^{-6} \text{ рад}^2.$$

Угловой шум и флуктуации отраженного от цели сигнала являются помехами для системы автоматического сопровождения цели, снижающими точность сопровождения цели.

Составляющие дисперсии ошибки системы, возникающие из-за углового шума и флуктуации отраженного от цели сигнала, определяются выражениями

$$\sigma_{еуш}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |W_3(j\omega)|^2 S_{уш}(\omega) d\omega = S_{уш} \left[\frac{T_2^2}{2T_1T_3(T_1 + T_3)} + \frac{1}{2(T_1 + T_3)} \right];$$

$$\sigma_{еф}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |W_3(j\omega)|^2 S_{ф}(\omega) d\omega = N_{ф} \left[\frac{T_2^2}{2T_1T_3(T_1 + T_3)} + \frac{1}{2(T_1 + T_3)} \right].$$

При дальности до сопровождаемой цели $R = 5000$ м и $L = 5$ м эти ошибки имеют следующие значения:

$$\sigma_{еуш}^2 = 0,036 \cdot 10^{-6} \text{ рад}^2; \quad \sigma_{еф}^2 = 1,73 \cdot 10^{-6} \text{ рад}^2.$$

Таким образом, суммарная средняя квадратическая ошибка системы автоматического сопровождения цели РЛС в соответствии с (6.21)

$$\sigma_{\Sigma} = \left[m_e^2 + \sigma_{ex}^2 + \sigma_{ек}^2 + \sigma_{еуш}^2 + \sigma_{еф}^2 \right]^{1/2} = 0,28 \cdot 10^{-2} \text{ рад.} \blacktriangleleft$$

В ряде случаев системы работают в условиях периодического пропадания сигнала на входе дискриминатора, вызванного, например, глубокими амплитудными замираниями (федигами).

Пропадание сигнала приводит к пропаданию регулирующего напряжения, и, как следствие, к размыканию контура управления. В обобщенной схеме этот процесс отображается размыканием ключа К1.

Так как в дискриминаторе происходит нелинейное преобразование сигнала и шума, то пропадание сигнала сопровождается также изменением флуктуационного напряжения на выходе дискриминатора. В схеме это учтено К2 (рис. 7.5), который перебрасывается из левого положения в правое, т.е. к $\xi_n(t)$. К пропаданию сигнала причастны некоторые виды помех, фединги и др.

Несимметрия дискриминатора – наличие составляющей $\xi_n(t)$ дает постоянную составляющую, которая не зависит от ошибки сигнала, и ее наличие неблагоприятно отражается на работе системы. Поэтому при проектировании значительное внимание уделяют симметрированию.

Положим, что до размыкания система работала с малыми внутренними шумами и ошибка имела нормальный закон распределения $w(x,0) = w(x,t)_{t=0}$. По-

сле размыкания контура управления математическое ожидание и дисперсия начинают увеличиваться и распределение $w(x,t)$ плотности вероятности ошибки изменяется во времени.

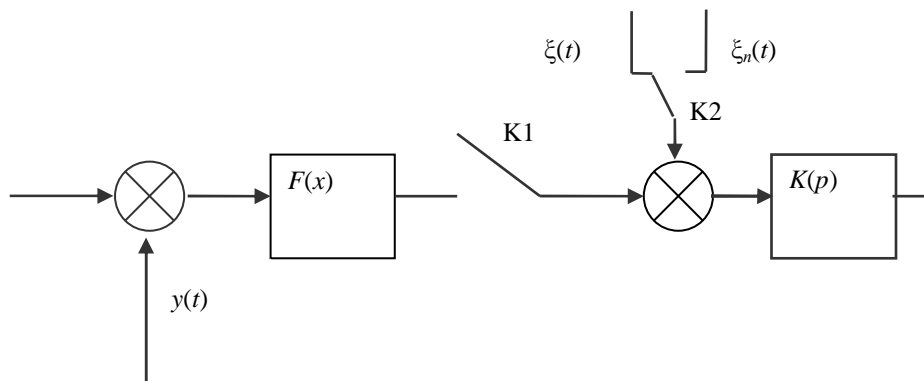


Рис. 7.5. Обобщенная схема с моделированием процесса пропадания сигнала

К моменту $t = t_1$ нового появления сигнала оно принимает вид

$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x(t_1)} \exp \left\{ -\frac{[x - m_x(t_1)]^2}{2\sigma_x^2(t_1)} \right\},$$

где $m_x(t_1)$, $\sigma_x^2(t_1)$ – значения математического ожидания и дисперсии ошибки в момент времени $t = t_1$ (рис 7.6, а).

Если ошибка слежения в момент $t = t_1$ окажется в пределах раскрыва x_a дискриминаторной характеристики (см. рис. 7.6, б), то режим слежения может возобновиться. В противном случае происходит срыв слежения.

Вероятность (p_n) того, что через время t_1 после размыкания системы рассогласование x находится в пределах раскрыва характеристики дискриминатора, характеризует память системы. Память является полезным свойством следящей системы, которое позволяет сохранять режим слежения при пропадании сигнала на некоторое время.

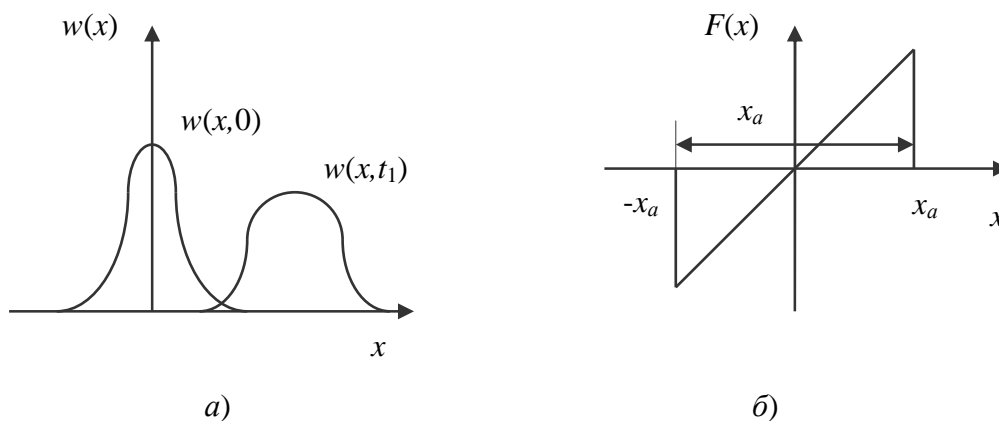


Рис. 7.6. Дисперсия сигнала и дискриминационная характеристика

Величина p_n вычисляется по формуле

$$p_n(t_1) = \int_{-x_2}^{x_2} w(x, t) dx,$$

где x_2 и $-x_2$ – границы раскрытия характеристики дискриминатора.

Следящая система обладает тем большей памятью, чем медленнее после размыкания увеличиваются $m_x(t)$ и $\sigma_x^2(t)$. Эти величины зависят от структуры и параметров фильтра системы, характера задающего воздействия и интенсивности флуктуационного напряжения на выходе дискриминатора.

Анализ показывает, что после размыкания системы с одним интегратором математическое ожидание при постоянном во времени воздействии сохраняется равным нулю. О такой системе говорят, что она обладает памятью по положению.

При размыкании системы с двумя интеграторами среднее значение рассогласования остается равным нулю, если даже воздействие изменяется линейно во времени. Следовательно, такая система обладает памятью не только по положению, но и по скорости.

Система с одним интегратором и пропорционально-интегрирующим фильтром,

$$K(p) = \frac{k_u(1 + pT_1)}{u(1 + pT_2)},$$

занимает промежуточное положение между двумя системами и обладает частичной памятью по скорости. Память тем выше, чем больше T_2 .

При малых отношениях t/T_2 значительное влияние на изменение математического ожидания ошибки оказывает T_1 . При ее увеличении ошибка накапливается быстрее, что неблагоприятно влияет на память системы.

Вообще для конкретных систем управления существуют оптимальные значения коэффициентов усиления и постоянных времени. Существование оптимального значения коэффициентов передачи интеграторов объясняется тем, что при малых их значениях увеличивается составляющая ошибки, обусловленная неточным воспроизведением задающего воздействия, а при больших значениях возрастает дисперсия флуктуационной составляющей ошибки, вызванной действием шума. Составляющую ошибки, вызванную неточным воспроизведением задающего воздействия, иногда называют динамической ошибкой, а составляющую, вызванную шумом, – флуктуационной ошибкой. Выбор оптимальных значений параметров систем рассматривается в теме 16.

В ряде случаев системы радиоавтоматики имеют переменные во времени параметры. Так, в радиотехнических следящих системах, используемых для целей радиолокации, радионавигации, радиоуправления подвижными объектами, уровень сигнала на входе приемника значительно изменяется в процессе работы системы. Это приводит к тому, что вследствие неидеальной работы устройства нормировки (ограничителя, системы АРУ), а также в результате изменения от-

ношения сигнал/шум в полосе пропускания приемника крутизна дискриминатора становится функцией времени, т.е. $S_{\delta} = S_{\delta}(t)$.

Перечисленные примеры не охватывают все возможные случаи, когда система радиоавтоматики имеет переменные параметры, однако уже из их рассмотрения видно, что такие системы имеют значительное распространение. Линейные системы с переменными параметрами, которые называют также линейными нестационарными системами, часто описываются уравнением

$$a_n(t) \frac{d^n v}{dt^n} + \dots + a_0(t)v(t) = b_m(t) \frac{d^m u}{dt^m} + \dots + b_0(t)u(t),$$

где $u = u(t)$ – входное воздействие; $v = v(t)$ – изучаемый в системе процесс.

При постоянстве коэффициентов $a(t)$, $b(t)$ во времени система становится линейной стационарной.

Анализ линейных нестационарных систем в общем случае является значительно более сложной задачей, чем анализ стационарных систем. Даже в том случае, когда переменные параметры являются детерминированными функциями времени, анализ нестационарных систем остается весьма сложной задачей. Исключение составляют системы с кусочно-постоянными и медленно меняющимися во времени параметрами и некоторые другие.

Анализ систем с кусочно-постоянными параметрами сводится к анализу систем, стационарных на отдельных интервалах времени, и «сшиванию» полученных решений.

При анализе систем с медленно меняющимися параметрами широкое распространение получил приближенный метод, называемый методом «замораживания» этих параметров. Он состоит в том, что значения переменных коэффициентов фиксируются в некоторый момент времени $t = t_1$. После этого тем или иным способом, например, с использованием преобразования Лапласа, находится решение уравнения с постоянными коэффициентами. В полученном решении «замороженные» ранее значения коэффициентов снова полагаются зависящими от времени (им придаются новые значения). Таким образом, анализ нестационарных систем методом «замораживания» сводится приближенно к анализу более простых стационарных систем.

Вопросы к теме 7

1. Что такое суммарная ошибка системы РА?
2. Дайте определение средней квадратической ошибки системы РА и укажите способы ее вычислений.
3. Поясните понятие эффективной полосы пропускания системы РА относительно белого шума.
4. Поясните понятие памяти системы. Как влияют параметры системы на ее память?

Тема 8. АНАЛИЗ СИСТЕМ РАДИОАВТОМАТИКИ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

8.1. Векторные дифференциальные уравнения систем РА

Развитие высококачественных систем РА потребовало разработки новых методов их анализа и синтеза. Эти методы базируются на понятии пространства состояний. С математической точки зрения анализ систем в пространстве состояний означает использование методов матричного исчисления и векторного анализа.

Рассмотрим методику составления векторных дифференциальных уравнений для систем РА с одним входом и одним выходом, передаточная функция которых

$$W(p) = \frac{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}.$$

Такой передаточной функции соответствует дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) &= \\ &= b_n x^{(n)}(t) + b_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + b_0 x(t). \end{aligned} \quad (8.1)$$

Введем следующее обозначение:

$$y(t) = z_1(t) + h_0 x(t). \quad (8.2)$$

Составим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= z_2(t) + h_1 x(t); \\ \dot{z}_2(t) &= z_3(t) + h_2 x(t); \\ \dot{z}_n(t) &= -a_0 z_1(t) - a_1 z_2(t) - \dots - a_{n-1} z_n(t) + h_n x(t). \end{aligned} \quad (8.3)$$

Последнее уравнение по своей структуре отличается от $n - 1$ предыдущих уравнений, и в нем используются коэффициенты передаточной функции.

Коэффициенты h_i находят из условия эквивалентности системы уравнений (8.3) исходному уравнению (8.1).

Согласно (8.3)

$$\begin{aligned} z_2(t) &= \dot{z}_1(t) - h_1 x(t); \\ z_3(t) &= \dot{z}_2(t) - h_2 x(t) = \ddot{z}_1(t) - h_1 \dot{x}(t) - h_2 x(t); \\ z_n(t) &= \dot{z}_{n-1}(t) - h_{n-1} x(t) = z_1^{(n-1)}(t) - \sum_{i=1}^{n-1} h_i x^{(n-1-i)}(t). \end{aligned} \quad (8.4)$$

Продифференцировав $z_n(t)$ в (8.4), с учетом последнего уравнения системы (8.3) получим:

$$z_1^{(n)}(t) - \sum_{i=1}^{n-1} h_i x^{(n-1)}(t) = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i z_{i+1} + h_n x(t). \quad (8.5)$$

Подставив в последнее выражение соотношение (8.2) и сгруппировав слагаемые при одинаковых порядках производных от $z_1(t)$ в левой и от $x(t)$ в правой части, найдем дифференциальное уравнение системы в виде

$$\begin{aligned}
 & y^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)}(t) = \\
 & = h_0 x^{(n)}(t) + (h_1 + h_0 a_{n-1}) x^{(n-1)}(t) + (h_2 + h_0 a_{n-2} + h_1 a_{n-1}) x^{(n-2)}(t) + \dots + \\
 & \quad + (h_n + h_0 a_0 + \dots + h_{n-1} a_{n-1}) x(t).
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых порядках производных в уравнениях (8.1) и (8.6), запишем:

$$\begin{aligned}
 h_0 &= b_n; \\
 h_1 &= b_{n-1} - h_0 a_{n-1}; \\
 h_2 &= b_{n-2} - h_0 a_{n-2} - h_1 a_{n-1}; \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned} \tag{8.7}$$

Из введенной системы уравнений (8.3) следует, что производные $z_i(t)$ не зависят от производных входного сигнала $x(t)$.

Переменные $z_i(t)$ в системе уравнений (8.3) можно рассматривать как составляющие вектора

$$\mathbf{Z}^T(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_n(t)],$$

где индекс T определяет операцию транспонирования матрицы.

Вектор $\mathbf{Z}(t)$ называют *вектором состояния системы*, а его составляющие $z_i(t)$ – *переменными состояния*. В пространстве, осями координат которого являются переменные состояния, каждому моменту времени соответствует вектор $\mathbf{Z}(t)$. Величина и положение этого вектора с течением времени изменяются, в результате чего вектор $\mathbf{Z}(t)$ описывает кривую, называемую *траекторией движения системы в пространстве состояний*.

Систему уравнений (8.3) можно записать в виде следующего векторного дифференциального уравнения:

$$\dot{\mathbf{Z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}x(t). \tag{8.8}$$

Выражение (8.2) определяет уравнение выхода системы

$$y(t) = \mathbf{C}^T \mathbf{Z}(t) + h_0 x(t). \tag{8.9}$$

Здесь

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0, & 1, & 0, & \dots, & 0, \\ 0, & 0, & 1, & \dots, & 0, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ -a_0, & -a_1, & -a_2, & \dots, & -a_{n-1} \end{vmatrix}$$

– матрица системы размером $n \times n$;

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_n \end{bmatrix}$$

– матрица управления размером $n \times 1$;

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

– матрица наблюдения размером $n \times 1$.

Элементы матрицы системы \mathbf{A} определяются структурной схемой системы и значениями ее параметров. Матрица управления \mathbf{B} характеризует влияние на переменные состояния входного сигнала, а матрица наблюдения \mathbf{C} – связь выходного сигнала системы с вектором состояния. Обычно не все составляющие вектора состояния являются наблюдаемыми сигналами, т.е. не все они могут быть измерены с помощью каких-либо датчиков, в то время как выходной сигнал всегда наблюдаем.

В реальных системах РА степень полинома числителя передаточной функции меньше степени полинома ее знаменателя, поэтому $h_0 = 0$ и ряд коэффициентов h_i оказываются равными нулю. При этом матрица управления

$$\mathbf{B}^T = |0, \dots, h_{n-m}, \dots, h_n|,$$

где m – порядок полинома числителя передаточной функции системы.

В общем случае система РА имеет r входов и l выходов. Матрица системы \mathbf{A} не изменяется по сравнению с матрицей систем с одним входом. Матрица управления \mathbf{B} становится прямоугольной размером $n \times r$, а матрица наблюдения \mathbf{C} – прямоугольной размером $n \times l$.

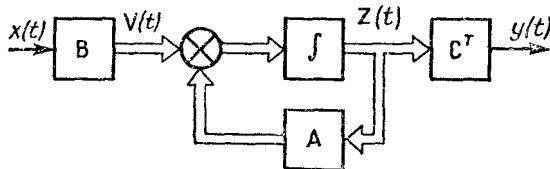


Рис. 8.1. Структурная схема системы РА в векторной форме

На рис. 8.1 показана структурная схема системы РА, соответствующая векторному дифференциальному уравнению (8.8); двойные линии на рисунке характеризуют векторные связи. На рис. 8.2 изображена схема, составленная из интеграторов; введенные переменные состояния (8.3) – это сигналы на выходах интеграторов.

Здесь

$$\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

– вектор состояния размером $n \times 1$;

$$\mathbf{A}_F = \begin{pmatrix} \lambda_1, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & \lambda_2 & \dots, & 0 \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots \\ 0, & 0, & \dots, & \lambda_n \end{pmatrix}$$

– матрица системы размером $n \times n$;

$$\mathbf{B}_F = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

– матрица управления размером $n \times 1$;

$$\mathbf{C}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}$$

– матрица наблюдения размером $n \times 1$;

Из сравнения уравнений (8.8) и (8.13) следует, что при математическом описании одного и того же динамического процесса различному выбору переменных состояния соответствуют различные матрицы системы, управления, наблюдения и различные векторные дифференциальные уравнения, каждое из которых полностью определяет выходной сигнал системы.

Ранее векторные дифференциальные уравнения были определены для стационарных систем РА. В нестационарных системах матрицы в уравнениях (8.8) и (8.9) будут переменными и векторные дифференциальные уравнения примут вид

$$\dot{\mathbf{Z}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{Z}(t) + \mathbf{B}(t)x(t); \quad (8.15)$$

$$y(t) = \mathbf{C}^T(t)\mathbf{Z}(t) + h_0(t)x(t). \quad (8.16)$$

8.2. Матрица перехода

Найдем решение векторного дифференциального уравнения (8.15), которое, как известно, состоит из решения однородного уравнения и составляющей, обусловленной действием входного сигнала $x(t)$. Однородное уравнение получим из уравнения (8.15), положив $x(t) = 0$. В результате найдем, что

$$\dot{\mathbf{Z}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{Z}(t). \quad (8.17)$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{\Phi}(t) \mathbf{Z}(t_0), \quad (8.18)$$

где $\mathbf{\Phi}(t)$ – фундаментальная матрица; $\mathbf{Z}(t_0)$ – вектор, описывающий состояние системы в начальный момент времени t_0 .

Из выражения (8.18) следует, что при $t = t_0$ фундаментальная матрица

$$\mathbf{\Phi}(t_0) = \mathbf{1}, \quad (8.19)$$

где $\mathbf{1}$ – единичная матрица.

Подставив уравнение (8.18) в (8.17), найдем, что фундаментальная матрица удовлетворяет выражению

$$\dot{\mathbf{\Phi}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t). \quad (8.20)$$

Проинтегрировав (8.20), получим

$$\mathbf{\Phi}(t) = \exp \left[\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau \right]. \quad (8.21)$$

Определим вынужденную составляющую решения.

С этой целью положим, что

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{V}(t), \quad (8.22)$$

где $\mathbf{V}(t)$ – неизвестный вектор размером $n \times 1$.

Подставив (8.22) в исходное уравнение (8.15), найдем

$$\dot{\mathbf{\Phi}}(t)\mathbf{V}(t) + \mathbf{\Phi}(t)\dot{\mathbf{V}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{V}(t) + \mathbf{B}(t)x(t).$$

С учетом (8.20) $\mathbf{\Phi}(t)\dot{\mathbf{V}}(t) = \mathbf{B}(t)x(t)$. Умножив слева последнее выражение на матрицу, обратную фундаментальной, получим

$$\dot{\mathbf{V}}(t) = \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{B}(t)x(t).$$

Проинтегрировав это уравнение, определим неизвестный вектор:

$$\mathbf{V}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{\Phi}^{-1}(\tau)\mathbf{B}(\tau)x(\tau)d\tau. \quad (8.23)$$

Общее решение векторного уравнения (8.15) равно сумме (8.18) и (8.22). С учетом уравнения (8.23) оно имеет вид

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{Z}(t_0) + \mathbf{\Phi}(t) \int_{t_0}^t \mathbf{\Phi}^{-1}(\tau)\mathbf{B}(\tau)x(\tau)d\tau. \quad (8.24)$$

Функцию

$$\mathbf{\Phi}(t, \tau) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(\tau) \quad (8.25)$$

называют *матрицей перехода системы РА*.

Отметим некоторые ее свойства:

1. В начальный момент времени $t = t_0$ матрица перехода равна фундаментальной матрице:

$$\mathbf{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0) = \mathbf{\Phi}(t), \quad (8.26)$$

так как $\mathbf{\Phi}(t_0) = \mathbf{1}$.

2. При $t = \tau$ матрица перехода равна единичной матрице, так как

$$\mathbf{\Phi}(t, t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(t) = \mathbf{1}. \quad (8.27)$$

В общем случае вычислить матрицу перехода сложно. Обычно для ее определения используются численные методы.

Для стационарных систем РА нахождение матрицы перехода упрощается. Решение уравнения (8.17) принимает вид

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{Z}(t_0) = e^{At}\mathbf{Z}(t_0),$$

где $\mathbf{\Phi}(t) = e^{At}$ – матричная экспонента.

Матрица перехода в соответствии с выражением (8.25)

$$\mathbf{\Phi}(t, \tau) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(\tau) = e^{A(t-\tau)}. \quad (8.28)$$

Фундаментальную матрицу для стационарной системы определим, применив преобразование Лапласа к уравнению (8.20).

В результате получим

$$p\mathbf{\Phi}(p) = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(p) + \mathbf{\Phi}(0).$$

Из последнего выражения найдем, что фундаментальная матрица

$$\mathbf{\Phi}(t) = L^{-1}\{[p\mathbf{1} - \mathbf{A}]^{-1}\}, \quad (8.29)$$

где $p\mathbf{1} - \mathbf{A}$ – *характеристическая матрица*, определитель которой позволяет составить характеристическое уравнение системы.

Очевидно, что матрица перехода зависит от выбора переменных состояния.

► **Пример 8.1.** Найти матрицу перехода для системы РА, передаточная функция которой

$$W(p) = \frac{200}{(p+10)(p+20)}. \quad (8.30)$$

Решение. В качестве переменных состояния выберем выходной сигнал и его первую производную. Тогда передаточной функции (8.30) соответствует векторное дифференциальное уравнение

$$\begin{vmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0, & 1 \\ -200, & -30 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 200 \end{vmatrix} x(t)$$

и уравнение выхода

$$y(t) = \begin{vmatrix} 1, & 0 \\ z_1(t) \\ z_2(t) \end{vmatrix}.$$

Таким образом, матрицы системы, управления и наблюдения принимают вид:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0, & 1 \\ -200, & -30 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ 200 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Характеристическая матрица

$$p\mathbf{1} - \mathbf{A} = \begin{vmatrix} p, & -1 \\ 200 & p + 30 \end{vmatrix}.$$

Матрица, обратная характеристической (прил. 4),

$$|p\mathbf{1} - \mathbf{A}|^{-1} = \frac{1}{(p+10)(p+20)} \begin{vmatrix} p+30, & 1 \\ -200, & p \end{vmatrix}.$$

Фундаментальная матрица определяется выражением (8.29):

$$\Phi(t) = \begin{vmatrix} 2e^{-10t} - e^{-20t}, & 0,1e^{-10t} - 0,1e^{-20t} \\ -20e^{-10t} + 20e^{-20t}, & -e^{10t} + 2e^{-20t} \end{vmatrix}.$$

Матрица перехода в соответствии с (8.28)

$$\Phi(t - \tau) = \begin{vmatrix} 2e^{-10(t-\tau)} - e^{-20(t-\tau)}, & 0,1e^{-10(t-\tau)} - 0,1e^{-20(t-\tau)} \\ -20e^{-10(t-\tau)} + 20e^{-20(t-\tau)}, & -e^{-10(t-\tau)} + 2e^{-20(t-\tau)} \end{vmatrix}.$$

Найдем вектор переменных состояния при действии на систему управляющего воздействия $x(t) = 1(t)$ и нулевом начальном состоянии. В соответствии с выражением (8.24)

$$\mathbf{Z}(t) = \begin{vmatrix} 1 - 2e^{-10t} + e^{-20t} \\ 20e^{-10t} - 20e^{-20t} \end{vmatrix}.$$

Если в рассматриваемом примере переменными состояниями выбрать вектор $\mathbf{F}(t)$ с составляющими $f_1(t)$ и $f_2(t)$, определяемыми через полюсы системы, то матрицы системы, управления и наблюдения получаются следующими:

$$\mathbf{A}_F = \begin{vmatrix} -10, & 0 \\ 0, & -20 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{B}_F = \begin{vmatrix} 20 \\ -20 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{C}_F = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

При этом матрица перехода

$$\Phi_F(t - \tau) = \begin{vmatrix} e^{-10(t-\tau)}, & 0 \\ 0, & e^{-20(t-\tau)} \end{vmatrix}.$$

Вектор переменных состояния при $x(t) = 1(t)$

$$\mathbf{F}(t) = \begin{vmatrix} 2 - 2e^{-10t} \\ -1 + e^{-20t} \end{vmatrix}. \blacktriangleleft$$

8.3. Интегральные оценки

Применим метод описания систем РА в пространстве состояний для оценки качества их работы по интегральным оценкам. *Интегральной оценкой* называют значение следующего интеграла:

$$J_1 = \int_0^{\infty} \mathbf{C}^T \mathbf{Z}(t) dt, = \int_0^{\infty} y(t) dt, \quad (8.31)$$

где $\mathbf{Z}(t)$ – вектор переменных состояния, начальное значение которого известно; $y(t)$ – выходной сигнал системы.

Интегральные оценки определяются при входном сигнале, равном нулю. Смысл применения оценки (8.31) заключается в том, что интеграл находят без вычисления подынтегрального выражения. Чем меньше интеграл, тем выше качество работы системы РА, и наоборот.

Интегральную оценку (8.31) называют *первой интегральной оценкой*. Для ее расчета необходимо в преобразовании Лапласа для $y(t)$ при заданном начальном состоянии положить $p = 0$.

Первая интегральная оценка используется только в тех случаях, когда заранее известно, что переходный процесс в системе РА имеет монотонный характер.

Часто по значению первой интегральной оценки нельзя судить о качестве работы системы. Действительно, если в системе РА имеют место незатухающие колебания (рис. 8.4), то первая интегральная оценка окажется равной нулю, что будет соответствовать высокому качеству работы; на самом деле такая система неработоспособна.

Поэтому качество работы систем РА определяют с помощью *квадратичной интегральной оценки*

$$J_2 = \int_0^{\infty} y^2(t) dt. \quad (8.32)$$

Очевидно, для системы с переходным процессом, показанным на рис. 8.4, квадратичная интегральная оценка равна бесконечности, т.е. соответствует неудовлетворительному качеству работы.

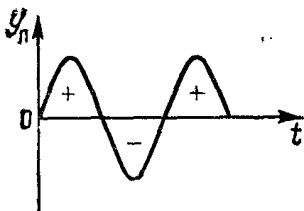


Рис. 8.4. К определению первой интегральной оценки

Для достижения требуемых показателей качества работы ряд параметров системы РА могут варьироваться относительно расчетных значений. К числу таких регулируемых параметров относятся коэффициент усиления системы, постоянные времени корректирующих устройств и другие значения параметров, при которых интегральная оценка имеет минимальное значение, эти параметры называются *оптимальными*. Оптимальные параметры находятся из следующей системы уравнений:

$$\frac{d}{d\beta_i} J = 0; \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (8.33)$$

где β_i – регулируемые параметры; k – число регулируемых параметров.

Иногда выбор параметров из условия минимума оценки (8.32) приводит к резко выраженным колебательным процессам, поэтому в системах РА применяется *обобщенная интегральная квадратичная оценка*

$$J_v = \int_0^{\infty} v(t) dt, \quad (8.34)$$

где $v(t)$ – квадратичная форма.

Примером квадратичной формы является функция

$$v(t) = \alpha_1 z_1^2(t) + \alpha_2 z_2^2(t) + \dots + \alpha_n z_n^2(t), \quad (8.35)$$

где $z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)$ – составляющие вектора состояния; α_i – весовые коэффициенты.

В простейшем случае интегральная оценка (8.34) имеет вид

$$J_\tau = \int_0^{\infty} [z_1^2(t) + \tau^2 z_2^2(t)] dt, \quad (8.36)$$

где τ – весовой коэффициент.

Физический смысл интегральной оценки (8.36) следующий. При выборе параметров системы РА из условия минимума оценки (8.36) не допускается как длительное отклонение от нуля переменной (иначе первая составляющая оценки будет большой), так и большое значение $z_2(t)$ (иначе вторая составляющая оценки будет большой). Таким образом, получается хотя и быстрый, но плавный переходный процесс. При этом чем больше весовой коэффициент τ , тем более медленному переходному процессу соответствует минимум интегральной оценки (8.36). Оказывается, что выбор параметров системы РА из условия минимума оценки (8.36) означает приближение переходного процесса в системе к экспоненте с постоянной времени τ , а из условия минимума оценки (8.32) – приближение переходного процесса к ступенчатой функции.

Для вычисления квадратичных интегральных оценок выражение (8.35) необходимо записать в матричном виде (см. прил. 4):

$$v(t) = \mathbf{Z}^T(t) \mathbf{V} \mathbf{Z}(t), \quad (8.37)$$

где

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \alpha_1, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & \alpha_2, & 0, & \dots, & 0 \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & \alpha_n \end{vmatrix}$$

– матрица квадратичной формы.

Расчет квадратичных интегральных оценок основан на введении дополнительной квадратичной формы, которая с квадратичной формой интегральной оценки (8.35) связана выражением

$$\frac{d}{dt} w(t) = -v(t). \quad (8.38)$$

При этом квадратичная интегральная оценка (8.34) принимает вид

$$J_V = -\int_0^{\infty} \frac{d}{dt} w(t) dt = w(0). \quad (8.39)$$

Если выразить дополнительную квадратичную форму через вектор переменных состояния

$$w(t) = \mathbf{Z}^T(t) \mathbf{W} \mathbf{Z}(t), \quad (8.40)$$

то (8.39) можно представить как

$$J_V = \mathbf{Z}^T(0) \mathbf{W} \mathbf{Z}(0), \quad (8.41)$$

где \mathbf{W} – матрица дополнительной квадратичной формы; $\mathbf{Z}(0)$ – начальное значение вектора переменных состояния.

Для определения матрицы дополнительной квадратичной формы подставим выражение (8.40) в (8.38). В результате найдем, что

$$\frac{d}{dt} w(t) = \dot{\mathbf{Z}}^T(t) \mathbf{W} \mathbf{Z}(t) + \mathbf{Z}^T(t) \mathbf{W} \dot{\mathbf{Z}}(t) = -\mathbf{Z}^T(t) \mathbf{V} \mathbf{Z}(t). \quad (8.42)$$

Учитывая векторное дифференциальное уравнение системы (8.8), в котором $\dot{x}(t) = 0$, получим

$$\mathbf{Z}^T(t) \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{Z}(t) + \mathbf{Z}^T(t) \mathbf{W} \mathbf{A} \mathbf{Z}(t) = -\mathbf{Z}^T(t) \mathbf{V} \mathbf{Z}(t). \quad (8.43)$$

Из этого выражения следует матричное уравнение

$$\mathbf{A}^T \mathbf{W} + \mathbf{W} \mathbf{A} = -\mathbf{V}. \quad (8.44)$$

К сожалению, из последнего уравнения нельзя в общем виде определить матрицу \mathbf{W} . Поэтому поступают следующим образом. Выполняют операции умножения и сложения в левой части уравнения (8.44), после чего приравнивают элементы полученной матрицы к соответствующим элементам матрицы справа. Так как матрица \mathbf{W} – симметричная матрица, то в результате получают систему $0,5n(n+1)$ алгебраических уравнений с неизвестными элементами матрицы \mathbf{W} . Квадратичная форма всегда больше нуля, поэтому из найденных решений для элементов матрицы \mathbf{W} необходимо отобрать только те, при которых матрица дополнительной квадратичной формы будет положительно определенной матрицей (см. прил. 4).

► **Пример 8.2.** Определить оптимальное значение коэффициента усиления из условия минимума интегральной оценки (8.36) для системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии

$$W_p(p) = \frac{K}{p(1 + pT_1)(1 + pT_2)},$$

где $T_1 = 0,1$ с; $T_2 = 0,05$ с.

Начальное состояние системы: $z_1(0) = 1$; $z_2(0) = z_3(0) = 0$.

Решение. Передаточная функция системы в замкнутом состоянии

$$W_3(p) = \frac{b_0}{p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0},$$

где $a_0 = b_0 = K/(T_1T_2)$; $a_2 = 1/T_1 + 1/T_2$; $a_1 = 1/(T_1T_2)$.

Таким образом, матрицы системы и квадратичной оценки следующие:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{V} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Матрицу дополнительной квадратичной формы вычислим из уравнения (8.44), которое в рассматриваемой задаче при $\tau = 1$ с имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Решив систему алгебраических уравнений, получаемых из последнего выражения, найдем, что

$$B_{13} = B_{31} = \frac{1}{2a_0}; \quad B_{12} = B_{21} = \frac{a_2}{2a_0} + \frac{a_2 + a_0}{2(a_1a_2 - a_0)}; \quad B_{23} = B_{32} = \frac{a_2}{a_0} \frac{a_2 + a_0}{2(a_1a_2 - a_0)};$$

$$B_{11} = \frac{a_1}{2a_0} + a_2 \frac{a_2 + a_0}{2(a_1a_2 - a_0)}; \quad B_{22} = \frac{a_1 + a_2^2}{a_0} \frac{a_2 + a_0}{2(a_1a_2 - a_0)} - \frac{1}{2a_0}; \quad B_{33} = \frac{a_2 + a_0}{2a_0(a_1a_2 - a_0)}.$$

В соответствии с (8.41) интегральная оценка $J_\tau = B_{11}$.

Оптимальное значение коэффициента усиления определим из условия

$$\frac{d}{dK} J_\tau = 0.$$

В результате получим $K_{\text{opt}} = 1\text{с}^{-1}$.

Рассчитаем коэффициент усиления в системе из условия минимума квадратичной интегральной оценки (8.32), которая в рассматриваемой задаче

$$J_2 = \frac{a_1}{2a_0} + \frac{a_2^2}{2(a_1a_2 - a_0)}.$$

Оптимальное значение коэффициента усиления $K_{\text{opt}} = 9,6\text{c}^{-1}$.

Таким образом, различным квадратичным интегральным оценкам соответствуют различные оптимальные значения коэффициентов усиления. На рис. 8.5 показаны кривые переходных процессов, рассчитанных при коэффициентах усиления, соответствующих минимуму интегральных оценок (8.36) (кривая 1) и (8.32) (кривая 2). ◀

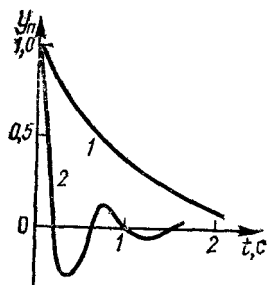


Рис. 8.5. Переходные процессы в системе, соответствующие минимуму интегральных оценок

Вопросы к теме 8

1. Что такое переменные состояния? Поясните их физический смысл.
2. Поясните неоднозначность выбора переменных состояния.
3. Между какими сигналами устанавливает связь матрица наблюдения?
4. От каких параметров передаточной функции зависят элементы матриц системы и управления?
5. Поясните физический смысл матрицы перехода.
6. К каким системам РА при оценке качества их работы можно применять первую интегральную оценку?

РАЗДЕЛ 5. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ РАДИОАВТОМАТИКИ

Тема 9. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ РАДИОАВТОМАТИКИ

9.1. Особенности нелинейных систем

Строго говоря, линейных систем РА не существует, так как характеристики реальных устройств нелинейные и некоторые из них не могут быть линеаризованы, например, характеристика релейного элемента. При больших отклонениях сигналов от установившихся значений приходится учитывать нелинейные свойства и элементов систем РА, допускающих линеаризацию. В этих случаях процессы в системах РА описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, что существенно усложняет их анализ.

В системах РА встречаются устройства с различными нелинейными характеристиками (ограничения, зоны нечувствительности, люфты в механических передачах). Нелинейными являются дискриминационные характеристики различных систем автоматической подстройки частоты и пеленгационные системы автоматического сопровождения цели РЛС.

При составлении дифференциальных уравнений нелинейных систем РА сначала составляют дифференциальные уравнения для каждого устройства системы. При этом характеристики устройств, допускающих линеаризацию, линеаризуются. В результате получают систему дифференциальных уравнений, в которой одно или несколько уравнений нелинейные. Устройства, допускающие линеаризацию, образуют линейную часть системы РА, а устройства, которые не могут быть линеаризованы, составляют нелинейную часть.

Во многих системах РА нелинейные устройства можно представить как статические, зависимость выходного сигнала от входного в которых описывается линейной зависимостью вида $y = F(x)$.

Встречаются случаи, когда линейные устройства описываются дифференциальными уравнениями вида $y = F(x, \dot{x})$.

Характерной особенностью нелинейных систем является возможность возникновения в них автоколебаний. Исследование условий возникновения автоколебаний, их устойчивости и параметров (амплитуды и частоты) является одной из задач анализа нелинейных систем. В системах РА с дискриминационными характеристиками приходится оценивать условия, при которых наступает срыв слежения.

В настоящее время не создано общей теории анализа нелинейных систем автоматики. Разработанные методы позволяют решать лишь отдельные нелинейные задачи. Рассмотрим основные методы анализа нелинейных систем автоматики: 1) метод фазовой плоскости; 2) метод кусочно-линейной аппроксимации; 3) метод гармонической линеаризации; 4) метод статистической линеаризации; 5) метод моделирования.

Метод фазовой плоскости применяется для анализа нелинейных систем, порядок которых не выше второго. На плоскости с координатами $e(t)$ и $\dot{e}(t)$, где $e(t)$ – ошибка системы или какой-либо другой сигнал, строится траектория движения системы. Плоскость и траекторию движения систем называют фазовыми. По характеру фазовой траектории оценивается качество работы системы.

Метод кусочно-линейной аппроксимации используется в том случае, когда нелинейная часть системы безынерционна и ее характеристика может быть аппроксимирована прямолинейными участками. На каждом таком участке процессы в системе описываются линейными дифференциальными уравнениями, решение которых может быть найдено. В точках излома нелинейной характеристики решения «сшиваются»: значения переменных в конце данного участка принимаются за начальные условия для последующего участка. Таким образом удается построить фазовую траекторию движения системы. При большом числе аппроксимированных участков нелинейной характеристики и дифференциальных уравнений линейной части выше второго порядка вычисления фазовой траектории становятся громоздкими.

Метод гармонической линеаризации базируется на замене нелинейного элемента линейным звеном, параметры которого определяются при синусоидальном входном сигнале из условия равенства амплитуд первых гармоник на выходе нелинейного элемента и эквивалентного ему линейного звена. Данный метод может быть использован в том случае, когда линейная часть системы является низкочастотным фильтром, т.е. отфильтровывает все возникающие на выходе нелинейного звена гармонические составляющие, кроме первой гармоники.

Метод статистической линеаризации является приближенным и применим для систем произвольного порядка. Он основан на замене нелинейного элемента линейным звеном, коэффициенты передачи которого по математическому ожиданию и случайной составляющей сигнала на входе нелинейного элемента определяются из условия статистической эквивалентности нелинейного звена линейному.

Метод моделирования основан на использовании для анализа нелинейных систем РА вычислительных машин. Этот метод не накладывает ограничений на порядок исследуемых систем и позволяет оценить качество систем при большом наборе начальных условий и различных видах входных сигналов и помех.

В инженерной практике для анализа нелинейных систем РА применяются методы гармонической и статистической линеаризации. Эти методы – приближенные. Для анализа систем РА, порядок которых не выше второго, также используется метод, основанный на теории марковских случайных процессов, позволяющий получить точное решение.

9.2. Метод гармонической линейаризации нелинейных звеньев

Рассмотрим метод гармонической линейаризации нелинейных характеристик, когда нелинейное звено является статическим. Пусть на вход линейного звена действует сигнал $x = a \sin \psi$, $\psi = \omega t$.

Сигнал на выходе этого звена также будет периодическим. Разложив его в ряд Фурье, получим

$$y = F(a \sin \psi) = q(a) a \sin \psi + q'(a) a \cos \psi + y_{\text{вз}}, \quad (9.1)$$

где $y_{\text{вз}}$ – слагаемое, учитывающее вторые и более высокие гармонические составляющие.

Коэффициенты ряда Фурье вычисляются по формулам

$$q(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \sin \psi d\psi;$$
$$q'(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \cos \psi d\psi. \quad (9.2)$$

При определении разложения (9.1) полагали, что постоянная составляющая отсутствует. Так как

$$x = a \sin \psi; \quad L(x) = x(p);$$

$$L(a \cos \psi) = L(a \cos \omega t) = \frac{P}{\omega} L(a \sin \omega t) = \frac{P}{\omega} L(x) = \frac{P}{\omega} x(p),$$

то разложение (9.1) можно записать в виде

$$y(p) = \left[q(a) + q'(a) \frac{P}{\omega} \right] x(p). \quad (9.3)$$

Последнее выражение называют *уравнением гармонической линейаризации*, а коэффициенты $q(a)$ и $q'(a)$ – *коэффициентами гармонической линейаризации*.

Таким образом, нелинейное звено при воздействии гармонического сигнала описывается уравнением (9.3), которое с точностью до высших гармоник является линейным. Эта операция и называется гармонической линейаризацией нелинейного звена. При постоянных значениях амплитуды входного сигнала коэффициенты гармонической линейаризации являются постоянными. Различным амплитудам входного сигнала соответствуют различные коэффициенты гармонической линейаризации. Именно в этом заключается принципиальное отличие гармонической линейаризации от обычной, коэффициенты которой не зависят от амплитуды входного сигнала, а определяются только видом характеристики нелинейного звена.

Уравнение гармонической линейаризации (9.3) – это линейное уравнение, поэтому и вся система РА становится линейной. Для ее исследования могут быть использованы методы, разработанные для линейных систем. Зависимость коэффициентов гармонической линейаризации от амплитуды сигнала на входе нелинейного

звена позволяет выявить специфические свойства нелинейных систем, которые не могут быть определены при использовании обычной линеаризации.

Определим коэффициент гармонической линеаризации для некоторых нелинейных характеристик, анализ которых позволяет установить некоторые важные для практики положения. Первоначально рассмотрим характеристику с ограничением, график которой показан на рис. 9.1. В соответствии с формулами (9.2) находим, что

$$q(a) = \frac{1}{\pi a} \left[\int_0^{\alpha} a \sin^2 \psi d\psi + \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} c \sin \psi d\psi + \int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} a \sin^2 \psi d\psi + \int_{\pi+\alpha}^{2\pi-\alpha} (-c) \sin \psi d\psi + \int_{2\pi-\alpha}^{2\pi} a \sin^2 \psi d\psi \right] =$$

$$= \frac{4}{\pi} \left[\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{c}{a} \cos \alpha \right];$$

$$q'(a) = 0, \tag{9.4}$$

где α – значение аргумента, при котором наступает ограничение $\alpha = \arcsin(c/a)$.

Из выражения (9.4) следует важный вывод: для однозначных нелинейных характеристик коэффициент гармонической линеаризации $q'(a)$ равен нулю и уравнение гармонической линеаризации имеет вид $y = q(a)x$.

На рис 9.2 изображена зависимость коэффициента гармонической линеаризации от амплитуды входного сигнала, рассчитанная по формуле (9.4).

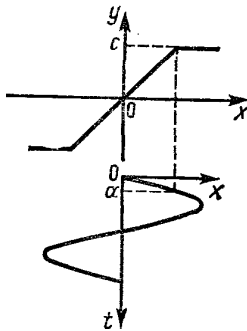


Рис. 9.1. К определению коэффициентов гармонической линеаризации

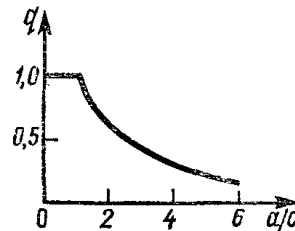


Рис. 9.2. Зависимость коэффициента гармонической линеаризации нелинейной характеристики с ограничением от амплитуды входного сигнала

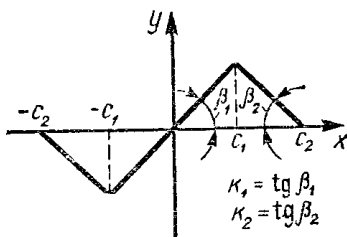


Рис. 9.3. Дискриминационная характеристика нелинейного звена

Рассмотрим дискриминационную характеристику звена, график которой приведен на рис. 9.3. Характеристика однозначна, поэтому, как и в предыдущем случае, коэффициент гармонической линеаризации $q'(a)$ равен нулю.

Коэффициент $q(a)$ вычисляется по формулам:

при $c_1 < a < c_2$

$$q(a) = -k_2 + \frac{2(k_1 + k_2)}{\pi} \left[\arcsin \frac{c_1}{a} + \frac{c_1}{a} \sqrt{1 - \frac{c_1^2}{a^2}} \right]; \quad (9.5)$$

при $a \geq c_2$

$$q(a) = \frac{2}{\pi} \left[\begin{aligned} &(k_2 + k_2) \left(\arcsin \frac{c_1}{a} + \frac{c_1}{a} \sqrt{1 - \frac{c_1^2}{a^2}} \right) - \\ &-k_2 \left(\arcsin \frac{c_2}{a} - \frac{c_2}{a} \sqrt{1 - \frac{c_2^2}{a^2}} \right) \end{aligned} \right]. \quad (9.6)$$

Ясно, что при $|a| < c_1$ $q(a) = k_1 = \operatorname{tg} \beta_1$.

На рис. 9.4 показана зависимость коэффициента $q(a)$ от амплитуды сигнала, вычисленная по (9.5) и (9.6).

На рис. 9.5 изображена нелинейная характеристика звена с люфтом. Эта характеристика неоднозначна.

Непосредственно из рис. 9.5 и формул (9.2) следует, что коэффициенты гармонической линейаризации определяются выражениями

$$q(a) = \frac{1}{\pi} \left(\psi_2 + \frac{1}{2} \sin 2\psi_2 + \psi_1 + \frac{1}{2} \sin 2\psi_1 \right);$$

$$q'(a) = -\frac{1}{\pi} \left(\sin^2 \psi_2 - \sin^2 \psi_1 \right)$$

при $a > c + \Delta$, где $\psi_1 = \arcsin \frac{c - \Delta}{a}$; $\psi_2 = \arcsin \frac{c + \Delta}{a}$.

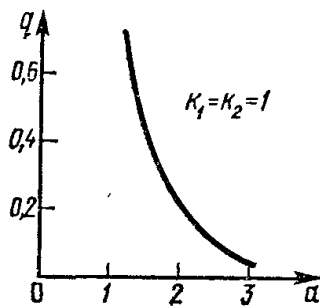


Рис. 9.4. Зависимость коэффициента гармонической линейаризации дискриминационной характеристики нелинейного звена от амплитуды входного сигнала

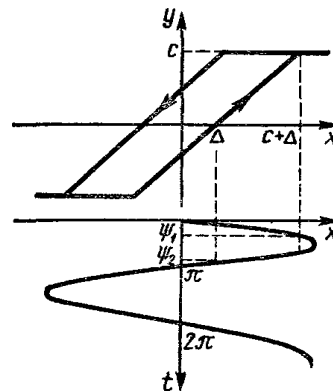


Рис. 9.5. К определению коэффициента гармонической линейаризации нелинейной характеристики звена с люфтом

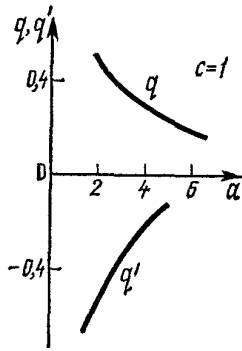


Рис. 9.6. Зависимость коэффициента гармонической линейризации характеристик звена с люфтом от амплитуды входного сигнала

Графики изменения коэффициентов гармонической линейризации характеристики звена с люфтом показаны на рис. 9.6.

Таким образом, если характеристика нелинейного звена неоднозначна, то оба коэффициента гармонической линейризации не равны нулю.

Поэтому уравнение гармонической линейризации (9.3) зависит не только от амплитуды, но и от частоты сигнала на входе нелинейного звена.

9.3. Уравнение нелинейной системы

Ранее отмечалось, что при исследовании нелинейных систем РА обычно удается представить систему в виде последовательного соединения двух частей – линейной и нелинейной (рис. 7).

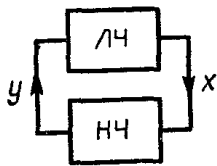


Рис. 9.7. К определению уравнения нелинейной системы РА

Запишем передаточную функцию линейной части:

$$W_n(p) = -N(p)/D(p).$$

Принимая во внимание (9.3), уравнение нелинейной системы можно записать так:

$$D(p) + N(p) \left[q(a) + q'(a) \frac{p}{\omega} \right] = 0. \quad (9.7)$$

В этом выражении не учтены высшие гармоники. Это сделано не случайно и не потому, что они малы. Дело в том, что если в отдельном нелинейном звене при подаче на его вход синусоидального сигнала в выходном сигнале всегда имеются высшие гармоники, то при включении нелинейного звена в замкнутый контур системы из-за фильтрующих свойств линейной части системы высшими гармониками на входе нелинейного звена можно пренебречь.

Если в замкнутой нелинейной системе РА возникают автоколебания с постоянной амплитудой и частотой, то коэффициенты гармонической линейризации оказываются постоянными, а вся система – стационарной. Незатухающие колебания в замкнутых системах, как показано в теме 4, возникают в том случае, когда характеристическое уравнение системы содержит пару мнимых сопряженных корней. Потому для оценки возможности возникновения в нелинейной системе автоколебаний необходимо в гармонически линейризованное характеристическое уравнение системы вместо p подставить $j\omega$ (p без действительной части). В результате получим уравнение, коэффициенты которого зависят от амплитуды и частоты предполагаемого автоколебательного режима. Если это

уравнение удовлетворяется при действительных значениях амплитуды автоколебаний a_k и частоты ω_k , то в исследуемой системе могут возникнуть автоколебания с амплитудой a_k и частотой ω_k , устойчивость существования которых необходимо дополнительно оценить.

Таким образом, для оценки возможности возникновения автоколебаний в нелинейной системе методом гармонической линеаризации необходимо найти условия границы устойчивости, как это делалось при анализе устойчивости линейных систем РА.

Характеристическое уравнение гармонически линеаризованной линейной системы имеет вид (9.7). Подставив в него $p = j\omega$, получим

$$D(p) + N(p)[q(a) + jq'(a)] = 0.$$

Выделив в последнем выражении вещественную и мнимую части, получим уравнение

$$B(\omega) + jC(\omega) = 0. \quad (9.8)$$

Если при каких-то значениях a_k и ω_k выражение (9.8) удовлетворяется, то в системе возможен автоколебательный режим, параметры которого рассчитываем по следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} B(\omega_k, a_k) &= 0; \\ C(\omega_k, a_k) &= 0. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Из формул (9.9) можно найти зависимость амплитуды и частоты автоколебаний от параметров системы, например, от коэффициента усиления линейной части системы. Для этого необходимо в уравнениях (9.9) коэффициент усиления считать переменной величиной, т.е. эти уравнения записать в таком виде:

$$\begin{aligned} B(\omega_k, a_k, k) &= 0; \\ C(\omega_k, a_k, k) &= 0. \end{aligned} \quad (9.10)$$

По графикам $a_k = f(k)$, $\omega_k = f(k)$ можно выбрать коэффициент усиления, при котором амплитуда и частота возможных автоколебаний имеют допустимые значения или вообще отсутствуют.

9.4. Частотный метод определения параметров автоколебаний

Решение уравнений (9.9) и (9.10) обычно связано с большими вычислительными трудностями, так как коэффициенты гармонической линеаризации имеют сложную зависимость от амплитуды входного сигнала. Кроме того, помимо определения амплитуды и частоты возможных автоколебаний в нелинейной системе необходимо оценить их устойчивость.

В инженерной практике для этого используется частотный метод, который базируется на приближенном выражении для передаточной функции нелинейного звена, определяемой следующим выражением:

$$W_n(a) = [q(a) + jq'(a)], \quad (9.11)$$

где коэффициенты $q(a)$ и $q'(a)$ вычисляются по (9.2).

Если нелинейная характеристика однозначна, то

$$q'(a) = 0 \quad \text{и} \quad W_n(a) = q(a).$$

Передаточная функция (9.11) определяет амплитуду и фазу первой гармоники колебаний сигнала на выходе нелинейного звена:

$$a_y = |W_n(a)|a; \quad \theta_n(a) = \operatorname{arctg} \frac{q'(a)}{q(a)},$$

где $|W_n(a)| = \sqrt{q^2(a) + q'^2(a)}$; $\theta_n(a)$ – амплитудная и фазовая характеристики нелинейного звена; a – амплитуда колебаний на входе нелинейного звена.

Таким образом, сигнал на выходе нелинейного звена

$$y = a_y \sin(\omega t + \theta_n(a)).$$

Так как линейная и нелинейная части системы соединены последовательно, то частотная характеристика разомкнутой системы

$$W_p(j\omega) = W_n(j\omega) W_n(a). \quad (9.12)$$

Из выражения (9.12) следует, что частотная характеристика разомкнутой нелинейной системы зависит не только от частоты входного сигнала, как это имеет место в линейных системах, но и от его амплитуды. В соответствии с критерием устойчивости Найквиста незатухающие колебания в линейной системе возникают в том случае, когда частотная характеристика разомкнутой системы проходит через точку с координатами $[-1, j0]$. Данное условие является также условием существования автоколебаний в нелинейной системе, т.е.

$$W_p(j\omega, a) = -1. \quad (9.13)$$

С учетом (9.12) условие (9.13) принимает вид

$$W_n(j\omega)W_n(a) = -1,$$

или

$$W_n(j\omega) = -\frac{1}{W_n(a)} = -W_n^{-1}(a). \quad (9.14)$$

Решение уравнения (9.14) относительно частоты и амплитуды автоколебаний можно получить графически как точку пересечения годографа частотной характеристики линейной части системы и годографа обратной характеристики нелинейной части, взятой с обратным знаком. Если эти годографы не пересекаются, то режим автоколебаний в исследуемой системе отсутствует.

Устойчивость автоколебательного режима оценивается следующим образом. Режим автоколебаний устойчив, если точка на годографе нелинейной части $W_n^{-1}(a)$, соответствующая увеличенной амплитуде по сравнению со значением в точке пересечения годографов (9.14), не охватывается годографом частотной характеристики линейной части системы. В противном случае автоколебательный режим неустойчив. На рис. 9.8, a годографы пересекаются в точках b и c . Точка b определяет неустойчивый режим автоколебаний, так как точка годографа

$W_H^{-1}(a)$, соответствующая увеличенной амплитуде, охватывается годографом частотной характеристики линейной части системы. Точке c соответствует устойчивый режим автоколебаний, амплитуда которого определяется по годографу $W_H^{-1}(a)$ и равна $a_{к2}$, а частота – по годографу $W_L(j\omega)$ и равна $\omega_{к2}$. На рис. 9.8, б дан пример расположения годографов для случая, когда автоколебания в нелинейной системе отсутствуют.

На рис. 9.9, а, б изображены годографы нелинейных характеристик звеньев, которые часто встречаются при исследовании нелинейных систем РА. Из этих характеристик следует, что в нелинейных системах, частотные характеристики линейных частей которых не имеют точек пересечения с участком действительной оси от -1 до $-\infty$, автоколебания отсутствуют, т.е. когда выполняется условие устойчивости линейной системы, получаемой из нелинейной путем замены нелинейного звена линейным.

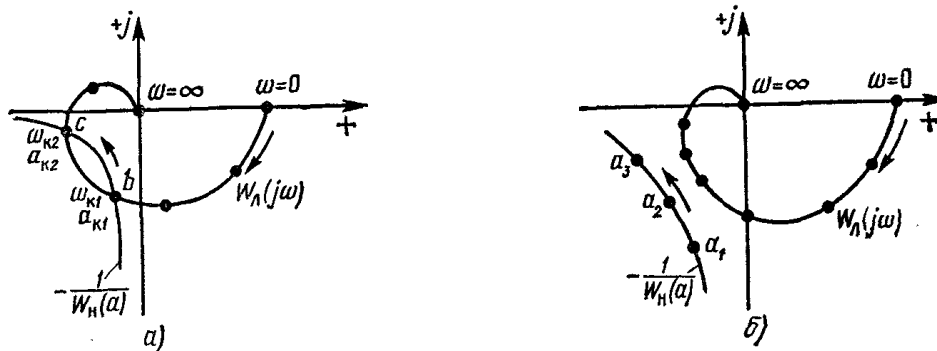


Рис. 9.8. К определению устойчивости автоколебаний в нелинейной системе

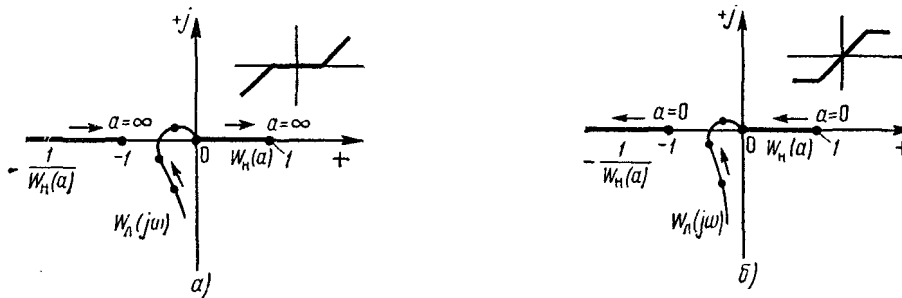


Рис. 9.9. К определению параметров автоколебаний в системах с однозначными нелинейными характеристиками

9.5. Статистическая линеаризация нелинейных характеристик

Для оценки статистических характеристик нелинейных систем РА можно использовать метод статистической линеаризации, основанный на замене нелинейной характеристики линейной, которая в известном смысле статистически равноценна исходной нелинейной характеристике. Для приближенной оценки, когда оперируют моментами первого и второго порядка (математическим ожи-

данием и дисперсией), можно считать статистически равноценными характеристиками, имеющие равные значения этих моментов при заданном законе распределения входного сигнала.

Заменим нелинейную зависимость $y = F(x)$ линейной характеристикой

$$z = kx, \quad (9.15)$$

которая имеет такие же математические ожидания и дисперсии, какие имеются на выходе нелинейного звена с характеристикой $y = F(x)$. С этой целью представим (9.15) в виде

$$z = k_0 m_x + k_{11} x,$$

где x – центрированная случайная функция.

Выберем коэффициенты k_0 и k_{11} такими, чтобы выполнялось условие

$$m_z = k_0 m_x = m_y; \quad \sigma_z^2 = k_{11}^2 \sigma_x^2 = \sigma_y^2, \quad (9.16)$$

где m_x, m_y, m_z – математические ожидания сигналов; $\sigma_x^2, \sigma_y^2, \sigma_z^2$ – дисперсии сигналов.

Из выражений (9.16) следует, что статистическая равноценность имеет место, если

$$k_0 = m_y / m_x; \quad k_{11} = \pm \sigma_y / \sigma_x, \quad (9.17)$$

причем знак k_{11} должен совпадать со знаком производной нелинейной характеристики $F(x)$.

Величины k_0 и k_{11} называют *коэффициентами статистической линеаризации*. Для их вычисления нужно знать математическое ожидание и дисперсию сигнала на выходе нелинейного звена:

$$\begin{aligned} m_y &= \int_{-\infty}^{\infty} F(x)w(x)dx; \\ \sigma_y^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} F^2(x)w(x)dx, \end{aligned} \quad (9.18)$$

где $w(x)$ – плотность вероятности распределения случайного сигнала на входе нелинейного звена.

Рассмотренный метод статистической линеаризации не всегда является наилучшим, поэтому целесообразно статистическую линеаризацию выполнить из условия наилучшего приближения корреляционной функции сигнала на выходе нелинейного звена к корреляционной функции на выходе линейного звена. С этой целью определим коэффициенты статистической линеаризации с учетом того, чтобы дисперсия отклонения сигнала на выходе нелинейного звена, определяемая выражением

$$\begin{aligned} M[(z-y)^2] &= k_0^2 m_x^2 + [2k_0 k_{11} m_x x] + k_{11}^2 x^2 - M[2(k_0 m_x + k_{11} x)y] + M[y^2] = \\ &= k_0^2 m_x^2 + k_{11}^2 x^2 + 2k_0 k_{11} m_x x - M[2k_0 m_x y] - M[2k_{11} x]y + M[y^2] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= k_0^2 m_x^2 + k_{12}^2 \overset{\circ}{x}^2 + 2k_0 m_x M[k_{12} \overset{\circ}{x} - y] - 2k_{12} M[\overset{\circ}{x} y] + M[y^2] = \\
&= k_0^2 m_x^2 + k_{12}^2 \sigma_x^2 - 2k_0 m_x m_y - 2k_{12} M[\overset{\circ}{x} y] + M[y^2],
\end{aligned}$$

была минимальной. Приравняв нулю производные от последнего выражения по k_0 и k_{12} , запишем уравнения

$$\begin{aligned}
2k_0 m_x^2 - 2m_x m_y &= 0; \\
2k_{12} \sigma_x^2 - 2M[\overset{\circ}{x} y] &= 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, в этом случае коэффициенты статистической линеаризации вычисляются по формулам:

$$k_0 = \frac{m_x}{m_y}; \quad k_{12} = \frac{M\left[\overset{\circ}{xy}\right]}{\sigma_x^2} = \frac{1}{\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) F(x) w(x) dx. \quad (9.19)$$

Таким образом, статистическая линеаризация из условия минимума дисперсии ошибки дает то же значение коэффициента k_0 , которое было найдено при первом способе линеаризации. Коэффициент линеаризации относительно случайной составляющей k_{12} имеет другое значение. Рекомендуется брать их среднее арифметическое значение: $k_1 = \frac{k_{11} + k_{12}}{2}$. Обратим внимание, что коэффициенты статистической линеаризации зависят от математического ожидания и дисперсии сигнала на входе нелинейного звена (в этом заключается существенное отличие статистической линеаризации от обычной).

Коэффициенты статистической линеаризации, как следует из выражений (9.17) – (9.19), зависят не только от характеристик нелинейного звена, но и от закона распределения сигнала на его входе. Во многих практических случаях закон распределения этой случайной величины может быть принят гауссовским. Это объясняется тем, что нелинейные звенья в системах РА соединяются последовательно с линейными инерционными элементами, законы распределения выходных сигналов которых близки к гауссовским при любых законах распределения их входных сигналов. Чем более инерционна система, тем ближе закон распределения сигнала на выходе к гауссовскому, т.е. инерционные устройства системы приводят к восстановлению гауссовского распределения, нарушаемого нелинейными звеньями. Кроме того, изменение закона распределения в широких пределах мало влияет на коэффициенты статистической линеаризации. Поэтому полагают, что сигналы на входе нелинейных звеньев распределены по гауссовскому закону. При этом коэффициенты k_0 и k_1 зависят только от математического ожидания и дисперсии сигнала на входе нелинейного звена, поэтому для типовых нелинейных характеристик коэффициенты k_0 и k_1 могут быть заранее вычислены, что существенно упрощает расчеты систем методом статистической линеаризации.

Формулы для вычисления коэффициентов статистической линейизации при нормальном законе распределения имеют вид:

$$k_0 = \frac{1}{m_x} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx;$$

$$k_{11} = \frac{1}{\sigma_x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} F^2(x) w(x) dx \right]^{1/2} = \frac{1}{\sigma_x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} F^2(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx \right]^{1/2};$$

$$k_{12} = \frac{1}{\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) F(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx.$$

► **Пример 9.1.** Определить коэффициенты статистической линейизации для дискриминатора с синусоидальной характеристикой $y = A \sin ax$.

Решение. В соответствии с выражениями (9.17) и (9.19)

$$z = m_y = k_0 m_x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x - m_x}{2\sigma_x^2}\right) A \sin ax dx =$$

$$= A (\sin am_x) \exp\left(-\frac{a^2 \sigma_x^2}{2}\right);$$

$$k_{11} = \frac{A}{\sigma_x} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \cos am_x \exp\left(-a^2 \sigma_x^2 / 2\right)\right) - \left(\frac{k_0 m_x}{A}\right)^2 \right]^{1/2}; \quad (9.20)$$

$$k_{12} = A a \exp\left(-a^2 \sigma_x^2 / 2\right) \cos am_x.$$

На рис. 9.10, a , b изображены зависимости, вычисленные по формулам (9.20) для $A = 5$, $a = 0,314$, из которых видно, что увеличение дисперсии входного сигнала σ_x приводит к уменьшению коэффициентов статистической линейизации; при большом уровне помех их значения близки к нулю.

Зависимости (9.20) приближенно справедливы и для дискриминатора с характеристикой

$$y = \begin{cases} A \sin ax & \text{при } -\pi \leq ax \leq \pi, \\ 0 & \text{при } |ax| > \pi. \end{cases} \quad (9.21)$$

Выражение (9.21) часто используется для аппроксимации дискриминационных характеристик при анализе систем автоматического сопровождения цели РЛС и систем автоподстройки частоты. ◀

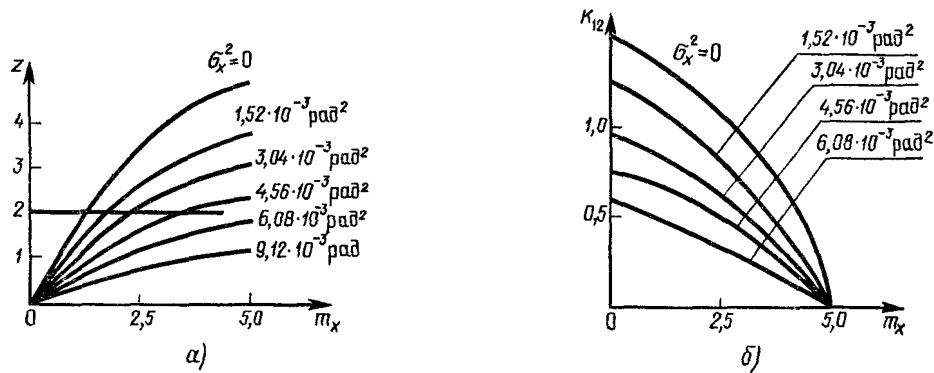


Рис. 9.10. К определению коэффициентов статистической линеаризации

► **Пример 9.2.** Определить коэффициенты статистической линеаризации для дискриминатора с релейной характеристикой вида

$$\varphi(x) = A \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

В этом случае

$$k_0 = \frac{A}{m_x} 2\Phi\left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right);$$

$$k_{12} = \frac{A}{\sigma_x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{m_x^2}{2\sigma_x^2}\right),$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$.

Коэффициенты статистической линеаризации для других нелинейностей можно найти в литературе. ◀

9.6. Применение метода статистической линеаризации для анализа стационарных режимов и срыва слежения

Возможность замены характеристик нелинейных звеньев линейными зависимостями позволяет при анализе нелинейных систем использовать методы, разработанные для линейных систем РА. Применим метод статистической линеаризации для анализа стационарных режимов в системе РА (рис. 9.11). Нелинейным устройством является дискриминатор с характеристикой $F(e)$, где e – сигнал ошибки системы. Задача анализа заключается в оценке влияния характеристик дискриминатора на точность системы и определении условий, при которых нарушается нормальная работа системы и происходит срыв слежения.

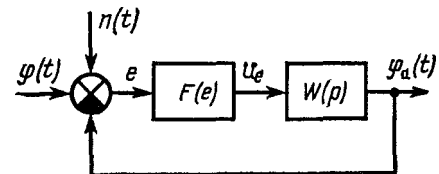


Рис. 9.11. Структурная схема нелинейной системы РА

При анализе точности работы системы относительно неслучайной составляющей сигнала $\varphi(t)$ нелинейный элемент $F(e)$ в соответствии с методом статистической линеаризации заменяется линейным звеном с коэффициентом передачи k_0 . По формуле (7.2) найдем математическое ожидание сигнала ошибки:

$$m_e = \lim_{p \rightarrow 0} p W_e(p) \varphi(p), \quad (9.22)$$

где $W_e(p) = \frac{1}{1 + k_0(m_e \sigma_e)W(p)}$ – передаточная функция ошибки системы.

Отметим, что математическое ожидание сигнала ошибки (9.22) имеет конечное значение, если степень медленно изменяющегося сигнала $\varphi(t)$ не превышает порядка астатизма системы.

При анализе системы относительно случайной составляющей $n(t)$ (помехи) нелинейный элемент заменяется линейным звеном с коэффициентом передачи k_1 . При этом выражение для дисперсии сигнала ошибки в соответствии с (7.9) принимает вид:

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{1 + k_1(m_e \sigma_e)W(p)} \right|^2 S_n(\omega) d\omega, \quad (9.23)$$

где $S_n(\omega)$ – спектральная плотность помехи.

Для определения m_e необходимо решить систему алгебраических уравнений (9.22) и (9.23). Для этого можно использовать метод приближенных вычислений, в соответствии с которым при каких-либо значениях m_e и e_e^2 находятся коэффициенты статистической линеаризации k_0 и k_1 , после чего по формулам (9.22) и (9.23) вычисляются значения m_e и σ_e и т.д. до тех пор, пока не совпадут два последовательных приближения. Уравнения (9.22) и (9.23) могут быть решены и графически. Проиллюстрируем это на конкретном примере.

► **Пример 9.3.** Найти суммарную среднюю квадратическую ошибку системы автоматического сопровождения цели (рис. 9.11). Расчеты провести для случая, когда $\varphi(t) = at$, $a = 0,7$ рад·с⁻¹, а передаточная функция исполнительного устройства системы $W(p) = k_u/p$, где $k_u = 0,35$ рад/(с·В).

Решение. Спектральная плотность помехи, действующей на вход системы,

$$S_n(\omega) = \frac{N_n}{1 + \omega^2 T_n^2},$$

где $N_n = 0,3 \cdot 10^{-3}$ рад²·с; $T_n = 0,05$ с.

Пеленгационная характеристика системы сопровождения аппроксимируется выражением (9.21), в котором $A = 5$ В; $a = 0,314$.

Уравнения (9.22) и (9.23) для рассматриваемой системы получают следующие:

$$m_e = \frac{\alpha}{k_0(m_e\sigma_e)k_u}; \quad (9.24)$$

$$\sigma_e^2 = \frac{N_n}{2T_n(1+k_1(m_e\sigma_e)k_u)}. \quad (9.25)$$

Расчет коэффициентов статической линейризации выполним в такой последовательности.

Проведем на рис. 9.10, а прямую, уравнение которой следует из выражения (9.24) и имеет вид

$$k_0(m_e\sigma_e)m_e = \frac{\alpha}{k_{\text{н}}} = 2\text{В}. \quad (9.26)$$

По точкам пересечения этой прямой с изображенными на рис. 9.10, а кривыми найдем зависимость (рис. 9.12, кривая 1)

$$\sigma_e^2 = f(m_e). \quad (9.27)$$

Формула (9.27) связывает математическое ожидание сигнала ошибки m_e и дисперсию этого сигнала σ_e , удовлетворяющие уравнению (9.26).

Для каждой пары значений m_e и σ_e^2 , связанных уравнением (9.27), по формулам (9.20) рассчитывают коэффициенты статистической линейризации k_{12} , а по формулам (9.25) – зависимость дисперсии сигнала ошибки σ_e^2 от математического ожидания этого сигнала (см. рис. 9.12, кривая 2). Точка пересечения кривых 1 и 2 определяет математическое ожидание сигнала ошибки m_e и дисперсию этого сигнала σ_e^2 . В рассматриваемой системе автоматического сопровождения цели $m_{e1} = 3,14 \cdot 10^{-2}$ рад; $\sigma_{e1}^2 = 1,5 \cdot 10^{-3}$ рад². По этим значениям и кривым на рис. 9.10 находят коэффициенты статистической линейризации $k_0 = 64$ В/рад; $k_{12} = 57,3$ В/рад, которые затем используют для оценки точности работы системы. Динамическая ошибка системы определена – это значение математического ожидания сигнала ошибки m_{e1} . Дисперсия ошибки системы из-за действия помехи, согласно (7.9),

$$\sigma_{en}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_3(j\omega)|^2 S_n(\omega) d\omega = \frac{k_{12}k_u T_u}{2(1+k_{12}k_u T_n)} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ рад}^2,$$

где $|W_3(j\omega)|$ – АЧХ замкнутой системы.

Таким образом, суммарная средняя квадратическая ошибка системы автоматического сопровождения цели

$$\sigma_{\Sigma} = (m_{e1}^2 + \sigma_{en}^2)^{1/2} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ рад}.$$

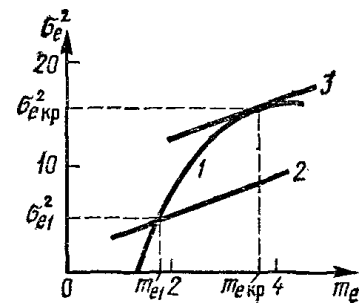


Рис. 9.12. К вычислению коэффициентов статистической линейризации в системе автосопровождения цели

Определим условия, при которых в следящей системе из-за нелинейных свойств пеленгационной характеристики происходит срыв сопровождения цели. Процесс срыва носит случайный характер, поэтому его характеристикой является вероятность возникновения срыва за какой-то промежуток времени. Вычисление этой вероятности является сложной задачей. В инженерной практике ограничиваются выявлением характеристик сигнала и помех, при которых происходит срыв сопровождения цели. Метод статистической линеаризации позволяет решить эту задачу, при этом удобно использовать графический способ, который применялся ранее для анализа стационарных режимов в системах РА.

Оценим, при каком уровне спектральной плотности помехи происходит срыв сопровождения цели в системе, рассмотренной в примере 9.3. С увеличением уровня спектральной плотности помехи кривая 2 на рис. 9.12 не изменяет своей формы и смещается вверх; при каком-то значении N_n кривые 1 и 2 не будут пересекаться. Это означает, что отсутствует совместное решение уравнений (9.24) и (9.25). Математическое ожидание и дисперсия сигнала ошибки резко возрастают и происходит срыв сопровождения цели, система становится разомкнутой, а, следовательно, неработоспособной. После срыва сопровождения цели математическое ожидание сигнала ошибки неограниченно увеличивается, а дисперсия сигнала ошибки оказывается равной дисперсии помехи. Граничное значение уровня спектральной плотности помехи N_n , при котором происходит срыв сопровождения цели, равно $N_{n.зр}$. При этом кривая 2 на рис. 9.12 оказывается касательной к кривой 1. В рассмотренном ранее примере $N_{n.зр} = 9,14 \cdot 10^{-4}$ рад²·с.

Граничное значение уровня спектральной плотности помехи зависит от параметров системы, управляющего воздействия и ширины спектра помехи. Так, с ростом производной управляющего воздействия увеличивается математическое ожидание сигнала ошибки, в результате чего $N_{n.зр}$ уменьшается. С расширением спектра помехи $N_{n.зр}$ также снижается, так как при этом увеличивается дисперсия сигнала ошибки. С ростом коэффициента передачи линейной части системы сигнал ошибки уменьшается, а, следовательно, увеличивается $N_{n.зр}$. ◀

Вопросы к теме 9

1. В чем сущность метода гармонической линеаризации нелинейных характеристик?
2. Чем отличается гармоническая линеаризация от обычной?
3. Что такое статистическая линеаризация нелинейных характеристик? Как она осуществляется относительно математического ожидания сигнала и его случайной составляющей?
4. Как оценивается точность системы РА по методу статистической линеаризации?
5. Сформулируйте правила оценки устойчивости и параметров автоколебаний.
6. Как оцениваются условия срыва в системах РА?

РАЗДЕЛ 6. ПРОЕКТИРОВАНИЕ СИСТЕМ РАДИОАВТОМАТИКИ

Тема 10. СИНТЕЗ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ СИСТЕМ РАДИОАВТОМАТИКИ

10.1. Постановка задачи

Задача проектирования (синтеза) системы РА состоит в выборе структурной схемы параметров и способа технической реализации системы из условия обеспечения ряда требований, которые следуют из назначения проектируемой системы и условий обеспечения ее характеристик.

Один из возможных способов описания требований к проектируемой системе – задание показателей качества работы системы, рассмотренных в теме 5 (например, допустимых значений статической, динамической и средней квадратической ошибок системы). Это может быть сделано, если известны характеристики управляющих и возмущающих воздействий. Детерминированные воздействия должны быть заданы как функции времени или их производные. Для случайных сигналов и помех должны быть известны их корреляционные функции или спектральные плотности. При такой постановке синтез системы РА сводится к выбору структурной схемы, с помощью которой можно обеспечить показатели качества работы системы РА не хуже заданных.

Если характеристики управляющих и возмущающих воздействий известны, то систему РА можно спроектировать как оптимальную, обеспечив минимальное значение суммарной среднеквадратической ошибки. Решить эту задачу позволяет теория оптимальных фильтров Н. Винера и Р. Калмана, которая применительно к проектированию оптимальных систем РА рассмотрена в теме 15. Возможна и иная постановка задачи синтеза оптимальных систем. Наиболее общей является ее постановка с учетом достижения минимума *функционала (критерия качества)*

$$J = \int_0^T [v_e(t) + v_u(t)] dt, \quad (10.1)$$

где $v_e(t) = e^2(t) + \alpha_1 \dot{e}^2(t) + \dots + \alpha_k [e^{(k)}(t)]^2$ – квадратичная форма относительно ошибки системы $e(t)$; $v_u(t) = u^2(t) + q_1 \dot{u}^2(t) + \dots + q_k [u^{(k)}(t)]^2$ – квадратичная форма относительно сигнала управления $u(t)$; T – время работы системы.

Первая квадратичная форма в функционале (10.1) выбирается из требований, предъявляемых к точности проектируемой системы, вторая учитывает ограничения на сигнал управления. При этом задача оптимального синтеза формулируется следующим образом. Из допустимого множества $u(t)$ необходимо выбрать и технически реализовать такой сигнал управления, который переводит объект управления из начального состояния в конечное и минимизирует функ-

ционал (10.1). Для решения таких задач используются методы вариационного исчисления, принцип максимума Л.С. Понтрягина, метод динамического программирования Р. Белмана. Здесь возможны два случая: 1) полностью известна информация о состоянии объекта управления; 2) информация об объекте управления неполная или вообще неизвестна. Во втором случае при синтезе системы возникает дополнительная задача оценки состояния объекта управления, на основании которой формируется оптимальный сигнал управления.

Синтез оптимальных систем из условия минимума функционала (10.1) связан с рядом трудностей. Одна из трудностей состоит в том, что в настоящее время нет каких-либо методов, позволяющих связать коэффициенты квадратичных форм функционала (10.1) α_i и q_i с заданными показателями качества работы проектируемой системы. Поэтому в процессе синтеза системы приходится рассчитывать большое число вариантов оптимальных систем с различными видами квадратичных форм и их коэффициентов, объем расчетов при этом может быть весьма значительным. Другая трудность связана с реализацией найденных оптимальных алгоритмов управления, которые получаются особо сложными и могут быть реализованы лишь приближенно. Вследствие отмеченных трудностей методы проектирования оптимальных систем из условия минимума функционала (10.1) в основном используются в научных исследованиях для оценки предельных соотношений и мало пригодны в инженерных задачах проектирования систем РА.

В данной теме рассматривается синтез систем РА из условия обеспечения допустимых ошибок в системе и удовлетворения других показателей качества работы. Такой метод называют *динамическим синтезом систем РА*.

Помимо требований к качеству функционирования в процессе синтеза систем РА предъявляются требования и к их сложности. Всегда желательно, чтобы спроектированная система была простой, а требования к элементам системы – минимальными.

В качестве *функционала сложности системы* можно применять следующий интеграл [15]:

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2\nu} |W_p(j\omega)|^2 d\omega, \quad (10.2)$$

где $W_p(j\omega)$ – частотная характеристика разомкнутой системы; ν – порядок астатизма.

Чем меньше значение интеграла (10.2), тем ниже требования к устройствам системы.

Помимо требований к качеству работы проектируемой системы РА, к ее сложности предъявляется и ряд требований, связанных с надежностью работы системы, ее эксплуатацией, массой, габаритами, стабильностью ее характеристик при изменении условий окружающей среды и т.п. В настоящее время теория оптимальных систем не позволяет объединить всю совокупность требований к проектируемой системе в виде единого критерия, поэтому удовлетворение их во многом зависит от опыта и квалификации инженера-исследователя.

10.2. Желаемая передаточная функция разомкнутой системы

При синтезе систем РА будем полагать, что по известным характеристикам управляющих и возмущающих воздействий определены допустимые значения ошибок по положению, скорости, ускорению, ширине полосы пропускания, найденной из условия обеспечения требуемого значения средней квадратической ошибки, а также допустимая колебательность системы. Требования к указанным ошибкам формулируются в виде следующих неравенств:

$$e_{x0} \leq e_{ход}; \quad \dot{e}_x \leq \dot{e}_{ход}; \quad \ddot{e}_x \leq \ddot{e}_{ход}, \quad (10.3)$$

где $e_{x0}, \dot{e}_x, \ddot{e}_x$ – ошибки проектируемой системы по положению, скорости и ускорению.

На первом этапе задача синтеза состоит в нахождении *желаемой передаточной функции разомкнутой системы*, которая позволяет удовлетворить заданные требования к проектируемой системе РА. Очевидно, что желаемую передаточную функцию разомкнутой системы следует формулировать в более простом виде. Обычно желаемая передаточная функция разомкнутой системы ищется в следующих видах:

$$W_{рж1}(p) = \frac{K}{(1 + pT_1)((1 + pT_3) \prod_{i=4}^n (1 + pT_i))}; \quad (10.4)$$

$$W_{рж2}(p) = \frac{K(1 + pT_2)}{(1 + pT_1)^2(1 + pT_3) \prod_{i=4}^n (1 + pT_i)}; \quad (10.5)$$

При синтезе систем с астатизмом первого порядка:

$$W_{рж1}(p) = \frac{K(1 + pT_2)}{p(1 + pT_1)(1 + pT_3) \prod_{i=4}^n (1 + pT_i)}; \quad (10.6)$$

$$W_{рж2}(p) = \frac{K(1 + pT_2)^2}{p(1 + pT_2)(1 + pT_3) \prod_{i=4}^n (1 + pT_i)}; \quad (10.7)$$

При проектировании систем с астатизмом второго порядка желаемая передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W_{рж}(p) = \frac{K(1 + pT_2)}{p^2(1 + pT_3) \prod_{i=4}^n (1 + pT_i)}, \quad (10.8)$$

где \prod – знак произведения.

Задача синтеза систем РА сводится к определению по заданным показателям качества параметров желаемой передаточной функции K , T_1 , T_2 и T_3 . Звенья с постоянными времени T_i в такой функции учитывают влияние на проектируемую систему РА устройств с малыми постоянными времени (например, приемника РЛС в системе автоматического сопровождения цели и т.п.).

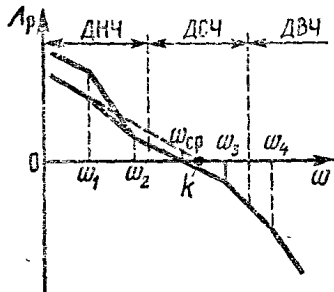


Рис. 10.1. ЛЧХ разомкнутых систем РА

Прежде чем рассматривать методику нахождения параметров желаемой передаточной функции, проанализируем типичные логарифмические АЧХ, соответствующие передаточным функциям (10.6) и (10.7) (рис. 10.1). На этих характеристиках различают три диапазона частот.

Вид характеристики в диапазоне низких частот (ДНЧ) характеризует точность работы системы относительно управляющего воздействия. В диапазоне средних частот (ДСЧ) находится частота среза. В этом диапазоне частот вид характеристики определяет запас устойчивости по фазе, полосу пропускания, показатели качества переходного процесса. Вид характеристики в диапазоне высоких частот (ДВЧ) влияет на запасы устойчивости в системе РА.

Найдем параметры желаемой передаточной функции системы с астатизмом первого порядка (10.6). По заданному значению колебательности системы и формуле (5.7) вычисляют запас устойчивости по фазе:

$$\Delta\varphi = \arcsin \frac{1}{M}. \quad (10.9)$$

Требуемое значение полосы пропускания и выражение (5.6) позволяют рассчитать частоту среза проектируемой системы:

$$\omega_{ср} = \frac{\omega_n}{2 \cos \Delta\varphi}. \quad (10.10)$$

По допустимым значениям ошибок по скорости и ускорению находим коэффициенты ошибок:

$$C_0 = 0; \quad C_1 = \frac{\dot{e}_x}{\dot{x}_m}; \quad C_2 = \frac{2\ddot{e}_x}{\ddot{x}_m}, \quad (10.11)$$

где \dot{x}_m, \ddot{x}_m – максимальные значения первой и второй производных от управляющего воздействия.

Коэффициент ошибки по скорости определяет коэффициент усиления в системе РА:

$$K = 1/C_1. \quad (10.12)$$

Для нахождения постоянных времени T_1 и T_2 установим связь сопряженных частот $\omega_1 = 1/T_1$ и $\omega_2 = 1/T_2$ с коэффициентом усиления и частотой среза. Из рис. 10.1 следует, что

$$\Lambda(\omega_1) = 20 \lg \frac{K}{\omega_1}; \quad \Lambda(\omega_2) = 20 \lg \frac{\omega_{cp}}{\omega_2}. \quad (10.13)$$

Наклон характеристики между частотами ω_1 и ω_2 равен минус 40 дБ/дек, поэтому

$$\Lambda(\omega_1) - \Lambda(\omega_2) = 40 \lg \frac{\omega_2}{\omega_1}. \quad (10.14)$$

Согласно (10.13) и (10.14)

$$K / \omega_{cp} = \omega_2 / \omega_1 = T_1 / T_2. \quad (10.15)$$

Постоянные времени T_1 и T_2 можно получить и из выражения для коэффициента ошибки по ускорению:

$$C_2 = 2 \left[\frac{T_1 + T_3 + \sum_{i=4}^n T_i - T_2}{K} - \frac{1}{K^2} \right] \approx 2 \frac{T_1 - T_2}{K}. \quad (10.16)$$

Упрощения в (10.16) не приводят к невыполнению требований по точности работы проектируемой системы РА. Из выражений (10.15) и (10.16) находим, что

$$T_1 = \frac{KT_2}{\omega_{cp}}; \quad T_2 = \frac{1}{2} \frac{KC_2 \omega_{cp}}{K - \omega_{cp}}. \quad (10.17)$$

Постоянную времени T_3 функции (10.6) определим из условия обеспечения в проектируемой системе запаса устойчивости (10.9):

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctg \omega_{cp} T_1 + \arctg \omega_{cp} T_2 - \arctg \omega_{cp} T_3 - \sum_{i=4}^n \arctg \omega_{cp} T_i. \quad (10.18)$$

При высоких требованиях к точности работы системы не всегда можно удовлетворить заданные условия, используя функцию (10.6), поэтому приходится применять более сложную передаточную функцию (10.7). Коэффициент усиления в этом случае вычисляют по формуле (10.12), а постоянные времени T_1 и T_2 – в соответствии с выражениями

$$T_1 = T_2 \sqrt{\frac{K}{\omega_{cp}}}; \quad T_2 = \frac{KC_2}{4} \left(\sqrt{\frac{K}{\omega_{cp}}} - 1 \right)^{-1}. \quad (10.19)$$

Постоянную времени T_3 рассчитывают по формуле

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} - 2 \arctg \omega_{cp} T_1 + 2 \arctg \omega_{cp} T_2 - \arctg \omega_{cp} T_3 - \sum_{i=4}^n \arctg \omega_{cp} T_i. \quad (10.20)$$

Аналогичным образом определяются параметры желаемых передаточных функций статических систем РА (10.4) и (10.5) и систем с астатизмом второго порядка (10.8).

10.3. Определение передаточных функций корректирующих устройств

После выбора и определения параметров желаемой передаточной функции разомкнутой системы находят передаточные функции корректирующих устройств, предварительно определив передаточную функцию функционально необходимых устройств проектируемой системы. К таким устройствам относятся, например, фазовый детектор и перестраиваемый генератор в системе ФАПЧ, гетеродин и частотный дискриминатор в системе АПЧ, угловой дискриминатор и антенна с исполнительным устройством и усилителем мощности в системе автоматического сопровождения цели РЛС.

Передаточную функцию разомкнутой системы без корректирующих устройств, составленную из передаточных функций функционально необходимых устройств системы, будем называть *исходной передаточной функцией*.

Включение в систему РА корректирующих устройств означает введение в алгоритм управления, формируемого регулятором системы, дополнительных сигналов, пропорциональных сигналу ошибки, производным и интегралам от него, а также сигналов, пропорциональных производным от выходного сигнала. С физической точки зрения введение дополнительных сигналов приводит к компенсации влияния на качество работы системы РА наиболее инерционных устройств системы, в результате чего и достигаются заданные показатели качества работы системы.

Различают три способа включения корректирующих устройств – последовательный (рис. 10.2, а); параллельный (см. рис. 10.2, б) и по схеме с обратной связью (см. рис. 10.2, в).

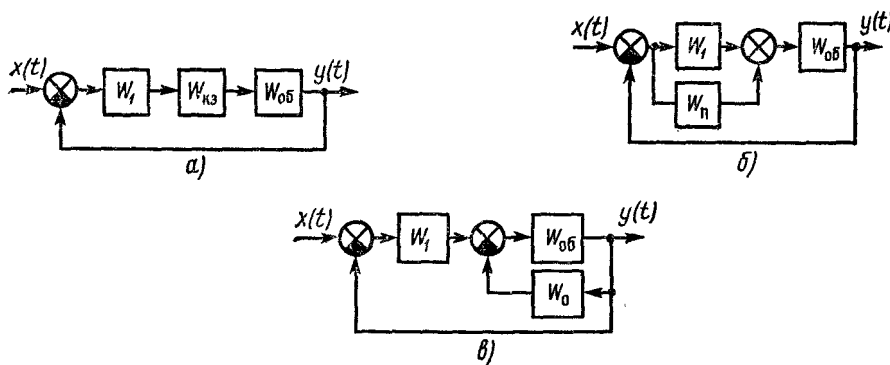


Рис. 10.2. Способы включения корректирующих устройств:
а – последовательный; б – параллельный; в – по схеме с обратной связью

Выбор того или иного способа включения корректирующего устройства зависит от удобства технической реализации и требований к стабильности характеристик системы РА. Синтез систем РА основан на определении передаточной функции корректирующего устройства, включенного последовательно в цепь сигнала ошибки системы.

Передаточная функция этого устройства должна быть выбрана такой, чтобы выполнялось условие:

$$W_{ржс}(p) = W_{ру}(p)W_{кз}(p), \quad (10.21)$$

где $W_{ру}(p)$ – передаточная функция исходной части разомкнутой системы; $W_{кз}(p)$ – передаточная функция последовательного корректирующего звена.

Из последнего выражения найдем, что

$$W_{кз}(p) = W_{ржс}(p)/W_{ру}(p). \quad (10.22)$$

Следовательно, чем больше звеньев исходной передаточной функции включено в желаемую передаточную функцию системы, тем проще передаточная функция корректирующего звена. Число звеньев исходной функции, которые можно ввести в желаемую передаточную функцию, определяется заданным запасом устойчивости по фазе.

Если в системе РА применяется корректирующее устройство, включенное в цепь обратной связи, то его передаточная функция

$$W_{ржс}(p) = W_{ру}(p)W_{кз}(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_{об}(p)W_0(p)}, \quad (10.23)$$

откуда

$$W_0(p) = \frac{1}{W_{об}(p)} \left[\frac{1}{W_{кз}(p)} - 1 \right], \quad (10.24)$$

где $W_0(p)$ – передаточная функция корректирующего устройства в цепи обратной связи; $W_{об}(p)$ – передаточная функция объекта управления (устройств, охваченных обратной связью).

Если используют корректирующее устройство, включенное параллельно с каким-либо элементом системы, то его передаточная функция с учетом рис. 10.2

$$W_{ржс}(p) = W_{ру}(p)W_{кз}(p) = W_{ру}(p) + W_n(p)W_{об}(p). \quad (10.25)$$

Тогда

$$W_n(p) = W_1(p)[W_{кз}(p) - 1], \quad (10.26)$$

где $W_n(p)$ – передаточная функция параллельного корректирующего устройства; $W_1(p)$ – передаточная функция цепи сигнала ошибки.

В современных системах РА применяются все три способа включения корректирующих устройств. Это объясняется тем, что в ряде случаев передаточная функция одного устройства получается настолько сложной, что ее трудно реализовать технически. Кроме того, для улучшения стабильности работы систем РА относительно изменений условий окружающей среды и колебаний напряжений источников питания целесообразно наиболее инерционные и нестабильные устройства системы охватить обратной связью. При этом передаточная функция последовательного корректирующего устройства, вычисленная по формуле (10.22), имеет вид

$$W_{кз}(p) = W_{кз1}(p)W_{кз2}(p). \quad (10.27)$$

Один из сомножителей этого выражения, например, первый реализуется с помощью последовательного корректирующего устройства, а второй – с помощью эквивалентного корректирующего устройства в цепи обратной связи, передаточная функция которого определяется по формуле (10.24).

При синтезе систем РА часто оказывается, что передаточные функции корректирующих устройств не удовлетворяют условию физической реализуемости. Очевидно, что в таких случаях желаемая передаточная функция из-за упрощения передаточных функций корректирующих устройств может быть реализована лишь приближенно. При этом необходимо обеспечить, чтобы ЛЧХ разомкнутой системы в области низких и средних частот совпадали с желаемыми ЛЧХ, расхождение характеристик допустимо только в области высоких частот.

После упрощения передаточных функций корректирующих устройств необходимо построить ЛЧХ спроектированной системы РА и проверить выполнение заданных показателей качества работы.

Обычно в системах РА применяют корректирующие устройства на постоянном токе. Корректирующие устройства на переменном токе используют редко, так как они сложны и для их нормальной работы требуются источники энергии с высокой стабильностью частоты, что в ряде случаев, особенно в системах РА летательных аппаратов, невыполнимо.

Ниже рассматриваются корректирующие устройства постоянного тока.

На рис. 10.3, а, б показаны схема и ЛЧХ звена с отставанием по фазе, которое используется в системах РА как последовательное корректирующее устройство.

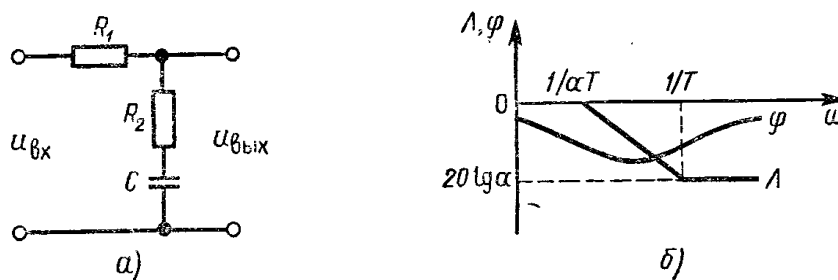


Рис. 10.3. Корректирующее звено с отставанием по фазе: а – схема; б – ЛЧХ

Его передаточная функция имеет вид:

$$W(p) = \frac{1 + pT}{1 + p\alpha T}, \quad (10.28)$$

где $T = R_2C$ – постоянная времени звена; $\alpha = (R_1 + R_2)/R_2$ – постоянный коэффициент.

На рис. 10.4, а, б представлены схема и ЛЧХ последовательного корректирующего звена с опережением по фазе, передаточная функция которого

$$W(p) = \beta \frac{1 + pT}{1 + p\beta T}, \quad (10.29)$$

где $T = R_1 C$; $\beta = R_2 / (R_1 + R_2)$.

В системах РА применяют также последовательное *комбинированное звено*, схема которого и ЛЧХ изображены на рис. 10.5, а, б. Передаточная функция звена

$$W(p) = \frac{(1 + pT_2)(1 + pT_3)}{(1 + pT_1)(1 + pT_4)}. \quad (10.30)$$

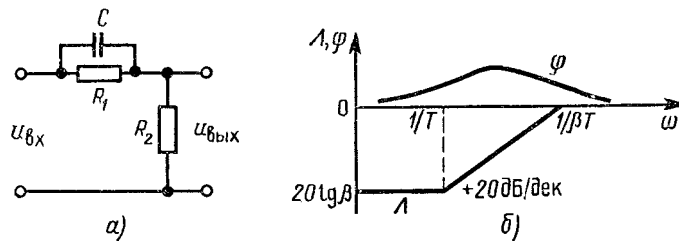


Рис. 10.4. Корректирующее звено с опережением по фазе: а – схема; б – ЛЧХ

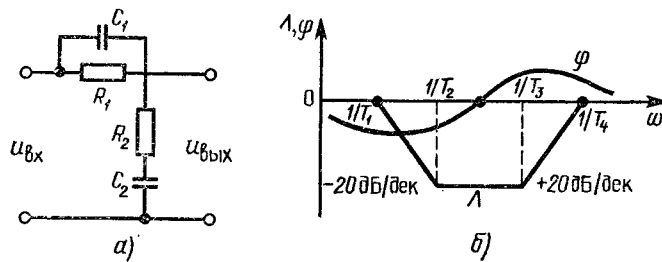


Рис. 10.5. Комбинированное корректирующее звено: а – схема; б – ЛЧХ

Сопротивления и емкости выбираются такими, чтобы выполнялось условие $T_1 > T_2 > T_3 > T_4$. С этой целью необходимо, чтобы $C_2 > C_1$ и $R_1 > R_2$. Тогда сопротивления и емкости звена рассчитывают по известным постоянным времени:

$$T_1 = R_1 C_1 + (R_1 + R_2) C_2; \quad T_2 = R_2 C_2; \quad T_3 = R_1 C_1; \\ T_4 = \frac{R_1 C_1 R_2 C_2}{R_1 C_1 + (R_1 + R_2) C_2} \approx \frac{R_1 C_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (10.31)$$

В качестве корректирующих обратных связей используют жесткие и гибкие связи.

Жесткая обратная связь не содержит дифференцирующих звеньев, т.е. представляет собой пропорциональное звено. Рассмотрим ее влияние на характеристики отдельных звеньев. Если жесткой обратной связью охватить инерционное звено, то согласно (3.42)

$$W(p) = \frac{k}{1 + pT},$$

где $k = k_1/(1 + k_1k_0)$; $T = T_1/(1 + k_1k_0)$; k_1, T_1 – коэффициент передачи и постоянная времени инерционного звена, охваченного обратной связью; k_0 – коэффициент передачи цепи обратной связи.

Таким образом, охват инерционного звена жесткой обратной связью не изменяет его характера, однако коэффициент усиления и постоянная времени уменьшаются в $1 + k_1k_0$ раз.

Если жесткой обратной связью с коэффициентом передачи k_0 охватить интегрирующее звено с коэффициентом передачи k_1 , то получим инерционное звено с параметрами $k = 1/k_0$, $T = 1/k_1k_0$ (изменяется тип звена). Следовательно, такую связь необходимо использовать в тех случаях, когда требуется понизить порядок астатизма, т.е. исключить в системе влияние интегрирующего звена.

Гибкая обратная связь содержит дифференцирующие звенья, поэтому она действует только в переходном процессе, что не снижает точности системы в установившемся режиме. Оценим влияние гибкой обратной связи на характеристики различных звеньев. Если такой связью с передаточной функцией

$$W_0(p) = \frac{pT_0}{1 + pT_0} \quad (10.32)$$

охватить безынерционное звено, то получим звено с передаточной функцией

$$W_1(p) = k_1 \frac{1 + pT_0}{1 + pT_0(1 + k_1)}, \quad (10.33)$$

где k_1 – коэффициент передачи безынерционного звена.

Таким образом, охват безынерционного звена гибкой обратной связью эквивалентен включению в цепь сигнала ошибки системы последовательного звена с отставанием по фазе.

Если гибкой обратной связью с передаточной функцией (10.32) охватить интегрирующее звено, то

$$W(p) = \frac{k}{p} \frac{1 + pT_0}{1 + pT}, \quad (10.34)$$

где $k = \frac{k_1}{1 + k_1T_0}$; $T = \frac{T_0}{1 + k_1T_0}$; k_1 – коэффициент передачи интегрирующего звена.

Из выражения (10.34) следует, что охват интегрирующего звена гибкой обратной связью эквивалентен последовательному включению в цепь сигнала ошибки системы звена с опережением по фазе, при этом астатизм системы РА не снижается.

Для создания такого вида связи используются тахогенераторы, гироскопические датчики частоты вращения, RC-цепи. На рис. 10.6, а показана схема

RC-цепи, передаточная функция которой определяется (10.32). Сигнал на выходе такой цепи в определенном диапазоне частот пропорционален первой производной $u_{\text{вых}}(t)$.

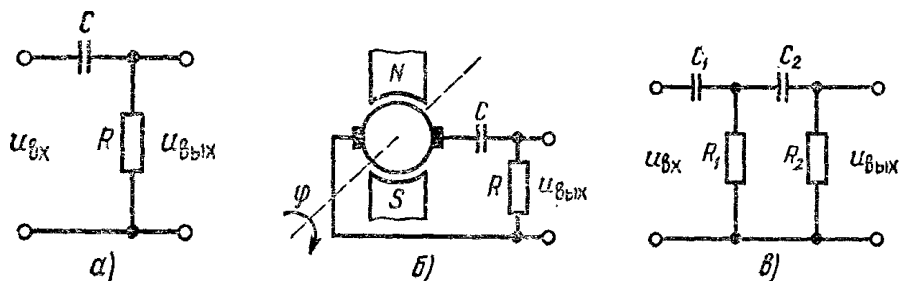


Рис. 10.6. Гибкие обратные связи: *а* – электрическая RC-цепь; *б* – с электромеханическим датчиком; *в* – двойная RC-цепь

В системах РА применяются гибкие обратные связи, выходной сигнал которых пропорционален второй производной входного сигнала обратной связи. Такая обратная связь (см. рис. 10.6, *б*) может быть сформирована с помощью тахогенератора и дифференцирующей RC-цепи, если входным сигналом обратной связи является угол поворота, или с помощью RC-цепи, изображенной на рис. 10.6, *в*, если на вход подается сигнал постоянного тока. Передаточная функция такой цепи

$$W(p) = \frac{T_1 T_2 p^2}{T_1 T_2 p^2 + \left[T_2 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) + T_1 \right] p + 1}, \quad (10.35)$$

где $T_1 = R_1 C_1$; $T_2 = R_2 C_2$.

Если $R_1 \ll R_2$, то приближенно можно принять, что

$$W(p) = \frac{T_1 T_2 p^2}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)}. \quad (10.36)$$

► **Пример 10.1.** Синтезировать систему автоматического сопровождения цели РЛС. Структурная схема системы изображена на рис. 4.11. Найти передаточные функции корректирующих устройств из условия обеспечения в системе полосы пропускания, равной 10 с^{-1} . Показатель колебательности не превышает 1,4, ошибка по положению равна нулю, ошибка по скорости – не более $0,175 \cdot 10^{-2}$ рад и ошибка по ускорению – не более $0,87 \cdot 10^{-2}$ рад при максимальных значениях производных сигнала $0,175 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$ и $0,35 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-2}$.

Решение. Передаточная функция исходной части системы

$$W_{pu}(p) = W_n(p)W_{\phi\delta}(p)W_{ym}(p)W_A(p), \quad (10.37)$$

где $W_n(p) = \frac{k_n}{1 + pT_n}$; $W_{\phi\delta}(p) = \frac{k_{\phi\delta}}{(1 + pT_{\phi\delta})}$; $W_{ym}(p) = \frac{k_{ym}}{1 + pT_{ym}}$; $W_A(p) = \frac{k_A}{p(1 + pT_M)}$ –

передаточные функции приёмника, фазового детектора, усилителя мощности и антенны с двигателем и редуктором.

Параметры устройств исходной части системы: $k_n = 0,035$ В/рад; $k_{\phi\delta} = 0,8$; $k_{ym} = 10$; $k = 143$ рад/(с·В); $T_n = T_{\phi\delta} = T_{ym} = 0,01$ с; $T_M = 0,02$ с.

Коэффициент передачи исходной части системы

$$k_u = k_n k_{\phi\delta} k_m k_A = 4. \quad (10.38)$$

С учетом требований к системе и формул (10.9) – (10.12)

$$\Delta\varphi = 0,785 \text{ рад}; \quad \omega_{cp} = 7\text{с}^{-1}; \quad C_0 = 0; \quad C_1 = 0,01 \text{ с}; \quad C_2 = 0,05 \text{ с}^2; \quad K = 100 \text{ с}^{-1}.$$

В качестве желаемой передаточной функции разомкнутой системы примем функцию (10.7). Все сопряженные частоты передаточных функций устройств исходной части системы автоматического сопровождения (10.37) больше требуемой частоты среза, поэтому для упрощения корректирующих устройств включим передаточную функцию исходной части системы в состав желаемой передаточной функции. В результате получим:

$$W_{pжс}(p) = \frac{K(1 + pT_2)^2}{p(1 + pT_1)^2(1 + pT_3)(1 + pT_n)(1 + pT_{\phi\delta})(1 + pT_{ym})(1 + pT_M)}. \quad (10.39)$$

Постоянные времени T_1 , T_2 , T_3 вычислим по формулам (10.19) и (10.20). Тогда $T_1 = 1,7$ с; $T_2 = 0,45$ с; $T_3 = 0,015$ с.

Так как значение T_3 незначительно отличается от постоянной времени двигателя $T_M = 0,02$ с, то для упрощения корректирующего устройства примем $T_3 = T_M$.

Передаточную функцию последовательного корректирующего устройства найдем, используя выражение (10.22):

$$W_{кз}(p) = k_{кз} \frac{1 + pT_2}{1 + pT_1} \frac{1 + pT_2}{1 + pT_1}, \quad (10.40)$$

где $k_{кз} = K/K_u$ – коэффициент передачи корректирующего звена; K_u – коэффициент передачи исходной части системы.

Первый множитель в (10.40) реализуем в виде последовательного корректирующего устройства, включенного после фазового детектора, а второй – через эквивалентную обратную связь, передаточную функцию которой рассчитаем по формуле (10.24).

Таким образом,

$$W_0(p) = K_0 \frac{p^2(1 + pT_{y.m})(1 + pT_m)}{1 + pT_2} \approx \frac{k_0 p^2}{1 + pT_2}, \quad (10.41)$$

где $k_0 = (T_1 - T_2)/(k_{y.m} k_A)$ – коэффициент передачи цепи обратной связи.

В выражении (10.41) пренебрегли постоянными времени $T_{y.m}$ и T_m , так как соответствующие им сопряженные частоты намного больше частоты среза. Обратная связь с передаточной функцией (10.41) реализуется с помощью тахогенератора и дифференцирующей RC -цепи (рис. 10.6, б) с постоянной времени, равной T_2 . Передаточная функция такой обратной связи

$$W_0(p) = k_{y0} k_{mz} p W_d(p) = k_0 \frac{p^2 T_2}{1 + pT_2}, \quad (10.42)$$

где k_{mz} – коэффициент передачи тахогенератора; $k_{y0} = k_0 l(k_{mz} T_2)$ – коэффициент усиления усилителя в цепи обратной связи.

Так как при синтезе системы автоматического сопровождения были допущены упрощения, то необходимо проверить выполнение заданных требований. С этой целью на рис. 10.7 построены ЛЧХ спроектированной системы и ЛЧХ, соответствующие передаточной функции (10.39). Сравнив эти характеристики, можно понять, что все заданные показатели качества работы системы автоматического сопровождения цели выполняются.

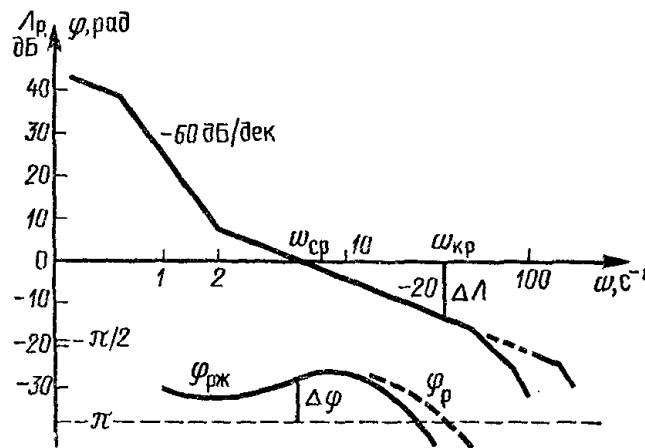


Рис. 10.7. ЛЧХ системы автосопровождения цели РЛС ◀

10.4. Синтез систем с неполной информацией о воздействиях

Ранее при динамическом синтезе систем РА полагали, что характеристики управляющих воздействий и помех известны, т.е. заданы их математические ожидания и спектральные плотности случайных составляющих.

На практике это не всегда так. Характеристики воздействий обычно известны не полностью. Кроме того, они изменяются в процессе работы системы, поэтому показатели качества работы могут оказаться ниже расчетных.

Построение систем РА с использованием адаптивных систем позволяет исключить зависимость показателей качества работы от изменения характеристик воздействия и нестабильности параметров устройств. Адаптивные системы анализируются в теме 16, здесь же рассмотрим синтез *робастных систем* (от английского слова *robust* – грубый), в которых показатели качества работы можно обеспечить не ниже заданных. Техническая реализация таких систем РА по сравнению с адаптивными намного проще, что является их существенным преимуществом.

Синтез робастных систем может быть выполнен различными методами [17]. Применительно к задачам синтеза систем РА целесообразно использовать метод, основанный на известных средних квадратических значениях управляющего воздействия и его производных. Данный метод не связан с конкретной формой спектральной плотности управляющего сигнала, поэтому ее изменение не приводит к несоблюдению точности работы системы РА.

Рассматриваемый метод синтеза систем РА сводится к выбору частотной характеристики ошибки из условия неперевышения средней квадратической ошибкой заданного значения. После этого можно сформулировать требования к частотной характеристике разомкнутой системы.

Дисперсия ошибки относительно управляющего воздействия в соответствии с выражением (7.9)

$$\sigma_{ex}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |W_e(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega \leq D_{e0}, \quad (10.43)$$

где $W_e(j\omega)$ – частотная характеристика ошибки; D_{e0} – допустимое значение дисперсии ошибки.

Представим квадрат АЧХ ошибки в следующем виде:

$$|W_e(j\omega)|^2 = c_0 + c_1\omega^2 + c_2\omega^4 + \dots + c_n\omega^{2n}. \quad (10.44)$$

Тогда дисперсия ошибки (10.43)

$$\sigma_{ex}^2 = c_0D_0 + c_1D_1 + c_2D_2 + \dots + c_nD_n, \quad (10.45)$$

где D_0 – дисперсия управляющего воздействия; D_i – дисперсии производных; c_i – постоянные коэффициенты.

Задача синтеза системы состоит в выборе характеристики $W_e(j\omega)$, удовлетворяющей условию (10.43).

Если известна только дисперсия управляющего воздействия D_0 , то из выражения (10.45) следует, что $c_0 = D_{e0}/D_0$ и частотная характеристика ошибки проектируемой системы должна удовлетворять условию

$$|W_e(j\omega)| \leq |W_{e0}(j\omega)| = \sqrt{\frac{D_{e0}}{D_0}} = \frac{\sigma_{e0}}{\sigma_0}, \quad (10.46)$$

где $|W_{e0}(j\omega)|$ – АЧХ ошибки, составленная по априорным сведениям об управляющем воздействии.

Таким образом, ошибка не должна превышать значения (10.46) в диапазоне частот, в котором возможны спектральные составляющие управляющего воздействия.

Если известна только дисперсия первой производной управляющего воздействия D_1 , то $c_1 = D_{e0}/D_1$ и частотная характеристика ошибки проектируемой системы должна удовлетворять условию

$$|W_e(j\omega)| \leq |W_{e0}(j\omega)| = \omega \sqrt{\frac{D_{e0}}{D_1}} = \omega \frac{\sigma_{e0}}{\sigma_1}. \quad (10.47)$$

Если известна только дисперсия второй производной управляющего воздействия, то

$$|W_e(j\omega)| \leq |W_{e0}(j\omega)| = \omega^2 \sqrt{\frac{D_{e0}}{D_2}} = \omega^2 \frac{\sigma_{e0}}{\sigma_2}. \quad (10.48)$$

От ограничений, накладываемых на АЧХ ошибки, можно перейти к требованиям, которым должна удовлетворять частотная характеристика разомкнутой проектируемой системы. Из выражений (3.47) и (3.51) следует, что

$$W_p(j\omega) = W_3(j\omega)/W_e(j\omega). \quad (10.49)$$

Так как на частотах меньше частоты среза $|W_3(j\omega)| \approx 1$, то условия (10.46) – (10.48) выполняются, если

$$|W_{p0}(j\omega)| \geq \frac{1}{|W_{e0}(j\omega)|}, \quad (10.50)$$

а ФЧХ разомкнутой системы может быть произвольной.

На частотах больше частоты среза $|W_3(j\omega)| \approx |W_p(j\omega)|$, и поэтому вид частотной характеристики разомкнутой системы не влияет на точность системы РА и может быть произвольным, но при этом требования к запасам устойчивости должны соблюдаться.

Выполнение условия (10.50) гарантирует, что динамическая ошибка будет не выше заданной.

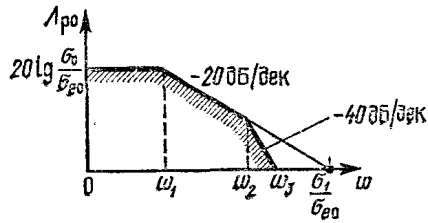


Рис. 10.8. ЛЧХ запретной области относительно динамической ошибки

Очевидно, что выражениям (10.46) и (10.50) на рис. 10.8 соответствует прямая линия, параллельная оси частот и отстоящая от нее на $20 \lg \sigma_0/\sigma_{e0}$, условиям (10.47) и (10.50) – прямая с наклоном минус 20 дБ/дек, которая пересекает ось абсцисс на частоте, равной σ_1/σ_{e0} , а условиям (10.48) и (10.50) – прямая с наклоном минус 40 дБ/дек, которая начинается на оси абсцисс с частоты $\sqrt{\sigma_2/\sigma_{e0}}$

Эти прямые образуют запретную область, в которой не должна располагаться низкочастотная часть логарифмической АЧХ разомкнутой проектируемой системы РА. Частоты, соответствующие точкам излома запретной области, вычисляют по формулам

$$\omega_1 = \sigma_1/\sigma_0; \quad \omega_2 = \sigma_2/\sigma_1; \quad \omega_3 = \sqrt{\sigma_2/\sigma_{e0}}. \quad (10.51)$$

Рассмотрим ограничения на вид АЧХ разомкнутой проектируемой системы из-за действия помехи, спектральная плотность которой известна и постоянна в пределах полосы пропускания системы РА (помеха в виде белого шума). Тогда дисперсия ошибки из-за действия помехи

$$\sigma^2 = N_n f_{эф}, \quad (10.52)$$

где $f_{эф}$ – эффективная полоса пропускания системы; N – уровень спектральной плотности белого шума помехи.

Задача синтеза системы РА заключается в том, чтобы суммарная средняя квадратическая ошибка системы не превышала допустимого значения:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_{ex}^2 + \sigma_{en}^2} \leq \sigma_{e0}, \quad (10.53)$$

где σ_{en} – средняя квадратическая ошибка из-за действия помехи.

Условие (10.53) предъявляет противоречивые требования к проектируемой системе РА. С одной стороны, средняя квадратическая ошибка относительно сигнала должна быть меньше σ_{e0} , так как в противном случае не будет выполнено условие (10.53), а с другой – не должна превышать этого значения и составляющая ошибки σ_{en} . Поэтому эффективная полоса пропускания проектируемой системы

$$f_{эф} \leq \sigma_{e0}^2 / N_n. \quad (10.54)$$

Таким образом, при синтезе системы РА необходимо обеспечить одновременное удовлетворение условий (10.50) и (10.54). Если эти условия выполнить одновременно невозможно, то при заданном значении σ_{e0} решения задачи проектирования робастной системы РА не существует.

Определим, какие ограничения накладывает условие (10.54) на АЧХ разомкнутой системы. С этой целью рассмотрим типовую логарифмическую АЧХ,

низкочастотные участки которой содержат асимптоты с наклонами минус 20, минус 40 или минус 60 дБ/дек. При этом всегда в области частоты среза наклон логарифмической АЧХ равен минус 20 дБ/дек, так как только в этом случае можно обеспечить необходимый запас устойчивости по фазе.

В [15] показано, что для систем РА с такими наклонами логарифмической АЧХ разомкнутой системы эффективная полоса пропускания системы с достаточной для практики точностью определяется по формуле

$$f_{эф} = l\omega_0/2, \quad (10.55)$$

где ω_0 – частота, соответствующая точке пресечения асимптоты логарифмической АЧХ с наклоном минус 20 дБ/дек с осью абсцисс; l – коэффициент, равный 1, 2 или 3, в зависимости от наклона асимптоты, для которой определена частота ω_0 . Согласно (10.54) и (10.55)

$$\omega_0 \leq 2\sigma_{e0}^2 / (lN_n). \quad (10.56)$$

Это выражение определяет крайнее допустимое положение логарифмической АЧХ разомкнутой проектируемой системы РА, или, что то же самое, – границу запретной области, в которой не должна располагаться логарифмическая АЧХ разомкнутой системы.

Построение запретной области осуществляется следующим образом. На оси абсцисс (рис. 10.9) через точку $\omega_0 = 2\sigma_{e0}^2 / N_n$ проводят прямую с наклоном минус 20 дБ/дек, а через точки $\omega_0/2$ и $\omega_0/3$ – прямые с наклонами минус 40 и минус 60 дБ/дек. В результате формируется запретная область (заштриховано на рис. 10.9).

Требования к точности работы проектируемой системы РА относительно возмущающего воздействия выполняются, если ее логарифмическая АЧХ не заходит в запретную область.

На рис. 10.10 показаны две запретные области, определенные ранее из условий (10.50) и условия (10.54). Для обеспечения в проектируемой системе РА заданной точности необходимо, чтобы выбранная логарифмическая АЧХ разомкнутой системы не располагалась в запретных областях и удовлетворяла требованиям к запасам устойчивости. На рис. 10.10 такая характеристика показана пунктиром. Если запретные области на рис. 10.10 перекрываются, то синтез робастной системы при заданных точностных характеристиках невозможен.

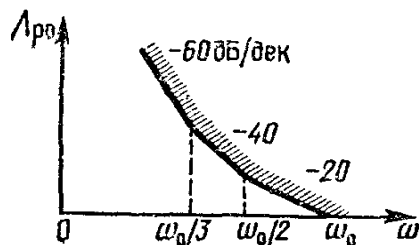


Рис. 10.9. ЛЧХ запретной области относительно возмущающего воздействия

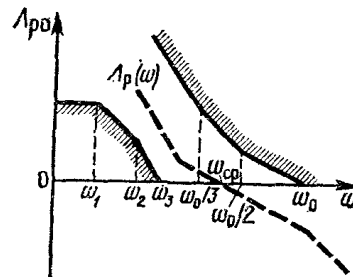


Рис. 10.10. ЛЧХ общей запретной области

В [16] показано, что для гарантированного получения заданной точности должен быть обеспечен некоторый интервал между левой и правой запретными областями; минимальная ширина этого интервала должна составлять около четверти декады.

10.5. Комплексные системы

Системы РА, которые формируются не только на базе радиотехнических устройств, но и на базе устройств других типов (например, гироскопических приборов, инерциальных систем и др.), называют *комплексными*.

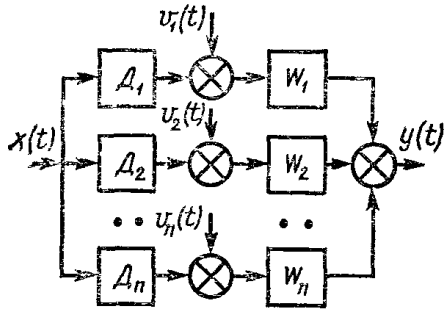


Рис. 10.11. Типовая структурная схема комплексной измерительной системы РА

Подобные системы широко применяются при навигации для определения координат и параметров движения различных объектов (например, для измерения скорости летательного аппарата и угла сноса относительно расчетной траектории используется гироскопическая система с доплеровским измерителем). Для измерения высоты полета применяются барометрический и радиолокационный высотомеры. Для комплексной системы РА

характерно наличие нескольких параллельно работающих каналов с различными датчиками измерения одной и той же информации. На рис. 10.11 показана типовая структурная схема комплексной измерительной системы, в которой входной сигнал $x(t)$ измеряется разнотипными датчиками D_1, D_2, \dots, D_n с передаточными функциями $W_{\phi i}(p)$, где $i = 1, 2, \dots, n$; воздействия $v_i(t)$ учитывают шумы погрешностей датчиков. Комплексирование системы заключается в вычислении оценки $\hat{x}(t)$ с точностью, превышающей достижимую при раздельном использовании датчиков.

Из схемы на рис. 10.11 следует, что преобразование Лапласа для оценки

$$\hat{X}(p) = \sum_{i=1}^n W_{\phi i}(p) W_{\phi i}(p) X(p) + \sum_{i=1}^n W_{\phi i}(p) W_{\phi i}(p) V_i(p). \quad (10.57)$$

Преобразование Лапласа для ошибки

$$E(p) = X(p) - \hat{X}(p) = \left[1 - \sum_{i=1}^n W_{\phi i}(p) W_{\phi i}(p) \right] X(p) - \sum_{i=1}^n W_{\phi i}(p) W_{\phi i}(p) V_i(p). \quad (10.58)$$

Из последнего выражения следует, что если передаточные функции каналов системы выбирают из условия

$$\sum_{i=1}^n W_{\partial i}(p)W_{\phi i}(p) = 1, \quad (10.59)$$

то выражения (10.57) и (10.58) принимают вид

$$\begin{aligned} \hat{X}(p) &= X(p) + \sum_{i=1}^n W_{\partial i}(p)W_{\phi i}(p)V_i(p); \\ E(p) &= -\sum_{i=1}^n W_{\partial i}(p)W_{\phi i}(p)V_i(p). \end{aligned} \quad (10.60)$$

Таким образом, ошибка комплексной системы не зависит от характеристик измеряемого сигнала и определяется только погрешностями датчиков.

Равенство (10.59) называют *условием инвариантности*, а систему, в которой удается его реализовать, – *инвариантной относительно ошибки измеряемого сигнала*.

Условие инвариантности накладывает ограничения только на суммарную передаточную функцию, но не на передаточные функции отдельных каналов, поэтому при синтезе комплексной системы остается некоторая свобода выбора передаточных функций отдельных каналов, что позволяет уменьшить ошибку из-за погрешностей датчиков.

Необходимо отметить, что условие инвариантности (10.59) в динамических системах удается выполнить лишь приближенно, поэтому в реальной системе динамическая ошибка не равна нулю (она может быть значительно уменьшена по сравнению с ошибками измерения при использовании одного канала измерения).

Следует также иметь в виду, что рассмотренная система, которую принято называть *многоканальной схемой фильтрации*, чувствительна к отклонению параметров устройств от расчетных значений, поэтому при проектировании такой системы необходимо обеспечить стабильность параметров ее устройств.

Рассмотрим еще один класс комплексных систем РА, основой которых является обычная система РА с обратной связью, а сигнал с нерадиотехнического датчика, с помощью которого измеряется управляющее воздействие $x(t)$, вводится в замкнутый контур после дискриминатора (рис. 10.12).

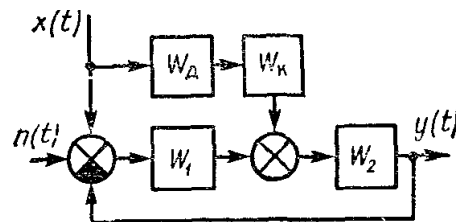


Рис. 10.12. Структурная схема комплексной системы РА

В таких системах удается значительно повысить точность системы РА относительно управляющего воздействия без ухудшения средней квадратической ошибки из-за действия помех.

Из рис. 10.12 следует, что преобразование Лапласа: для выходного сигнала

$$Y(p) = \frac{W_1(p)W_2(p) + W_k(p)W_2(p)}{1 + W_p} X(p) + \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)} n(p); \quad (10.61)$$

для ошибки системы

$$E(p) = X(p) - Y(p) = \frac{1 - W_k(p)W_2(p)}{1 + W_p(p)} X(p) - \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)} n(p). \quad (10.62)$$

Если выполняется условие инвариантности

$$W_k(p) = 1/W_2(p), \quad (10.63)$$

то выражения (10.61) и (10.62) принимают вид:

$$\begin{aligned} Y(p) &= X(p) + W_3(p)n(p); \\ E(p) &= -W_3(p)n(p), \end{aligned} \quad (10.64)$$

где $W_3(p)$ – передаточная функция замкнутого контура системы РА.

Из выражений (10.64) следует, что ошибка относительно управляющего воздействия равна нулю или инвариантна относительно этого сигнала. Путем выбора цепи сигнала ошибки системы с передаточной функцией $W_1(p)$ нетрудно сформировать замкнутый контур системы с учетом требуемой фильтрации помех.

Датчик, измеряющий управляющее воздействие, и последовательно включенный с ним фильтр с передаточной функцией $W_k(p)$ образуют цепь компенсации комплексной системы РА. Эта цепь не формирует замкнутого контура, а, следовательно, не влияет на устойчивость комплексной системы.

Рассмотрим возможность реализации условия инвариантности (10.63). В реальных системах степень полинома числителя передаточных функций устройств всегда меньше степени полинома их знаменателя, поэтому функция (10.63) не удовлетворяет условию физической реализуемости и в данной системе РА инвариантность ошибки относительно управляющего воздействия недостижима. Однако в подобных системах можно существенно повысить точность относительно управляющего воздействия при необходимой фильтрации помех, т.е. сделать системы широкополосными относительно управляющего сигнала и узкополосными относительно помехи.

Синтез комплексных систем РА можно выполнить с учетом следующих условий: 1) обеспечение нужных частотных характеристик системы; 2) повыше-

ние ее динамической точности работы. Проанализируем метод, который позволит повысить порядок астатизма в комплексной системе относительно управляющего воздействия по сравнению с порядком астатизма замкнутого контура. Передаточная функция ошибки системы, как следует из выражения (10.62),

$$W_{ек}(p) = \frac{1 - W_{к}(p)W_2(p)}{1 + W_p(p)} = W_e(p)[1 - W_{к}(p)W_2(p)], \quad (10.65)$$

где $W_e(p)$ – передаточная функция ошибки замкнутого контура.

Разложим передаточную функцию ошибки комплексной системы (10.65) в степенной ряд:

$$W_{ек}(p) = C_{0к} + C_{1к}p + \frac{1}{2}C_{2к}p^2 + \dots + \frac{1}{k!}C_{кк}p^k. \quad (10.66)$$

Аналогичным образом представим и второй сомножитель выражения (10.65):

$$1 - W_{к}(p)W_2(p) = D_0 + D_1p + \frac{1}{2}D_2p^2 + \dots + \frac{1}{k!}D_kp^k. \quad (10.67)$$

Тогда передаточная функция ошибки комплексной системы с учетом выражения (6.1) примет вид:

$$\begin{aligned} & C_{0к} + C_{1к}p + \frac{1}{2}C_{2к}p^2 + \dots + \frac{1}{k!}C_{кк}p^k = \\ & = \left[C_0 + C_1p + \frac{1}{2}C_2p^2 + \dots + \frac{1}{k!}C_kp^k \right] \times \\ & \times \left[D_0 + D_1p + \frac{1}{2}D_2p^2 + \dots + \frac{1}{k!}D_kp^k \right], \end{aligned} \quad (10.68)$$

где $C_i = 0, 1, \dots, k$ – коэффициенты ошибок передаточной функции ошибки замкнутого контура системы..

Приравняв в последнем выражении слагаемые при одинаковых степенях p , найдем коэффициенты ошибок комплексной системы:

$$C_{0к} = C_0D_0;$$

$$C_{1к} = C_0D_1 + C_1D_0; \quad (10.69)$$

$$C_{2к} = C_0D_2 + 2C_1D_1 + C_2D_0;$$

.....

Из формул (10.69) следует, что необходимый порядок астатизма обеспечивается, если соответствующее число коэффициентов D_i равно нулю. Из этих

условий и определяется выражение для передаточной функции компенсации комплексной системы.

Подставим выражения

$$W_2(p) = \frac{c_e p^e + c_{e-1} p^{e-1} + \dots + c_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}; \quad (10.70)$$

$$W_k(p) = \frac{\alpha_q p^q + \alpha_{q-1} p^{q-1} + \dots + \alpha_0}{\tau_q p^q + \tau_{q-1} p^{q-1} + \dots + \tau_0} \quad (10.71)$$

в формулу (10.67).

Тогда для получения астатизма первого порядка необходимо, чтобы передаточная функция цепи компенсации была равна

$$W_k(p) = \alpha_0 / \tau_0. \quad (10.72)$$

Коэффициенты этой функции определим из условия:

$$D_0 = \frac{b_0 \tau_0 - \alpha_0 c_0}{b_0 \tau_0} = 0. \quad (10.73)$$

Для получения астатизма второго порядка нужно, чтобы передаточная функция цепи компенсации была равна

$$W_k(p) = \frac{\alpha_1 p + \alpha_0}{\tau_1 p + \tau_0}. \quad (10.74)$$

Коэффициенты функции найдем из условия (10.73) и при

$$D_1 = \frac{b_1 \tau_0 + b_0 \tau_1 - \alpha_0 c_1 - \alpha_1 c_0}{\tau_0 b_0} = 0. \quad (10.75)$$

При последовательном определении коэффициентов передаточной функции (10.71) одни коэффициенты, например, τ_i выбирают из условия обеспечения требуемых характеристик комплексной системы, а другие, например, коэффициенты α_i вычисляют из условия равенства нулю соответствующих коэффициентов D_i .

Коэффициенты τ_i передаточной функции цепи компенсации определяют инерционность цепи компенсации. Для выяснения их влияния на частотные характеристики представим передаточную функцию комплексной системы в виде

$$W_{кз}(p) = W_3(p) \left[1 + \frac{W_k(p)}{W_1(p)} \right]. \quad (10.76)$$

Следовательно, наличие цепи компенсации в комплексной системе эквивалентно последовательному включению с замкнутым контуром корректирующего устройства с передаточной функцией

$$W_{\text{эк}}(p) = \left[1 + \frac{W_{\kappa}(p)}{W_1(p)} \right]. \quad (10.77)$$

Из выражения (10.77) следует, что чем меньше инерционность цепи компенсации, тем больший опережающий эффект создается корректирующим устройством. При этом полоса пропускания комплексной системы РА относительно управляющего воздействия увеличивается.

► **Пример 10.2.** Найти передаточную функцию цепи компенсации для системы автоматического сопровождения цели РЛС, рассмотренной в примере 10.1, если порядок астатизма в системе относительного воздействия, возникающего из-за колебаний летательного аппарата, равен двум.

Решение. Систему сформируем по схеме (рис. 10.12), в которой передаточные функции определяются выражениями

$$W_1(p) = \frac{k_1(1 + pT_2)}{(1 + pT_n)(1 + pT_{\phi\delta})(1 + pT_1)};$$

$$W_2(p) = \frac{c_1 p + c_0}{b_3 p^3 + b_2 p^2 + b_1 p},$$

где $k_1 = k_n k_{\phi\delta} k_{\kappa\delta}$; $c_1 = k_y k_A T_2$; $c_0 = k_y k_A$; $b_3 = T_y T_m T_2$; $b_2 = T_y T_m + T_2 T_m$; $b_1 = T_y + T_m + T_2 + k_y k_0 k_A$.

Воздействие, возникающее из-за колебаний летательного аппарата, измеряется гироскопическим датчиком угловой скорости, сигнал с которого является входным сигналом цепи компенсации.

Замкнутый контур рассматриваемой системы имеет первый порядок астатизма, поэтому для получения в комплексной системе астатизма второго порядка необходимо, как это следует из формул (10.69), чтобы коэффициент D_0 в разложении (10.67) был равен нулю. Для этого нужно, чтобы передаточная функция цепи компенсации была реализована в соответствии с (10.74).

Параметры цепи вычисляются из условия

$$D_0 = \frac{b_1 \tau_0 - c_0 \alpha_1}{b_1 \tau_0} = 0, \quad \alpha_0 = 0.$$

Из последнего выражения находим, что $\alpha_1 = b_1\tau_0/c_0$. Пусть $\tau_0 = 1$ с, $\tau_1 = 0,01$ с для того, чтобы полоса пропускания системы относительно воздействия, возникающего из-за колебаний летательного аппарата, была больше полосы пропускания замкнутого контура.

При расчетных значениях параметров системы автоматического сопровождения, найденных в примере 10.1, передаточная функция цепи компенсации

$$W_k(p) = \frac{0,11p}{1 + 0,01p}.$$

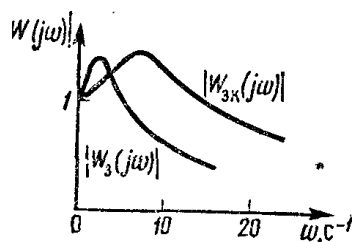


Рис. 10.13. АЧХ комплексной системы РА

Эта передаточная функция может быть реализована RC -цепью и усилителем с коэффициентом усиления, равным 11. Дальнейшее уменьшение коэффициента τ_1 с целью большего расширения полосы пропускания нецелесообразно, так как приводит к увеличению коэффициента усиления в цепи компенсации. На рис. 10.13 показаны АЧХ замкнутого контура $|W_3(j\omega)|$ и комплексной системы $|W_{3к}(j\omega)|$, из которых видно, что введение цепи компенсации расширило полосу пропускания относительно воздействия, обусловленного колебаниями летательного аппарата, до 37 с $^{-1}$. ◀

Вопросы к теме 10

1. Поясните постановку задачи проектирования систем РА.
2. Укажите способы включения корректирующих устройств в системах РА.
3. Опишите основные схемы, применяемые в качестве дифференцирующих устройств.
4. Каким образом формируется передаточная функция разомкнутой проектируемой системы РА?
5. Как определяются передаточные функции корректирующих устройств?
6. В чем заключается синтез робастных систем РА?
7. Какие системы РА относятся к комплексным?
8. Как можно достичь повышения порядка астатизма в комплексных системах РА?

РАЗДЕЛ 7. ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ РАДИОАВТОМАТИКИ

Тема 11. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ И ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ

11.1. Общие сведения. Структурная схема цифровой системы

Возрастание требований к качеству работы систем РА, увеличение объема перерабатываемой информации, усложнение объектов управления привело к тому, что средствами аналоговой техники и непрерывной автоматики нельзя решить многие практические задачи. В результате в современных радиотехнических устройствах и системах радиоуправления стали широко использовать цифровые системы РА, в состав которых входят ЦВМ или специализированные цифровые устройства. Быстрое внедрение в технику цифровых систем объясняется тем, что они по сравнению с аналоговыми имеют значительно бóльшие вычислительные возможности. В цифровых системах, выполненных на базе микроэлектроники (интегральных схемах, микропроцессорах и мини-ЭВМ), при небольших массах и габаритах можно использовать более сложные алгоритмы обработки сигналов. При этом точность реализации алгоритмов определяется только периодом дискретизации, числом разрядов цифровых кодов и может быть весьма высокой.

Важным преимуществом цифровых систем является высокая стабильность их работы, в таких системах РА отсутствует дрейф нуля дискриминаторов и других цифровых устройств систем. Кроме того, в цифровых системах просто осуществляется перестройка их структуры и регулировка параметров. В радиотехнических устройствах и системах радиоуправления цифровые системы применяются для стабилизации частоты, измерения дальности, управления антеннами РЛС, для формирования команд управления различными объектами. Для обработки сигналов в РЛС широкое применение нашли цифровые фильтры, реализуемые на устройствах цифровой техники – сумматорах, регистрах и т.п. Подобные фильтры используются и в качестве корректирующих устройств в различных системах РА. Цифровые фильтры позволяют избавиться от применения ЦВМ, что упрощает и снижает стоимость систем РА.

На рис. 11.1 показана типовая структурная схема цифровой системы РА, которая состоит из преобразователей информации непрерывных сигналов в код (НК), цифровой вычислительной машины (ЦВМ), обратного преобразователя (КН), осуществляющего преобразование кода в непрерывный сигнал, и непрерывного объекта управления (ОУ).

В процессе преобразования непрерывных сигналов $x(t)$ и $y(t)$ в цифровые $x(t)$ и $y(t)$ происходит *дискретизация* этих сигналов, т.е. осуществляется выборка непрерывных сигналов, соответствующих дискретным моментам времени (обычно выборка производится через равные промежутки времени T).

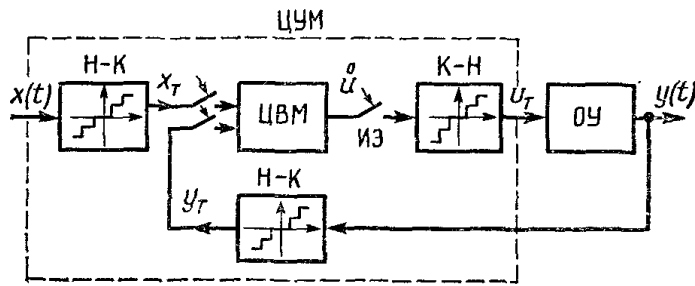


Рис. 11.1. Типовая структурная схема цифровой системы РА

В результате имеем *дискретный сигнал*. Дискретность ввода сигналов обеспечивается импульсным элементом (ИЭ). В процессе преобразования сигналов в цифровую форму происходит также их *квантование по уровню*. В результате из всех возможных дискретных сиг-

налов выбираются только разрешенные уровни, кратные шагу квантования, равному значению младшего разряда ЦВМ. Если преобразователь НК имеет α разрядов, то число уровней квантования, отличных от нуля, составляет $2^\alpha - 1$.

От преобразователей НК сигналы поступают на ЦВМ, в которой реализован алгоритм управления системой. Для преобразования этого сигнала в непрерывный введен преобразователь КН, на выходе которого получают сигнал $u_T(t)$, под действием которого регулируется режим работы объекта управления системы РА.

Квантование сигналов по уровню – это нелинейная операция, поэтому цифровые системы относятся к классу нелинейных. Сигнал, квантованный по уровню, можно представить в виде (рис. 11.2)

$$x_T(t) = x(t) + \Delta_x(t), \quad (11.1)$$

где $x(t)$ – неквантованный сигнал; $\Delta_x(t)$ – шум квантования.

Число разрядов преобразователей информации обычно выбирается равным 8 – 15, при этом число уровней квантования сигналов велико, что позволяет во многих случаях пренебречь нелинейностью характеристик. При необходимости влияние шума квантования на качество работы системы РА можно учесть путем введения дополнительного сигнала $\Delta_x(t)$. Цифровыми обычно называют системы, все или часть блоков которых (дискриминаторы, фильтры, генераторы опорного сигнала) построены на базе цифровых устройств, использующих элементы импульсной и цифровой техники – триггеры, логические элементы И, ИЛИ, счетчики, регистры памяти и др.

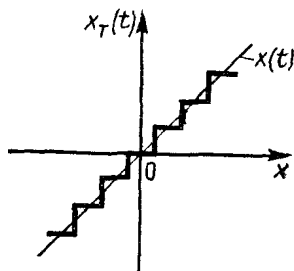


Рис. 11.2. К пояснению процесса квантования сигнала по уровню

Цифровые системы из-за дискретизации в них сигналов по времени относятся к дискретным. Дискретизация сигналов – линейная операция, поэтому, пренебрегая шумом квантования, цифровую систему можно рассматривать как линейную дискретную систему, методы анализа и синтеза которой рассматриваются в данной теме. Входные и выходные сигналы

цифровой части системы являются числовыми последовательностями, однако при анализе можно отвлечься от физических принципов работы цифровых устройств и считать основной характеристикой ЦВМ алгоритм, в соответствии с которым входные сигналы перерабатываются в выходные, не принимая во внимание форму представления сигналов. Тогда ЦВМ в системе РА можно представить как последовательное соединение цифрового фильтра, осуществляющего преобразование сигналов, и звена запаздывания с передаточной функцией $e^{-p\tau}$ (рис. 11.3).

Звено запаздывания учитывает время прохождения сигнала через цифровой фильтр. Время запаздывания зависит от решаемого алгоритма и быстродействия ЦВМ, в общем случае оно не равно периоду выдачи данных с ЦВМ. Очевидно, что эти величины связаны соотношением $0 < \tau < T$.

Знак равенства имеет место в том случае, когда ЦВМ обслуживает один канал.

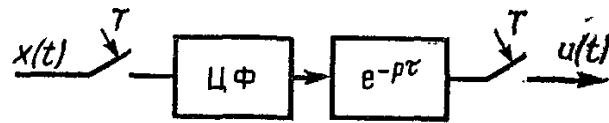


Рис. 11.3. Структурная схема ЦВМ

Система, структурная схема которой показана на рис. 11.1, состоит из цифровой части и непрерывного объекта управления, такую систему называют *аналого-цифровой*. В радиотехнических устройствах применяются также системы РА, все части которых являются цифровыми. На рис. 11.4 показана структурная схема цифровой системы автоподстройки частоты (ЦФАПЧ).

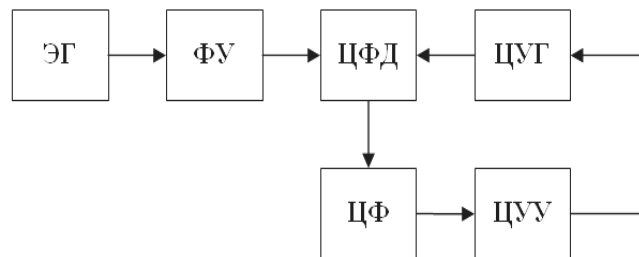


Рис. 11.4. Функциональная схема цифровой системы ФАПЧ

На вход цифрового фазового детектора (ЦФД) системы поступает периодический сигнал, форма которого с помощью формирующего устройства (ФУ) преобразуется к виду, необходимому для работы ЦФД. В последнем вырабатывается кодовая последовательность, соответствующая разности фаз сигналов с эталонного (ЭГ) и цифрового управляемого (ЦУГ) генераторов.

Сигнал с ЦФД обрабатывается по определенному алгоритму в цифровом фильтре (ЦФ), после чего подается на цифровое устройство управления (ЦУУ), сигнал которого определяет частоту последовательности импульсов с ЦГ. Из рис. 11.4 видно, что система ФАПЧ – замкнутая система, входным сигналом которой является сигнал с ЭГ, а выходным – сигнал с ЦУГ. Задача системы состоит в поддержании частоты ЦУГ равной с заданной точностью частоте сигнала с ЭГ.

11.2. Математическая модель процесса преобразования непрерывного сигнала в дискретный

Для математического описания преобразования непрерывного сигнала $x(t)$ в дискретный удобна следующая математическая модель сигнала:

$$x^*(t) = x(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{T} - n\right). \quad (11.2)$$

Использование в (11.2) дельта-функции безразмерного аргумента связано с тем, что размерность сигнала $x^*(t)$ должна совпадать с размерностью $x(t)$. Согласно правилу изменения масштаба аргумента дельта-функции $\delta(t/T) = T \delta(t)$ из (11.2) найдем

$$x^*(t) = x(t) T \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (11.3)$$

Выражения (11.2) и (11.3) отличаются множителем T (в последнем случае δ -функция уже имеет размерность), который нужно учитывать при предельных переходах (при $T = 0$). Во всех остальных случаях этот множитель можно опускать и модель сигнала принимать в виде

$$x^*(t) = x(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (11.4)$$

Сигнал $x^*(t)$ называют *обобщенным дискретным сигналом (мгновенными импульсами)*. Этот сигнал представляет собой последовательность δ -функций, площади которых равны значениям непрерывного сигнала в дискретные моменты времени $t = 0, T, 2T, \dots$. Преобразование непрерывного сигнала в последовательность мгновенных импульсов (11.4) можно рассматривать как модуляцию последовательности единичных импульсов непрерывным сигналом (рис. 11.5). На структурных схемах цифровых систем РА процесс преобразования сигнала $x(t) \rightarrow x^*(t)$ отображается введением ключа, который называют *дискретизатором* или *простейшим импульсным элементом*.

Последовательность мгновенных импульсов (11.4) подается на цифровое устройство системы, в котором перерабатывается в соответствии с алгоритмом в выходную последовательность мгновенных импульсов $u^*(t)$.

В системах РА с непрерывными объектами управления последовательность $u^*(t)$ преобразуется в непрерывный сигнал. Для этой цели применяются преобразователи, сигнал на выходе которых между дискретными моментами времени остается постоянным (фиксация). В этом случае каждый мгновенный импульс последовательности $u^*(t)$ преобразуется в прямоугольный импульс длительностью T , амплитуда которого равна площади мгновенного импульса.

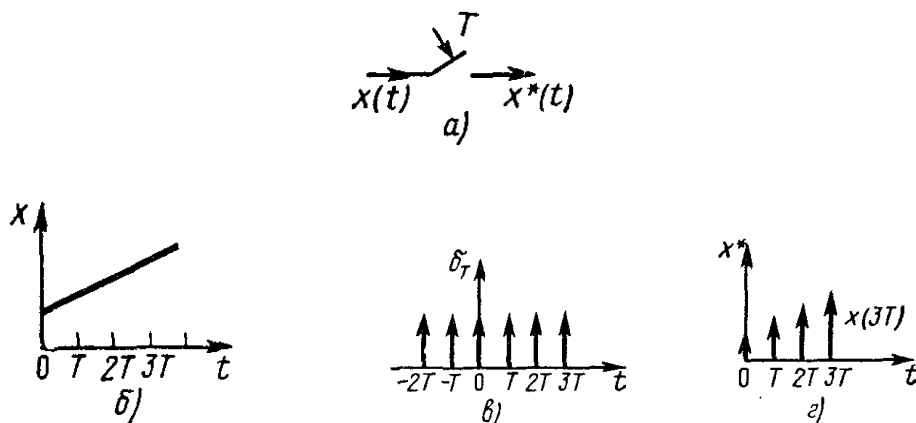


Рис. 11.5. К пояснению процесса квантования сигнала по времени:
a – схема дискретизатора; *б* – *в* – к пояснению математической модели

Например, мгновенный импульс в момент времени $t = 0$ преобразуется в прямоугольный (рис. 11.6) вида $u_T(t) = u(0)[1(t) - 1(t - T)]$, откуда передаточная функция преобразования

$$W_3(p) = \frac{L[u_T(t)]}{L[u(0)\delta(t)]} = \frac{1 - e^{-pT}}{p}, \quad (11.5)$$

где $L[u(0)\delta(t)] = u(0)$ – преобразование Лапласа для мгновенного импульса δ в момент времени $t = 0$.

Устройство, которому соответствует передаточная функция (11.5), называют *формирующим элементом* или *экстраполятором нулевого порядка*.

Представление цифровой части системы РА в виде дискретизатора, цифрового фильтра и формирующего элемента позволяет использовать для анализа и синтеза цифровых систем математический аппарат дискретных систем, который к настоящему времени разработан достаточно полно.

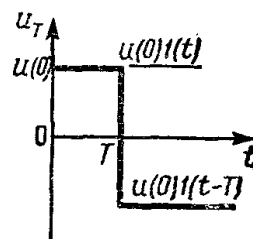


Рис. 11.6. К определению передаточной функции экстраполятора

11.3. Математический аппарат Z-преобразования

На математическом аппарате Z-преобразования строится современная теория дискретных и цифровых систем РА. С целью определения Z-преобразования найдем преобразование Лапласа последовательности мгновенных импульсов (11.4). В результате получим

$$X(p) = \int_0^{\infty} x^*(t) e^{-pt} dt = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-pnT}. \quad (11.6)$$

Функцию $x(nT)$ называют *дискретной*. Введем обозначение $e^{pT} = z$. Тогда выражение (11.6) принимает вид

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n} = Z[x(t)]. \quad (11.7)$$

Функцию $X(z)$ называют Z -преобразованием сигнала $x(t)$.

► **Пример 11.1.** Определить Z -преобразование сигнала $x(t) = 1(t)$.

Решение. В соответствии с (11.7)

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-n} = \frac{z}{z-1}.$$

В этом выражении применена формула убывающей геометрической прогрессии. В прил. П.3 приведены Z -преобразования сигналов, наиболее часто используемых в системах РА. Более полная таблица приведена в [5]. ◀

Свойства Z -преобразования описаны в [5], поэтому ограничимся указанием некоторых из них, которые требуются для дальнейшего изложения.

1. *Свойство линейности.* Если $X_1(z) = Z[x_1(t)]$ и $X_2(z) = Z[x_2(t)]$, то

$$Z[ax_1(t) + bx_2(t)] = aX_1(z) + bX_2(z). \quad (11.8)$$

2. *Первая теорема сдвига.* Если $X(z) = Z[x(t)]$, то для целых k

$$Z[x(t-kT)] = z^{-k}X(z). \quad (11.9)$$

3. *Вторая теорема сдвига.* Если $X(z) = Z[x(t)]$, то для целых k

$$Z[x(t+kT)] = z^k \left[X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(nT)z^{-n} \right]. \quad (11.10)$$

4. *Свертка функций.* Если $Y(z) = X_1(z)X_2(z)$, то

$$y(nT) = \sum_{m=0}^n x_1(nT-mT)x_2(mT). \quad (11.11)$$

5. *Предельные значения.* Если дискретные значения функции в установленном режиме существуют, то они могут быть найдены путем следующего предельного перехода:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} X(z). \quad (11.12)$$

Начальное значение сигнала вычисляют по формуле

$$\lim_{n \rightarrow 0} x(nT) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z). \quad (11.13)$$

6. *Формула обращения.* Дискретные значения функции по ее Z-преобразованию определяют следующим контурным интегралом:

$$x(nT) = \frac{1}{j2\pi T} \oint_{|z|=1} X(z)z^{n-1} dz. \quad (11.14)$$

Ранее определили Z-преобразование для случая, когда возникновение сигнала совпадает с моментом очередной посылки единичных импульсов несущей. Если сигнал запаздывает на ΔT , то последовательность мгновенных импульсов имеет вид

$$x^*(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x(nT - \Delta T)\delta(t - nT). \quad (11.15)$$

При этом Z-преобразование вычисляется по формуле

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} x(nT - \Delta T)z^{-n}. \quad (11.16)$$

Выражение (11.16) характеризует Z-преобразование запаздывающих сигналов или модифицированное Z-преобразование. В прил. П.3 приведены модифицированные Z-преобразования для наиболее часто встречающихся сигналов; более полные таблицы приведены в [5].

Непосредственно из выражений (11.7) и (11.16) следует, что Z-преобразование несмещенного сигнала определяется через Z-преобразование запаздывающего сигнала с помощью следующего предельного перехода:

$$X(z) = \lim_{\Delta \rightarrow 1} z \cdot X(z, \Delta T). \quad (11.17)$$

Помимо рассмотренного математического аппарата Z-преобразования для исследования цифровых систем РА применяется аппарат дискретного преобразования Лапласа, который подробно рассмотрен в [22].

11.4. Передаточные функции разомкнутых цифровых систем

Первоначально найдем передаточную функцию системы, структурная схема которой показана на рис. 11.7.

Подобные системы называют *импульсными фильтрами*. Импульсный фильтр состоит из объекта управления, непрерывной части, формирующего элемента и дискретизатора. Непрерывная часть и формирующий элемент образуют приведенную непрерывную часть импульсного фильтра, на вход которой подаются мгновенные импульсы. Выходной сигнал импульсного фильтра равен сумме реакций приведенной непрерывной части от каждого мгновенного импульса:

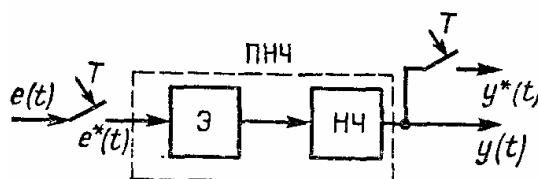


Рис. 11.7. Структурная схема импульсного фильтра

$$y(t) = \sum_{m=0}^{\infty} e(mT)w(t - mT), \quad (11.18)$$

где $w(t - mT)$ – импульсная переходная функция; $e(mT)$ – дискретные значения входного сигнала.

Следует иметь в виду, что сигнал на выходе импульсного фильтра является непрерывным и не равным нулю между дискретными моментами времени.

Введем последовательность мгновенных импульсов выходного сигнала. С этой целью условно подключим к выходу фильтра фиктивный дискретизатор, работающий синхронно с основным дискретизатором импульсного фильтра. На выходе фиктивного дискретизатора с учетом выражения (11.18) получим

$$y^*(t) = y(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{m=0}^{\infty} e(mT) \sum_{n=0}^{\infty} w(t - mT) \delta(t - nT). \quad (11.19)$$

Применив к (11.19) свойство 4, преобразование Лапласа и учтя введенное обозначение $e^{pT} = z$, найдем:

$$Y(z) = E(z) W(z), \quad (11.20)$$

где $E(z) = Z[e(mT)]$; $W(z) = Z[w(nT)]$. Здесь m относится к входному дискретизатору, а n – к выходному.

Выражение (11.20) можно записать в виде

$$W(z) = Y(z) / X(z), \quad (11.21)$$

откуда следует, что дискретную передаточную функцию импульсного фильтра $W(z)$ можно определить как отношение Z -преобразования выходного сигнала к Z -преобразованию входного сигнала на нулевых начальных условиях.

В цифровых системах РА передаточная функция формирующего элемента определяется выражением (11.5), поэтому передаточная функция приведенной непрерывной части импульсного фильтра (последовательное соединение) имеет вид

$$W(p) = W_{\text{г}}(p)W_{\text{н}}(p) = (1 - e^{-pT}) \frac{W_{\text{н}}(p)}{p}, \quad (11.22)$$

где $W_{\text{н}}(p)$ – передаточная функция непрерывной части фильтра.

Выражению (11.22) соответствует импульсная переходная функция

$$w(t) = h_{\text{н}}(t) - h_{\text{н}}(t - T), \quad (11.23)$$

где $h_{\text{н}}(t) = L^{-1} \left[\frac{W_{\text{н}}(p)}{p} \right]$ – переходная функция непрерывной части фильтра.

В самом деле, если $h(t) = L^{-1} \left[\frac{W(p)}{p} \right]$ и $w(t) = \frac{d}{dt} h(t)$, то

$$w(t) = \frac{d}{dt} h(t) = L^{-1} \left[p \frac{W(p)}{p} \right] = L^{-1} \left[p \frac{W_H(p)}{p} - p \frac{e^{-pT} W_H(p)}{p} \right] =$$

$$= h_H(t) - h_H(t-T).$$

Если через $H(z)$ обозначить Z -преобразование для переходной функции непрерывной части фильтра, то с учетом (11.9) и (11.23) дискретная передаточная функция импульсного фильтра

$$W(z) = \frac{z-1}{z} H(z). \quad (11.24)$$

Знание передаточной функции дискретной системы позволяет описать связь между дискретными процессами на ее входе и выходе с помощью разностного уравнения. Чтобы получить это уравнение, представим передаточную функцию $W(z)$ системы в виде дробно-рациональной функции переменной z^{-1} , для этого разделим числитель и знаменатель на z с наивысшей положительной степенью (обычно это знаменатель):

$$W(z) = \frac{b_m z^{m-l} + b_{m-1} z^{m-l-1} + \dots + b_0 z^{-l}}{1 + a_{l-1} z^{-1} + a_{l-2} z^{-2} + \dots + a_0 z^{-l}}.$$

Подставив значения $W(z)$ из последней формулы в (11.21), запишем:

$$(1 + a_{l-1} z^{-1} + a_{l-2} z^{-2} + \dots + a_0 z^{-l}) Y(z) = (b_m z^{m-l} + b_{m-1} z^{m-l-1} + \dots + b_0 z^{-l}) X(z).$$

Применим теорему обращения (свойство б) к обеим частям уравнения и, используя теорему сдвига (свойство 2), имеем:

$$y(nT) + a_{l-1} y[(n-1)T] + a_{l-2} y[(n-2)T] + \dots + a_0 y[(n-l)T] =$$

$$= b_m x[(n-l+m)T] + b_{m-1} x[(n-1+m-1)T] + \dots + b_0 x[(n-l)T].$$

Решив это уравнение относительно $y(nT)$, представим его в виде

$$y(nT) = \sum_{i=0}^{l-m} b_i x[(n-i)T] - \sum_{i=1}^l a_i y[(n-i)T].$$

Последнее выражение является разностным уравнением, связывающим значения выходного процесса $y(nT)$ с его значениями в предшествующие моменты времени $t = nT, (n-1)T, \dots, (n-m)T$.

В качестве примера приведем систему с передаточной функцией:

$$W(z) = \frac{z-1}{z-1+KT}.$$

Поделив числитель и знаменатель на z , получим

$$W(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + (KT - 1)z^{-1}}.$$

Сопоставление выражений показывает, что в данном случае $m = n = 1$, $b_1 = -1$, $a_1 = KT - 1$ и разностное уравнение, связывающее значения входного сигнала, имеет вид

$$y(nT) = x(nT) - x[(n-1)T] - (KT - 1)y[(n-1)T].$$

Дискретная передаточная функция характеризует процессы, происходящие в импульсном фильтре, только в дискретные моменты времени. Для анализа характеристик между этими моментами времени используется смещенная дискретная передаточная функция, которая равна Z -преобразованию смещенной импульсной переходной функции приведенной непрерывной части фильтра. Если смещение обозначить через Δt или в относительных единицах через $\varepsilon = \Delta t/T$, то (рис. 11.8) значения $w(t)$ в моменты времени $t = nT + \varepsilon T$ будут равны дискретным значениям смещенной импульсной переходной функции $w(t - \Delta T)$ в несмещенные моменты времени при времени запаздывания, равном $\Delta = 1 - \varepsilon$ (см. рис. 11.8). Для образования смещенной импульсной переходной функции необходимо в цепь фиктивного дискретизатора включить звено запаздывания с передаточной функцией $e^{-j\Delta T}$. Тогда смещенная дискретная передаточная функция импульсного фильтра

$$W(z, \varepsilon T) = Z[w(t - \Delta T)]_{\Delta=1-\varepsilon}, \quad (11.25)$$

где $w(t - \Delta T) = L^{-1}[W(p)e^{-p\Delta T}]$ – смещенная импульсная переходная функция приведенной непрерывной части фильтра.

Придавая ε значения от нуля до единицы, можно определить смещенные передаточные функции (11.25), которые позволят оценить процессы в импульсном фильтре для различных дискретных моментов времени.

Аналогично получению (11.24) найдем смещенную дискретную передаточную функцию импульсного фильтра:

$$W(z, \varepsilon T) = \frac{z-1}{z} H(z, \Delta T) \Big|_{\Delta=1-\varepsilon}, \quad (11.26)$$

где $H(z, \Delta T)$ – Z -преобразование смещенной переходной функции непрерывной части импульсного фильтра, определяемое по таблицам модифицированного Z -преобразования (см. прил. П.3).

► **Пример 11.2.** Найти передаточную функцию реверсивного счетчика без сброса, который накапливает поступающие на его вход положительные и отрицательные импульсы.

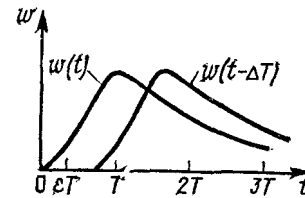


Рис. 11.8. Смещенная импульсная переходная функция ПНЧ

Счетчик является цифровым интегратором и описывается разностным уравнением

$$u(nT) = u[(n-1)T] + x(nT), \quad (11.27)$$

где $u(nT)$, $x(nT)$ – дискретные значения выходного и входного сигналов.

Решение. Применим к уравнению (11.27) Z-преобразование. В результате с учетом теоремы смещения (11.9) найдем, что

$$U(z) = z^{-1}U(z) + X(z). \quad (11.28)$$

В соответствии с (11.21) по (11.28) передаточная функция счетчика

$$W(z) = z/(z-1). \blacktriangleleft$$

►Пример 11.3. Определить дискретную передаточную функцию разомкнутого дальномера с одним интегратором, широко применяемого в РЛС.

Решение. В таком дальномере фильтр нижних частот – интегратор с передаточной функцией $W_n(p) = k/p$.

Поэтому

$$W(p) = W_\rho(p)W_n(p) = \frac{1-e^{-pT}}{p} \frac{k}{p};$$

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{W_n(p)}{p} \right] = kt \cdot 1(t).$$

В соответствии с выражением (11.24) передаточная функция дальномера в разомкнутом состоянии

$$W_p(z) = \frac{z-1}{z} H(z) = \frac{z-1}{z} Z[h(t)] = \frac{z-1}{z} Z[kt] = \frac{z-1}{z} \frac{kTz}{(z-1)^2} = \frac{kT}{z-1}, \quad (11.29)$$

где $h(t)$ – переходная функция непрерывной части, равная $h(t) = k t 1(t)$, Z-преобразование которой определяется по таблице прил. П.3. \blacktriangleleft

Если приведенная непрерывная часть импульсного фильтра состоит из параллельно включенных звеньев (рис. 11.9), то передаточные функции такого фильтра определяются выражениями

$$W(z) = \sum_{i=1}^k W_i(z); \quad (11.30)$$

$$W(z, \varepsilon T) = \sum_{i=1}^k W_i(z, \varepsilon T).$$

где k – число параллельно включенных звеньев.

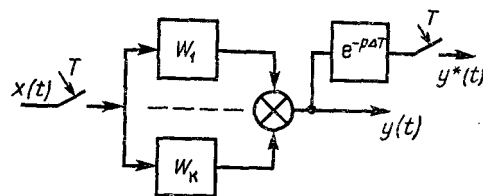


Рис. 11.9. Структурная схема с параллельно включенными звеньями

При последовательном включении импульсных фильтров (рис. 11.10) дискретные передаточные функции получаются следующими:

$$W(z) = \prod_{i=1}^k W_i(z); \quad (11.31)$$

$$W(z) = \prod_{i=1}^{k-1} W_i(z) W_k(z, \varepsilon T).$$

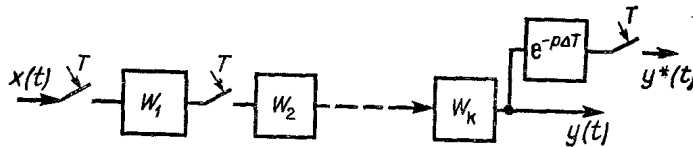


Рис. 11.10. Схема последовательно включенных импульсных фильтров

Рассмотрим разомкнутую цифровую систему РА, которая состоит из последовательного соединения цифровой управляющей машины и непрерывной части (рис. 11.11).

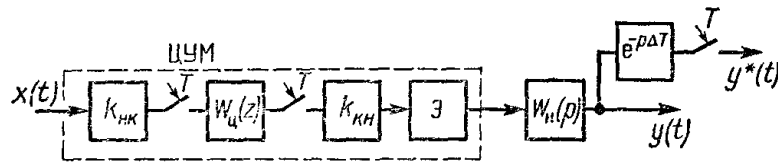


Рис. 11.11. Структурная схема разомкнутой цифровой системы РА

Безынерционные звенья с коэффициентами передачи $k_{нк}$ и $k_{кн}$ учитывают наличие преобразователей НК и КН. Коэффициент передачи входного преобразователя НК $k_{нк} = q_1^{-1}$, где q_1 – входной сигнал преобразователя, соответствующий единице младшего разряда. Аналогичным образом для выходного преобразователя КН получим $k_{кн} = q_2$. Цифровая управляющая машина и непрерывная часть системы соединены последовательно, поэтому передаточные функции разомкнутой цифровой системы РА в соответствии с выражением (10.31) имеют такой вид:

$$W_p(z) = q_2 q_1^{-1} W_u(z) W(z); \quad (11.32)$$

$$W_p(z, \varepsilon T) = q_2 q_1^{-1} W_u(z) W(z, \varepsilon T),$$

где $W_u(z)$ – дискретная передаточная функция цифровой ЭВМ; $W(z)$, $W(z, \varepsilon T)$ – передаточные функции импульсного фильтра системы.

В структурной схеме цифровой системы, приведенной на рис. 11.11, не учитывается временное запаздывание, которое возникает вследствие наличия запаздывающих звеньев в непрерывной части (например, в системах, в которых имеются радиолинии) и обработки данных в ЦВМ. Для учета времени запаздывания необходимо в непрерывную часть цифровой системы включить звено запаздывания с передаточной функцией $e^{-p\tau}$, где τ – время суммарного запаздывания в системе.

11.5. Передаточные функции и частотные характеристики цифровых систем

На рис. 11.12 изображена структурная схема замкнутой цифровой системы РА, в которой цифровой фильтр с передаточной функцией $W_u(z)$ является последовательным корректирующим устройством. Передаточные функции замкнутой системы определяются так же, как и в непрерывных системах.

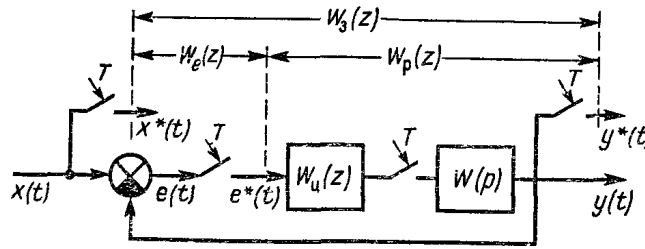


Рис. 11.12. Структурная схема замкнутой цифровой системы РА

Так, передаточная функция замкнутой системы через передаточную функцию разомкнутой системы

$$W_3(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{W_p(z)}{1 + W_p(z)}, \quad (11.33)$$

а передаточная функция ошибки

$$W_e(z) = \frac{E(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + W_p(z)}. \quad (11.34)$$

Полученные передаточные функции используются для анализа устойчивости и качества работы цифровых систем.

При определении смещенной передаточной функции замкнутой системы следует иметь в виду, что звено запаздывания, с помощью которого учитывается смещение во времени, подключается на выходе системы к цепи фиктивного дискретизатора. Поэтому, согласно (11.33),

$$W_3(z, \varepsilon T) = \frac{W_p(z, \varepsilon T)}{1 + W_p(z)}, \quad (11.35)$$

где $W_p(z, \varepsilon T)$ —смещенная передаточная функция разомкнутой системы (11.32).

Аналогичным образом можно найти передаточные функции цифровых систем, структурные схемы которых отличаются от рассмотренной.

Цифровые системы РА, так же как и непрерывные системы, в зависимости от ошибки в установившемся режиме подразделяются на статические и астатические. Ошибка в установившемся режиме в дискретные моменты времени находится по теореме о конечном значении (11.12).

При входном сигнале $x(t) = B \cdot 1(t)$

$$e_c = \lim_{m \rightarrow \infty} e(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} W_e(z) B \frac{z}{z-1} = B W_e(1). \quad (11.36)$$

Ошибку, определяемую последним выражением, считают статической. Если эта ошибка не равна нулю, то цифровую систему называют статической, в противном случае система относится к классу астатических. Из выражения (11.36) следует, что в астатической системе передаточная функция ошибки равна нулю в точке $z = 1$, что выполняется, если передаточная функция разомкнутой системы в соответствии с (11.34) имеет полюс в этой же точке.

В общем случае, когда передаточная функция разомкнутой цифровой системы содержит в точке $z = 1$ полюс кратности ν , то порядок астатизма системы равен ν и дискретные значения ошибки равны нулю при входном сигнале вида

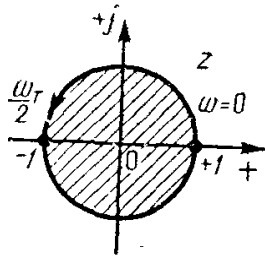
$$x(t) = \sum_{i=0}^{\nu-1} \alpha_i t^i. \quad (11.37)$$

Выражения для частотных характеристик цифровых систем получаются из их передаточных функций путем замены оператора z на $e^{-j\omega T}$.

Так как частота входит в мнимый показатель степени числа e , то частотные характеристики оказываются периодическими функциями частоты, период изменения которых равен $\pm\pi/T$. Следовательно, нельзя различить составляющие, частоты которых кратны частоте работы дискретизатора $\omega_T = 2\pi/T$.

На рис. 11.13 показан годограф вектора $e^{j\omega T}$. Нулевой частоте на годографе соответствует точка на вещественной оси, при изменении частоты от нуля до π/T единичный вектор на плоскости комплексного переменного совершает один оборот.

Частотные характеристики цифровых систем РА описываются трансцендентными выражениями. Их определение связано со сложными расчетами, поэтому на практике применяются частотные характеристики относительно псевдо-частоты. Переход к псевдо-частоте основан на введении комплексной переменной



$$s = \frac{z-1}{z+1}. \quad (11.38)$$

Величину

$$j\nu = \frac{2}{T} s = j \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} \quad (11.39)$$

Рис. 11.13. Годограф $e^{j\omega T}$

называют *псевдо-частотой*.

Удобство применения псевдо-частоты заключается в том, что на частотах, на которых выполняется условие $\omega T < 2$, она приближенно равна круговой частоте.

Нетрудно убедиться, что при изменении частоты

$$-\frac{\pi}{T} \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$$

псевдочастота принимает значения от $-\infty$ до $+\infty$, а комплексная переменная s движется по мнимой оси от $-j\infty$ до $+j\infty$, т.е. внутренняя часть круга единичного радиуса на плоскости комплексной переменной z отображается в левую плоскость комплексной переменной s (рис. 11.14).

Таким образом, частотные характеристики относительно псевдочастоты определяются выражением

$$W(j\nu) = W(z) \Big|_{z=1+s/1-s} \text{ при } s = j\nu \frac{T}{2}. \quad (11.40)$$

Равенство круговой частоты и псевдочастоты наблюдается на низких частотах, на которых обычно работают цифровые системы. Границей раздела низких и высоких частот считается круговая частота, равная $\omega = \frac{2}{T}$. На высоких частотах амплитудно- и фазочастотные характеристики записываются сложными выражениями, в которых учитываются малые постоянные времени составных частей системы.

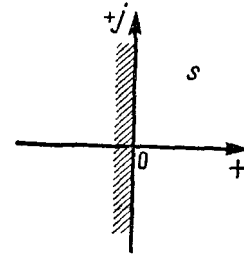


Рис. 11.14. Плоскость комплексного переменного s

Преобразование путем замены переменной z на переменную s называют еще *билинейным преобразованием*.

►**Пример 11.4.** Найти частотные характеристики разомкнутого дальномера с одним интегратором, передаточная функция которого определяется выражением (11.29).

Решение. Частотная характеристика дальномера относительно круговой частоты

$$W(j\omega) = \frac{kT}{e^{j\omega T} - 1} = -\frac{kT}{2} - j \frac{kT}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega T}{2}.$$

Амплитудная и фазовая частотные характеристики дальномера имеют вид

$$|W(j\omega)| = \frac{kT}{2 \sin \frac{\omega T}{2}}; \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\omega T}{2}.$$

Частотная характеристика относительно псевдочастоты в соответствии с выражением (11.40)

$$W(j\nu) = k \frac{1 - j\nu \frac{T}{2}}{j\nu}.$$

Тогда

$$|W(jv)| = \frac{k}{v} \sqrt{1 + \frac{T^2 v^2}{4}}; \quad \varphi(v) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{vT}{2}.$$

Очевидно, что построение частотных характеристик относительно псевдочастоты проще, чем относительно круговой частоты. ◀

Определим частотный спектр сигнала на выходе дискретизатора. Последовательность единичных импульсов является периодической, поэтому может быть разложена в ряд Фурье:

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t}, \quad (11.41)$$

где

$$A_k = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-jk \frac{2\pi}{T} t} dt = \frac{1}{T} - \text{коэффициенты ряда.}$$

Сигнал на выходе дискретизатора с учетом (11.41) можно записать как

$$x^*(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) e^{jk \frac{2\pi}{T} t}.$$

Применив к последнему выражению преобразование Лапласа и заменив в полученном выражении p на $j\omega$, найдем, что

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\omega - jk \frac{2\pi}{T}). \quad (11.42)$$

Из этого выражения следует, что спектр сигнала на выходе дискретизатора является периодическим и содержит высокочастотные составляющие (k может быть большим).

Так как сигнал на выходе дискретизатора существует только в дискретные моменты времени, то прохождение его через дискретизатор связано с потерей информации. Однако при ограниченном спектре сигнала можно вновь восстановить его по последовательности мгновенных импульсов на выходе дискретизатора. Для этого необходимо, чтобы выполнялось *условие теоремы Котельникова*:

$$\omega_T = \frac{2\pi}{T} \geq 2\omega_m. \quad (11.43)$$

Условие (11.43) используется для выбора частоты работы дискретизатора. При этом нужно иметь в виду, что реальные сигналы имеют неограниченные

спектры, хотя и убывающие при стремлении частоты к бесконечности, поэтому условие теоремы Котельникова нужно рассматривать как приближенное утверждение, определяющее наименьшую частоту работы дискретизатора.

Аналогично (11.42) запишем частотную характеристику импульсного фильтра через частотную характеристику его приведенной непрерывной части:

$$W_u^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_{ннч}(j\omega - jk \frac{2\pi}{T}). \quad (11.44)$$

С ростом частоты модуль частотной характеристики приведенной непрерывной части фильтра уменьшается, поэтому при нахождении частотной характеристики импульсного фильтра можно в выражении (11.44) ограничиться только двумя или тремя слагаемыми.

Проанализируем условия неискаженной передачи сигнала импульсным фильтром. Одно из условий определено: период работы дискретизатора должен удовлетворять условию теоремы Котельникова. Кроме того, для неискаженной передачи сигнала нужно отфильтровать все высокочастотные составляющие спектра сигнала (11.42). Для этого необходимо, чтобы ширина полосы пропускания приведенной непрерывной части импульсного фильтра была меньше граничной частоты в спектре сигнала. При этом приближенно можно считать, что частотные характеристики импульсного фильтра и приведенной непрерывной части связаны соотношением

$$W_u(j\omega) \approx \frac{1}{T} W_{ннч}(j\omega).$$

Очевидно, что в этом случае частотные свойства импульсного фильтра совпадают со свойствами приведенной непрерывной части.

Вопросы и задания к теме 11

1. Приведите математическую модель процесса квантования сигнала по времени.
2. Что такое Z-преобразование сигнала?
3. Пояснить методы определения передаточных функций импульсного фильтра цифровой системы РА.

Тема 12. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА УПРАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ

12.1. Переходные процессы в цифровых системах

Методы вычисления переходных процессов в цифровых системах РА основываются на Z-преобразовании переходного процесса, которое при единичном входном сигнале имеет вид

$$H(z) = W(z) \frac{z}{z-1}, \quad (12.1)$$

Один из методов расчета дискрет переходного процесса – это нахождение обратного Z-преобразования выражения (12.1). При этом следует воспользоваться формулой обращения (11.14), которая устанавливает, что дискретные значения переходного процесса

$$h(nT) = \sum_{i=1}^l \operatorname{Res} H(z) z^{n-1} \Big|_{z=z_i}, \quad (12.2)$$

где z_i – полюсы выражения $H(z)$; $i = 1, 2, \dots, l$.

Вычет в простом полюсе вычисляется по формуле

$$\operatorname{Res} H(z) z^{n-1} = \lim_{z \rightarrow z_i} (z - z_i) H(z) z^{n-1}. \quad (12.3)$$

Вычет в полюсе кратности k

$$\operatorname{Res} H(z) z^{n-1} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z - z_i)^k H(z) z^{n-1} \right]. \quad (12.4)$$

Характер изменения переходного процесса зависит от полюсов передаточной функции цифровой системы. В табл. 12.1 приведены составляющие переходного процесса для различных случаев расположения полюсов системы на плоскости комплексного переменного z .

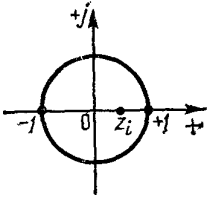
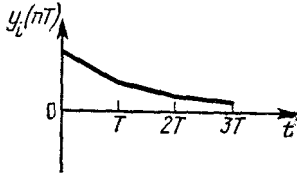
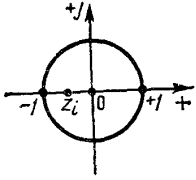
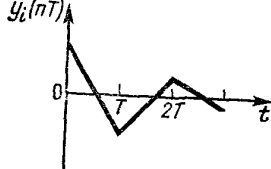
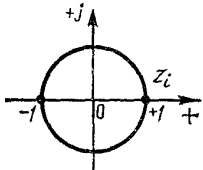
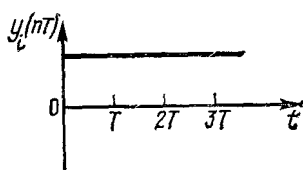
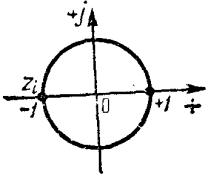
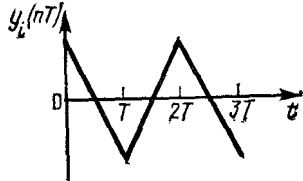
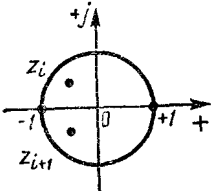
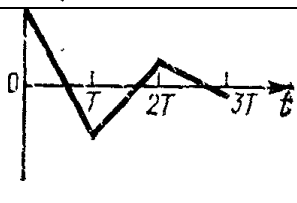
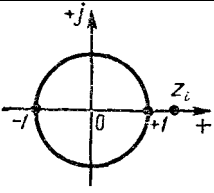
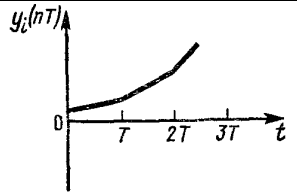
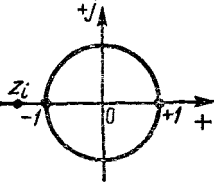
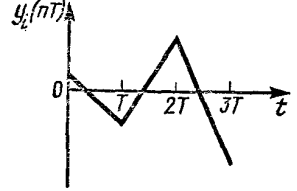
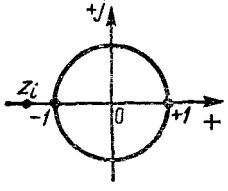
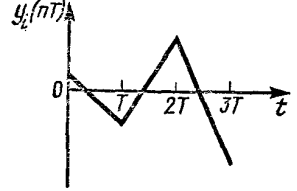
Второй метод нахождения дискретных значений переходного процесса является путь разложения $H(z)$ в ряд Лорана. Для этого нужно числитель $H(z)$ разделить на его знаменатель.

В результате получим

$$H(z) = h_0 z^0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \dots + h_k z^{-k} + \dots \quad (12.5)$$

Коэффициенты при z^{-i} определяют дискретные значения переходного процесса. Для наглядности графика переходного процесса рекомендуется его дискретные значения соединять прямолинейными отрезками.

Таблица 12.1

Расположение z_i	$y_i(nT)$
	
	
	
	
	
	
	
	

►Пример 12.1. Определить переходный процесс в цифровой системе, структурная схема которой дана на рис. 11.12.

Передаточная функция корректирующего устройства системы равна единице, а передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p(z) = k \frac{1 - e^{-\beta}}{z - e^{-\beta}}.$$

Решение. Для переходного процесса в соответствии с (12.1) Z-преобразование

$$H(z) = W_3(z) \frac{z}{z-1} = \frac{k(1-e^{-\beta})}{z+d} \frac{z}{z-1},$$

где $d = k(1 - e^{-\beta}) - e^{-\beta}$ – постоянный коэффициент; $W_3(z)$ – передаточная функция замкнутой системы, вычисляемая по формуле (11.33).

Первый метод

$$H(z) = \frac{k(1-e^{-\beta})}{z+d} \frac{z}{z-1},$$

Корни: а) $z_1 = -d$; б) $z_2 = 1$; степень $l = 2$.

Отсюда

$$\begin{aligned} \text{а) } \operatorname{Res} \frac{k(1-e^{-\beta})z}{(z+d)(z-1)} z^{n-1} \Big|_{z=-d} &= \lim_{z \rightarrow -d} (z+d) \frac{k(1-e^{-\beta})z \cdot z^{n-1}}{(z+d)(z-1)} = \frac{k(1-e^{-\beta})(-d)^n}{-d-1}; \\ \text{б) } \operatorname{Res} \frac{k(1-e^{-\beta})z \cdot z^{n-1}}{(z+d)(z-1)} \Big|_{z=1} &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{k(1-e^{-\beta})z \cdot z^{n-1}}{(z+d)(z-1)} = \frac{k(1-e^{-\beta})}{1+d}. \end{aligned}$$

Согласно (12.2) и (12.3)

$$h(nT) = \frac{k(1-e^{-\beta})}{1+d} \left[1 - (-d)^n \right].$$

Второй метод

Деление числителя на знаменатель при степенях z будет определять коэффициенты переходного процесса;

$$H(z) = k(1-e^{-\beta}) \frac{z}{z^2 + z(d-1) - d} \approx k(1-e^{-\beta}) \left\{ z^{-1} - (d-1)z^{-2} + [d + (d-1)^2]z^{-3} + \dots \right\};$$

здесь: $h(0) = 0$; $h_1 = -(d-1)$; $h_2 = [d + (d-1)^2]$;

На рис. 12.1 показан график переходного процесса при $k = 1$ и $\beta = 1$. ◀

► **Пример 12.2.** Найти переходный процесс относительно ошибки в дальномере РЛС с одним интегратором при $kT = 1,5$.

Решение. Передаточная функция дальномера в разомкнутом состоянии определяется выражением (11.29). Для переходного процесса Z-преобразование найдем по формуле

$$H_e(z) = W_e(z) \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1+W_p(z)} \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1+\frac{kT}{z-1}} \frac{z}{z-1} = \frac{z}{z+0,5}, \quad (12.6)$$

где $W_e(z)$ – передаточная функция ошибки, определяемая выражением (11.34).

Обратное Z-преобразование – (12.6), т.е. значения выходного сигнала в дискретные моменты времени в соответствии с формулами (12.2) и (12.3) имеют вид: $e(nT) = (-0,5^n)$.

Установившееся значение ошибки равно нулю, так как цифровой дальномер с одним интегратором – это система с астатизмом первого порядка.

На рис. 12.2 показан график переходного процесса в дальномере относительно ошибки. ◀

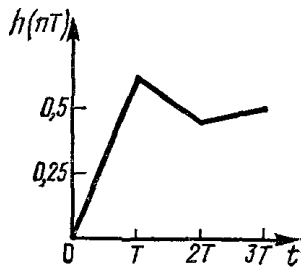


Рис. 12.1. Переходный процесс в цифровой системе

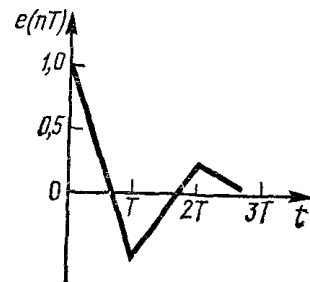


Рис. 12.2. Переходный процесс в цифровом дальномере относительно ошибки

Третий метод расчета переходных процессов в цифровых системах РА базируется на *разностных уравнениях системы*. В общем виде дискретная передаточная функция системы

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{c_m z^m + c_{m-1} z^{m-1} + \dots + c_0}{z^l + a_{l-1} z^{l-1} + a_{l-2} z^{l-2} + \dots + a_0}$$

Представим последнее выражение через отрицательные степени z :

$$W(z) = \frac{c_m z^{m-l} + c_{m-1} z^{m-l-1} + \dots + c_0 z^{-l}}{1 + a_{l-1} z^{-1} + a_{l-2} z^{-2} + \dots + a_0 z^{-l}} \quad (12.7)$$

Из выражения (12.7) следует следующее соотношение для Z-преобразования выходного сигнала:

$$Y(z) = [c_m z^{m-l} + c_{m-1} z^{m-l-1} + \dots + c_0 z^{-l}] X(z) - [a_{l-1} z^{-1} + a_{l-2} z^{-2} + \dots + a_0 z^{-l}] Y(z) \quad (12.8)$$

Так как в соответствии с первой теоремой смещения (11.9)

$$Z[x(t - kT)] = z^{-k} X(z), \quad Z[y(t - kT)] = z^{-k} Y(z),$$

то согласно (12.8) разностное уравнение системы относительно дискретных значений входного и выходного сигналов

$$y(nT) = c_m x[(n-l+m)T] + c_{m-1} x[(n-l+m-1)T] + c_0 x[(n-l)T] - a_{l-1} y[(n-l)T] - a_{l-2} y[(n-l-1)T] - \dots - a_0 y[(n-l)T]. \quad (12.9)$$

В соответствии с (12.9) рекуррентные формулы расчета переходного процесса при известном входном сигнале для $m = l - 1$, т.е. когда степень числителя на единицу меньше степени знаменателя, запишем в виде

$$\begin{aligned}
 y(0) &= 0; \\
 y(T) &= c_m x(0); \\
 y(2T) &= c_m x(T) + c_{m-1} x(0) - a_{l-1} y(T); \\
 &\dots\dots\dots \\
 y(nT) &= \sum_{i=0}^{k-1} c_{m-i} x[(k-1-i)T] - \sum_{i=1}^k a_{l-i} y[(k-i)T].
 \end{aligned} \tag{12.10}$$

В уравнениях (12.10) учтено, что дискретные значения выходного сигнала при отрицательных значениях аргументов равны нулю.

Формулы (12.10) используются и для расчета переходных процессов в непрерывных системах РА. Для этого осуществляют дискретизацию векторного дифференциального уравнения, после чего по выражению (12.10) вычисляют переходный процесс (см. тему 14).

12.2. Анализ точности работы цифровых систем

Точность цифровых систем РА характеризуется как статическими, так и динамическими ошибками, оцениваемыми относительно медленно изменяющихся воздействий. Если динамическая ошибка существует, то она может быть найдена по Z-преобразованию ошибки по теореме о конечном значении (11.12). В противном случае, когда предельное значение динамической ошибки равно бесконечности, она вычисляется по формуле

$$e(nT) = C_0 x(nT) + C_1 \dot{x}(nT) + \frac{1}{2} C_2 \ddot{x}(nT) + \dots + \frac{1}{k!} C_k x^{(k)}(nT), \tag{12.11}$$

где C_0, C_1, C_2, \dots – коэффициенты ошибок по положению, скорости, ускорению и т.д.

Коэффициенты ошибок находят по передаточной функции ошибки

$$C_i = i! \frac{d^i}{dp^i} W_e(e^{pT}) \Big|_{p=0}. \tag{12.12}$$

Выражение (12.12) неудобно для расчетов, поэтому, учитывая, что $e^{pT} = z$, коэффициенты ошибок рассчитывают по формулам

$$C_0 = W_e(z) \Big|_{z=1}; \quad C_1 = zT \frac{d}{dz} W_e(z) \Big|_{z=1}; \quad C_2 = 2 \left[T \frac{d}{dz} W_e(z) + zT \frac{d^2}{dz^2} W_e(z) \right] \Big|_{z=1}. \tag{12.13}$$

В астатических системах несколько первых коэффициентов ошибок равны нулю: $C_0 = C_1 = \dots = C_{v-1} = 0$, где v – порядок астатизма.

В этом случае ошибка относительно сигнала (11.37) равна нулю.

Ошибка системы

$$e(t) = x(t) - y(t), \quad (12.14)$$

где $x(t)$ – стационарный случайный сигнал с математическим ожиданием m_x ; $y(t)$ – выходной сигнал системы.

Найдем среднюю квадратическую ошибку системы, на вход которой подается воздействие

$$f(t) = x(t) + n(t), \quad (12.15)$$

где $n(t)$ – случайная стационарная помеха с нулевым математическим ожиданием.

Для ошибки (12.14) Z-преобразование определяется выражением

$$E(z) = W_e(z) X(z) - W_3(z) n(z), \quad (12.16)$$

где $W_e(z)$ – передаточная функция ошибки; $W_3(z)$ – передаточная функция замкнутой системы.

После окончания переходного процесса суммарная ошибка (12.14) образует дискретный сигнал, математическое ожидание которого рассчитывается по формуле (12.16) с помощью теоремы о конечном значении (11.12):

$$m_e = \lim_{z \rightarrow 1} W_e(z) m_x. \quad (12.17)$$

Средняя квадратичная ошибка системы вычисляется через ее спектральную плотность, которая находится так же, как и в непрерывных системах. Поэтому аналогично (7.8) спектральная плотность ошибки

$$S_e(z) = |W_e(z)|^2 S_x(z) + |W_3(z)|^2 S_n(z) + W_e(z^{-1})W_3(z)S_{xn}(z) + W_e(z)W_3(z^{-1})S_{nx}(z), \quad (12.18)$$

где $S_x(z)$ – спектральная плотность сигнала; $S_n(z)$ – спектральная плотность помехи; $S_{xn}(z)$, $S_{nx}(z)$ – взаимные спектральные плотности.

Дисперсия ошибки системы

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} S_e(z) \frac{dz}{z}. \quad (12.19)$$

Если для расчета дисперсии ошибки использовать спектральную плотность относительно псевдочастоты (11.39), то в соответствии с (12.19)

$$\sigma_e^2 = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_e(\nu) \frac{d\nu}{\left|1 + j\nu \frac{T}{2}\right|^2}. \quad (12.20)$$

Для вычисления интеграла (12.20) используем формулы, приведенные в прил. П.2. В результате найдем, что средняя квадратическая ошибка системы

$$\sigma_e = \left[\sigma_{ex}^2 + \sigma_{en}^2 + \sigma_{exn}^2 + \sigma_{enx}^2 \right]^{1/2}, \quad (12.21)$$

где σ_{ex}^2 – дисперсия ошибки относительно сигнала; σ_{en}^2 – дисперсия ошибки из-за действия помехи; σ_{exn}^2 , σ_{enx}^2 – составляющие, обусловленные корреляцией сигнала с помехой и помехи с сигналом.

Если сигнал и помеха в (12.15) некоррелированы, то последние два слагаемых в выражениях (12.18) и (12.21) равны нулю.

Иногда точность цифровых систем РА оценивается суммарной средней квадратической ошибкой:

$$\sigma_\Sigma = \left[m_e^2 + \sigma_e^2 \right]^{1/2}, \quad (12.22)$$

где m_e – математическое ожидание ошибки, вычисляемое по формуле (12.17).

►Пример 12.3. Определить суммарную среднюю квадратичную ошибку цифрового дальномера с одним интегратором, на вход которого действует помеха в виде белого шума и сигнал (измеряемая дальность) $R = R_0 + \dot{R}t$, где R_0 – начальное значение дальности; \dot{R} – скорость изменения дальности.

Передаточная функция дальномера в разомкнутом состоянии

$$W_p(z) = \frac{kT}{z-1}.$$

Решение. Передаточные функции дальномера в соответствии с выражениями (11.29), (11.33) и (11.34)

$$W_s(z) = \frac{kT}{z-1+kT}; \quad W_e(z) = \frac{z-1}{z-1+kT}. \quad (12.23)$$

Динамическую ошибку дальномера вычислим через коэффициенты ошибок:

$$C_0 = W_e(z) \Big|_{z=1} = \frac{z-1}{z-1+kT} \Big|_{z=1} = 0, \quad C_1 = zT \frac{d}{dz} W_e(z) \Big|_{z=1} = zT \frac{z-1+kT-z+1}{(z-1+kT)^2} \Big|_{z=1} = \frac{1}{k},$$

коэффициент C_2 и высшие коэффициенты равны нулю.

В результате найдем, что

$$m_e = C_1 \dot{R} = \frac{1}{k} \dot{R},$$

где C_1 – коэффициент ошибки по скорости, рассчитываемый по формуле (12.13).

Спектральная плотность ошибки дальномера относительно помехи, согласно (12.18),

$$S_e(z) = \left| \frac{kT}{z-1+kT} \right|^2 S(0), \quad (12.24)$$

где $S(0)$ – спектральная плотность белого шума.

Спектральную плотность относительно псевдочастоты найдем по (12.24) с учетом (11.39):

$$S_e(v) = \left| \frac{kT(1 - jv\frac{T}{2})}{jv\frac{T}{2}(2 - kT) + kT} \right|^2 S(0).$$

Дисперсия ошибки измерения, возникающей из-за помехи,

$$\sigma_{en}^2 = \frac{kT}{2 - kT} S(0). \quad (12.25)$$

Для вычисления интеграла (12.25) использована формула для $n = 1$, приведенная в прил. П.2.

Из выражения (12.25) следует, что с увеличением периода дискретизации ошибка измерения дальности растет и при $kT = 2$ будет равна бесконечности, что связано с нарушением устойчивости дальномера.

Суммарная средняя квадратическая ошибка дальномера с одним интегратором, в соответствии с (12.22),

$$\sigma_{\Sigma} = \left[\frac{\dot{R}^2}{k^2} + \frac{kT}{2 - kT} S(0) \right]^{1/2}. \quad \blacktriangleleft$$

12.3. Анализ устойчивости цифровых систем

При анализе переходных процессов было установлено, что переходный процесс будет затухающим, если все полюсы цифровой системы РА на плоскости комплексного переменного z расположены внутри круга единичного радиуса. Это условие является необходимым и достаточным для устойчивости системы. Полюсы системы – корни характеристического уравнения, которое получается из передаточной функции замкнутой системы путем приравнивания ее знаменателя нулю:

$$1 + W_p(z) = 0, \quad (12.26)$$

где $W_p(z)$ – передаточная функция разомкнутой системы.

►Пример 12.4. Определить условие устойчивости дальногомера с одним интегратором, передаточная функция которого в разомкнутом состоянии определяется выражением (11.29).

Решение. Характеристическое уравнение дальногомера $z - 1 + kT = 0$.

Условие устойчивости: $|z| = |1 - kT| < 1$ или $k < \frac{2}{T}$. ◀

Для уравнений более высокого порядка по сравнению с приведенным примером исследование устойчивости усложняется. Расположение корней характеристического уравнения (12.26) внутри круга единичного радиуса соответствует расположению корней на плоскости комплексного переменного p слева от мнимой оси в полосе $\pm\pi/T$, которое не может быть проверено ни одним из критериев, используемых для оценки устойчивости аналоговых систем РА. Однако если с помощью подстановки (11.38) в уравнении (12.26) перейти к комплексной плоскости s (см. рис. 11.14), то область устойчивости оказывается вся левая полуплоскость и для оценки расположения корней на плоскости s могут быть использованы критерии устойчивости, разработанные для непрерывных систем РА. Так, для проверки устойчивости цифровой РА по критерию Гурвица необходимо от характеристического уравнения $1 + W_p(z) = 0$ перейти к уравнению

$$1 + W_p(s) = \left[1 + W_p(z) \right]_{z=\frac{1+s}{1-s}} = b_l s^l + b_{l-1} s^{l-1} + \dots + b_0 = 0. \quad (12.27)$$

Так же как и в непрерывных системах, нужно составить матрицу Гурвица:

$$\begin{vmatrix} b_{l-1} & b_{l-3} & b_{l-5} & \dots & 0 \\ b_l & b_{l-2} & b_{l-4} & \dots & 0 \\ 0 & b_{l-1} & b_{l-3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 \end{vmatrix}$$

Условия устойчивости при $b_l > 0$:

$$\Delta_1 = b_{l-1} > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{l-1} & b_{l-3} \\ b_l & b_{l-2} \end{vmatrix} > 0; \dots \Delta_{l-1} > 0.$$

Если хотя бы один из определителей меньше или равен нулю, то цифровая система неустойчива. Условие $\Delta_{l-1} = 0$ определяет границу устойчивости, из этого уравнения находится критический коэффициент усиления. ◀

►Пример 12.5. Оценить условия устойчивости для цифровой системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии

$$W_p(z) = kT \frac{(1 - e^{-\beta})z}{(z-1)(z - e^{-\beta})}. \quad (12.28)$$

Решение. Характеристическое уравнение системы в соответствии с (12.26) и (12.28)

$$a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0,$$

где $a_2 = 1$; $a_1 = kT(1 - e^{-\beta}) - 1 - e^{-\beta}$; $a_0 = e^{-\beta}$.

Подставляем $z = (s + 1)/(1 - s)$, и характеристическое уравнение (12.27) принимает вид

$$b_2 s^2 + b_1 s + b_0 = 0,$$

где $b_2 = a_2 - a_1 + a_0$; $b_1 = 2a_2 - 2a_0$; $b_0 = a_2 + a_1 + a_0$.

Условия устойчивости:

$$b_0 = 1 + kT(1 - e^{-\beta}) - 1 - e^{-\beta} + e^{-\beta} = kT(1 - e^{-\beta}) > 0;$$

$$b_1 = 2 - 2e^{-\beta} = 2(1 - e^{-\beta}) > 0;$$

$$b_2 = 1 - kT(1 - e^{-\beta}) + 1 + e^{-\beta} + e^{-\beta} = 2(1 + e^{-\beta}) - kT(1 - e^{-\beta}) > 0.$$

Так как $e^{-\beta} < 1$, то первое и второе условия устойчивости выполняются при любых коэффициентах k и β , а третье только в том случае, когда

$$k < \frac{2(1 + e^{-\beta})}{T(1 - e^{-\beta})}. \quad (12.29)$$

Если в выражении (12.29) поставить знак равенства, то получим уравнение для границы устойчивости. ◀

Устойчивость цифровых систем РА может быть оценена и по частотным критериям устойчивости. Так, для оценки устойчивости по критерию Найквиста нужно построить годограф частотной характеристики разомкнутой системы относительно круговой частоты или относительно псевдо частоты на основе s -преобразования (11.39).

В том и другом случае цифровая система, устойчивая в разомкнутом состоянии, устойчива и в замкнутом, если годограф частотной характеристики разомкнутой системы не охватывает точку с координатами $[-1, j0]$.

Близость системы к границе устойчивости определяется запасами устойчивости. *Запас устойчивости по усилению* вычисляется на *критической частоте*, на которой ФЧХ разомкнутой системы равна $-\pi$:

$$\alpha = \frac{1}{|W_p(\omega_{кр})|},$$

где $\omega_{кр}$ – критическая частота.

Запас устойчивости по фазе рассчитывается на *частоте среза*:

$$\Delta\varphi = \pi - \varphi_p(\omega_{ср}),$$

где $\omega_{ср}$ – частота среза.

► **Пример 12.6.** Определить, используя критерий устойчивости Найквиста, критический коэффициент усиления в цифровой системе, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии

$$W_p(z) = k_1 \frac{1 - e^{-\beta}}{z - e^{-\beta}}.$$

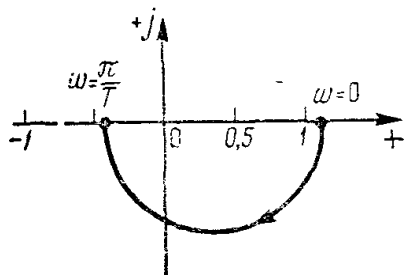


Рис. 12.3. Годограф частотной характеристики разомкнутой системы

Решение. Разомкнутая система устойчива, так как ее полюс $z_1 = e^{-\beta} < 1$.

На рис. 12.3 построен годограф частотной характеристики разомкнутой системы, из которого видно, что $\omega_{kp} = \pi/T$. Критический коэффициент найдем из условия $W_p(\omega_{kp}) = -1$.

В результате получим

$$k_{1kp} = \frac{1 + e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}}. \blacktriangleleft$$

Вопросы и задания к теме 12

1. Какими способами определяются переходные процессы в цифровых системах РА?
2. Укажите методы вычисления статической и динамической ошибок в цифровых системах.
3. Каковы особенности передаточных функций статических и астатических систем?
4. Каким образом определяются частотные характеристики цифровых систем относительно псевдочастоты?
5. Сформулируйте условия устойчивости цифровых систем РА.

РАЗДЕЛ 8. ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ РАДИОАВТОМАТИКИ

Тема 13. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ. ЭЛЕМЕНТЫ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ

13.1. Общие сведения

Широкое распространение в настоящее время получили цифровые системы радиоавтоматики, и в частности – цифровые следящие системы. Цифровыми обычно называют следящие системы, все или часть блоков которых (дискриминаторы, фильтры, генераторы опорного сигнала) построены на базе цифровых вычислительных машин (ЦВМ) или в виде отдельных цифровых устройств, использующих элементы импульсной и цифровой техники – триггеры, логические элементы И, ИЛИ, счетчики, регистры памяти и др. В противоположность им системы, не использующие цифровую технику, принято называть аналоговыми.

Важным преимуществом цифровых следящих систем являются: резкое упрощение их настройки и регулировки, что делает такие системы весьма технологичными, высокая стабильность их характеристик и параметров, высокая надежность. К достоинствам таких систем относятся также удобство измерения их параметров в процессе работы, позволяющее реализовать в них сложные алгоритмы обработки сигналов, гарантированная точность получаемых результатов и ряд других. Перечисленные достоинства делают цифровые системы весьма перспективными, и во многих случаях им отдается предпочтение.

При построении цифровых систем возникают и определенные трудности. Характерной особенностью этих систем является обработка процессов, подвергшихся дискретизации по времени и квантованию по уровню. В общем случае выполнение этих операций приводит к возрастанию ошибки слежения.

13.2. Синтез цифровых систем

Синтез цифровых систем РА сводится к выбору цифрового корректирующего устройства, последовательное включение которого с объектом управления позволяет получить систему с желаемыми характеристиками (рис. 13.1).

Рассмотрим синтез разомкнутой цифровой системы, импульсная переходная функция которой должна соответствовать импульсной переходной функции заданного аналогового эквивалента, т.е.

$$w_u(nT) = w_a(t)|_{t=nT}.$$

Желаемая передаточная функция проектируемой системы при таком методе синтеза определяется как Z-преобразование импульсной переходной функции аналогового эквивалента:

$$W_{зк}(z) = Z[w_a(t)]. \quad (13.1)$$

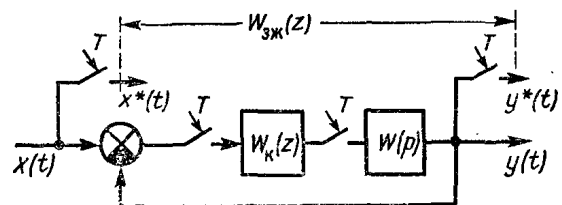


Рис. 13.1. Структурная схема системы с последовательным корректирующим устройством

Передаточная функция последовательного цифрового корректирующего устройства

$$W_k(z) = W_{\text{жс}}(z)/W(z), \quad (13.2)$$

где $W(z)$ – дискретная передаточная функция объекта управления.

Цифровая система РА, спроектированная таким методом, совпадает по своим свойствам с аналоговым эквивалентом только в смысле равенства дискретных значений импульсных переходных функций, т.е. при входном сигнале в виде δ -функции. При других входных сигналах совпадение дискретных значений выходных сигналов в цифровой системе и аналоговом эквиваленте не гарантируется. Проиллюстрируем это положение на конкретном примере.

► **Пример 13.1.** Найти передаточную функцию цифрового корректирующего устройства в разомкнутой системе, предназначенной для управления астатическим объектом, передаточная функция которого с формирующим элементом

$$W(p) = k(1 - e^{-pT})/p^2.$$

Передаточная функция аналогового эквивалента

$$W_a(p) = \frac{1}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)}.$$

Решение. В соответствии с выражением (13.1) желаемая передаточная функция проектируемой системы определяется по аналоговому прототипу; Z-преобразование желаемой передаточной функции найдем через импульсную передаточную функцию аналогового прототипа $w_a(t)$:

$$w_a(t) = \frac{d}{dt}h(t); \quad h(t) = \sum_{i=1}^n \operatorname{Re} s \frac{W(p)}{p} e^{pt} \Big|_{p=\lambda_i},$$

получаем $w_a(t) = \frac{1}{T_1 - T_2} (e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}}).$

По таблицам ПЗ определяем:

$$W_{\text{жс}}(z) = \frac{b_1 z}{(z - e^{-\beta_1})(z - e^{-\beta_2})},$$

где $b_1 = \frac{1}{T_1 - T_2} (e^{-\beta_1} - e^{-\beta_2}); \beta_1 = \frac{T}{T_1}; \beta_2 = \frac{T}{T_2}.$

Дискретная передаточная функция объекта управления определяется выражением (11.29). Передаточная функция корректирующего устройства, согласно (13.2),

$$W_k(z) = k_{\kappa} \frac{z(z-1)}{(z - e^{-\beta_1})(z - e^{-\beta_2})},$$

где $k_{\kappa} = b_1/(kT)$ – коэффициент передачи корректирующего устройства.

Найдем значения выходных сигналов в цифровой системе и ее аналоговом эквиваленте в установившемся режиме при входном сигнале $x(t) = 1(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_a(t) = \lim_{p \rightarrow 0} W_a(p) = 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{ц}(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} W_{ж}(z) \neq 1.$$

С уменьшением периода дискретизации сигналов расхождение между дискретными значениями переходных процессов уменьшается, и при $T = 0$ переходные процессы совпадают, что следует из выражения

$$\lim_{T \rightarrow 0} TW_{жс}(1) = 1. \blacktriangleleft$$

Рассмотрим синтез разомкнутых цифровых систем, который гарантирует совпадение переходных процессов в проектируемой системе и ее аналоговом эквиваленте при входном сигнале $x(t) = 1(t)$. В этом случае желаемая передаточная функция проектируемой системы

$$W_{жс}(z) = \frac{z-1}{z} H(z), \quad (13.3)$$

где $H(z)$ – Z-преобразование переходной функции аналогового эквивалента.

В цифровых системах с передаточной функцией

$$W_{жс}(z) = \frac{d_{l-1}z^{l-1} + d_{l-2}z^{l-2} + \dots + d_0}{z^l} \quad (13.4)$$

переходный процесс заканчивается за конечный промежуток времени.

В этом нетрудно убедиться, если разложить $H(z)$ в ряд Лорана (12.5).

Действительно,

$$H(z) = [d_{l-1}z^{-1} + d_{l-2}z^{-2} + \dots + d_0z^{-l}]X(z).$$

В области действительного переменного при $x(t) = 1(t)$

$$h(nT) = d_{l-1} 1(nT - T) + d_{l-2} 1(nT - 2T) + \dots + d_0 1(nT - lT).$$

Из последнего выражения следует, что переходный процесс заканчивается за время, равное lT ; в последующие дискретные моменты времени значения $h(nT)$ не изменяются и остаются равными $h(lT)$.

Если нули и полюсы передаточной функции объекта управления цифровой системы на плоскости комплексного переменного z расположены внутри круга единичного радиуса, то можно спроектировать систему, в которой длительность переходного процесса равна одному периоду работы дискретизатора.

► Пример 13.2. Определить передаточную функцию цифрового корректирующего устройства системы, рассмотренной в примере 13.1, при условии, что переходный процесс заканчивается за один такт работы дискретизатора.

Решение. В системах с длительностью переходного процесса, равной одному такту работы дискретизатора, желаемая передаточная функция $W_{жс}(z) = 1/z$.

Передаточную функцию цифрового корректирующего устройства найдем по формуле (13.2):

$$W_k(z) = \frac{W_{жс}(z)}{W(z)} = \frac{1}{z} \frac{z-1}{kT},$$

где $W(z) = \frac{kT}{z-1}$ – передаточная функция объекта управления. ◀

Рассмотрим синтез цифровых систем в частотной области. В этом случае желаемая передаточная функция проектируемой системы определяется частотными характеристиками аналогового эквивалента системы на интервале частот $0 \leq \omega T \leq \pi$. Обычно требуется, чтобы в заданном диапазоне частот совпадали только АЧХ цифровой системы и ее аналогового эквивалента и нет необходимости в совпадении ФЧХ.

Для нахождения желаемой передаточной функции определим связь между операторами p и z . Так как $z = e^{pT}$, то

$$p = \frac{1}{T} \ln z = \frac{2}{T} \left[\frac{z-1}{z+1} + \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^5 + \dots \right]. \quad (13.5)$$

Если в передаточную функцию аналогового эквивалента проектируемой системы вместо оператора p подставить первое слагаемое (13.5), то желаемая передаточная функция будет иметь вид

$$W_{жс}(z) = W_a(p) \Big|_{p = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}}. \quad (13.6)$$

Тогда по формуле (13.2) вычисляется передаточная функция цифрового корректирующего устройства.

В выражение (13.6) можно включить и большее число слагаемых (13.5), но при этом значительно усложняется цифровое корректирующее устройство без заметного выигрыша точности приближения АЧХ цифровой системы к характеристике аналогового эквивалента.

Данные методы синтеза разомкнутых систем пригодны и для проектирования замкнутых цифровых систем РА. Желаемая передаточная функция замкнутой системы находится по аналоговому эквиваленту, после чего рассчитывается желаемая передаточная функция разомкнутой системы:

$$W_{ржс}(z) = \frac{W_{жс}(z)}{1 - W_{жс}(z)}.$$

Передаточная функция цифрового корректирующего устройства вычисляется по формуле (13.2).

13.3. Цифровые корректирующие устройства

После определения передаточных функций корректирующих устройств следующим этапом синтеза цифровой системы является их техническая реализация. Для этого используются следующие методы:

1) метод программирования, применяемый в системах с ЦВМ. Реализация корректирующего устройства сводится к составлению программы по его разностному уравнению;

2) метод, базирующийся на использовании цифровых фильтров, реализуемых на элементах цифровой техники по алгоритму, определяемому разностным уравнением корректирующего устройства.

В зависимости от вида представления передаточной функции цифрового фильтра различают формы его структурных схем. Рассмотрим основные из них.

Передаточную функцию цифрового фильтра запишем в виде

$$W_k(z) = \frac{U(z)}{X(z)} = \frac{d_m z^{m-l} + d_{m-1} z^{m-1-l} + \dots + d_0 z^{-l}}{1 + a_{l-1} z^{-1} + a_{l-2} z^{-2} + \dots + a_0 z^{-l}}, \quad (13.7)$$

где $U(z)$, $X(z)$ – Z-преобразования выходного и входного сигналов фильтра.

Из последнего выражения следует, что

$$U(z) = \sum_{i=0}^m d_i z^{i-l} X(z) - \sum_{j=0}^{l-1} a_j z^{j-l} U(z). \quad (13.8)$$

На рис. 13.2 в соответствии с (13.8) для $m = l - 1$ построена структурная схема фильтра, называемая *прямой формой цифрового фильтра*. Для реализации такого фильтра требуется $2l$ линий задержки.

Запишем уравнение (13.7) следующим образом:

$$U(z) = F(z) \sum_{i=1}^m d_i z^{i-l}; \quad (13.9)$$

$$F(z) = X(z) - \sum_{j=0}^{l-1} a_j z^{j-l} F(z), \quad (13.10)$$

где $F(z)$ – Z-преобразование промежуточной переменной.

Уравнениям (13.9) и (13.10) соответствует структурная схема фильтра, показанная на рис. 13.3. Для создания такого фильтра требуется l линий задержек, т.е. в два раза меньше, чем при прямой форме

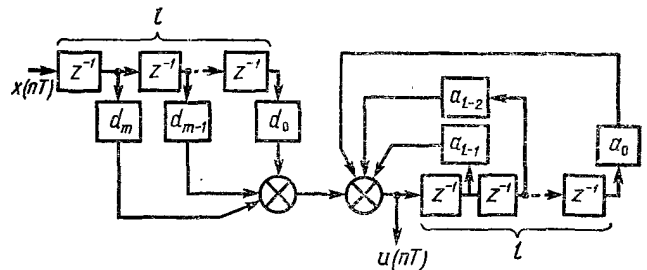


Рис. 13.2. Прямая форма цифрового фильтра

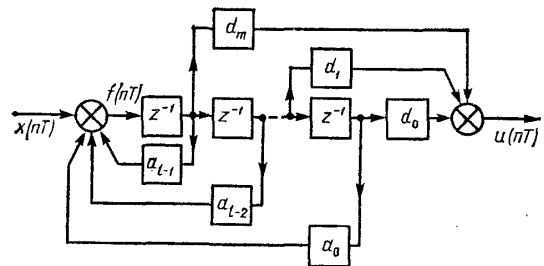


Рис. 13.3. Каноническая форма цифрового фильтра

фильтра. Структурные схемы цифровых фильтров, число элементов которых равно порядку передаточной функции, называют *каноническими*. Помимо рассмотренной канонической структуры существуют и другие: последовательная и параллельная.

Для определения последовательной канонической структуры цифрового фильтра необходимо найти нули и полюсы фильтра. При этом выражение (13.7) можно записать в виде

$$W_{\kappa}(z) = k \frac{1 + z_{01}z^{-1}}{1 + z_1z^{-1}} \frac{\beta_2 + \beta_1z^{-1} + \beta_0z^{-2}}{1 + \alpha_1z^{-1} + \alpha_0z^{-2}} \cdots \frac{1}{1 + z_lz^{-1}}. \quad (13.11)$$

Таким образом, цифровой фильтр состоит из последовательного соединения цифровых фильтров первого порядка, соответствующих вещественным полюсам (рис. 13.4, а), и фильтров второго порядка, соответствующих паре комплексно-сопряженных полюсов (см. рис. 13.4, б). Элемент z_{0i} в некоторых фильтрах может отсутствовать при $z_{0i} = 0$.

Представление передаточной функции в виде (13.11) называют *последовательным программированием*, а структуру фильтра – *последовательной канонической формой*.

Представление передаточной функции цифрового фильтра в виде

$$W_{\kappa}(z) = \sum_{i=1}^l W_{\kappa i}(z)$$

называют *параллельным программированием*. Цифровой фильтр в этом случае представляет собой параллельное соединение фильтров первого и второго порядков.

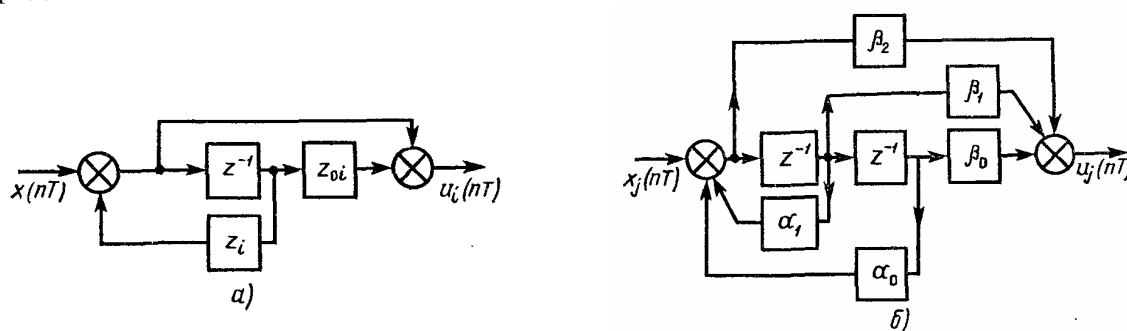


Рис. 13.4. Каноническая форма цифрового фильтра:
а – первого порядка; б – второго порядка

Такую структуру называют *параллельной канонической формой*. На практике преимущественно используются последовательные и параллельные канонические формы цифровых фильтров, так как они более удобны для технической реализации и обеспечивают по сравнению с прямой формой более высокую точность.

Рассмотрим ошибки цифровых фильтров, основными из которых являются следующие:

- 1) ошибки из-за квантования входных сигналов по уровню;
- 2) ошибки из-за округления результатов арифметических операций;
- 3) ошибки из-за округления коэффициентов передаточных функций фильтров при их реализации.

Методы анализа ошибок цифровых фильтров базируются на следующих предположениях:

1) ошибки из-за квантования входных сигналов по уровню распределены равномерно в диапазоне от $-0,5q$ до $+0,5q$, где q – шаг квантования;

2) составляющие ошибки цифрового фильтра от выборки к выборке статистически независимы;

3) шаг квантования сигналов мал по сравнению с квантуемыми сигналами.

При таких предположениях плотность распределения вероятности ошибки квантования (рис. 13.5)

$$w(\Delta_x) = 1/q,$$

где Δ_x – ошибка (шум) квантования.

Математическое ожидание и дисперсия ошибки квантования следующие:

$$\begin{aligned} m_{\Delta_x} &= \int_{-0,5q}^{0,5q} \Delta_x w(\Delta_x) d\Delta_x = \int_{-0,5q}^{0,5q} \Delta_x \frac{1}{q} d\Delta_x = 0; \\ \sigma_{\Delta_x}^2 &= \int_{-0,5q}^{0,5q} \Delta_x^2 w(\Delta_x) d\Delta_x = \frac{1}{q} \frac{\Delta_x^3}{3} \Big|_{-0,5q}^{0,5q} = \frac{q^2}{12}. \end{aligned} \quad (13.12)$$

Из принятых допущений следует, что ошибка квантования является белым шумом с дисперсией, равной (13.12). Этот шум приводит к появлению ошибки, дисперсия которой на основании выражения (12.20) определяется по формуле

$$\sigma_k^2 = \frac{q^2}{12} \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_k(jv)|^2 \frac{dv}{\left|1 + jv \frac{T}{2}\right|^2}, \quad (13.13)$$

где $W_k(jv)$ – частотная характеристика цифрового фильтра относительно псевдо-частоты.

Очевидно, что средняя квадратическая ошибка цифрового фильтра из-за квантования входного сигнала не зависит от структурной схемы фильтра, а определяется только его передаточной функцией.

► **Пример 13.3.** Найти ошибку из-за квантования входного сигнала по уровню в цифровом фильтре с передаточной функцией $W_k(z) = \frac{z}{z - a_0}$.

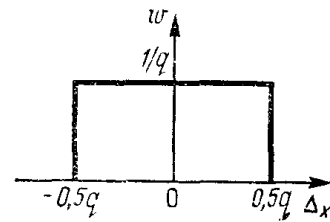


Рис. 13.5. Плотность распределения вероятности ошибки квантования по уровню

Решение. Относительно псевдочастоты передаточная функция фильтра имеет вид

$$W_{\kappa}(j\nu) = \frac{1 + j\nu \frac{T}{2}}{(1 + a_0) j\nu \frac{T}{2} + 1 - a_0}.$$

Используя выражение (13.13) и формулу, приведенную в прил. П2 для $n = 1$, вычислим ошибку из-за квантования входного сигнала по уровню:

$$\sigma_{\kappa}^2 = \frac{q^2}{12} \frac{1}{1 - a_0^2}.$$

Из этого выражения следует, что при полюсе фильтра, близком к единице, дисперсия ошибки из-за квантования входного сигнала по уровню может быть значительной. ◀

Проанализируем ошибку, возникающую из-за округления результатов арифметических операций в цифровом фильтре. Основное влияние на точность фильтра оказывает округление результатов умножения. Действительно, если перемножаются два числа меньше единицы, каждое из которых имеет α разрядов, то их произведение содержит 2α разрядов. Из-за ограниченного числа разрядов фильтра младшие разряды отбрасываются и результат округляется. Так как ошибки округления в различные моменты времени не зависят друг от друга, то для их определения необходимо в узлы фильтра, в которых производится округление, ввести источники белого шума с интенсивностью (13.12). Различным структурным схемам цифровых фильтров соответствуют различные точки введения белого шума, поэтому ошибка из-за округления операции умножения зависит от выбранной структуры фильтра.

На рис. 13.6 показана последовательная каноническая форма фильтра с передаточной функцией

$$W_{\kappa}(z) = \frac{1}{1 + z_1 z^{-1}} \frac{b_0 z^{-1}}{1 + z_2 z^{-1}}, \quad (13.14)$$

где z_1, z_2 – полюсы фильтра.

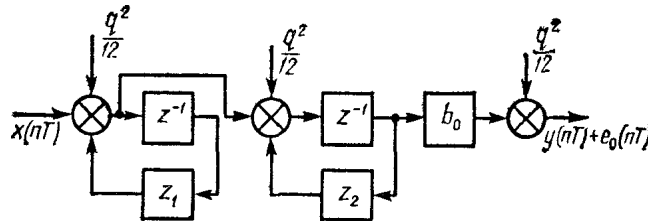


Рис. 13.6. К оценке средней квадратической ошибки канонического фильтра последовательной формы

Составляющие дисперсии ошибок из-за округления результатов умножения:

на значение полюса z_1 (формула (13.13))

$$\sigma_{01}^2 = \frac{q^2}{12} \frac{b_0^2}{2(1-z_1^2)(1-z_2^2)(1-z_1z_2)};$$

на значение полюса z_2

$$\sigma_{02}^2 = \frac{q^2}{12} \frac{b_0^2}{1-z_2^2};$$

на коэффициент b_0

$$\sigma_{03}^2 = \frac{q^2}{12}.$$

Дисперсия суммарной ошибки из-за округления результатов умножения в цифровом фильтре с передаточной функцией (13.14)

$$\sigma_0^2 = \sigma_{01}^2 + \sigma_{02}^2 + \sigma_{03}^2.$$

Представим передаточную функцию фильтра в виде

$$W_K(z) = A_1 \frac{z^{-1}}{1+z_1z^{-1}} + A_2 \frac{z^{-1}}{1+z_2z^{-1}}, \quad (13.15)$$

где $A_1 = \frac{b_0z_1}{z_1-z_2}$; $A_2 = \frac{b_0z_2}{z_2-z_1}$ –

постоянные коэффициенты.

На рис. 13.7 изображена структурная схема фильтра, соответствующая передаточной функции (13.15).

Составляющие ошибок округления результатов умножения входного сигнала:

на коэффициент A_1

$$\sigma_{01}^2 = \frac{q^2}{12} \frac{1}{1-z_1^2},$$

на значение полюса z_1

$$\sigma_{02}^2 = \frac{q^2}{12} \frac{1}{1-z_1^2}.$$

Аналогично для второй части структурной схемы найдем, что

$$\sigma_{03}^2 = \frac{q^2}{12} \frac{1}{1-z_2^2}; \quad \sigma_{04}^2 = \frac{q^2}{12} \frac{1}{1-z_2^2}.$$

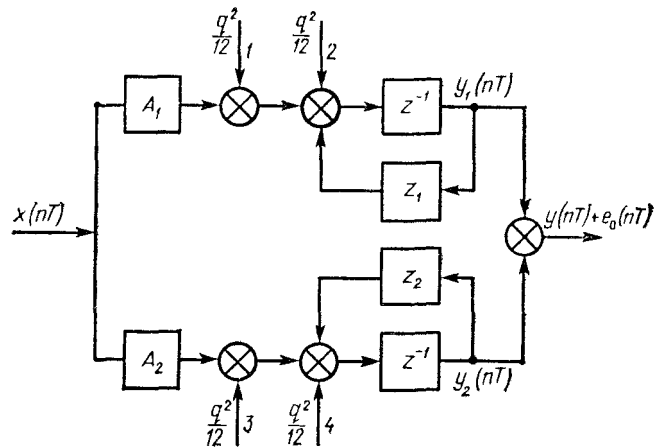


Рис. 13.7. К оценке средней квадратической ошибки цифрового фильтра параллельной формы

Дисперсия суммарной ошибки из-за округления результатов умножения в цифровом фильтре, выполненного по параллельной канонической форме,

$$\sigma_0^2 = \frac{q^2}{6} \left[\frac{1}{1-z_1^2} + \frac{1}{1-z_2^2} \right]. \quad (13.16)$$

Отметим, что если коэффициенты A_1 и A_2 умножить на сигналы $y_1(nT)$ и $y_2(nT)$, то дисперсия из-за округления операции умножения

$$\sigma_0^2 = \frac{q^2}{12} \left[2 + \frac{1}{1-z_1^2} + \frac{1}{1-z_2^2} \right],$$

т.е. меньше предыдущего значения.

Это обстоятельство нужно учитывать при технической реализации цифровых фильтров.

Третьим видом ошибок в цифровых фильтрах является округление коэффициентов передаточной функции фильтров, связанное с ограниченным числом разрядов регистров фильтра, в результате чего коэффициенты передаточной функции оказываются отличными от расчетных. Это ведет к изменению полюсов фильтра, что и является причиной возникновения ошибок. Небольшую чувствительность к изменению значений полюсов имеют фильтры, выполненные по прямой форме, причем степень чувствительности возрастает по мере роста порядка передаточной функции фильтра. По этим причинам цифровые фильтры следует выполнять по последовательной или параллельной канонической форме.

13.4. Импульсные системы

Системы РА, в которых сигналы преобразуются в последовательность импульсов, называют *импульсными*. В таких системах длительность импульсов обычно не равна периоду их следования. Наиболее широко применяются системы, в которых генерируются импульсы постоянной длительности с амплитудой $A(nT)$, пропорциональной входным сигналам, в дискретные, равноотстоящие друг от друга моменты времени $x(nT)$ (рис. 13.8, а). Подобный процесс преобразования называют *амплитудно-импульсной модуляцией* с коэффициентом амплитудной модуляции $k_a = A(nT)/x(nT)$.

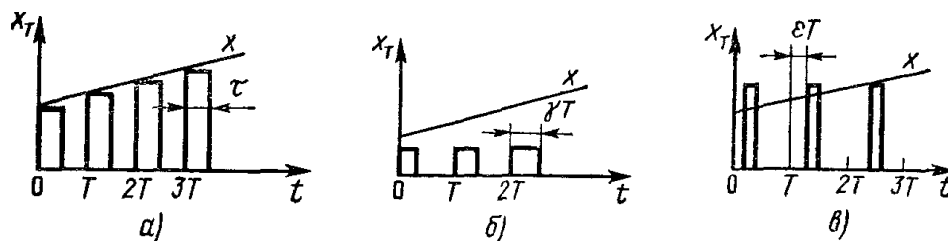


Рис. 13.8. Виды импульсной модуляции:
а – амплитудная; б – широтная; в – время-импульсная

Если импульсный элемент преобразует непрерывный сигнал в последовательность импульсов с постоянной амплитудой длительностью $\tau(nT)$, пропорциональной дискретным значениям входного сигнала, то имеет место *широтно-импульсная модуляция* (см. рис. 13.8, б) с коэффициентом преобразования $k_{ш} = \tau(nT)/x(nT)$.

Импульсный элемент, который генерирует импульсы постоянной амплитуды и длительности, но сдвинутые относительно дискретных моментов времени на значение $\varepsilon(nT)$, пропорциональное дискретным значениям входного сигнала, осуществляет *время-импульсную модуляцию* (см. рис. 13.8, в) с коэффициентом $k_B = \varepsilon(nT)/x(nT)$.

Наибольшее распространение нашли импульсные системы с амплитудно-импульсной модуляцией, для анализа и синтеза которых могут быть использованы рассмотренные методы исследования цифровых систем РА.

Импульсный элемент также можно представить в виде последовательного соединения дискретизатора и экстраполятора, передаточная функция которого аналогична выражению (11.5):

$$W_9(p) = \frac{1 - e^{-p\gamma T}}{p},$$

где $\gamma = \tau/T$ – скважность работы импульсного элемента; τ , T – длительность и период следования импульсов.

Проиллюстрируем особенности анализа импульсных систем РА.

Рассмотрим импульсную систему автоподстройки частоты, которая нашла широкое применение в различных радиотехнических устройствах. Передатчики, собранные по такой схеме, используются в системах радиосвязи и радиолокации. Функциональная схема системы изображена на рис. 13.9, а.

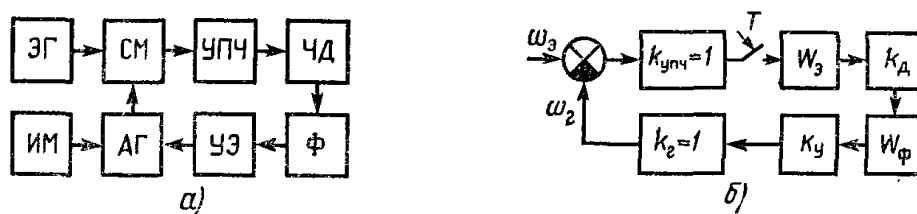


Рис. 13.9. Импульсная система автоподстройки частоты:
а – функциональная схема; б – структурная схема

Автогенератор системы (АГ) работает в импульсном режиме и обеспечивает необходимую мощность колебаний. Стабилизацию частоты колебаний обеспечивает маломощный эталонный генератор (ЭГ), а импульсный режим работы системы автоподстройки частоты – импульсный модулятор (ИМ). Перестройка частоты автогенератора осуществляется управляющим элементом (УЭ). На рис. 13.9, а УПЧ – усилитель промежуточной частоты, ЧД – частотный дискриминатор.

Частота колебаний автогенератора подстраивается только в ограниченные промежутки времени, соответствующие длительности модулирующих импульсов. В промежутках между импульсами сигнал на выходе смесителя (СМ) отсутствует, т.е. система автоподстройка оказывается разомкнутой.

Передаточная функция непрерывной части системы (см. рис. 13.9, б)

$$W_n(p) = k_\delta k_y W_\phi(p),$$

где k_δ, k_y – коэффициенты передачи дискриминатора и управляющего элемента; $W_\phi(p)$ – передаточная функция фильтра.

Передаточная функция приведенной непрерывной части системы

$$W(p) = \frac{k}{1 + pT_\phi} \frac{1 - e^{-p\gamma T}}{p},$$

где $k = k_\delta k_y k_\phi$.

Передаточной функции приведенной непрерывной части соответствует импульсная переходная функция

$$w(t) = k \left[1(t) - e^{-t/T_\phi} - 1(t - \gamma T) + e^{-t - \gamma T/T_\phi} \cdot 1(t - \gamma T) \right].$$

Передаточная функция разомкнутой импульсной системы в соответствии с выражением (11.20), если подставить несмещенные и смещенные значения Z -преобразования,

$$W_p(z) = k \frac{e^{-\beta(1-\gamma)} - e^{-\beta}}{z - e^{-\beta}}; \quad \beta = \frac{T}{T_\phi}.$$

Смещенная передаточная функция разомкнутой системы автоподстройки частоты определяется выражением (11.25) или (11.26).

Определим условие устойчивости автоподстройки частоты. Характеристическое уравнение системы в соответствии с (12.26) имеет вид

$$z - e^{-\beta} + k \left[e^{-\beta(1-\gamma)} + e^{-\beta} \right] = 0.$$

Условие устойчивости системы:

$$|z| = \left| e^{-\beta} - k \left[e^{-\beta(1-\gamma)} - e^{-\beta} \right] \right| < 1.$$

Критический коэффициент усиления найдем, приравняв последнее выражение минус единице.

В результате получим, что

$$k_{кр} = \frac{1 + e^{-\beta}}{e^{-\beta(1-\gamma)} - e^{-\beta}}.$$

На рис. 13.10 показана зависимость $k_{кр} = f(\beta)$, рассчитанная при $\gamma = 0,25$. Из рисунка видно, что с уменьшением β критический коэффициент усиления увеличивается и при $\beta = 0$ оказывается равным бесконечности, так как при ма-

лых значениях β свойства импульсной системы приближаются к свойствам непрерывной, при $\beta = 0$ эти свойства совпадают. При $\beta > 2$ критический коэффициент усиления также увеличивается, так как свойства замкнутой системы автоподстройки частоты приближаются к свойствам разомкнутой системы, которая устойчива при любом коэффициенте усиления.

Дискретные значения переходного процесса определим из Z-преобразования для переходной функции системы:

$$H(z) = W_3(z) \frac{z}{z-1} = \frac{k \left[e^{-\beta(1-\gamma)} - e^{-\beta} \right]}{z - e^{-\beta} + k \left[e^{-\beta(1-\gamma)} - e^{-\beta} \right]} \frac{z}{z-1},$$

где $W_3(z)$ – передаточная функция замкнутой импульсной системы, рассчитываемая по (11.33).

При $k = 10$, $\beta = 0,5$ и $\gamma = 0,25$

$$H(z) = \frac{0,8}{z + 0,2} \frac{z}{z-1}.$$

Применив формулы (12.2) и (12.3), вычислим переходный процесс в системе автоподстройки частоты по формуле

$$h(nT) = 0,665 [1(nT) - (0,2)^n].$$

На рис. 13.11 построен переходный процесс, рассчитанный при заданных параметрах системы.

Статическая ошибка системы автоподстройки частоты, согласно (11.36),

$$\begin{aligned} e_c &= \lim_{n \rightarrow \infty} e(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} e_0 [1(t)] \frac{z-1}{z} W_e(z) \frac{z}{z-1} = \\ &= e_0 \cdot 1(t) W_e(1) = e_0 \frac{1 - e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta} + k \left[e^{-\beta(1-\gamma)} - e^{-\beta} \right]}, \end{aligned}$$

где e_0 – начальное значение ошибки.

Если параметры системы автоподстройки частоты принять такими же, как и при определении переходного процесса ($k = 10$; $\beta = 0,5$; $\gamma = 0,25$), то $e_c = 0,335 e_0$.

13.5. Цифровые устройства

Помимо аналого-цифровых и цифро-аналоговых преобразователей, цифровых фильтров в цифровых системах используются и цифровые фазовые детекторы, частотные и временные дискриминаторы, синтезаторы частот и др.

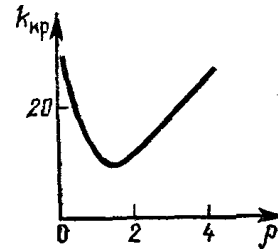


Рис. 13.10. Зависимость критического коэффициента усиления от β

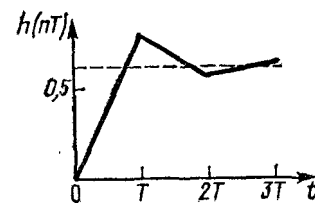


Рис. 13.11. Переходный процесс в импульсной системе РА

Эти устройства строятся на логических элементах И, ИЛИ, НЕ, триггерах, счетчиках, регистрах памяти, цифровых фильтрах и др. Рассмотрим некоторые из этих устройств, наиболее широко применяемых в системах РА.

Цифровые фазовые дефекторы (ЦФД) в системах РА предназначены для преобразования фазы в код. Один из возможных вариантов построения ЦФД показан на рис. 13.12, *а* [21].

Детектор состоит из двух логических элементов, I_1 , I_2 , обозначенных символом & логического элемента, и реверсивного счетчика (РС). Входной гармонический сигнал с помощью преобразователя (Π) преобразуется в двухуровневую меандровую последовательность A со значениями ± 1 , опорное колебание принимает значения 0 и 1 (см. рис. 13.12, *б*).

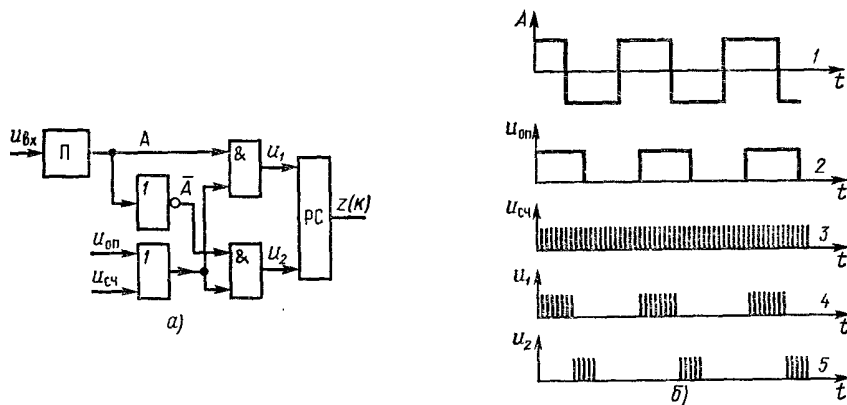


Рис. 13.12. Цифровой фазовый детектор: *а* – структурная схема; *б* – эпюры

Перемножение входного и опорного напряжений, которое осуществляется в аналоговом фазовом детекторе, в ЦФД заменяется перемножением на логических элементах И. С этой целью последовательность A подается на логический элемент I_1 , а инвертированная последовательность A – на логический элемент I_2 . На вторые входы этих логических элементов поступает последовательность импульсов, сформированная схемой I_3 , на вход которой подается опорная последовательность $u_{оп}(t)$ и импульсы с генератора счетных импульсов $u_{сч}(t)$. Число счетных импульсов u_1 и u_2 на выходе логических элементов I_1 и I_2 определяется временем совпадения опорного сигнала с одним из уровней меандровой последовательности A .

Выходной сигнал ЦФД $z(k)$ образуется в счетно-импульсном коде на выходе реверсивного счетчика, он равен разности чисел счетных импульсов на выходах элементов I_1 и I_2 . Таким образом осуществляется преобразование разности фаз входного и опорного сигналов в зависимость $z = f(\varphi)$, форма которой зависит от отношения частот счетных импульсов и опорного сигнала.

С ростом этого отношения увеличивается число уровней квантования характеристики $f(\varphi)$ (рис. 13.13, *а*).

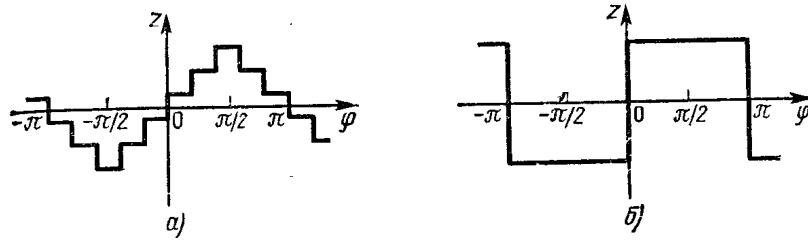


Рис. 13.13. Дискриминационная характеристика цифрового фазового детектора:
 а – треугольного типа; б – релейного

При равенстве частот дискриминационная характеристика ЦФД оказывается релейной (см. рис. 13.13, б) и схема ЦФД упрощается за счет исключения одного элемента И и генератора счетных импульсов. Другие варианты ЦФД описаны в [15, 19].

На рис. 13.14 приведена схема цифрового частотного дискриминатора, принцип работы которого основан на подсчете числа пересечений входным сигналом нулевого уровня за определенный интервал времени T_u .

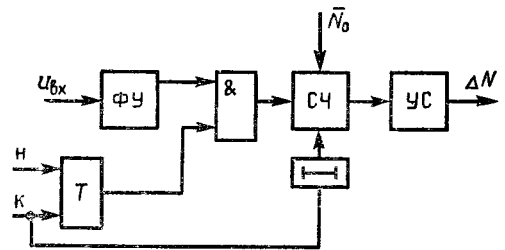


Рис. 13.14. Структурная схема цифрового частотного дискриминатора

Входной сигнал подается на формирующее устройство (ФУ), в котором преобразуется в последовательность импульсов, возникающих при переходе $u_{вх}(t)$ нулевого уровня, например, при переходе от отрицательных значений к положительным. Импульсы с формирующего устройства (ФУ) поступают на логический элемент И, который открывается триггером (Т) на время T_u . Управление триггером осуществляется двумя импульсами, один из которых соответствует началу (н), а второй – концу (к) интервала измерения T_u .

Импульсы н и к вырабатываются высокостабильным кварцевым генератором. Импульсы с элемента И суммируются счетчиком (СЧ), в котором перед началом счета устанавливается в дополнительном коде число $N_0 = f_0 T_u$, где f_0 – частота, соответствующая переходной частоте ЦФД.

Число импульсов, поступающих от элемента И на счетчик, $N = f_c T_u$, где f_c – частота сигнала. Таким образом, в конце интервала измерения в счетчике оказывается записанным число $\Delta N = N - N_0 = \Delta f T_u$, где Δf – частотное рассогласование. Число ΔN считывается устройством считывания (УС), после чего в счетчике снова устанавливается в дополнительном коде число N_0 , т.е. он оказывается подготовленным к следующему циклу работы.

Цена младшего разряда кода сигнала на выходе ЦФД $\Delta f = 1/T_u$. Действительно, изменение числа N на одну единицу соответствует изменению частоты на Δf , т.е. $N + 1 = (f_c + \Delta f)T_u$, поэтому $\Delta N = \Delta f T_u$. При малых значениях интервала измерения T_u значение Δf может оказаться недопустимо большим. Меньшая погрешность частотного рассогласования получается в более сложных ЦФД, работающих по принципу периодометра [19], согласно которому в дискриминаторе формируется временной интервал, соответствующий m периодам входного

сигнала. Этот временной интервал измеряется с помощью счетных импульсов, следующих с частотой $f_{cч}$. При этом цена младшего разряда $\Delta f = f_0/f_{cч}T_u$, т.е. в $f_{cч}/f_0$ раз меньше по сравнению с ранее рассмотренным дискриминатором.

В системах автоподстройки частоты используются частотные дискриминаторы, построенные по аналоговому принципу, с двумя расстроенными контурами. Структурная схема такого дискриминатора приведена на рис. 13.15. Входной сигнал, преобразованный в код, поступает на два перестраиваемых цифровых фильтра (ЦФ₁ и ЦФ₂), резонансные частоты которых разнесены. Резонансная частота одного из цифровых фильтров ниже переходной частоты, второго – выше. Передаточные функции фильтров $W_1(z)$ и $W_2(z)$ выбираются так, чтобы обеспечивался крутой спад дискриминационной характеристики за рабочим участком. Квадраторы K_1 и K_2 соответствуют амплитудным детекторам в аналоговом частотном дискриминаторе. В накопителе (Н) осуществляется усреднение чисел, поступающих с устройства вычитания, на интервале времени T_u с последующим его сбросом. Под действием управляющего сигнала u_y происходит изменение переходной частоты, при этом резонансные частоты цифровых фильтров перестраиваются таким образом, чтобы их разность оставалась постоянной. Если частота входного сигнала равна половине этой разности, т.е. совпадает с переходной частотой, то цифровой сигнал на выходе накопителя равен нулю.

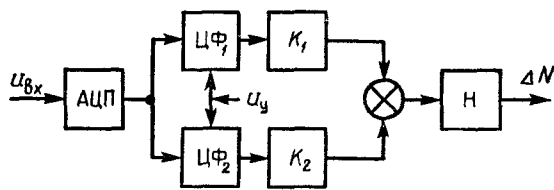


Рис. 13.15. Структурная схема частотного дискриминатора с расстроенными контурами

Изображена структурная схема временного дискриминатора [19], который используется в системах слежения по дальности РЛС сопровождения.

В этом дискриминаторе зондирующий импульс (ЗИ), синхронизированный с излучением зондирующего импульса передатчика, поступает на триггер (Т) и переводит его в состояние, при котором логический элемент И начинает пропускать импульсы с генератора счетных импульсов (ГСИ) на счетчик дискриминатора. Сформированный по отраженному от цели сигналу управляющий импульс (УИ) прекращает поступление счетных импульсов в счетчик.

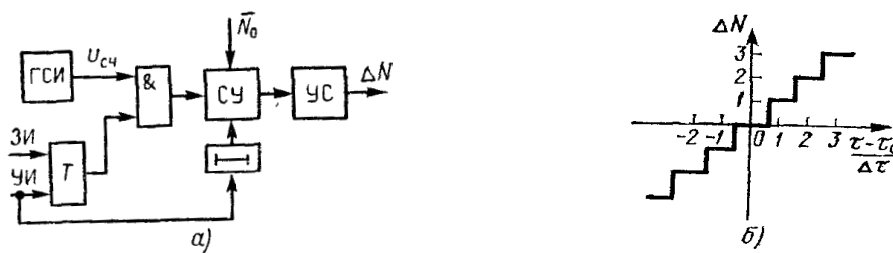


Рис. 13.16. Временной дискриминатор: а – структурная схема; б – дискриминационная характеристика

Число импульсов, прошедших через элемент И в счетчик, $N = \tau/f_{сч}$, где τ – временной интервал, заполненный счетными импульсами, следующими с частотой $f_{сч}$. Таким образом осуществляется преобразование временного интервала между зондирующим и управляющим импульсами в двоичный код с ценой младшего разряда $\Delta\tau = 1/f_{сч}$.

Перед началом измерения в счетчик в дополнительном коде записывается число $N_0 = \tau_0/f_{сч}$, где τ_0 – опорное значение временного интервала. После прихода управляющего импульса в счетчике остается число $\Delta N = N - N_0$, которое является выходным цифровым сигналом временного дискриминатора. Устройство считывания (УС) по задержанному на некоторое время управляющему импульсу обеспечивает считывание из счетчика числа ΔN , при этом положительные числа выдаются в прямом коде, а отрицательные – в дополнительном.

После считывания происходит сброс показаний счетчика и ввод числа \bar{N}_0 для следующего цикла измерения. Рассмотренный вариант дискриминатора имеет пропорциональную характеристику (см. рис. 13.16, б), шаг квантования измеряемого интервала времени равен периоду следования счетных импульсов $T_{сч}$.

На рис. 13.17, а приведена схема временного дискриминатора, принцип работы которого аналогичен принципу работы аналогового дискриминатора, описанному в 1.5.

Как видно из рисунка, этот дискриминатор состоит из логических элементов И, генератора счетных импульсов и реверсивного счетчика (РС). На рис. 13.17, б показаны графики, поясняющие работу этого дискриминатора. Входной сигнал $u_{вх}(t)$ подается на логические элементы И₁ и И₂, на которые также поступают следящие импульсы $u_{с1}$ и $u_{с2}$. На выходе этих элементов формируются два импульса длительностями τ_1 и τ_2 , которые открывают элементы И₃ и И₄ для прохождения счетных импульсов. Число прошедших импульсов зависит от длительности импульсов τ_1 и τ_2 и равно соответственно N_1 и N_2 . В реверсивном счетчике фиксируется разность этих чисел импульсов $N = N_2 - N_1$.

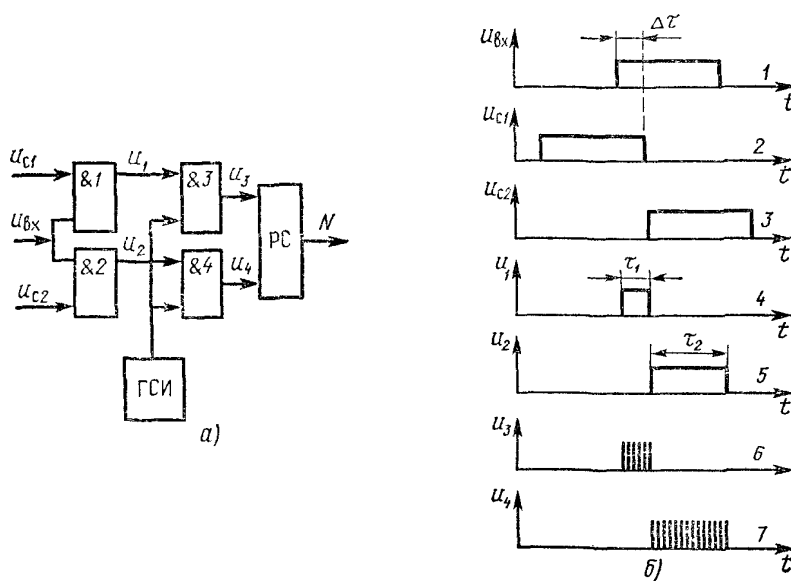


Рис. 13.17. Временной дискриминатор: а – структурная схема; б – эпюры

Число N считывается, после чего в счетчике устанавливается нуль и начинается следующий цикл измерения. Если счетные импульсы синхронизированы со следящими импульсами, то дискриминационная характеристика имеет вид, изображенный на рис. 13.18. Шаг квантования преобразуемой величины Δt определяется периодом повторения счетных импульсов $T_{сч}$.

Цифровые синтезаторы частот предназначены для формирования колебаний с частотами $f_c = f_0 + N\Delta f$, где f_0 – центральная частота; Δf – дискретность отсчета частоты; N – управляющее число.

На рис. 13.19 показана схема разомкнутого синтезатора [19], построенного на счетчике-делителе.

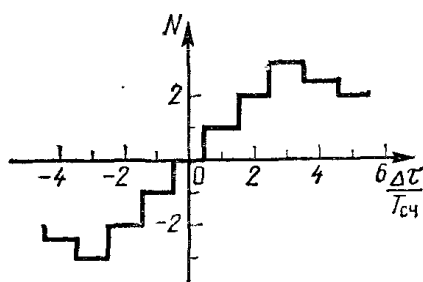


Рис. 13.18. Дискриминационная характеристика временного дискриминатора

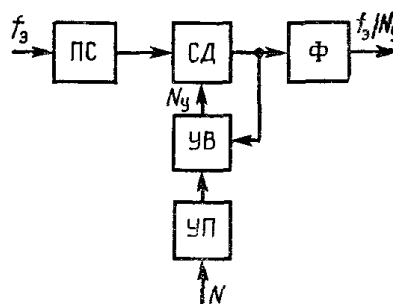


Рис. 13.19. Структурная схема разомкнутого синтезатора частот

Преобразователь сигнала (ПС) из синусоидальных колебаний с частотой f_c формирует последовательность импульсов той же частоты с нулевой фазой относительно входных колебаний. В счетчике-делителе (СД), который является обычным двоичным счетчиком, в дополнительном коде записывается управляющее число N_y , его ввод осуществляется устройством ввода (УВ).

При поступлении на вход СД N_y входных импульсов происходит его переполнение ($\bar{N}_y - N_y = 0$), в результате чего в счетчик записывается нуль, а на его выходе появляется импульс переполнения, под действием которого в счетчик снова записывается число \bar{N}_y .

Таким образом, частота следования импульсов переполнения на выходе счетчика оказывается в N_y раз меньше эталонной частоты. Импульсы переполнения с СД подаются на фильтр, с выхода которого получают гармонические колебания. Для получения линейной зависимости частоты синтезатора от управляющего числа N_y в его состав включено устройство пересчета (УП), которое число N преобразует в N_y по формуле $N_y = f_0 / (f_0 + N\Delta f)$. В общем случае число N_y является дробным и округляется при вводе в счетчик, в результате чего возникают искажения линейной зависимости частоты синтезатора от управляющего числа. Наличие схем пересчета и возникновение ошибки из-за округления управляющего числа являются основными недостатками рассмотренного синтезатора частот.

В цифровых системах ФАПЧ при небольшом диапазоне изменения частоты входного сигнала применяются цифровые управляемые фазовращатели (рис. 13.20, а), состоящие из устройства добавления и исключения (УДИ) и счетчика-делителя [21].

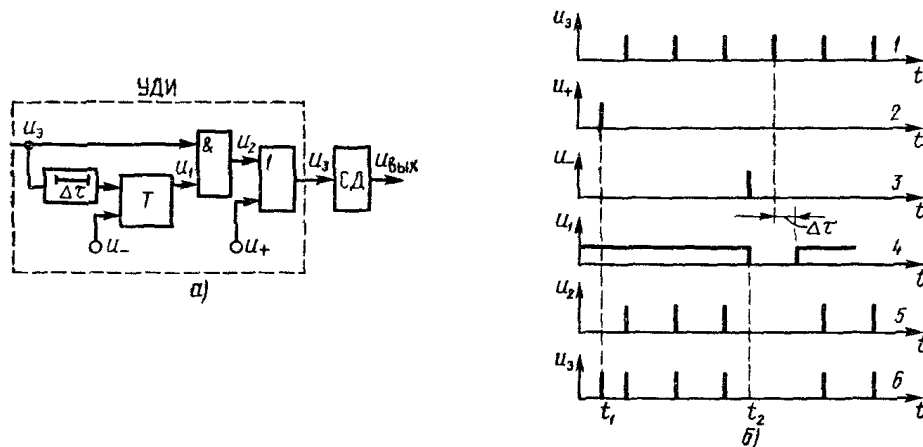


Рис. 13.20. Цифровой фазовращатель: а – структурная схема; б – эпюры

Логический элемент И открывается высоким напряжением с триггера (Т), в результате чего импульсы эталонной последовательности проходят на выход элемента И (см. рис. 13.20, б). Если в какой-то момент времени появляется управляющий импульс (добавление) u_+ , то с помощью логического элемента ИЛИ он добавляется к импульсу эталонной последовательности.

Для надежности работы добавление осуществляется между импульсами эталонной последовательности.

Управляющий импульс (исключение) u_- , возникающий в момент времени t_2 , переводит триггер в нулевое состояние, поэтому элемент И закрывается и последующий импульс не проходит на выход УДИ. Через время Δt на втором входе триггера появляется импульс, который переводит его в исходное состояние, в результате чего последовательность эталонных импульсов поступает снова на выход УДИ. Для нормальной работы необходимо, чтобы выполнялось условие $\tau_3 < \Delta t < 0,5/f_3$, где τ_3 – длительность импульса эталонной последовательности.

Добавление или исключение одного импульса соответствует сдвигу фазы эталонной последовательности на $\pm 360^\circ$. Такой дискрет фазы является слишком большим, поэтому в состав фазовращателя включается счетчик-делитель, на выходе которого фаза сигнала относительно эталонной последовательности будет $\pm 360^\circ/n_d$, где n_d – коэффициент деления. Сдвиги фаз, вносимые управляющими импульсами, накапливаются на выходе СД, т.е. осуществляется интегрирование управляющих импульсов.

13.6. Цифровая система автоподстройки частоты

Функциональная схема цифровой системы автоподстройки частоты показана на рис. 13.21 (более детальная по сравнению с рис. 11.4). В состав системы

входит цифровой фазовый детектор (ЦФД), на один из входов которого поступает последовательность импульсов u_3 с частотой f_3 , сформированная формирующим устройством ФУ1 по сигналу с эталонного генератора (ЭГ).

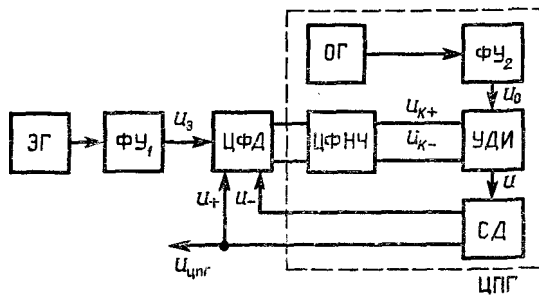


Рис. 13.21. Функциональная схема цифровой ФАПЧ

На два других входа ЦФД с цифрового перестраиваемого генератора (ЦПГ) подаются две меандровые последовательности импульсов I_+ и I_- , сдвинутые одна относительно другой на π .

В зависимости от того, с какой из этих последовательностей совпадает временное положение импульсов с ЭГ в ЦФД, вырабатывается сигнал ошибки, начало которого совпадает с временным положением импульса с ЭГ, а окончание – с концом импульса меандровой последовательности. Сигнал ошибки заполняется счетными импульсами последовательности $u_{сч}$ с частотой $f_{сч}$. Число счетных импульсов в сигнале ошибки зависит от рассогласования фаз сигналов на входе ЦФД. В зависимости от соотношения частот f_3 и $f_{сч}$ число импульсов на выходе ЦФД может быть различным. Если $f_{сч} = f_3$, то дискриминационная характеристика ЦФД будет релейной, если $f_{сч} > f_3$, то многоуровневой (см. рис. 13.13).

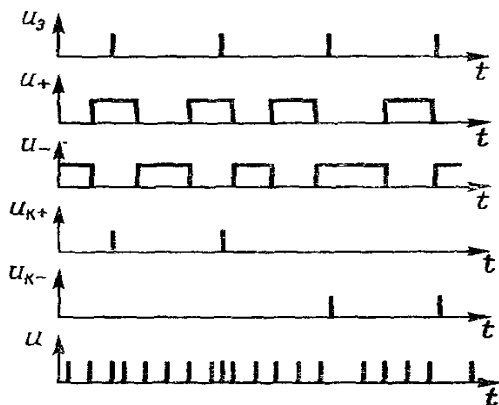


Рис. 13.22. К пояснению принципа работы цифровой ФАПЧ

Сигнал с ЦФД сначала подается на цифровой фильтр нижних частот (ЦФНЧ), а затем – на цифровой перестраиваемый генератор, который состоит из УДИ, СД и опорного генератора (ОГ). На вход УДИ подаются импульсы коррекции $u_{к+}$ и $u_{к-}$, а также последовательность импульсов u_0 от ОГ с частотой f_0 . При поступлении импульсов коррекции $u_{к+}$ ($u_{к-}$) в последовательность добавляются (или исключаются) импульсы коррекции, что приводит к изменению фазы сигналов последовательности u_0 на $\pm 360^\circ/n_d$, где n_d – коэффициент деления СД.

Импульсы коррекции поступают на управляющие входы УДИ периодически, поэтому частота сигнала на выходе делителя изменяется.

На рис. 13.22 приведены графики, поясняющие принцип работы замкнутой ФАПЧ при начальной расстройке $f_{нз} \neq f_3$. Для упрощения графики изображены для случая, когда ЦФНЧ отсутствует, т.е. сигнал с ЦФД подается непосредственно на УДИ. Как видно из рис. 13.22, первые два импульса от ЭГ совпадают с последовательностью u_+ , в результате чего на положительном выходе ЦФД появляется импульс коррекции, что приводит к добавлению импульса в опорную последовательность u_0 .

Момент появления третьего импульса от ЭГ совпадает с меандровой последовательностью u_- , в результате чего импульс коррекции генерируется на отрицательном выходе ЦФД. Под действием этого импульса из опорной последовательности u_0 исключается один импульс.

Добавление импульса коррекции приводит к уменьшению периода меандровой последовательности, а исключение – к его увеличению. Таким образом, через какой-то промежуток времени в системе ЦФАП устанавливается режим, при котором средняя частота колебаний сигнала с ЦПГ равна частоте сигнала ЭГ. Отметим, что в непрерывных системах ФАП в установившемся режиме при равенстве частот сигналов от эталонного и перестраиваемого генераторов равны и их мгновенные значения фаз.

Оценим основные показатели качества работы системы ЦФАПЧ. С этой целью найдем передаточные функции системы и ее элементов.

В результате добавления (исключения) импульсов коррекции в опорную последовательность среднее значение частоты ЦПГ изменяется и становится равным $f_{nc} = 1/(n_\delta + r)$, где r – число импульсов коррекции за один такт работы ЦПГ.

Таким образом, приращение частоты ЦПГ

$$\Delta f = \frac{1}{T_0(n_\delta + r)} - \frac{1}{T_0 n_\delta} = \frac{r}{T_0 n_\delta (n_\delta + r)}.$$

Ограничимся случаем, когда $n_\delta \gg r$. При этом

$$\Delta f(nT) = r/(T_0 n_\delta) \quad \text{и} \quad T_0 n_\delta \sim T.$$

Изменение частоты приводит к приращению фазы сигнала ЦПГ на

$$\Delta \varphi(nT) = 2\pi \frac{Tr(nT)}{T_0 n_\delta^2} = \frac{2\pi}{n_\delta} r(nT).$$

За n интервалов работы системы фаза сигнала ЦПГ

$$\varphi_{unc}(nT) = \frac{2\pi}{n_\delta} \sum_{m=0}^{n-1} r(mT).$$

Z-преобразование последнего выражения позволяет получить

$$\varphi_{unc}(z) = \frac{2\pi}{n_\delta} \frac{1}{z-1} r(z),$$

отсюда передаточная функция ЦПГ

$$W_{unc}(z) = \frac{k_{unc}}{z-1},$$

где $k_{unc} = 2\pi/n_\delta$.

При большом числе уровней дискриминационную характеристику ЦФД можно приближенно заменить линейной зависимостью и записать в виде

$$u_{\Delta} = k_{\Delta} \Delta \varphi, \quad (13.17)$$

где $k_{\Delta} = 1/\Delta u_{\Delta}$; Δu_{Δ} – шаг квантования.

Влияние квантования на качество работы можно учесть, как это делалось ранее, путем дополнительного сигнала – шума квантования (11.1).

При малом числе уровней квантования замена нелинейной характеристики ЦФД линейной (13.17) неточна. Однако если система ЦФАП работает в условиях действия помех, то нелинейная дискриминационная характеристика ЦФД может быть заменена линейной, крутизна которой определяется методом статистической линеаризации (см. тему 9). При этом передаточную функцию ЦФД можно представить в виде $W_{\Delta}(z) = k_{\Delta}$.

Оценим устойчивость системы ЦФАП для случая, когда передаточная функция цифрового фильтра нижних частот

$$W_{\phi}(z) = 1 + \frac{k_1}{z-1}. \quad (13.18)$$

Фильтр с передаточной функцией (13.18) позволяет обеспечить астатизм второго порядка, а также необходимый уровень фильтрации помех.

На рис. 13.23 приведена структурная схема ФАПЧ, согласно которой передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p(z) = k_{\Delta} k_{\text{унг}} \frac{z-1+k_1}{(z-1)^2}.$$

В соответствии с критерием устойчивости Гурвица система ЦФАП устойчива, если выполняется условие $1 > k_1 > 2 - 4/k_{\Delta} k_{\text{унг}}$. Коэффициент передаточной функции ЦФНЧ k_1 выбирается из условия получения нужного характера переходного процесса в виде частотной характеристики системы ЦФАП.

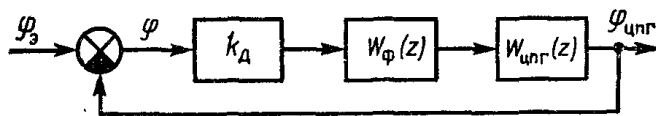


Рис. 13.23. Структурная схема цифровой ФАПЧ

При $k_1 > k_{\Delta} k_{\text{унг}}/4$ полюсы системы – комплексно-сопряженные, поэтому переходный процесс имеет колебательный характер и относительно ошибки в соответствии с (12.2) имеет вид

$$\varphi(nT) = \frac{|\lambda|^n}{\beta} [|\lambda| \sin \theta(n+1) - \sin \theta n],$$

где $|\lambda|$, $\theta = \arctg \beta/\alpha$ – модуль и аргумент комплексно-сопряженных полюсов системы; α , β – действительная и мнимая части полюсов системы.

На рис. 13.24 показан график переходного процесса в системе ЦФАП, а на рис. 13.25 – частотная характеристика этой системы, вычисленная при $k_1 = 0,25$ и $k_{инг} = 0,5$.

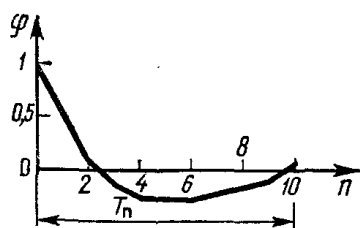


Рис. 13.24. Переходный процесс в системе ЦФАП

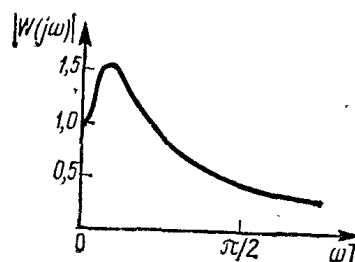


Рис. 13.25. Частотная характеристика цифровой ФАПЧ

Дискриминационная характеристика ЦФД имеет периодический характер, поэтому так же, как и в непрерывных системах, для систем ЦФАП существует значение начальной расстройки частоты ЦПГ относительно частоты ЭГ, при которой возможен режим слежения частоты ЦПГ за частотой ЭГ. Максимально допустимое значение расстройки частоты называют полосой удержания $\omega_{yд} = 2\pi u_{дм}/(n_d T)$.

13.7. Использование микропроцессорных средств в системах РА

Создание микропроцессорных средств (МПС) открыло новые возможности для совершенствования систем РА, реализации в них более сложных алгоритмов управления. Внедрение МПС в РЭА различного назначения определяется в основном их быстродействием и функциональными возможностями. В настоящее время МПС применяются в системах радиосвязи, различных устройствах цифровой обработки сигналов, радиолокационных, оптимальных и адаптивных системах РА. По мере совершенствования и нарастания функциональных возможностей МПС области их применения расширяются.

Микропроцессор (МП) – устройство, состоящее из одной или нескольких больших интегральных схем (БИС), выполняющих функции, аналогичные процессору ЭВМ. Совместно с БИС оперативного (ОЗУ), постоянного (ПЗУ) и перепрограммируемого (ППЗУ) запоминающих устройств и другими устройствами на БИС микропроцессор образует микропроцессорный комплект (МПК), на основе которого строят вычислительные устройства различного назначения. Различают два вида вычислительных устройств с использованием МПС: вычислители с устройствами управления, выполненными на комбинационных схемах, и вычислители с программными запоминающими устройствами. Микропроцессоры первого вида называют *МП с фиксированным набором команд*.

В таких МП достигается максимальное быстродействие. Устройство управления МП второго вида реализуется программным способом, согласно которому любую операцию представляют в виде микроопераций, выполняемых за один такт работы арифметического устройства. Совокупность микроопераций образует микрокоманду, которая представляет двоичное число, содержащее код операции, а также коды адресов исходных данных и конечного результата. Устройства, предназначенные для хранения и считывания микрокоманд, реализуются на БИС ПЗУ и ППЗУ. Изменение выполнения операций ведет к смене микропрограммы, что позволяет применять один и тот же тип микропроцессорного комплекта (МПК) для построения различных вычислительных устройств.

Для считывания каждой команды требуется обращение к ПЗУ, поэтому быстродействие МП с микропрограммным управлением ниже быстродействия МП с фиксированным набором команд.

Элементы МП (операционные устройства, управляемая память и др.) могут размещаться в одной микросхеме. Так построены отечественные МПК серий КР580 и КР1810. Использование таких МП упрощает построение вычислительных устройств, облегчает их программирование, однако сопровождается значительным сокращением их быстродействия.

Для повышения быстродействия и универсальности МПС выполняются по модульному принципу, в соответствии с которым микропроцессорное устройство выполняется из функциональных модулей. Модульный принцип построения МПС позволяет за счет выбора необходимых модулей создавать микропроцессорные устройства различного назначения.

Микропроцессорные средства отличаются от остальных изделий вычислительной техники тем, что они реализуются на одной или нескольких БИС. При современном развитии технологии максимальная площадь кристалла БИС не превышает 50 мм². Такая небольшая площадь приводит к тому, что для построения микропроцессорных устройств приходится использовать несколько БИС, поэтому современные МПК состоят из нескольких десятков БИС различного назначения. Разрядность микропроцессорных БИС обычно равна 4, 8 и реже 16, необходимая разрядность микропроцессорных устройств реализуется за счет объединения нескольких БИС. Микропроцессорные БИС с ограниченным числом разрядов называют *секционными*. Подобные МП БИС являются основной элементной базой микропроцессорных устройств, применяемых в РЭА и системах РА. В секционных МП управляющее устройство строится по принципу микропрограммного управления, что позволяет составлять микропрограммы с учетом специфики решаемых алгоритмов.

На рис. 13.26 показана структурная схема микропроцессорного устройства, в котором данные с устройств ввода обрабатываются в МП и результаты выдаются на устройства вывода. Ввод данных осуществляется устройствами ввода-вывода (УВВ).

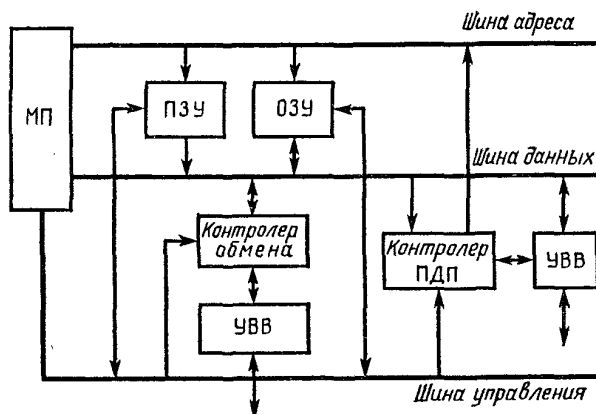


Рис. 13.26. Структурная схема МПУ

Кроме МП и УВВ в состав микропроцессорного устройства входят следующие устройства: ОЗУ и ПЗУ, предназначенные для хранения и выдачи по запросам команд программы различных данных; контроллеры, обеспечивающие обмен данными между УВВ с МП и устройствами памяти. Информационный поток в микропроцессорном устройстве поступает на шины данных, адресов и управления.

В процессе работы МП выдает на шину адреса код ячейки памяти, в которой хранится очередная команда, обеспечивая ее считывание под действием сигналов с шины управления. Запрошенные команды через шину данных поступают в МП, где расшифровываются, после чего МП приступает к их выполнению. После выполнения текущей команды на шину адреса выдается адрес следующей команды, и процесс повторяется.

Устройства УВВ подключаются к шине данных через контроллер, который управляет процессом обмена данными. Различают следующие способы обмена данными: программно-управляемый, с прерыванием и прямым доступом к блоку памяти. В первом способе моменты обмена данными известны заранее, поэтому на этапе программирования в соответствующих местах программы располагаются команды, обеспечивающие обмен.

При втором способе моменты обмена определяются УВВ. В этом случае УВВ подает сигнал в МП и переводит его в режим прерывания, в котором МП прекращает выполнение основной программы и начинает осуществлять программу прерывания, обеспечивающую обмен данными. После выполнения обмена данными МП возвращается к выполнению основной программы.

Описанные два способа обмена связаны с потерями процессорного времени. От этого недостатка свободен третий способ обмена – прямой доступ к блоку памяти (ПДП). Организация такого обмена осуществляется контроллером ПДП, которому микропроцессор передает управление шинами для непосредственного обмена данными между блоком памяти и УВВ. После окончания обмена данными контроллер ПДП передает управление шинами МП, связь которого с шинами восстанавливается, и выполнение программы продолжается.

Для описания различных МПК БИС используются следующие основные характеристики [20]:

1) число специализированных БИС в комплекте, определяющее функциональные возможности комплекта при минимальном использовании микросхем малой и средней интеграции;

2) число шин, которое обычно не превышает трех (с уменьшением числа шин быстродействие БИС снижается);

3) число регистров общего назначения, характеризующее емкость сверхоперативной памяти (обычно 2 – 16). С увеличением числа регистров уменьшается число обращений к запоминающим устройствам, в результате чего повышается быстродействие при выполнении микропрограммы;

4) число уровней прерывания, определяющее число внешних устройств, с которыми может обмениваться данными МП;

5) число буферных регистров ввода-вывода, увеличение которого приводит к уменьшению длительности выполнения микрокоманды и упрощает микропроцессорное устройство.

В настоящее время промышленностью освоен выпуск различных МПК. Для использования в РЭА и системах РА наибольший интерес представляют МПК серий К588, К1800, КР1802 и КМ1804 (табл. 13.1). Микропроцессорные комплекты, приведенные в табл. 13.1, секционные, поэтому при создании микропроцессорных устройств имеется возможность наращивания разрядности.

При проектировании систем РА, в которых применяются МПК БИС, приходится решать следующие задачи:

- разработка алгоритмов, реализуемых с помощью МПС;
- выбор типа МПК;
- составление и отладка программы.

Таблица 13.1

Типы микропроцессорных комплектов

Серия	Число микросхем в комплекте	Обозначение ЦПЭ*	Разрядность, бит	Тактовая частота, МГц	Напряжение питания, В
К588	8	КР588ВК1К	16	10	5
К1800	9	1800ВС1	4	16	5,2; -2
КР1802	12	КР1802ВС1	8	10	5
КМ 1804	18	КР1804ВС1	4	10	5

* ЦПЭ – центральный процессорный элемент [13].

Разработка алгоритмов выполняется в соответствии с методами синтеза систем РА, рассмотренными ранее. В дальнейшем процесс синтеза разбивается на синтез аппаратных средств и программную часть. Для выполнения этих работ, как и при выборе типа МПК, инженер должен быть знаком с элементной ба-

зой микропроцессорных устройств, системой команд программного обеспечения, средствами отладки и т.п.

На основании требований к реализации алгоритмов и характеристик МПК разрабатывается структура микропроцессорного устройства с выделением аппаратной и программной частей и дальнейшей разработкой и отладкой программ. Нахождение рационального сочетания этих средств и является конечной целью проектирования систем РА с МПС. Обычно основанием для выбора типа МПК является его быстродействие.

Структурная схема системы РА с микропроцессорным устройством приведена на рис. 11.1.

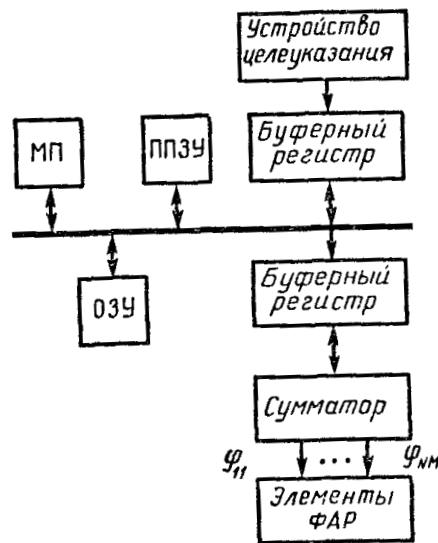


Рис. 13.27. Структурная схема МПУ управления угловым положением радиолокационного луча

Задачи, которые решаются в таких системах микропроцессорным устройством, разнообразны. Они могут быть связаны с формированием корректирующих программ для улучшения динамических свойств системы (в этом случае микропроцессорное устройство является по существу цифровым фильтром) или реализации алгоритмов оптимальных и адаптивных систем. Кроме того, микропроцессорное устройство может осуществлять вычисление сигнала рассогласования в замкнутых системах, так как в ряде систем, например в РЛС с антенными фазированными решетками, для определения этого сигнала требуется выполнить большой объем вычислений.

В качестве примера рассмотрим микропроцессорное устройство, предназначенное для управления лучом фазированной антенной решеткой (ФАР) бортовой РЛС [20], которая состоит из $NМ$ антенных элементов (N – число элементов в каждой строке решетки).

Фаза сигнала каждого элемента решетки

$$\varphi_{ij} = \left[\frac{sd}{\lambda} (i \cos \alpha + j \cos \beta) \right] \bmod s, \quad (13.19)$$

где $s = 2\pi/(\Delta\varphi)$ – число состояний фазовращателя; $\Delta\varphi$ – дискрет фазы; d – расстояние между антенными элементами; λ – длина волны; $\bmod s$ – символ операции взятия целой части числа по модулю; $\cos\alpha$, $\cos\beta$ – направляющие косинусы, определяющие положение в пространстве луча антенной решетки.

Алгоритм управления лучом целесообразно составить так: сначала по данным целеуказания нужно вычислить значения направляющих косинусов $sd \cos\alpha/\lambda$ и $sd \cos\beta/\lambda$, а затем по полученным данным и формуле (13.19) определить значения фаз каждого элемента решетки φ_{ij} .

Расчет фаз по (13.19) сводится к многократному выполнению операций сложения, число которых равно $n_{cd} = NM$. Последовательное вычисление φ_{ij} всех элементов приводит к большим затратам времени, поэтому целесообразно операцию суммирования выполнять с использованием аппаратного сумматора. Структурная схема микропроцессорного устройства для управления ФАР приведена на рис. 13.27.

Данные с целеуказания через буферный регистр поступают в ОЗУ; МП в соответствии с программой, помещенной в ППЗУ, вычисляет значения направляющих косинусов, которые через буферный регистр поступают на сумматор, вычисляющий значения фазы каждого элемента ФАР φ_{ij} .

Определенные значения фаз хранятся в регистрах и по сигналу считывания поступают на фазовращатели ФАР. В заключение отметим, что основным фактором, сдерживающим в настоящее время применение МПС в системах РА, является их невысокое быстродействие по сравнению с цифровыми устройствами. Поэтому их используют пока в отдельных элементах систем РА (цифровых фильтрах, дискриминаторах, АЦП и т.п.).

Вопросы к теме 13

1. Каков порядок синтеза цифровых систем? Перечислите методы определения передаточных функций корректирующих устройств.
2. Укажите виды структурных схем цифровых фильтров. Каковы основные источники их погрешностей?
3. Поясните принцип работы цифрового фазового детектора, цифрового фазовращателя, цифровой системы автоподстройки частоты.

Тема 14. МЕТОДЫ АНАЛИЗА И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ

Цифровые системы – это системы, в которых существуют дискретные сигналы в виде цифрового кода. Цифровые САУ – это наиболее совершенные по своим возможностям дискретные САУ. В состав их управляющего устройства входит цифровое вычислительное устройство, которое часто называют ЦВМ, хотя это может быть любая цифровая аппаратура – управляющий контроллер, микропроцессор, и т.п.

Особенностью динамики цифровых САУ по сравнению с импульсными является обязательное наличие фиксированного временного запаздывания в управляющем устройстве, определяемого длительностью цикла переработки информации в цифровых устройствах системы.

Математическое описание цифровых САУ осуществляется так же, как и импульсных САУ, с помощью разностных уравнений и дискретного преобразования Лапласа путем замены действующих в непрерывной части системы непрерывных величин фиктивными дискретными. Однако в связи с тем, что в отличие от импульсных систем в цифровых САУ имеется квантование по уровню, структурная схема цифровой содержит, помимо импульсных элементов, нелинейные звенья – квантователи, описываемые многоступенчатой релейной статической характеристикой.

Методика исследования цифровых САУ в случае, когда можно пренебречь квантованием по уровню (в случае малого шага квантования), сводится к исследованию импульсной системы. При этом в процессе исследования устойчивости отдельно следует рассмотреть вопросы о возможности возникновения автоколебаний в точке установившегося режима из-за зоны нечувствительности квантователя и об их параметрах подобно тому, как это делается в нелинейных системах.

Возможность точного аналитического исследования цифровых систем, как правило, ограничивается системами, описываемыми уравнениями первого или второго порядка. При аналитическом исследовании более сложных систем обычно используют различные упрощающие предположения. Одним из эффективных приемов анализа цифровых систем является приближенное сведение их к линейным дискретным системам с импульсными и дискретными элементами, имеющими единый период коммутации. Полученные при этом дискретные системы могут быть успешно проанализированы методами исследования дискретных систем. Если частота временной дискретизации значительно превышает полосу пропускания системы, то возможно дальнейшее упрощение и замена полученной дискретной системы эквивалентной непрерывной, анализ которой является более простой и хорошо изученной задачей.

При высокой частоте временной дискретизации исходную цифровую систему можно свести также к непрерывной нелинейной системе и проанализировать ее методом гармонической линеаризации, методом статистической лине-

ризации и т.д. Это позволяет изучить в цифровой следящей системе такие существенно нелинейные явления, как, например, срыв сопровождения.

Преобразование цифровой следящей системы в линейную осуществляется путем линеаризации тем или иным способом нелинейных элементов исходной системы.

Линеаризация характеристик квантования при большом числе уровней квантования. Типичной для цифровых следящих систем является нелинейность $Q(u)$, связанная с квантованием процессов по уровню, проводимым в АЦП или цифровых дискриминаторах. Форма этой характеристики показана на рис. 14.1.

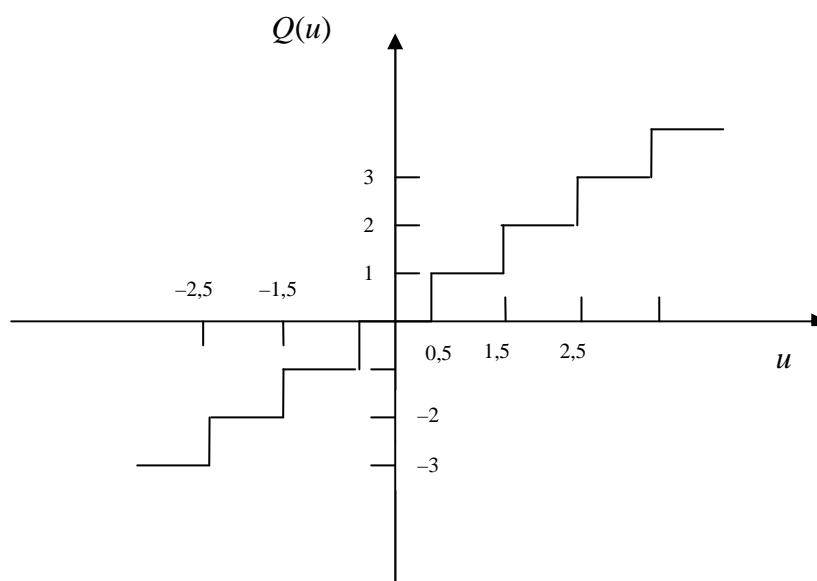


Рис. 14.1. К вопросу квантования по уровню

При большом числе уровней квантования характеристику $Q(u)$ можно приближенно заменить линейной и записать в виде:

$$Q(u) = k_1 u,$$

где $k_1 = 1/\Delta U$; ΔU – шаг квантования.

Отличие истинной характеристики $Q(u)$ от линейной можно оценить величиной ε , равной разности преобразуемого напряжения u и значения ближайшего квантованного уровня $u_{кв} = n\Delta U$, т.е. величиной $\varepsilon = u - u_{кв}$, которая зависит от преобразуемого напряжения и шага квантования. При изменении преобразуемого напряжения u во времени величина ε также изменяется. Последовательность значений $\varepsilon(kT)$, определенных в моменты выполнения аналого-цифрового преобразования, образует дискретный по времени процесс, который называют шумом квантования. При большом числе уровней квантования и переменном напряжении u шум $\varepsilon(kT)$ приближенно считают дискретным белым шумом. Одномерный закон распределения процесса $\varepsilon(kT)$ при указанных условиях равномерный в пределах от $-\Delta U/2$ до $\Delta U/2$. Поэтому дисперсия этого процесса равна $\Delta U^2/12$.

При введении шума квантования нелинейный эквивалент АЦП заменяется линейным. Аналогичным образом при большом числе уровней квантования лианеризуются характеристики, описывающие аналого-цифровое преобразование, происходящее в цифровых дискриминаторах.

Лианеризация характеристики $Q(u)$ квантования при малом числе уровней квантования. При малом числе уровней квантования замена нелинейной характеристики квантования $Q(u)$ линейной с введением дополнительного шума квантования становится слишком грубой. Если в этом случае преобразуемый процесс $u(t)$ является случайным, то для лианеризации характеристики $Q(u)$ можно применить метод статистической лианеризации.

Рассмотрим в качестве примера лианеризацию статистического эквивалента цифрового фазового детектора с релейной характеристикой $Q(u)$, описываемой выражением

$$Q(u) = \text{sign}u = \begin{cases} 1 & \text{при } u > 0, \\ -1 & \text{при } u < 0. \end{cases}$$

Этот эквивалент состоит из нелинейного преобразователя $U_c \sin\varphi$ и источника флуктуационного шума $\xi(t)$, а также из дискретного элемента, замыкающегося в моменты времени t_k , и нелинейного звена $Q(u)$, отображающего проводимое в АЦП квантование по уровню (рис. 14.2), замыкающегося в моменты времени t_k , и нелинейного звена $Q(u)$, отображающего проводимое в АЦП квантование по уровню (см. рис. 14.2).

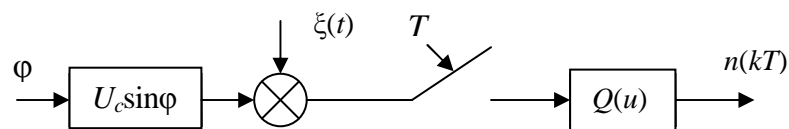


Рис. 14.2. Структурная схема статистического эквивалента фазового детектора

При малых величинах ошибки слежения можно положить $\sin\varphi \approx \varphi$. Помня, кроме того, местами дискретный элемент и нелинейный безынерционный элемент с характеристикой $Q(u)$, представим рассматриваемый элемент в виде, изображенном на рис. 14.3.

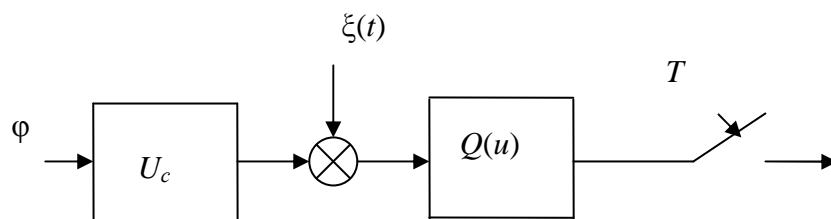


Рис. 14.3. К вопросу статистической лианеризации при малом числе уровней квантования

Используя метод статистической линеаризации, заменим нелинейный элемент с характеристикой $Q(u)$ линейным эквивалентом с коэффициентами передачи k_0 и k_{12} для математического ожидания процесса $u(t)$ и его центрированной случайной составляющей соответственно. Как следует из примера 9.2, величины k_0 и k_{12} равны:

$$k_0 = \frac{2A\Phi\left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right)}{m_x}; \quad k_{12} = \frac{2A}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{m_x^2}{2\sigma_x^2}\right).$$

Из рис. 14.3 видно, что дисперсия σ_x^2 процесса $x(t)$ равна $\sigma_x^2 = \sigma_\xi^2 + U_c^2 \sigma_\phi^2 = \sigma_\xi^2 (1 + \sigma_\phi^2 U_c^2 / \sigma_\xi^2)$, где $\sigma_\xi^2, \sigma_\phi^2$ – дисперсии процессов $\xi(t)$ и $\phi(t)$, а отношение $m_x / \sigma_x = U_c m_\phi / \sigma_x$. При малых отношениях сигнал – шум на входе фазового детектора выполняется неравенство $U_c / \sigma_\xi \ll 1$. При этом $\sigma_x^2 = \sigma_\xi^2$, $m_x / \sigma_x \ll 1$ и $k_0 = k_{12} = 2 / \sqrt{2\pi} \sigma_\xi$. Линейный статистический эквивалент рассматриваемого цифрового фазового детектора приобретает в этом случае вид, изображенный на рис. 14.4.

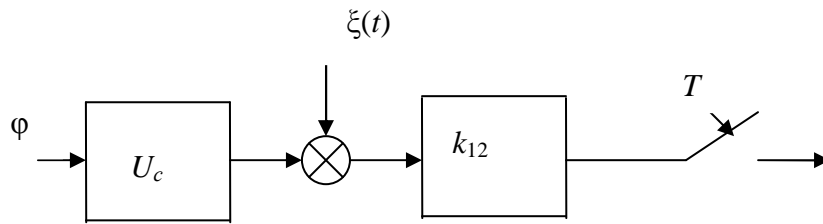


Рис. 14.4. Линейный статистический эквивалент цифрового фазового детектора

Описанный подход может быть применен для линеаризации нелинейных характеристик АЦП, входящих в состав других цифровых систем и их элементов, например, в состав цифрового фазового детектора с преобразованием квадратурных компонент входного сигнала.

Анализ линеаризованных цифровых систем. В результате линеаризации цифровые системы преобразуются в линейные дискретные системы. Линейные дискретные системы, к которым сводятся цифровые системы, могут быть описаны дискретными передаточными функциями, комплексными коэффициентами передачи или разностными уравнениями.

14.1. Векторные разностные уравнения цифровых систем

Современная теория дискретных систем РА, так же как и непрерывных, базируется на описании процессов в пространстве состояний. Познакомимся с методами математического описания в пространстве состояний систем РА с одним входом и одним выходом.

Рассмотрим системы, дискретные передаточные функции которых имеют вид

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{c_m z^m + c_{m-1} z^{m-1} + \dots + c_0}{z^l + a_{l-1} z^{l-1} + \dots + a_0}, \quad (14.1)$$

где $x(t)$ – входной сигнал; $y(t)$ – выходной сигнал.

Передаточной функции (14.1) соответствует разностное уравнение

$$\begin{aligned} y(n+l) + a_{l-1}y(n+l-1) + \dots + a_0y(n) = \\ = c_mx(n+m) + c_{m-1}x(n+m-1) + \dots + c_0x(n). \end{aligned} \quad (14.2)$$

В аргументах выражения (14.2) для сокращения записи множитель T опущен, так же будем поступать и дальше.

Введем обозначение

$$y(n) = g_1(n) + h_0x(n) \quad (14.3)$$

и составим следующую систему из разностных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} g_1(n+1) &= g_2(n) + h_1x(n); \\ g_2(n+1) &= g_3(n) + h_2x(n); \\ &\dots\dots\dots \\ g_l(n+1) &= -a_0g_l(n) - a_1g_2(n) - \dots - a_{l-1}g_1(n) + h_lx(n). \end{aligned} \quad (14.4)$$

Неизвестные коэффициенты h_i в системе уравнений (14.4) определяют из условия эквивалентности системы разностных уравнений (14.4) исходному разностному уравнению (14.2) и вычисляют последовательно по формулам:

$$\begin{aligned} h_0 &= c_l; \\ h_1 &= c_{l-1} - a_{l-1}h_0; \\ h_2 &= c_{l-2} - a_{l-2}h_0 - a_{l-1}h_1; \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (14.5)$$

Уравнения (14.3) и (14.4) перепишем в матричной форме:

$$\mathbf{G}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{G}(n) + \mathbf{B}x(n); \quad (14.6)$$

$$y(n) = \mathbf{C}^T\mathbf{G}(n) + h_0x(n), \quad (14.7)$$

где

$$\mathbf{G}(n) = \begin{bmatrix} g_1(n) \\ g_2(n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_l(n) \end{bmatrix}$$

– вектор переменных состояния размером $l \times 1$;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_0, & -a_1, & -a_2, & \dots, & -a_{l-1} \end{bmatrix}$$

– матрица системы размером $l \times l$;

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_l \end{bmatrix}$$

– матрица управления размером $l \times 1$;

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

– матрица наблюдения размером $l \times 1$; \mathbf{C}^T – транспонированная матрица наблюдения; l – порядок системы.

Выражение (14.6) называют *векторным разностным уравнением системы*, а выражение (14.7) – *уравнением выхода*.

Для пояснения физического смысла введенных переменных состояния на рис. 14.5, *а* изображена структурная схема, составленная по уравнениям (14.6) и (14.7), которая отличается от схемы непрерывной системы (см. рис. 8.1) тем, что в схеме цифровой системы вместо векторного интегратора введен вектор запаздывания. На рис. 14.5, *б* показана структурная схема, на которой изображены все составляющие вектора состояния. Из этой схемы видно, что переменные состояния – это дискретные значения сигнала в текущий момент времени, и $(l-1)$ – его значения в предыдущие моменты времени.

Аналогично непрерывным системам составляющие вектора переменных состояний $g_i(n)$ можно рассматривать как оси координат многомерного пространства состояния системы. С течением времени вектор состояния изменяет свое значение и положение, его конец описывает в пространстве состояния некоторую кривую, называемую *траекторией движения системы*. Очевидно, что эта траектория зависит от начального состояния и входного сигнала.

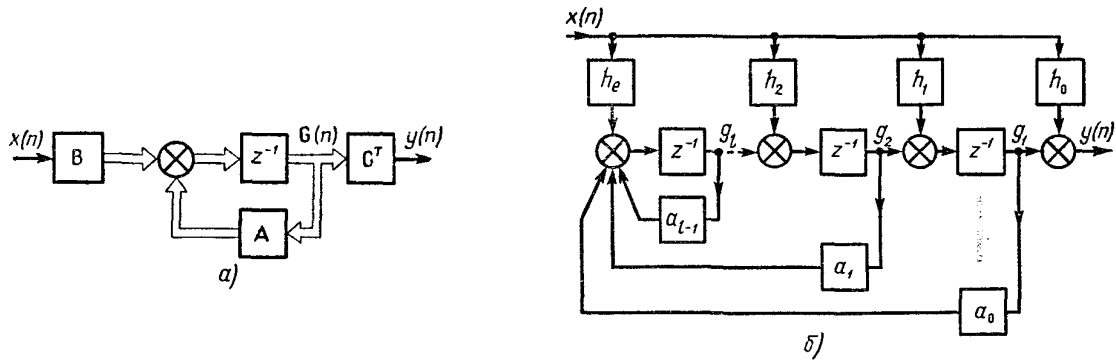


Рис. 14.5. Структурная схема цифровой системы:
 а – в векторной форме; б – в переменных состояниях

Матрица системы **A** определяет устойчивость и другие показатели качества работы системы, матрица управления **B** характеризует влияние на переменные состояния входного сигнала, а матрица наблюдения **C** устанавливает связь выходного сигнала системы с вектором переменных состояниях.

Так же как и в непрерывных, выбор переменных состояний в цифровых системах является неоднозначной операцией, т.е. векторное разностное уравнение зависит от выбранных переменных состояний. Однако все возможные векторные уравнения эквивалентны, так как описывают один и тот же динамический процесс связи выходного сигнала системы с входным. Проиллюстрируем это на конкретном примере.

► **Пример 14.1.** Найти векторное разностное уравнение для системы, дискретная передаточная функция которой

$$W(z) = \frac{z - 1}{z^2 - 0,75z + 0,125}.$$

Решение. Этой передаточной функции соответствует разностное уравнение

$$y(n+2) - 0,75y(n+1) + 0,125y(n) = x(n+1) - x(n).$$

На основании выражений (14.4), (14.7) получим, что

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -0,125 & +0,75 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 \\ -0,25 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Здесь

$$a_0 = 0,125, \quad a_1 = -0,75; \quad h_0 = c_l = 0, \quad h_1 = c_{l-1} - a_{l-1}, \quad h_0 = 1 - 0,75 \cdot 0 = 1, \\ h_2 = c_{l-2} - a_{l-2}h_0 - a_{l-1}h_1 = -1 - 0,125 \cdot 0 - (-0,75) \cdot 1 = -0,25.$$

Уравнения системы в пространстве состояний получаются следующими:

$$g_1(n+1) = g_2(n) + x(n); \quad (14.8)$$

$$g_2(n+1) = -0,125g_1(n) + 0,75g_2(n) - 0,25x(n),$$

а уравнение выхода имеет вид

$$y(n) = g_1(n). \quad (14.9)$$

На рис. 14.6, а изображена структурная схема рассматриваемой системы, построенная по уравнениям (14.8) и (14.9), из которой видно, что переменные состояния – это сигналы на выходах звеньев запаздывания.

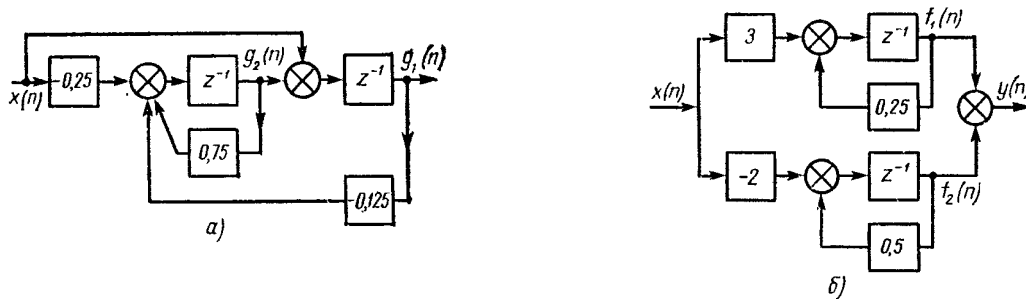


Рис. 14.6. Схемы системы второго порядка:

а – относительно дискрет выходного сигнала; б – относительно полюсов системы

Представим передаточную функцию системы в виде

$$W(z) = \frac{3}{z-0,25} - \frac{2}{z-0,5}.$$

Такой передаточной функции соответствует структурная схема, приведенная на рис. 14.6, б. Выберем в качестве переменных состояния сигналы на выходах звеньев запаздывания. Тогда можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} f_1(n+1) &= 0,125f_1(n) + 3x(n); \\ f_2(n+1) &= 0,5f_2(n) - 2x(n). \end{aligned} \quad (14.10)$$

В этом случае уравнение выхода имеет вид:

$$y(n) = f_1(n) + f_2(n). \quad (14.11)$$

Перепишем выражения (14.10) и (14.11) в матричной форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(n+1) &= \mathbf{A}_F \mathbf{F}(n) + \mathbf{B}_F x(n); \\ y(n) &= \mathbf{C}_F^T \mathbf{F}(n), \end{aligned}$$

где $\mathbf{F}(n) = \begin{bmatrix} f_1(n) \\ f_2(n) \end{bmatrix}$ – вектор переменных состояния; $\mathbf{A}_F = \begin{bmatrix} 0,25 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B}_F = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$;

$$\mathbf{C}_F = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Из уравнений (14.8) и (14.10), (14.9) и (14.11) следует, что различным переменным состояниям соответствуют различные матрицы системы, управления и наблюдения, но связь выходного сигнала системы с входным остается неизменной:

$$y(n) = \mathbf{C}^T \mathbf{G}(n) = \mathbf{C}_F^T \mathbf{F}(n). \blacktriangleleft$$

Ранее цифровые системы РА в пространстве состояний были описаны для стационарных систем. В нестационарных системах матрицы системы управления и наблюдения являются переменными и векторные разностные уравнения имеют такой вид:

$$\mathbf{G}(n+1) = \mathbf{A}(n)\mathbf{G}(n) + \mathbf{B}(n)x(n); \quad (14.12)$$

$$y(n) = \mathbf{C}^T(n)\mathbf{G}(n) + h_0(n)x(n). \quad (14.13)$$

В общем случае цифровая система имеет r входов и m выходов. При этом вид векторных разностных уравнений остается таким же, как и в (14.12) и (14.13), в которых матрица системы \mathbf{A} имеет тот же вид, что и в системах с одним входом и одним выходом, изменяются лишь матрицы управления и наблюдения. Матрица управления становится прямоугольной размером $l \times r$, а матрица наблюдения имеет размер $l \times m$.

14.2. Дискретная матрица перехода

Рассмотрим однородное нестационарное уравнение, которое получается из разностного векторного уравнения (14.12) при $x(n) = 0$:

$$\mathbf{G}(n+1) = \mathbf{A}(n)\mathbf{G}(n). \quad (14.14)$$

Обозначим через $\mathbf{G}(0)$ начальное состояние системы. Тогда из выражения (14.14) последовательно получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(1) &= \mathbf{A}(0)\mathbf{G}(0); \\ \mathbf{G}(2) &= \mathbf{A}(1)\mathbf{G}(1) = \mathbf{A}(1)\mathbf{A}(0)\mathbf{G}(0); \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (14.15)$$

$$\mathbf{G}(n) = \prod_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}(i)\mathbf{G}(0).$$

Введем дискретную матрицу перехода с помощью соотношения

$$\mathbf{G}(n) = \mathbf{\Phi}(n, m)\mathbf{G}(m).$$

Дискретная матрица перехода $\mathbf{\Phi}(n, m)$ обладает следующими свойствами:

$$\mathbf{\Phi}(n, n) = \mathbf{1}; \quad \mathbf{\Phi}(n, m) = [\mathbf{\Phi}(m, n)]^{-1},$$

где $\mathbf{1}$ – единичная матрица.

Соотношения (14.15) через введенную дискретную матрицу перехода записывают в виде

$$\mathbf{G}(n) = \mathbf{\Phi}(n, 0)\mathbf{G}(0).$$

Тогда матрица перехода имеет вид

$$\Phi(n, 0) = \prod_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}(i). \quad (14.16)$$

Для стационарных систем

$$\Phi(n, 0) = \Phi(n) = \mathbf{A}^n.$$

Полное решение векторного разностного уравнения (14.12) найдем путем следующих последовательных вычислений:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(1) &= \mathbf{A}(0)\mathbf{G}(0) + \mathbf{B}(0)\mathbf{X}(0); \\ \mathbf{G}(2) &= \mathbf{A}(1)\mathbf{G}(1) + \mathbf{B}(1)\mathbf{X}(1) = \mathbf{A}(1)\mathbf{A}(0)\mathbf{G}(0) + \\ &\quad + \mathbf{A}(1)\mathbf{B}(0)\mathbf{X}(0) + \mathbf{B}(1)\mathbf{X}(1); \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{G}(n) &= \prod_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}(i) \mathbf{G}(0) + \sum_{i=0}^{n-1} \left[\prod_{j=i+1}^{n-1} \mathbf{A}(j) \right] \mathbf{B}(i)\mathbf{X}(i), \end{aligned}$$

или, учитывая введенную дискретную матрицу перехода,

$$\mathbf{G}(n) = \Phi(n) \mathbf{G}(0) + \sum_{i=0}^{n-1} \Phi(n-i-1) \mathbf{B}(i)\mathbf{X}(i). \quad (14.17)$$

В аналого-цифровых системах РА, где имеется непрерывная часть, дискретную матрицу перехода можно определить путем дискретизации непрерывных уравнений (8.8) и (8.9), описывающих процессы, происходящие в системе. Положим, что входной сигнал непрерывной системы $\mathbf{X}(t)$ может быть принят постоянным между дискретными моментами времени, чего можно достичь соответствующим выбором периода дискретизации. Рассмотрим интервал времени $t_n \leq t \leq t_{n+1}$, на котором вектор переменных состояния известен. Тогда из уравнения (8.24) следует, что

$$\mathbf{Z}(t_{n+1}) = \Phi(t_{n+1}, t_n) \mathbf{Z}(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi(t_{n+1}, \tau) \mathbf{B}(\tau)\mathbf{X}(\tau)d\tau \quad (14.18)$$

Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{Z}(t_n) = \mathbf{G}(n), \mathbf{Z}(t_{n+1}) = \mathbf{G}(n+1); \quad (14.19)$$

$$\Phi(t_{n+1}, t_n) = \Phi(n+1, n); \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi(t_{n+1}, \tau)\mathbf{B}(\tau)d\tau = \mathbf{\Gamma}(n+1, n).$$

Уравнение (14.18) можно записать в виде:

$$\mathbf{G}(n+1) = \Phi(n+1, n)\mathbf{G}(n) + \mathbf{\Gamma}(n+1, n) \mathbf{X}(n), \quad (14.20)$$

где $\mathbf{\Gamma}(n+1, n)$ – матрица перехода по управлению.

Уравнение (14.20) совместно с уравнением выхода (14.13) используется и для анализа процессов в непрерывных системах РА с помощью ЦВМ.

Для стационарных систем дискретная матрица перехода может быть найдена с помощью Z-преобразования, которое следует применить к уравнению (14.6).

В результате получим:

$$z\mathbf{G}(z) = \mathbf{A}\mathbf{G}(z) + \mathbf{V}(z) + z\mathbf{G}(0),$$

где $\mathbf{V}(z) = \mathbf{B}\mathbf{X}(z)$; $\mathbf{G}(0)$ – начальное состояние системы.

Согласно последнему выражению

$$\mathbf{G}(z) = [z\mathbf{1} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{V}(z) + [z\mathbf{1} - \mathbf{A}]^{-1} z\mathbf{G}(0). \quad (14.21)$$

Обратное Z-преобразование от уравнения (14.21), осуществленное с учетом теоремы (11.11), позволяет определить:

$$\mathbf{G}(n) = \sum_{m=0}^n \Phi(n-1-m) \mathbf{V}(m) + \Phi(n)\mathbf{G}(0),$$

или

$$\mathbf{G}(n+1) = \sum_{m=0}^n \Phi(n-m)\mathbf{V}(m) + \Phi(n+1)\mathbf{G}(0), \quad (14.22)$$

где $\Phi(n) = Z^{-1}\{[z\mathbf{1} - \mathbf{A}]^{-1} z\}$.

Матрицу $[z\mathbf{1} - \mathbf{A}]$ называют *характеристической*, определитель этой матрицы является характеристическим уравнением системы.

► **Пример 14.2.** Найти дискретную матрицу перехода для системы, рассмотренной в примере 14.1.

Решение. Система описывается разностными уравнениями (14.8), ее характеристическая матрица имеет вид

$$z\mathbf{1} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} z, & -1 \\ 0,125, & z - 0,75 \end{bmatrix}.$$

Матрица, обратная характеристической (см. прил. П4):

$$\frac{1}{(z-0,5)(z-0,25)} \begin{bmatrix} z-0,75, & 1 \\ -0,125, & z \end{bmatrix}.$$

Согласно теореме о вычетах (12.2) дискретная матрица перехода:

$$\Phi(n) = \begin{bmatrix} 2(0,25)^n - (0,5)^n, & -4(0,25)^n + 4(0,5)^n \\ 0,5(0,25)^n - 0,5(0,5)^n, & -(0,25)^n + 2(0,5)^n \end{bmatrix}. \blacktriangleleft$$

14.3. Основные сведения о математическом моделировании систем радиоавтоматики

Моделирование является важным этапом проектирования систем РА. Оно позволяет провести исследования сложных систем, которые не могут быть выполнены традиционными методами. Кроме того, моделирование существенно сокращает сроки проектирования и за счет анализа большого числа вариантов системы повышает его качество. Важно отметить, что многие режимы работы систем РА могут быть исследованы только с помощью моделирования (например, оценка качества функционирования систем радиоуправления летательными аппаратами).

Различают физическое, математическое и полунатурное моделирование.

Физическое моделирование базируется обычно на принципе электрофизических аналогий между исследуемой системой и ее моделью в виде некоторого объекта, который описывается теми же математическими соотношениями, что и исследуемая система. В настоящее время этот метод моделирования для систем РА применяется редко.

При *математическом моделировании* в ЭВМ реализуются математические зависимости, описывающие процессы в системе РА, а также алгоритмы внешних воздействий и способов оценки качества функционирования системы.

При *полунатурном моделировании* в состав моделирующей установки системы РА включают макеты или оригиналы отдельных подсистем или устройств реальных систем, что позволяет наиболее полно учесть влияние их характеристик на свойства исследуемой системы.

Математической моделью какой-либо системы называют формализованное математическое описание системы, отражающее с требуемой точностью процессы, происходящие в исследуемой системе. При разработке математической модели можно использовать два подхода. Первый подход (аналитическое моделирование) заключается в составлении и реализации на ЭВМ алгоритмов, расчетных формул с целью анализа структуры и показателей качества работы системы (переходных процессов, частотных характеристик, динамической и средней квадратической ошибки, оптимальных параметров и т.п.). Второй подход состоит в том, что при разработке модели и ее реализации на ЭВМ процессы, происходящие в модели и реальной системе, оказываются одинаковыми. Такой метод моделирования называют *имитационным*. В настоящее время этот метод широко применяется для моделирования систем РА. Это объясняется тем, что имитационная модель может быть составлена практически для любой системы, в нее легко вносить изменения, в ней проще по сравнению с аналитической моделью учесть влияние изменения параметров на свойства моделируемой системы, оценить динамические диапазоны сигналов в устройствах системы.

Исходными данными для разработки имитационной модели являются математические соотношения, описывающие процессы в отдельных устройствах системы РА, схемы их соединений, алгоритмы оценки устойчивости и качества

работы, а также характеристики детерминированных и случайных воздействий и окружающей среды.

С точки зрения математического описания процессов преобразования сигналов в различных устройствах систем РА можно выделить три основных вида преобразований: безынерционное, инерционное и нелинейное. При этом основной характеристикой является вид преобразования сигнала. Сложные преобразования представляют как сочетание трех основных видов преобразований.

При изучении процессов в реальных системах и их математических моделях различают три типа времени:

1) *реальное*, во время которого протекают процессы в реальных условиях и системах;

2) *системное*, во время которого протекают процессы в модели системы. При разработке математических моделей это время представляется в виде отдельной переменной. Использование системного времени позволяет анализировать процессы в моделях в ускоренном или замедленном темпе, а также останавливать решение для изучения процессов в какой-то момент времени;

3) *машинное*, во время которого происходит моделирование системы на ЭВМ; оно регистрируется специальным устройством ЭВМ – таймером.

Для моделирования систем РА применяют следующие виды ЭВМ: аналоговые вычислительные машины (АВМ), цифровые (ЦВМ) и гибридные, состоящие как из аналоговых, так и цифровых ЭВМ.

14.4. Математическое моделирование систем на АВМ

АВМ обладает рядом характерных свойств, основные из которых следующие: высокое быстродействие, работа в реальном времени, удобная и наглядная форма ввода и вывода данных, простота программирования, возможность включения в состав моделирующей установки реальной аппаратуры.

Основным решающим элементом АВМ является операционный усилитель (ОУ) с обратной связью (рис. 14.7, а), передаточная функция которого

$$W(p) = -\frac{z_0(p)}{z(p)} \frac{1}{1 + \frac{1}{k_y} \left(1 + \frac{z_0(p)}{z(p)} \right)},$$

где $z_0(p)$, $z(p)$ – операторные сопротивления в цепи обратной связи и входной цепи усилителя; k_y – коэффициент усиления усилителя без обратной связи.

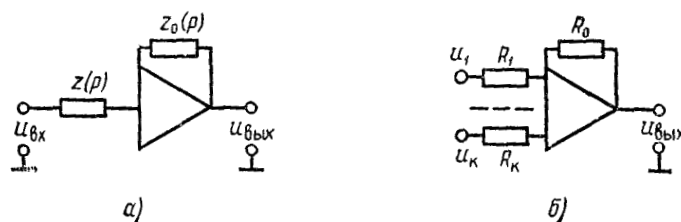


Рис. 14.7. Схема операционного усилителя: а – общая; б – суммирующего ОУ

В усилителях АВМ коэффициент АВМ k_y равен нескольким сотням тысяч, поэтому передаточную функцию операционного усилителя с высокой точностью можно принять следующей:

$$W(p) = -\frac{z_0(p)}{z(p)}. \quad (14.23)$$

В табл. 14.2 даны схемы моделей типовых звеньев систем РА.

Если входная цепь операционного усилителя состоит из нескольких параллельно включенных резисторов (см. рис. 14.7, б), а в цепь обратной связи включен резистор R_0 , то операционный усилитель производит суммирование:

$$u_{\text{вых}} = \frac{k}{2} k_i u_i,$$

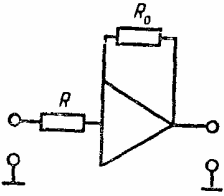
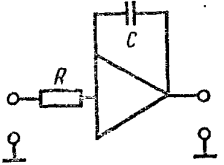
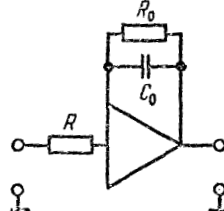
где $k_i = -R_0/R_i$ – коэффициенты усиления.

При моделировании реальные переменные исследуемой системы и внешние воздействия отображаются в АВМ напряжениями, которые называют *машинными переменными*. Соответствие между реальными и машинными переменными устанавливают с помощью масштабных коэффициентов, выбираемых из условия

$$m_x \leq u_m / |x_m|, \quad (14.24)$$

где u_m – максимальное напряжение на выходе усилителей АВМ; $|x_m|$ – максимальное значение моделируемой переменной.

Таблица 14.2

Схема модели	Передаточная функция
	$W(p) = -k = -\frac{R_0}{R}.$
	$W(p) = -\frac{k}{p};$ $k = \frac{1}{T} = \frac{1}{RC}.$
	$W(p) = -\frac{k}{1 + pT};$ $k = \frac{R_0}{R}, \quad T = R_0 C_0.$

	$W(p) = -\frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1};$ $k = \frac{R_0}{R}, T^2 = RR_0 C^2, \xi = \sqrt{R/R_0}.$
	$W(p) = -k \frac{1 + pT_2}{1 + pT_1};$ $k = R_0 / R; T_1 = R_0 C_0; T_2 = RC.$
	$W(p) = -\frac{pT_0}{1 + pT}$ $T_0 = R_0 C; T = RC.$

Масштабные коэффициенты – размерные величины. Так, если $x(t)$ является, например, углом поворота антенны РЛС, то размерность масштабного коэффициента – вольт, деленный на радиан (В/рад).

Если требуется замедлить или ускорить процессы в модели по сравнению с процессами в реальной системе, то вводят масштабный коэффициент времени $m(t) = -t_m/t$, где t_m – системное время. При этом постоянные времени и коэффициенты передачи дифференцирующих и интегрирующих звеньев пересчитывают по формулам $T_{im} = m_t T_i$, $k_{jm} = m_t k_j$ для дифференцирующих и $k_{im} = k_j/m_t$ для интегрирующих звеньев.

Различают два способа моделирования систем РА: по дифференциальным уравнениям и по структурным схемам.

Рассмотрим моделирование по дифференциальным уравнениям на примере системы ФАПЧ, структурная схема которой приведена на рис. 1.5, а передаточная функция в разомкнутом состоянии определяется выражением (3.53). Дифференциальное уравнение системы в замкнутом состоянии имеет вид

$$(p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0) \omega_2(t) = (b_1 p + b_0) \omega_3(t), \quad p = d/dt, \quad (14.25)$$

где $a_2 = \frac{T_{\phi\delta} + T_1}{T_{\phi\delta} T_1}$; $a_1 = \frac{1 + kT_2}{T_{\phi\delta} T_1}$; $a_0 = b_0 = \frac{K}{T_{\phi\delta} T_1}$; $b_1 = \frac{kT_2}{T_{\phi\delta} T_1}$.

Уравнение (14.25), используя (8.5), представим в виде:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= z_2(t); \\ \dot{z}_2(t) &= z_3(t) + h_2 \omega_3(t); \end{aligned} \quad (14.26)$$

$$\dot{z}_3(t) = -a_0 z_1(t) - a_1 z_2(t) - a_2 z_3(t) + h_3 \omega_3(t),$$

где $z_1(t) = \omega_2(t)$; $z_2(t) = \dot{\omega}_2(t)$; коэффициенты h_2 и h_3 вычисляются по формулам (8.7).

Введем масштабные коэффициенты $m_{z_1}, m_{z_2}, m_{z_3}$ для переменных $z_1(t), z_2(t), z_3(t)$; $\dot{m}_{z_1}, \dot{m}_{z_2}, \dot{m}_{z_3}$ – для производных переменных состояния и m_ω – для частоты эталонного и перестраиваемого генераторов.

Через масштабные коэффициенты и напряжения модели система уравнений (14.26) записывается в виде

$$\dot{u}_{z_1} / m_{z_1} = u_{z_2} / m_{z_2};$$

$$\dot{u}_{z_2} / m_{z_2} = u_{z_3} / m_{z_3} + h_2 u_{\omega_3} / m_\omega;$$

$$\dot{u}_{z_3} / m_{z_3} = -\alpha_0 u_{z_1} / m_{z_1} - \alpha_1 u_{z_2} / m_{z_2} - \alpha_2 u_{z_3} / m_{z_3} + h_3 u_{\omega_3} / m_\omega,$$

или

$$\dot{u}_{z_1} = k_2 u_{z_2};$$

$$\dot{u}_{z_2} = k_3 u_{z_3} + \beta_3 u_{\omega_3}; \quad (14.27)$$

$$\dot{u}_{z_3} = -\alpha_0 u_{z_1} - \alpha_1 u_{z_2} - \alpha_2 u_{z_3} + \beta_3 u_{\omega_3},$$

где $k_2 = \dot{m}_{z_1} / m_{z_1}$; $k_3 = \dot{m}_{z_3} / m_{z_3}$; $\alpha_0 = a_0 \dot{m}_{z_3} / m_{z_1}$; $\alpha_1 = a_1 \dot{m}_{z_3} / m_{z_2}$;

$\alpha_2 = a_2 \dot{m}_{z_3} / m_{z_3}$; $\beta_2 = h_2 \dot{m}_{z_2} / m_\omega$; $\beta_3 = h_3 \dot{m}_{z_3} / m_\omega$.

Выражения (14.27) образуют систему машинных уравнений, масштабы переменных в которой необходимо выбрать в соответствии с (14.24), а также с учетом того, чтобы коэффициенты усиления операционных усилителей для обеспечения стабильности работы моделирующей установки не превышали нескольких десятков.

На рис. 14.8 приведена схема модели системы ФАПЧ, составленная по уравнениям (14.27).

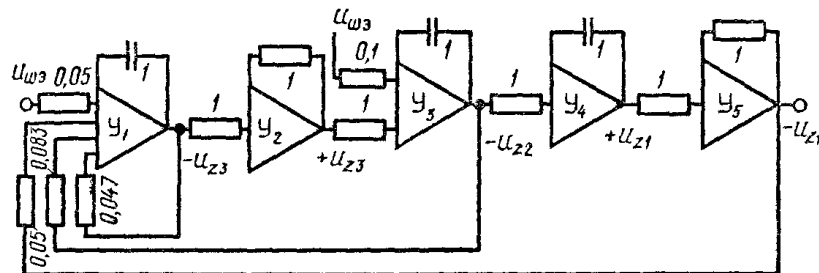


Рис. 14.8. Схема модели системы ФАПЧ

Коэффициенты усиления здесь рассчитаны для параметров системы $T_{\phi\delta} = 0,005$ с; $T_1 = 0,1$ с; $T_2 = 0,05$ с при следующих значениях масштабных коэффициентов:

$$m_{z_1} = m_{\omega} = 10 \text{ В} \cdot \text{с}; \quad \dot{m}_{z_1} = m_{z_2} = 1 \text{ В} \cdot \text{с}^2; \quad \dot{m}_{z_2} = m_{z_3} = 0,01 \text{ В} \cdot \text{с}^3;$$

$$\dot{m}_{z_3} = 0,001 \text{ В} \cdot \text{с}^4; \quad m_t = 1.$$

На схеме (см. рис. 14.8) сопротивления резисторов указаны в мегаомах, а емкости конденсаторов – в микрофарадах.

Недостатком рассмотренного метода моделирования является трудность исследования влияния параметров отдельных устройств системы на характеристики системы, так как коэффициенты усиления зависят от нескольких параметров системы и выбранных масштабных коэффициентов.

Более удобным оказывается метод моделирования по структурной схеме. В этом случае каждому звену структурной схемы исследуемой системы в АВМ соответствует модель этого звена, которую составляют по передаточным функциям в соответствии с табл. 14.2 или по дифференциальному уравнению звена. Таким образом, совокупности физических устройств системы РА в АВМ соответствует набор моделей этих устройств, соединенных так же, как и устройства в реальной системе. На рис. 14.9 показана структурная схема модели системы ФАПЧ, составленная по структурному методу. На усилителях $U_1 - U_3$ моделируется линейризованный фазовый детектор, на усилителе U_4 – фильтр нижних частот, а на усилителе U_5 – перестраиваемый генератор. Так как обратная связь должна быть отрицательной, то число усилителей в замкнутом контуре модели системы должно быть нечетным.

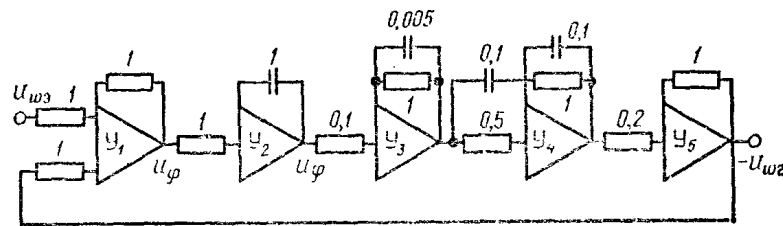


Рис. 14.9. Схема модели системы ФАПЧ по структурному методу

От схемы модели системы ФАПЧ, приведенной на рис. 14.10, легко перейти к схеме модели нелинейной системы. Для этого необходимо после усилителя U_2 включить нелинейный блок, на котором воспроизводится косинусная зависимость фазового детектора. Такие нелинейные блоки входят в состав АВМ.

Для изменения коэффициента усиления в моделируемой системе достаточно изменить коэффициент усиления какого-либо усилителя, а изменяя емкости, можно проследить влияние постоянных времени устройств системы на характеристики всей системы ФАПЧ.

Начальные условия системы в модели задаются начальными значениями напряжений на выходе интегрирующих усилителей.

Для исследования систем РА на модели АВМ необходимо сформировать различные воздействия.

Способы формирования детерминированных сигналов можно разделить на три группы. К первой группе относятся способы, при которых сигналы формируются непосредственно на операционных усилителях. Так генерируются типовые воздействия (единичная функция и воздействия в виде полинома). Единичная функция моделируется как постоянное напряжение, момент включения которого синхронизируется с включением АВМ. Для моделирования воздействия в виде полинома используется цепочка интегрирующих усилителей (рис. 14.10), на выходе которой генерируется сигнал вида

$$x(t) = a_0 1(t) + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_k t^k.$$

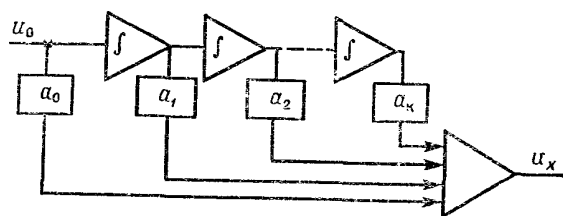


Рис. 14.10. Схема моделирования полиномиального сигнала

Ко второй группе способов моделирования детерминированных сигналов относятся способы генерирования аналитических функций, которые получаются как результат решения на АВМ некоторых дифференциальных уравнений. Рассмотрим, например, формирование сигнала

$x(t) = \sin \omega t$. Дифференцируя $x(t)$, найдем, что $\dot{x}(t) = \omega \cos \omega t$, $\ddot{x}(t) = -\omega^2 \sin \omega t$ или $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$.

Таким образом, решив на АВМ последнее дифференциальное уравнение, получим модель гармонического сигнала. Аналогичным образом сигнал вида $x(t) = e^{\pm j\omega t}$ может быть найден путем решения на АВМ дифференциального уравнения $\dot{x}(t) \pm \omega x(t) = 0$. Так же могут быть получены модели и других сигналов.

К третьей группе относятся способы моделирования недифференцируемых сигналов, например, периодических прямоугольных или треугольных импульсов, сигналов пилообразного вида. Математическое обеспечение современных АВМ обычно включает генераторы таких сигналов, частоту которых можно изменять в диапазоне от 0,01 до 100 Гц, а амплитуду – от 0 до 100 или 50 вольт.

Помимо формирования детерминированных сигналов при исследовании систем РА на АВМ необходимо воспроизведение и случайных воздействий.

Существует два метода формирования случайных воздействий: 1) метод, использующий реальные физические источники шума; 2) метод, основанный на применении псевдослучайных чисел. В генераторах, построенных по первому методу, в качестве источника шума используют шумовые диоды, кремниевые стаби-

литроны, тиратроны. Такие генераторы позволяют получить случайный сигнал со спектром, не равным нулю, до 150 Гц.

Генераторы с псевдослучайными числами отличаются высокой стабильностью характеристик. Они позволяют многократно воспроизводить одну и ту же реализацию случайного процесса достаточно большой продолжительности. Так как в таких генераторах воспроизводится одна и та же реализация случайного процесса, то всегда необходима проверка корректности применения такого вида процесса.

Для получения случайных сигналов с нужными статистическими характеристиками используют формирующие фильтры, передаточные функции которых определяются методами, изложенными ранее.

При моделировании систем РА со случайными сигналами нужно внимательно относиться к выбору масштабов переменных.

Необходимо, чтобы для любой переменной модели $x(t)$ выполнялось условие $|x - m_x| \leq 3\sigma$, где m_x – математическое ожидание переменной $x(t)$; σ – ее среднее квадратическое значение.

При выборе масштабов из этого условия ошибки определения статических переменных будут достаточно малы.

Результаты моделирования систем РА фиксируются визуально с помощью осциллографа или какого-либо другого регистрирующего прибора. Так, для определения переходного процесса нужно на вход модели подать единичное воздействие и зафиксировать напряжение, моделирующее выходной сигнал системы. Для оценки динамической точности на вход модели нужно подключить напряжение, сформированное по схеме на рис. 14.10, и зафиксировать при нулевых начальных условиях напряжение ошибки.

Для нахождения частотных характеристик на вход модели подключают напряжение от низкочастотного генератора, изменяющееся по гармоническому закону. Отношение амплитуды выходного сигнала к амплитуде входного позволяет получить амплитудно-частотную характеристику, а сдвиг фазы колебаний выходного сигнала относительно входного определяет фазочастотную характеристику моделируемой системы РА.

При моделировании систем в условиях действия случайных воздействий измеряется средняя квадратическая ошибка, которую для стационарного эргодического процесса вычисляют по формуле

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \int_0^T e^2(t) dt,$$

где $e(t) = e(t) - m_e$ – центрированная случайная функция ошибки; T – интервал наблюдения.

Для реализации схемы последнего выражения на АВМ требуется квадрат и интегрирующий усилитель.

Автокорреляционная и взаимные корреляционные функции оцениваются по формулам

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t - \tau) dt;$$
$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t - \tau) dt,$$

для схемной реализации которых необходимы блоки запаздывания, перемножения и интегрирующие усилители. В процессе проектирования систем РА на АВМ характеристики различных вариантов построения систем фиксируются. Варьируя параметрами отдельных звеньев, можно найти наиболее приемлемый вариант построения системы и оценить влияние изменения отдельных параметров на качество работы проектируемой системы.

14.5. Моделирование систем с помощью цифровых ЭВМ

Моделирование систем РА на цифровых ЭВМ состоит из нескольких этапов:

- формирование цифровой модели системы, т.е. выбор численного алгоритма решения дифференциальных уравнений, описывающих процессы в системе;
- выбор алгоритмов для моделирования управляющих и возмущающих воздействий;
- составление на одном из универсальных алгоритмических языков (ФОРТРАН, PL-1 и т.п.) программы для решения на ЦВМ численных алгоритмов цифровой модели;
- отладка модели.

При выборе численных алгоритмов, реализуемых в цифровой модели системы, следует учитывать время вычислений, точность решения, объем памяти и др. Существует два класса численных методов решения дифференциальных уравнений, которые могут быть использованы для реализации в цифровых моделях. Первый класс базируется на интегрировании дифференциальных уравнений численными методами (Эйлера, Эйлера – Коши и Рунге – Кутта); математическое обеспечение современных ЦВМ содержит стандартные программы решения задач этими методами.

Второй класс численных методов основан на применении разностных уравнений, позволяющих процесс моделирования свести к рекуррентным вычислениям.

В цифровых моделях сигналы квантуются как по времени, так и по уровню, в результате чего возникают ошибки. В универсальных ЦВМ шаг квантова-

ния сигналов по уровню имеет малое значение (в ЦВМ серии ЕС шаг квантования $\Delta_x = 2^{-32}x$), поэтому во многих инженерных задачах влиянием квантования сигналов по уровню на точность моделирования можно пренебречь и считать, что основное влияние на точность расчетов оказывает квантование сигналов по времени.

Помимо ошибок, связанных с квантованием сигналов, в цифровой модели из-за ограниченного числа разрядов ЦВМ возникают ошибки, связанные с округлением результатов математических операций. При большом числе математических операций, выполняемых на каждом шаге квантования сигналов по времени, например, при моделировании фильтров Калмана, ошибки округления накапливаются и могут качественно исказить результаты моделирования.

Для снижения накопления ошибок округления следует уменьшить период квантования сигналов по времени, что может привести к росту математических операций, а следовательно, и к увеличению ошибок округления. Поэтому выбор периода квантования сигналов по времени с учетом ошибок округления является сложной задачей и обычно осуществляется в процессе моделирования экспериментально путем последовательного подбора. Начальное значение периода квантования сигналов по времени, согласно теореме Котельникова, $T \leq 1/(2f_{\text{ЭК}})$, где $f_{\text{ЭК}}$ – эквивалентная полоса пропускания системы. Период T определяет нижнее значение периода квантования сигналов по времени, в действительности период T выбирают примерно на порядок меньше.

Методы численного интегрирования дифференциальных уравнений описаны в литературе, поэтому ограничимся анализом методов второго класса, которые позволяют снизить требования к периоду квантования сигналов по времени, уменьшить необходимый объем памяти.

При моделировании линейной динамической системы по ее передаточной функции при выбранном методе дискретной аппроксимации находят цифровой эквивалент системы. Выбор метода дискретной аппроксимации (см. тему 11) зависит от точности аппроксимации моделируемой системы ее цифровым эквивалентом. При использовании любого метода рассчитывают дискретную передаточную функцию цифровой модели системы, которую в общем случае можно записать в виде

$$W(z) = \frac{c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_l z^{-l}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_e z^{-e}}. \quad (14.28)$$

Из передаточной функции (14.28) следует следующее разностное уравнение:

$$y(nT) = c_0 x(nT) + c_1 x[(n-1)T] + \dots + c_l x[(n-l)T] - a_1 y[(n-1)T] - \dots - a_e y[(n-e)T]. \quad (14.29)$$

Уравнение (14.29) и является цифровой моделью исследуемой системы.

Определение передаточной функции (14.28) связано с необходимостью предварительного вычисления полюсов моделируемой системы, что не всегда может быть сделано. Поэтому при цифровом моделировании целесообразно находить модель системы как совокупность цифровых моделей отдельных звеньев системы РА, полюсы которых нетрудно рассчитать. Так как число типовых звеньев в системах ограничено, то их цифровые модели могут быть составлены заранее, в этом случае модель цифровой системы становится универсальной, т.е. пригодной для моделирования систем РА различного назначения. При моделировании нелинейных систем РА в состав модели следует включить цифровые модели нелинейных звеньев.

► **Пример 14.3.** Составить цифровую модель системы ФАПЧ, структурная схема которой показана на рис. 1.5.

Решение. Для упрощения постоянной времени фазового детектора пренебрежем. В результате, согласно (3.53), передаточная функция системы ФАПЧ в разомкнутом состоянии

$$W_p(p) = \frac{k(1 + pT_2)}{p(1 + pT_1)}$$

Применим метод дискретной аппроксимации по переходному процессу. При этом цифровой эквивалент определяется по формуле (13.3). Цифровая модель разомкнутой системы определяется дискретной передаточной функцией

$$W_p(z) = \frac{c_{11}z^{-1}}{1 - a_{11}z^{-1}} + \frac{c_{12}z^{-1}}{1 - z^{-1}}, \quad (14.30)$$

где $c_{11} = k(T_2 - T_1)(1 - e^{-\beta})$; $c_{12} = kT$; $a_{11} = e^{-\beta}$; $\beta = T/T_1$.

Для выходного сигнала Z-преобразование (частоты напряжения перестраиваемого генератора) имеет вид

$$Y(z) = W_p(z) E(z), \quad (14.31)$$

где $E(z) = X(z) - Y(z)$ – преобразование сигнала ошибки; $X(z)$ – Z-преобразование входного сигнала (частота сигнала с эталонного генератора).

Выражению (14.31) с учетом передаточной функции (14.30) соответствует следующее разностное уравнение:

$$y(nT) = c_1 e[(n-1)T] + a_1 y[(n-1)T], \quad (14.32)$$

где $e(nT) = x(nT) - y(nT)$; $c_1 = c_{11} + c_{12}$; $a_1 = a_{11} + 1$.

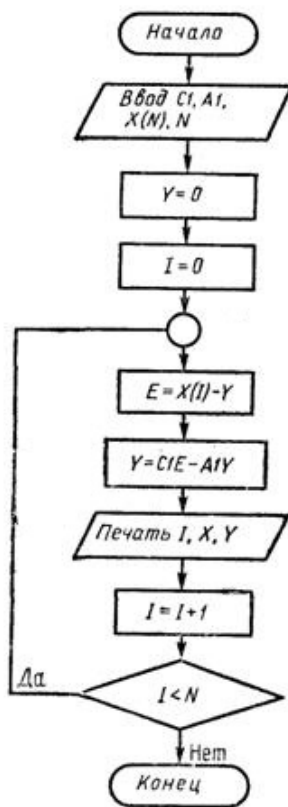


Рис. 14.11. Схема алгоритма моделирования цифровой системы ФАПЧ

Уравнение (14.32) является цифровой моделью системы ФАПЧ, схема алгоритма которой приведена на рис. 14.11. ◀

Следующим этапом разработки цифровой модели системы РА является составление моделей управляющих и возмущающих воздействий.

Одним из возможных методов формирования модели детерминированных сигналов является табличный, в соответствии с которым в блоке памяти ЦВМ размещают массив дискретных значений сигнала, к которому обращаются в процессе решения задачи.

Кроме того, существует метод генерирования детерминированных сигналов, основанный на математической зависимости, описывающей моделируемый сигнал (формульный метод). В этом случае возможны различные подходы к формированию модели сигнала. Одна из них базируется на числовом решении дифференциальных уравнений, позволяющих получить нужную модель сигнала. Разработан подход, основанный на разложении детерминированного сигнала в степенной ряд, в результате чего модель сигнала имеет вид рекуррентных уравнений, которые дают возможность вычислить последующий сигнал по значению, найденному на предыдущем шаге вычислений. Формульный метод моделирования детерминированных сигналов более удобен по сравнению с табличным, так как требует меньший объем памяти.

При моделировании случайных сигналов возможны два случая.

В первом случайным является какой-либо параметр детерминированного сигнала, например, амплитуда синусоидального сигнала, во втором случае моделируется случайный сигнал с заданными статистическими характеристиками.

Выборку случайных значений параметра сигнала производят с помощью датчика случайных чисел, который представляет в современных ЦВМ стандартную программу, вырабатывающую последовательность случайных чисел с равномерным распределением на интервале $(0, \dots, 1)$ (рис. 14.12).

Из случайной последовательности с равномерным распределением можно сформировать последовательности с заданным распределением. Один из методов выработки случайной последовательности чисел с гауссовским распределением основывается на центральной предельной теореме, в соответствии с которой сумма независимых случайных величин x_i с произвольными законами распределения и

мало отличающимися дисперсиями образует последовательность $\xi = \sum_{i=1}^n x_i$ с законом распределения, приближающимся к гауссовскому при $n \rightarrow \infty$.

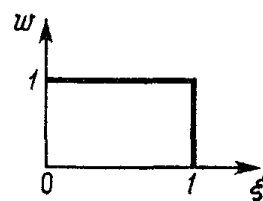


Рис. 14.12. Плотность распределения вероятности последовательности случайных чисел

На практике при $n > 8$ и x_i , равномерно распределенных на интервале $(0, \dots, 1)$, распределение последовательности ξ близко к гауссовскому с математическим ожиданием $M[\xi] = n/2$ дисперсией $\sigma_\xi^2 = n/12$. Нормированное распределение с $M[\xi] = 0$ и $\sigma_\xi^2 = 1$ можно получить с помощью алгоритма

$$\xi = \sqrt{\frac{12}{n}} = \left(\sum_{i=1}^n x_i - \frac{n}{2} \right),$$

где x_i – случайные числа с равномерным распределением на интервале $(0, \dots, 1)$.

При $n = 12$ $\xi = \sum_{i=1}^n x_i - 6$.

Моделирование случайных последовательностей с произвольными распределениями также выполняется на основе равномерного распределения чисел на интервале $(0, \dots, 1)$. Для этого используют теорему, согласно которой случайная величина $x = \int_{-\infty}^{\xi} w(\xi) d\xi$ распределена равномерно на интервале $(0, \dots, 1)$ независимо от вида $w(\xi)$. Поэтому для моделирования случайной последовательности с плотностью распределения $w(\xi)$ можно решить относительно верхнего предела следующее интегральное уравнение:

$$x_i = \int_{-\infty}^{\xi_i} w(\xi) d\xi.$$

Если при $\xi < \xi_0$ $w(\xi) = 0$, то нижний предел интегрирования можно заменить на ξ_0 .

Цифровая модель такого сигнала с заданной спектральной плотностью состоит из цифровой модели формирующего фильтра, частотная характеристика которого определяется выражением (7.13), и цифровой модели белого шума.

► **Пример 14.4.** Составить цифровую модель формирующего фильтра для моделирования случайного сигнала, спектральная плотность которого

$$S_x(\omega) = \frac{N_x}{T_x^4 \omega^4 + 2T_x^2 \omega^2 (1 - 2\xi^2) + 1}.$$

Решение. Используя выражение (7.13), найдем передаточную функцию формирующего фильтра:

$$W_\phi(p) = \frac{1}{T_x^2 p^2 + 2\xi T p_x + 1}.$$

Для определения цифровой модели формирующего фильтра примем метод дискретной аппроксимации по импульсной переходной функции.

В этом случае дискретная передаточная функция цифрового эквивалента формирующего фильтра

$$W_{\phi}(z) = \frac{b_1 z}{z^2 - a_1 z + a_0},$$

где $b_1 = (T_x^2) 2\beta e^{-\alpha T} \sin \beta T$; $a_1 = 2e^{-\alpha T} \cos \beta T$; $a_0 = e^{-2\alpha T}$; $\alpha = \xi / T$; $\beta = \sqrt{1 - \xi^2}$;

T – период квантования сигналов по времени.

Этой передаточной функции соответствует разностное уравнение

$$x(nT) = b_1 v[(n-1)T] + a_2 x[(n-1)T] - a_0 x[(n-2)T],$$

где $x(nT)$ – выходной сигнал формирующего фильтра; $v(nT)$ – дискретный белый шум на входе формирующего фильтра интенсивностью N_x . ◀

Достаточно полное изложение методов формирования цифровых моделей различных случайных воздействий дано в [2].

Вопросы к теме 14

1. Какой усилитель называют операционным? Как определяется его передаточная функция?
2. Составьте структурные схемы типовых звеньев с использованием операционных усилителей.
3. Укажите основные методы математического моделирования на АВМ.
4. Поясните основные принципы моделирования сигналов на АВМ.
5. Поясните основные методы составления цифровых моделей систем РА.
6. Какие методы используют в цифровых моделях для моделирования детерминированных сигналов?
7. Каким образом моделируют гауссовскую последовательность случайных чисел?

РАЗДЕЛ 9. ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В СИСТЕМАХ РАДИОАВТОМАТИКИ

Тема 15. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ФИЛЬТРОВ

15.1. Постановка задачи

Первым этапом проектирования системы РА является выбор по заданным показателям качества работы системы и по известным характеристикам сигнала и помехи – ее структурной схемы или передаточной функции, обеспечивающую в некотором смысле наилучшую (оптимальную) характеристику системы РА. Спроектированную таким образом систему РА называют *оптимальной*. Очевидно, что передаточная функция оптимальной системы зависит не только от характеристик сигнала и помехи, но и от выбранного критерия оптимальности (от выбранной оценки качества работы). При этом различным критериям оптимальности при одних и тех же характеристиках сигнала и помехи соответствуют различные передаточные функции оптимальных систем РА.

После определения оптимальной передаточной функции проектируемой системы начинается второй, не менее важный этап разработки, – реализация этой функции в виде технического устройства.

К современным системам РА предъявляют различные требования, которые помимо технических (точность работы, параметры переходного процесса и др.) включают требования по сложности, стоимости, надежности, условиям эксплуатации систем РА. Учесть эти требования при выборе критерия оптимальности обычно не удается. Во многих случаях оптимальная передаточная функция системы РА, найденная по выбранному критерию оптимальности, не удовлетворяет ряду других неучтенных показателей качества работы системы РА. Поэтому приходится корректировать параметры передаточной функции с тем, чтобы удовлетворить требованиям, не учтенным в основном показателе качества работы системы. По этим причинам технические системы обычно не являются в строгом смысле оптимальными системами, их параметры несколько отличаются от оптимальных значений, т.е. спроектированная система РА является квазиоптимальной.

Таким образом, для синтеза системы РА необходимо:

- определить статистические характеристики сигналов и помех, действующих на проектируемую систему;
- сформулировать назначение системы;
- выбрать на основании заданных технических требований к качеству работы системы критерий оптимальности;
- найти оптимальную передаточную функцию проектируемой системы РА;

- уточнить способы включения корректирующих устройств и найти их передаточные функции;
- разработать корректирующие устройства, присоединение которых к объекту управления позволяет получить систему РА с оптимальной передаточной функцией.

При синтезе большинства систем РА радиотехнических комплексов и систем радиоуправления достаточно для описания сигналов и помех ограничиться определением их математического ожидания и корреляционных функций или их спектральных плотностей.

Сформулировать назначение проектируемой системы РА – значит установить, как выходной сигнал должен быть связан с входным. Это можно описать с помощью желаемого оператора преобразования входного сигнала, который определяет идеальный выходной сигнал проектируемой системы РА:

$$Y_{жс}(p) = W_{жс}(p)X(p), \quad (15.1)$$

где $W_{жс}(p)$ – желаемая передаточная функция преобразования сигнала.

Если желаемая передаточная функция равна единице, то задачу отыскания оптимальной передаточной функции называют *задачей оптимального сглаживания* или *фильтрации*.

Задачу отыскания оптимальной передаточной функции системы РА при

$$W_{жс}(p) = e^{pT} \quad (15.2)$$

называют *задачей оптимального статистического упреждения*,

а при

$$W_{жс}(p) = p \quad \text{или} \quad W_{жс}(p) = 1/p \quad (15.3)$$

– *задачей оптимального статистического дифференцирования и интегрирования*.

Выражения (15.2) и (15.3) соответствуют передаточным функциям «идеальных систем», осуществляющих заданное преобразование сигналов без погрешностей. Очевидно, что из-за действия помех сигнал на выходе системы (рис. 15.1) $y(t)$ отличается от сигнала на выходе «идеальной системы» $y_{жс}(t)$. Для оценки приближения сигнала $y(t)$ к $y_{жс}(t)$ используются различные показатели.

Наибольшее распространение нашел критерий среднеквадратической ошибки

$$\sigma_e^2 = \overline{e^2(t)}, \quad (15.4)$$

где $e(t) = y_{жс}(t) - y(t)$ – ошибка системы РА.

При синтезе систем РА оптимальной считается система, в которой среднеквадратическая ошибка (15.4) достигает минимального значения.

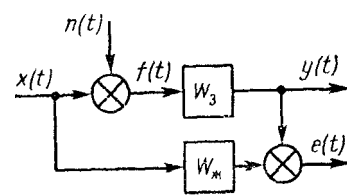


Рис. 15.1. К определению суммарной ошибки системы

Широкое применение критерия среднеквадратической ошибки объясняется тем, что оптимальная система, спроектированная из условия минимума этой ошибки, получается линейной. Кроме того, критерий (15.4) удобен с математической точки зрения. В дальнейшем при синтезе оптимальных систем РА будем использовать критерий среднеквадратической ошибки (15.4).

Найти оптимальную передаточную функцию системы несложно. Трудности, возникающие при этом, можно преодолеть с помощью современных ЭВМ.

Проектирование оптимальных систем РА имеет смысл только в том случае, когда априорные сведения о статических характеристиках сигнала и помехи достоверны и есть уверенность в том, что в процессе работы они не изменятся. В реальных системах эти условия выполняются не всегда, поэтому в инженерной практике стремятся не к оптимальной структуре системы РА, а к более простой, параметры которой выбирают из условия минимума среднеквадратической ошибки.

В ряде случаев достаточно бывает обеспечить полосу пропускания проектируемой системы РА, приблизительно равную полосе пропускания оптимальной системы, не добиваясь полного совпадения частотных характеристик оптимальной и реальной систем. Это позволяет обеспечить в проектируемой системе среднюю квадратическую ошибку, мало отличающуюся от ошибок в оптимальной системе, с одновременным удовлетворением остальных требований к системе РА. При таком подходе к проектированию оптимальная структурная схема системы РА используется как эталонная, позволяющая получить предельно достижимую среднюю квадратическую ошибку.

Ранее отмечалось, что важным этапом проектирования является техническая реализация системы РА по найденной оптимальной передаточной функции. Трудности этого этапа связаны с тем, что, во-первых, характеристики объекта управления проектируемой системы известны лишь приблизительно, во-вторых, для реализации оптимальной структурной схемы системы, как правило, недостаточно информации о входных и выходных сигналах (в ряде случаев требуется информация о производных этих сигналов), и в-третьих, для технической реализации устройств такой системы может потребоваться разработка сложных электронных приборов. Указанные особенности нужно учитывать во время проектирования систем РА при случайных воздействиях.

15.2. Синтез систем при заданной структурной схеме

Задача синтеза системы РА при заданной структурной схеме заключается в том, что при известных характеристиках сигнала и помехи нужно определить оптимальные значения параметров системы, при которых суммарная средняя квадратическая ошибка минимальна. Так как структурная схема системы из-

вестна, то нетрудно найти выражение для суммарной средней квадратической ошибки как функцию параметров системы:

$$\sigma_e^2 = f(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n), \quad (15.5)$$

где β_i – параметры системы.

Для расчета оптимальных значений параметров нужно исследовать на минимум функцию (15.5). Для этого нужно решить следующую систему уравнений:

$$\frac{d}{d\beta_i} \sigma_e^2 = 0, i = 1, 2, \dots, n. \quad (15.6)$$

Обычно минимум суммарной среднеквадратической ошибки при оптимальных значениях параметров следует из анализа физического содержания задачи, поэтому нет необходимости в вычислении второй производной. Если вторая производная положительна, то при найденных оптимальных параметрах имеет место минимум суммарной средней квадратической ошибки системы РА.

В процессе синтеза системы РА обычно требуется вычислить оптимальные значения только настраиваемых параметров (коэффициент усиления и одна или две постоянных времени корректирующего устройства) системы, число которых в системах невелико, что облегчает задачу оптимизации.

► **Пример 15.1.** Найти оптимальное значение коэффициента усиления в системе РА, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии

$$W_p(p) = \frac{K}{p(1+pT)}. \quad (15.7)$$

Решение. На систему действуют сигнал и помеха, спектральные плотности которых $S_x(\omega) = N_x/\omega^2$; $S_n(\omega) = N_n$. Суммарная средняя квадратическая ошибка системы

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[|W_e(j\omega)W_\phi(j\omega)|^2 N_x + |W_3(j\omega)|^2 N_n \right] d\omega = N_x \frac{1+KT}{2K} + N_n \frac{K}{2},$$

где $W_e(j\omega) = \frac{j\omega(1+j\omega T)}{(j\omega)^2 T + j\omega + K}$ – частотная характеристика ошибки системы;

$W_\phi(j\omega) = 1/(j\omega)$ – частотная характеристика формирующего фильтра сигнала;

$W_3(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2 T + j\omega + K}$ – частотная характеристика замкнутой системы.

Оптимальное значение коэффициента усиления определим из условия (15.6); для рассматриваемой задачи оно имеет вид

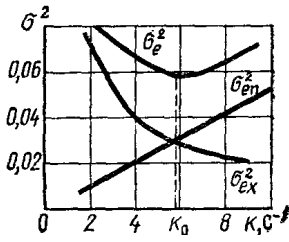


Рис. 15.2. К определению оптимального коэффициента усиления системы

$$\frac{d}{dK} \sigma_e^2 = -\frac{N_x}{2K^2} + \frac{N_n}{2} = 0.$$

Тогда оптимальный коэффициент усиления

$$K_{opt} = \sqrt{N_x / N_n}.$$

На рис. 15.2 показаны кривые изменения составляющих средней квадратической ошибки системы РА в зависимости от коэффициента усиления для $N_x = 0,76 \cdot 10^{-4} \text{ рад}^2 \cdot \text{с}$; $N_n = 0,305 \cdot 10^{-4} \text{ рад}^2 \cdot \text{с}$; $T = 0,1 \text{ с}$. ◀

15.3. Физический смысл оптимальной полосы пропускания

Рассмотрим систему РА с частотной характеристикой (рис. 15.3)

$$W(j\omega) = \begin{cases} e^{j\omega} & \text{при } \omega \leq \omega_n; \\ 0 & \text{при } \omega > \omega_n, \end{cases} \quad (15.8)$$

где ω_n – ширина полосы пропускания системы РА.

Если сигнал и помеха некоррелированы, то дисперсия ошибки системы с частотной характеристикой (15.8) в соответствии с выражением (7.9)

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_n}^{\infty} S_x(\omega) d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_n} S_n(\omega) d\omega = \sigma_{ex}^2 + \sigma_{en}^2, \quad (15.9)$$

где σ_e – средняя квадратическая ошибка; $S_x(\omega)$ – спектральная плотность сигнала; $S_n(\omega)$ – спектральная плотность помехи; σ_{ex} – средняя квадратическая ошибка относительно сигнала; σ_{en} – средняя квадратическая ошибка из-за действия помехи.

Из выражения (15.9) следует, что средняя квадратическая ошибка системы РА зависит от ширины полосы пропускания. Полосу пропускания системы РА, при которой средняя квадратическая ошибка принимает минимальное значение, называют *оптимальной*.

На рис. 15.4 показаны графики спектральных плотностей сигнала и помехи. Так как в данном случае эти графики не перекрываются, то оптимальная полоса пропускания системы равна граничной частоте спектра сигнала. В этом случае средняя квадратическая ошибка системы РА равна нулю, так как все составляющие спектра сигнала воспроизводятся системой и ни одна составляющая спектра помехи не проходит на ее выход.

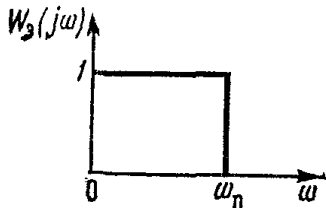


Рис. 15.3. Идеальная ЛЧХ

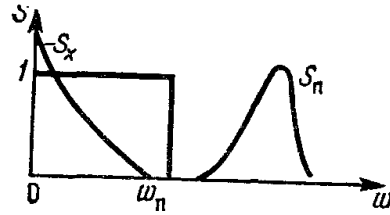


Рис. 15.4. К определению оптимальной полосы пропускания при неперекрывающихся спектрах сигнала и помехи

Если графики спектральных плотностей сигнала и помехи перекрываются, то обе составляющие средней квадратической ошибки системы в выражении (15.9) не равны нулю. Из рис. 15.5 видно, что первая составляющая (средняя квадратическая ошибка воспроизведения сигнала) определяется той частью спектральной плотности сигнала, которая расположена за полосой пропускания системы (площадь 1 под графиком спектральной плотности сигнала). С расширением полосы пропускания эта составляющая ошибки уменьшается (см. рис. 15.5). Вторая составляющая средней квадратической ошибки системы, обусловленная помехой, зависит от той части спектральной плотности помехи, которая совпадает с полосой пропускания системы (площадь 2 на рис. 15.6). С расширением полосы пропускания среднеквадратическая ошибка из-за действия помехи увеличивается (рис. 15.5). Оптимальная полоса пропускания системы РА соответствует минимальной среднеквадратической ошибке. Для ее вычисления продифференцируем выражение (15.9) по полосе пропускания ω_n и полученный результат приравняем нулю.

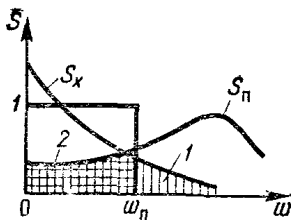


Рис. 15.5. Зависимость средней квадратической ошибки системы РА от ω_n

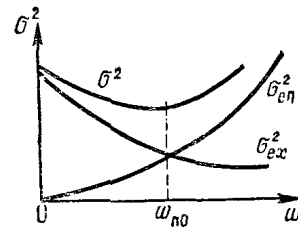


Рис. 15.6. К пояснению оптимальной полосы пропускания системы РА

В результате получим:

$$-\frac{1}{\pi} S_x(\omega_{n0}) + \frac{1}{\pi} S_n(\omega_{n0}) = 0. \quad (15.10)$$

Из этого выражения следует, что оптимальная полоса пропускания системы – это частота, на которой выполняется равенство

$$S_x(\omega_{n0}) = S_n(\omega_{n0}). \quad (15.11)$$

Так как частотные характеристики систем РА отличаются от идеальной характеристики (15.8), то оптимальная полоса пропускания, найденная из выражения (15.11), получается приближенной. Как показывает практика, ошибки при этом не превышают 10 – 20 %.

Минимум суммарной средней квадратической ошибки системы определяется не только полосой пропускания, но и видом ее частотной характеристики. Поэтому в общем случае синтез системы заключается в нахождении ее оптимальных частотных характеристик из условия минимума суммарных средних квадратических ошибок при заданных статистических характеристиках сигнала и помехи.

15.4. Синтез оптимальных систем

Сформулируем постановку задачи синтеза оптимальных систем в смысле получения минимума среднеквадратической ошибки (фильтрация Винера). На вход проектируемой системы действуют стационарные сигнал и помеха, автокорреляционные функции которых известны. Математические ожидания сигнала и помехи равны нулю. Желаемый выходной сигнал синтезируемой системы определяется заданной частотной характеристикой.

Необходимо найти передаточную функцию системы, при которой суммарная средняя квадратическая ошибка системы (см. рис. 15.1) минимальна:

$$\sigma_e = \sqrt{\overline{e^2(t)}} = \min, \quad (15.12)$$

где $e(t) = y_{жс}(t) - y(t)$ – ошибка системы; $y_{жс}(t)$ – желаемый выходной сигнал системы; $y(t)$ – выходной сигнал системы.

Рассмотрим задачу оптимальной фильтрации. В этом случае

$$\begin{aligned} W_{жс}(j\omega) &= 1, \text{ т.е.} \\ y_{жс}(t) &= x(t). \end{aligned} \quad (15.13)$$

Согласно (15.12) дисперсия ошибки

$$\sigma^2 = \overline{[x(t) - y(t)]^2} = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\sigma_{xy}^2. \quad (15.14)$$

Дисперсию выходного сигнала синтезируемой системы РА σ_y^2 найдем аналогично дисперсии ошибки системы (7.7):

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} w(\eta) R_f(\lambda - \eta) d\eta d\lambda, \quad (15.15)$$

где $w(t)$ – импульсная переходная функция системы; $R_f(\tau)$ – автокорреляционная функция суммарного входного сигнала; $f(t) = x(t) + n(t)$; $n(t)$ – помеха.

Таким же образом получим:

$$\sigma_{xy}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda) R_{xf}(\lambda) d\lambda, \quad (15.16)$$

где $R_{xf}(\tau)$ – взаимная корреляционная функция сигнала с суммарным воздействием.

Подставив выражения (15.15) и (15.16) в (15.14), определим:

$$\sigma_e^2 = \sigma_x^2 + \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} w(\eta) R_f(\lambda - \eta) d\eta d\lambda - 2 \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda) R_{xf}(\lambda) d\lambda. \quad (15.17)$$

Синтез оптимальной системы сводится к нахождению импульсной переходной функции из (15.17). Для решения этой задачи дадим вариацию импульсной переходной функции:

$$w(t) = w_0(t) + \delta w(t), \quad (15.18)$$

где $w_0(t)$ – искомая оптимальная импульсная переходная функция проектируемой системы РА; δ – вариация импульсной переходной функции.

Импульсную переходную функцию, минимизирующую дисперсию ошибки (15.17), определим из условия

$$\frac{R}{d\delta} \sigma^2 \Big|_{\delta=0} = 0. \quad (15.19)$$

Подставим формулу (15.18) в (15.17). Тогда оптимальная импульсная переходная функция проектируемой системы РА с учетом (15.19) должна удовлетворять уравнению

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{\infty} w_0(\eta) R_f(\lambda - \eta) d\eta - R_{xf}(\lambda) \right] d\lambda = 0. \quad (15.20)$$

Так как неоптимальная импульсная переходная функция $w(t)$ – функция произвольная, то уравнение (15.20) выполняется только в том случае, когда

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_0(\eta) R_f(t - \eta) d\eta - R_{xf}(t) = 0, \quad (15.21)$$

где переменная λ заменена на t .

Выражение (15.21) называют *уравнением Винера – Хопфа*.

Средняя квадратическая ошибка выделения сигнала из воздействия в установившемся режиме – постоянная величина, ее значение определяется из выражения (15.17), в котором вместо $w(t)$ нужно подставить $w_0(t)$. Тогда с учетом уравнения (15.21)

$$\sigma_{e \min}^2 = \sigma_x^2 - \int_{-\infty}^{\infty} w_0(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} w_0(\eta) R_f(\lambda - \eta) d\eta d\lambda. \quad (15.22)$$

Решение уравнения Винера – Хопфа во временной области является сложной задачей. Значительно проще решить эту задачу в частотной области, т.е. найти оптимальную частотную характеристику системы. С этой целью применим к уравнению (15.21) преобразование Фурье. В результате получим:

$$W_0(j\omega) S_f(\omega) = S_{xf}(\omega). \quad (15.23)$$

Из этого уравнения найдем оптимальную частотную характеристику:

$$W_0(j\omega) = \frac{S_{xf}(\omega)}{S_f(\omega)} = \frac{S_{xf}(\omega)}{\psi(j\omega)\psi(-j\omega)}, \quad (15.24)$$

где $S_f(\omega)$ – спектральная плотность суммарного сигнала на входе проектируемой системы; $S_{xf}(\omega)$ – взаимная спектральная плотность сигнала с суммарным сигналом; $\psi(j\omega)$ – функция, все полюсы которой на плоскости комплексного переменного $p = j\omega$ расположены в левой полуплоскости; $\psi(-j\omega)$ – функция, все полюсы которой расположены в правой полуплоскости.

В общем случае

$$\begin{aligned} S_{xf}(\omega) &= S_x(\omega) + S_{xn}(\omega); \\ S_f(\omega) &= S_x(\omega) + S_{xn}(\omega) + S_n(\omega) + S_{nx}(\omega). \end{aligned} \quad (15.25)$$

Если сигнал и помеха некоррелированы, то

$$\begin{aligned} S_{xf}(\omega) &= S_x(\omega); \\ S_f(\omega) &= S_x(\omega) + S_n(\omega). \end{aligned} \quad (15.26)$$

Из выражений (15.24) – (15.26) следует, что оптимальная частотная характеристика выделяет составляющие сигнала на частотах, на которых его спектральная плотность сравнительно велика, и ослабляет составляющие сигналы на частотах с максимальной спектральной плотностью помехи.

С учетом оптимальной частотной характеристики минимальное значение дисперсии ошибки для некоррелированных сигнала и помехи в соответствии с выражением (7.9)

$$\sigma_{e\min}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_x(\omega)S_n(\omega)}{S_x(\omega) + S_n(\omega)} d\omega. \quad (15.27)$$

Таким образом, если спектры сигнала и помехи не перекрываются, то средняя квадратическая ошибка может быть равна нулю.

Спектральная плотность является четной функцией относительно частоты ω , поэтому полюсы характеристики (15.24) расположены на комплексной плоскости как слева, так и справа от мнимой оси. Поэтому найденная оптимальная частотная характеристика (15.24) соответствует физически нереализуемой неустойчивой системе. Дальнейший синтез оптимальной системы сводится к определению реализуемой оптимальной частотной характеристики, наиболее близкой к полученной нереализуемой (15.24).

Реализуемая оптимальная частотная характеристика определяется выражением

$$W_0(j\omega) = \frac{1}{\psi(j\omega)} \left[\frac{S_{xf}(\omega)}{\psi(-j\omega)} \right]^+, \quad (15.28)$$

где операция [...]⁺ означает выделение слагаемых, полюсы которых на плоскости комплексного переменного расположены слева от мнимой оси.

В случае, часто встречающемся в инженерной практике, когда функция

$$\frac{S_{xf}(\omega)}{\psi(-j\omega)} \quad (15.29)$$

является дробно-рациональной функцией относительно частоты, выделение слагаемых с полюсами, расположенными слева от мнимой оси, осуществляется путем разложения (15.29) на простые дроби:

$$\frac{S_{xf}(\omega)}{\psi(-j\omega)} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\omega - \omega_i}, \quad (15.30)$$

где

$$\alpha_i = (\omega - \frac{1}{\lambda_i}) \frac{S_{xf}(\omega)}{\psi(-j\omega)}; \quad (15.31)$$

λ_i – полюсы выражения (15.29).

Дисперсия ошибки в системе с частотной характеристикой (15.28) будет больше значения, определяемого по выражению (15.27) и найденного без учета физической реализуемости оптимальной системы. Однако среди реализуемых устройств система РА с характеристикой (15.28) обеспечивает наименьшее значение среднеквадратической ошибки выделения сигнала из его смеси с помехой.

Согласно (15.28) передаточная функция оптимальной проектируемой системы

$$W_0(p) = W_0(j\omega)|_{j\omega=p}. \quad (15.32)$$

Тогда передаточная функция последовательного корректирующего устройства, включаемого в цепь сигнала ошибки,

$$W_k(p) = W_{po}(p)/W_{pu}(p), \quad (15.33)$$

где $W_{po}(p)$ – передаточная функция разомкнутой оптимальной системы; $W_{pu}(p)$ – передаточная функция исходной части, составленная из функционально необходимых устройств системы.

Если для коррекции используется стабилизирующая обратная связь, то передаточную функцию цепи обратной связи можно вычислить по формуле (10.24) с учетом (15.33).

► **Пример 15.2.** Найти передаточную функцию последовательного корректирующего устройства в оптимальной системе автоподстройки частоты, структурная схема которой показана на рис. 1.3, для случая, когда спектральные плотности сигнала и помехи определяются выражениями

$$S_x(\omega) = \frac{N_x}{1 + \omega^2 T_x^2}; \quad S_n(\omega) = N_n. \quad (15.34)$$

Решение. Инерционностью усилителя и дискриминатора системы пренебрегаем. Тогда передаточная функция исходной части системы автоподстройки частоты

$$W_{pu}(p) = \frac{K_{pu}}{1 + pT_2}, \quad (15.35)$$

где T_2 – постоянная времени гетеродина; $K_{pu} = K_0 K_y K_z$.

Спектральная плотность смеси сигнала с помехой

$$S_f(\omega) = S_x(\omega) + S_n(\omega) = B \frac{1 + j\omega T_0}{1 + j\omega T_x} \frac{1 - j\omega T_0}{1 - j\omega T_x}, \quad (15.36)$$

где $B = N_x + N_n$; $T_0^2 = T_x^2 \frac{N_x}{N_x + N_n}$.

Таким образом,

$$\psi(j\omega) = \sqrt{B} \frac{1 + j\omega T_0}{1 + j\omega T_x}; \quad \psi(-j\omega) = \sqrt{B} \frac{1 - j\omega T_0}{1 - j\omega T_x}. \quad (15.37)$$

В соответствии с выражением (15.28)

$$W_0(j\omega) = \frac{1}{\psi(j\omega)} \left[\frac{\alpha_1}{1 + j\omega T_x} + \frac{\alpha_2}{1 - j\omega T_0} \right]^+ \frac{N_x}{\sqrt{B}} = \frac{1}{\psi(j\omega)} \frac{\alpha_1}{1 + j\omega T_x} \frac{N_x}{\sqrt{B}}. \quad (15.38)$$

По методу неопределенных коэффициентов

$$\alpha_1 = T_x / (T_x + T_0). \quad (15.39)$$

В соответствии с (15.38) и (15.39) оптимальная частотная характеристика проектируемой системы автоподстройки частоты

$$W_0(j\omega) = \frac{K_0}{1 + j\omega T_0}, \quad (15.40)$$

где $K_0 = \alpha_1 \frac{N_x}{B}$.

Для наглядности выразим параметры оптимальной частотной характеристики через коэффициент, равный отношению уровней спектральной плотности сигнала и помехи.

В результате получим:

$$K_0 = 1 - 1/\sqrt{1+\rho}, \quad T_0 = T/\sqrt{1+\rho}, \quad (15.41)$$

где $\rho = N_x/N_n$.

На рис. 15.7 показаны зависимости коэффициента усиления K_0 и постоянной времени T_0 от коэффициента ρ , из которых видно, что с увеличением ρ постоянная времени оптимальной системы уменьшается (ее предельное значение равно нулю), а коэффициент усиления растет (его предельное значение равно единице). Таким образом, при отсутствии помехи оптимальная система является безынерционным звеном (дисперсия ошибки равна нулю).

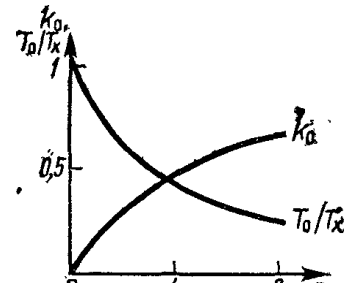


Рис. 15.7. Зависимость оптимальных параметров системы от отношения сигнал/шум

Дисперсию суммарной ошибки в оптимальной системе автоподстройки частоты определим по формуле (7.9):

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[|1 - W_0(j\omega)|^2 S_x(\omega) + |W_0(j\omega)|^2 S_n(\omega) \right] d\omega = \frac{T_0 - (1 - K_0)^2 T_x}{2T_x(T_0 + T_x)} N_x + \frac{K_0^2}{2T_0} N_n.$$

Принимая во внимание введенное обозначение ρ ,

$$\sigma_e^2 = \frac{N_x}{2T_x \sqrt{1+\rho}} \left[1 + \frac{\rho}{(\sqrt{1+\rho} + 1)^2} \right]. \quad (15.42)$$

Вычислим дисперсию ошибки по формуле (15.27):

$$\sigma_{e \min}^2 = \frac{N_x}{2T_x \sqrt{1+\rho}}.$$

Полученное значение меньше дисперсии ошибки, рассчитанной по оптимальной частотной характеристике. Это объясняется тем, что формула (15.27) найдена без учета физической реализуемости системы.

Передающая функция разомкнутой оптимальной системы автоподстройки частоты

$$W_{p0}(p) = \frac{K_{p0}}{1 + pT},$$

где $K_{p0} = K_0/(1 - K_0)$; $T = T_0/(1 - K_0)$.

Передающая функция последовательного корректирующего устройства в соответствии с выражением (15.33)

$$W_k(p) = k_k \frac{1 + pT_z}{1 + pT},$$

где $k_k = K_{p0}/K_{pi}$ — коэффициент передачи корректирующего устройства.

Корректирующее устройство в оптимальной системе автоподстройки частоты включают между усилителем и дискриминатором, оно может быть реализовано RC -цепью с отставанием по фазе. ◀

В заключение отметим, что при нестационарных воздействиях оптимальная система оказывается нестационарной, определение оптимальной переходной функции которой является сложной задачей. Поэтому при проектировании нестационарных оптимальных систем метод Винера не применяется. Решение нестационарных задач проектирования систем РА базируется на оптимальных фильтрах Калмана .

15.5. Постановка задачи синтеза оптимального дискретного фильтра

Современные методы расчета оптимальных фильтров основываются на том, что случайные сигналы генерируются из белого шума с помощью формирующих фильтров. Для стационарных случайных сигналов может быть найдена дискретная передаточная функция формирующего фильтра. Для этого необходимо спектральную плотность дискретного случайного сигнала представить в виде произведения двух комплексно-сопряженных функций:

$$S(\nu) = N W_{\phi}(j\nu) W_{\phi}(-j\nu),$$

где $W_{\phi}(j\nu)$ – частотная характеристика формирующего фильтра относительно псевдочастоты; N – интенсивность белого шума на входе формирующего фильтра.

Для математического описания сигнала при решении оптимальных задач используется передаточная функция формирующего фильтра в виде Z -преобразования

$$W_{\phi}(z) = W_{\phi}(j\nu) \Big|_{j\nu = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}}. \quad (15.43)$$

Передаточная функция (15.43) определяет векторное разностное уравнение формирующего фильтра.

Решение оптимальной задачи заключается в определении оценки вектора переменных состояния формирующего фильтра сигнала и ошибки оценки

$$\mathbf{E}(n/j) = \mathbf{G}(n) - \hat{\mathbf{G}}(n/j). \quad (15.44)$$

Следовательно, $\mathbf{G}(n/j)$ и $\mathbf{E}(n/j)$ определяются в дискретные моменты времени $t = nT$ на основании их j предыдущих значений. Различают три случая:

- 1) если $n > j$, то задачу оценки называют предсказанием;
- 2) если $n = j$, то задачу оценки называют задачей фильтрации;
- 3) если $n < j$, то задачу оценки считают задачей интерполяции.

В дальнейшем рассматривается задача фильтрации. После предварительных замечаний сформулируем задачу синтеза оптимальных фильтров (рис. 15.8).

Полагаем, что случайный дискретный сигнал $X(n)$ является результатом прохождения белого шума через формирующий фильтр, векторное разностное уравнение которого имеет такой вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(n+1) &= \mathbf{\Phi}(n+1, n)\mathbf{G}(n) + \mathbf{B}(n+1)\mathbf{V}(n); \\ \mathbf{X}(n+1) &= \mathbf{C}^T(n+1)\mathbf{G}(n+1), \end{aligned} \quad (15.45)$$

где $\mathbf{G}(n)$ – вектор переменных состояния сигнала; $\mathbf{\Phi}(n+1, n)$ – дискретная матрица перехода; $\mathbf{B}(n+1)$ – матрица управления; $\mathbf{C}^T(n+1)$ – транспонированная матрица наблюдения.

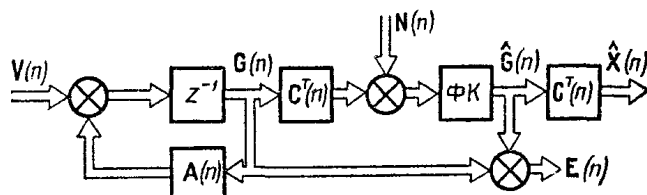


Рис. 15.8. К постановке задачи дискретного фильтра Калмана

Гауссовская случайная последовательность $\mathbf{V}(n)$ имеет характеристики

$$M[\mathbf{V}(n)] = 0; \quad M[\mathbf{V}(n) \mathbf{V}^T(j)] = \mathbf{Q}(n) \delta_{nj}, \quad (15.46)$$

где $\mathbf{Q}(n)$ – матрица интенсивностей белых шумов на входе формирующего фильтра вектора сигнала;

$$\delta_{nj} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = j; \\ 0 & \text{при } n \neq j; \end{cases}$$

M означает взятие математического ожидания от выражения, заключенного в квадратные скобки.

Начальное состояние вектора переменных состояния $\mathbf{G}(0)$ характеризуется гауссовским распределением с характеристиками

$$M[\mathbf{G}(0)] = 0, \quad M[\mathbf{G}(0)\mathbf{G}^T(0)] = \mathbf{R}_E(0). \quad (15.47)$$

Измеряемый сигнал (воздействие на входе синтезируемого фильтра)

$$\mathbf{F}(n) = \mathbf{C}^T(n) \mathbf{G}(n) + \mathbf{N}(n), \quad (15.48)$$

где $\mathbf{N}(n)$ – вектор помех с характеристиками. При этом

$$M[\mathbf{N}(n)] = 0; \quad M[\mathbf{N}(n)\mathbf{N}^T(j)] = \mathbf{P}(n)\delta_{nj}, \quad (15.49)$$

где $\mathbf{P}(n)$ – матрица интенсивностей белых шумов вектора помех.

Случайные последовательности $\mathbf{V}(n)$ и $\mathbf{N}(n)$ полагаем некоррелированными.

Задача синтеза состоит в том, чтобы найти векторное разностное уравнение фильтра, обеспечивающего по измеренным значениям сигнала (15.48) $\mathbf{F}(1)$, $\mathbf{F}(2)$, ..., $\mathbf{F}(n)$ оптимальную текущую оценку вектора переменных состояния сигнала с минимальной дисперсией ошибки:

$$M[\mathbf{E}^T(n)]\mathbf{E}(n)] = \min, \quad (15.50)$$

где $\mathbf{E}(n) = \mathbf{G}(n) - \hat{\mathbf{G}}(n/n)$ – вектор ошибки; $\hat{\mathbf{G}}(n/n)$ – оценка вектора переменных состояния сигнала.

15.6. Дискретный фильтр Калмана

Найдем векторное разностное уравнение оптимального фильтра Калмана. По определению оценка вектора переменных состояния сигнала определяется выражением [12]

$$\hat{\mathbf{G}}(n+1/n+1) = M[\mathbf{G}(n+1)/\mathbf{F}(1), \mathbf{F}(2), \dots, \mathbf{F}(n+1)]. \quad (15.51)$$

Введем с помощью соотношения

$$\tilde{\mathbf{F}}(n+1/n) = \mathbf{F}(n+1) - M[\mathbf{F}(n+1)/\mathbf{F}(1), \dots, \mathbf{F}(n)] \quad (15.52)$$

невязку измеряемого сигнала (15.48). Принимая во внимание, что математическое ожидание $F(j)$ равно нулю, выражение (15.51) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{G}}(n+1/n+1) &= M[\mathbf{G}(n+1)/\mathbf{F}(1), \mathbf{F}(2), \dots, \mathbf{F}(n)] + \\ &+ M[\mathbf{G}(n+1)/\tilde{\mathbf{F}}(n+1/n)] = \mathbf{G}(n+1/n) + M[\mathbf{G}(n+1)/\tilde{\mathbf{F}}(n+1/n)]. \end{aligned} \quad (15.53)$$

Так как $\mathbf{G}(n+1)$ и $\mathbf{F}(n+1/n)$ – гауссовские последовательности с нулевыми математическими ожиданиями, то второе слагаемое в выражении (15.53) можно записать так:

$$M[\mathbf{G}(n+1)/\tilde{\mathbf{F}}^T(n+1/n)] = \mathbf{R}_{G\tilde{\mathbf{F}}} \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{F}}}^{-1} \tilde{\mathbf{F}}(n+1/n), \quad (15.54)$$

где $\mathbf{R}_{G\tilde{\mathbf{F}}} = M[\mathbf{G}(n+1)/\tilde{\mathbf{F}}^T(n+1/n)]$, $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{F}}} = M[\tilde{\mathbf{F}}(n+1/n)\tilde{\mathbf{F}}^T(n+1/n)]$ – матрицы корреляционных моментов.

Введем матрицу усиления

$$\mathbf{K}(n+1) = \mathbf{R}_{G\tilde{\mathbf{F}}} \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{F}}}^{-1}. \quad (15.55)$$

Учитывая, что $\hat{\mathbf{G}}(n+1/n) = \Phi(n+1, n) \hat{\mathbf{G}}(n/n)$, выражение (15.53) представим в виде

$$\hat{\mathbf{G}}(n+1/n+1) = \Phi(n+1, n) \hat{\mathbf{G}}(n/n) + \mathbf{K}(n+1) \tilde{\mathbf{F}}(n+1/n). \quad (15.56)$$

Первое слагаемое в этом выражении определяет оценку в момент времени $t = (n+1)T$ по результатам n измерений, второе уточняет эту оценку по последнему измерению.

Измеряемый сигнал характеризуется выражением (15.48). Невязка этого сигнала (15.52) некоррелирована с вектором помехи $N(n)$, поэтому выражение (15.52) можно записать так:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}(n+1/n) &= \mathbf{F}(n+1) - \mathbf{C}^T(n+1) \hat{\mathbf{G}}(n+1/n) = \\ &= \mathbf{F}(n+1) - \mathbf{C}^T(n+1) \Phi(n+1, n) \hat{\mathbf{G}}(n/n). \end{aligned} \quad (15.57)$$

Подставив (15.57) в уравнение (15.56), найдем, что

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{G}}(n+1/n+1) &= \Phi(n+1, n) \hat{\mathbf{G}}(n/n) + \mathbf{K}(n+1)[\mathbf{F}(n+1) - \\ &- \mathbf{C}^T(n+1) \Phi(n+1, n) \hat{\mathbf{G}}(n/n)]. \end{aligned} \quad (15.58)$$

Выражение (15.58) является векторным разностным уравнением оптимального фильтра, в соответствии с которым на рис. 15.9 построена структурная схема фильтра. Из этой схемы видно, что найденный оптимальный фильтр – это система с обратной связью, внутренним контуром которой является формирующий фильтр сигнала, а параметры обратной связи определяются матрицей усиления. Найдем эту матрицу. Для этого подставим в выражение (15.57) вектор (15.58). В результате получим:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{F}}(n+1/n) &= \mathbf{C}^T(n+1) \mathbf{G}(n+1) + \mathbf{N}(n+1) - \mathbf{C}^T(n+1) \mathbf{G}(n+1/n) = \\ &= \mathbf{C}^T(n+1) \mathbf{E}(n+1/n) + \mathbf{N}(n+1),\end{aligned}\quad (15.59)$$

где $\mathbf{E}(n+1/n) = \mathbf{G}(n+1) - \hat{\mathbf{G}}(n+1/n)$ – вектор ошибки.

Рассмотрим второй сомножитель матрицы усиления (15.55). С учетом выражения (15.59)

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{F}}} &= M[\tilde{\mathbf{F}}(n+1/n) \tilde{\mathbf{F}}(n+1/n)] = M\{[\mathbf{C}^T(n+1) \mathbf{E}(n+1/n) + \mathbf{N}(n+1)] \times \\ &\times [\mathbf{C}^T(n+1) \mathbf{E}(n+1/n) + \mathbf{N}(n+1)]^T\}.\end{aligned}$$

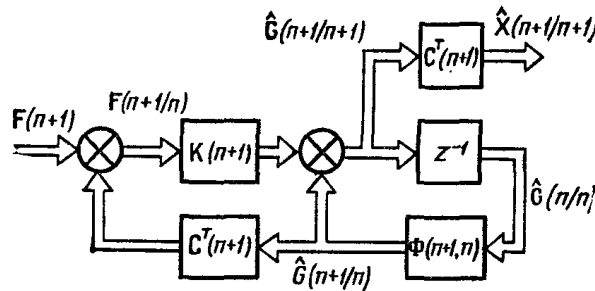


Рис. 15.9. Структурная схема оптимального фильтра

После выполнения операций умножения получим:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{F}}} &= \mathbf{C}^T(n+1) \mathbf{R}_E(n+1/n) \mathbf{C}(n+1) + \mathbf{C}^T(n+1) M[\mathbf{E}(n+1/n) \mathbf{N}^T(n+1)] + \\ &+ M[\mathbf{N}(n+1) \mathbf{E}^T(n+1/n)] + \mathbf{P}(n+1),\end{aligned}\quad (15.60)$$

где $\mathbf{R}_E(n+1/n) = M[\mathbf{E}(n+1/n) \mathbf{E}^T(n+1/n)]$ – матрица корреляционных моментов ошибки; $\mathbf{P}(n+1)$ – матрица интенсивности вектора помехи.

Второе и третье слагаемое в (15.60) равны нулю. Действительно, принимая во внимание вектор ошибки, из уравнения (15.59) можно записать, что

$$\begin{aligned}M[\mathbf{E}(n+1/n) \mathbf{N}^T(n+1)] &= M\{[\mathbf{G}(n+1) - \hat{\mathbf{G}}(n+1/n)] \mathbf{N}^T(n+1)\} = \\ &= M[\mathbf{G}(n+1) \mathbf{N}^T(n+1)] - M[\hat{\mathbf{G}}(n+1/n) \mathbf{N}^T(n+1)].\end{aligned}\quad (15.61)$$

Вектор переменных состояния и вектор помех некоррелированы между собой, поэтому первое слагаемое в (15.61) равно нулю.

Оценку $\hat{\mathbf{G}}(n+1/n)$ с учетом выражения (14.16) представим в виде

$$\hat{\mathbf{G}}(n+1/n) = \prod_{i=0}^n \mathbf{A}(i)\mathbf{G}(n/n), \quad (15.62)$$

где $\mathbf{A}(i)$ – матрица формирующего фильтра сигнала.

Так как начальное состояние оценки вектора переменных состояния сигнала равно нулю, то выражение (15.62) также равно нулю. Поэтому второе слагаемое в (15.61) равно нулю и матрица корреляционных моментов (15.60) получается следующей:

$$\mathbf{R}_{\tilde{F}\tilde{F}} = \mathbf{C}^T(n+1) \mathbf{R}_E(n+1/n) \mathbf{C}(n+1) + \mathbf{P}(n+1). \quad (15.63)$$

Рассмотрим первый сомножитель матрицы усиления (15.55). Согласно (15.59)

$$\mathbf{R}_{G\tilde{F}} = M\{[\mathbf{E}(n+1/n) + \hat{\mathbf{G}}(n+1/n)][\mathbf{C}^T(n+1)\mathbf{E}(n+1/n) + \mathbf{N}(n+1)]^T\}.$$

Раскрыв в этом выражении скобки, найдем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{G\tilde{F}} &= M[\mathbf{E}(n+1/n) \mathbf{E}^T(n+1/n)]\mathbf{C}(n+1) + M[\hat{\mathbf{G}}(n+1/n) \mathbf{E}^T(n+1/n)]\mathbf{C}(n+1) + \\ &+ M[\mathbf{E}(n+1/n) \mathbf{N}^T(n+1)] + M[\hat{\mathbf{G}}(n+1/n) \mathbf{N}^T(n+1)]. \end{aligned}$$

Так как оценка вектора переменных состояния не зависит от $\mathbf{E}(n+1/n)$ при любых n , то второе и третье слагаемые в последнем выражении равны нулю. В соответствии с (15.61) оказывается равным нулю и четвертое слагаемое, поэтому

$$\mathbf{R}_{G\tilde{F}} = \mathbf{R}_E(n+1/n)\mathbf{C}(n+1). \quad (15.64)$$

Подставив выражения (15.63) и (15.64) в матрицу усиления (15.55), получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(n+1) &= \mathbf{R}_E(n+1/n)\mathbf{C}(n+1)[\mathbf{C}^T(n+1) \mathbf{R}_E(n+1/n)\mathbf{C}(n+1) + \\ &+ \mathbf{P}(n+1)]^{-1}. \end{aligned} \quad (15.65)$$

Матрица корреляционных моментов ошибки в (15.65) с учетом того, что $\mathbf{E}(n+1/n)$ и $\hat{\mathbf{G}}(n+1/n)$ не зависят друг от друга, определяется по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_E(n+1/n) &= \mathbf{\Phi}(n+1, n) \mathbf{R}_E(n/n)\mathbf{\Phi}^T(n+1, n) + \\ &+ \mathbf{B}(n+1)\mathbf{Q}(n)\mathbf{B}^T(n+1). \end{aligned} \quad (15.66)$$

Таким образом, матрица усиления оптимального фильтра определена. Найдем выражение для вектора ошибки фильтрации:

$$\mathbf{E}(n+1/n+1) = \mathbf{G}(n+1) - \mathbf{G}(n+1/n+1). \quad (15.67)$$

Подставив в (15.67) оценку вектора переменных состояния (15.66), получим:

$$\mathbf{E}(n + 1/n + 1) = \mathbf{G}(n + 1) - [\hat{\mathbf{G}}(n + 1/n) + \mathbf{K}(n + 1) \tilde{\mathbf{F}}(n + 1/n)],$$

или, учтя уравнение (15.59),

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(n + 1/n + 1) &= \mathbf{E}(n + 1/n) - \mathbf{K}(n + 1)[\mathbf{C}^T(n + 1) \mathbf{E}(n + 1/n) + \mathbf{N}(n + 1)] = \\ &= [\mathbf{1} + \mathbf{K}(n + 1) \mathbf{C}^T(n + 1)]\mathbf{E}(n + 1/n) - \mathbf{K}(n + 1)\mathbf{N}(n + 1), \end{aligned} \quad (15.68)$$

где $\mathbf{1}$ – единичная матрица.

Матрица корреляционных моментов ошибки по определению имеет вид

$$\mathbf{R}_E(n + 1/n + 1) = M[\mathbf{E}(n + 1/n + 1) \mathbf{E}^T(n + 1/n + 1)].$$

Подставив в это выражение уравнение (15.68), с учетом

$$M[\mathbf{E}(n + 1/n)\mathbf{N}^T(n + 1)] = M[\mathbf{N}(n + 1)\mathbf{E}^T(n + 1/n)] = 0,$$

определим:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_E(n + 1/n + 1) &= [\mathbf{1} - \mathbf{K}(n + 1) \mathbf{C}^T(n + 1)] \mathbf{R}_E(n + 1/n) \times \\ &\times [\mathbf{1} - \mathbf{K}(n + 1) \mathbf{C}^T(n + 1)]^T + \mathbf{K}(n + 1)\mathbf{P}(n + 1)\mathbf{K}^T(n + 1). \end{aligned} \quad (15.69)$$

Согласно (15.65)

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(n + 1)[\mathbf{C}^T(n + 1) \mathbf{R}_E(n + 1/n) \mathbf{C}(n + 1) + \mathbf{P}(n + 1)] &= \\ &= \mathbf{R}(n + 1/n)\mathbf{C}(n + 1). \end{aligned} \quad (15.70)$$

Выполнив умножение матриц в выражении (15.69) с учетом (15.70), получим окончательное выражение для матрицы корреляционных моментов ошибки:

$$\mathbf{R}_E(n + 1/n + 1) = [\mathbf{1} - \mathbf{K}(n + 1) \mathbf{C}^T(n + 1)] \mathbf{R}_E(n + 1/n). \quad (15.71)$$

Сумма элементов главной диагонали матрицы (15.71) определяет дисперсию суммарной ошибки оптимального фильтра, которая при заданных характеристиках сигнала и помехи и найденном уравнении фильтра имеет минимальное значение.

Особенностью оптимального фильтра Калмана является рекуррентная форма его уравнений, поэтому для обработки результатов измерений целесообразно использовать цифровые вычислительные устройства. Последовательность вычислений на одном цикле следующая (см. рис. 15.9):

- 1) найденная на предыдущем цикле оценка $\hat{\mathbf{G}}(n/n)$ умножается слева на матрицу перехода $\Phi(n + 1, n)$, в результате чего определяется $\hat{\mathbf{G}}(n + 1/n)$;
- 2) оценка $\hat{\mathbf{G}}(n + 1/n)$ умножается слева на $\mathbf{C}^T(n + 1)$ и по формуле (15.57) вычисляется невязка $\tilde{\mathbf{F}}(n + 1/n)$;
- 3) $\tilde{\mathbf{F}}(n + 1/n)$ умножается на матрицу усиления, результат суммируется с оценкой $\hat{\mathbf{G}}(n + 1/n)$, после чего находится оценка $\hat{\mathbf{G}}(n + 1/n + n)$.

Далее цикл вычислений повторяется. На каждом цикле рассчитываются также матрицы корреляционных моментов $\mathbf{R}_E(n + 1/n)$ и $\mathbf{R}_E(n + 1/n + 1)$.

При расчете матрицы усиления (15.65) определяют обратную матрицу размером $t \times t$, что обычно не связано с большими трудностями, так как число выходов фильтра t редко превышает значение, равное 2 – 3.

При стационарных воздействиях в установившемся режиме матрицы усиления и корреляционных моментов ошибки являются стационарными и могут быть найдены из уравнений (15.65), (15.66) и (15.71).

При реализации оптимальных фильтров на цифровых устройствах из-за ограниченного числа их разрядов вычисления выполняются с погрешностями. Наибольшие погрешности получаются при расчете матрицы корреляционных моментов ошибки, причем с каждым последующим циклом объем вычислений увеличивается и качество оценок сигнала ухудшается. В теории оптимальных фильтров это явление называют *неустойчивостью фильтров Калмана*.

► **Пример 15.3.** Найти уравнение оптимального фильтра первого порядка, на вход которого воздействует помеха в виде белого шума с интенсивностью P и случайный стационарный сигнал, генерируемый формирующим фильтром, разностное уравнение которого имеет вид $g_1(n+1) = dg_1(n) + v(n)$.

Решение. Из последнего разностного уравнения следует, что $\mathbf{A} = d$, $\mathbf{B} = 1$, $\mathbf{C} = 1$. Выражения (15.65), (15.66) и (15.71) в рассматриваемом примере являются скалярными:

$$\begin{aligned} K(n+1) &= R_E(n+1/n) [R_E(n+1/n) + P]^{-1}; \\ R_E(n+1/n) &= d^2 R_E(n/n) + Q; \\ R_E(n+1/n) &= [1 - K(n+1)] R_E(n+1/n). \end{aligned} \quad (15.72)$$

Из этих уравнений находим, что

$$\begin{aligned} K(n+1) &= [d^2 R_E(n/n) + Q] [d^2 R_E(n/n) + Q + P]^{-1}; \\ R_E(n+1/n+1) &= K(n+1)P. \end{aligned}$$

Уравнение оптимального фильтра в соответствии с выражением (15.58) имеет вид:

$$\hat{g}_1(n+1/n+1) = d\hat{g}_1(n/n) + K(n+1)[F(n+1) - d\hat{g}_1(n/n)].$$

Оценка сигнала вычисляется в такой последовательности. По начальному значению $R_E(0)$ определяется коэффициент усиления $K(1)$ и дисперсия $R_E(1/1)$, а затем находится значение оценки сигнала $g_1(1/1)$, после чего цикл вычислений повторяется.

В табл. 15.1 приведены результаты расчета нескольких циклов для случая $d = 1$; $P = 0,8$; $Q = 2$; $R_E(0) = 10$.

Таблица 15.1

n	$K(n+1)$	$R_E(n + 1/n + 1)$
0	0,9375	0,7500
1	0,7746	0,6197
2	0,7760	0,6129
3	0,7656	0,6125
...
∞	0,7655	0,6124

Значения дисперсии оценки сигнала и коэффициента усиления, указанные в табл. 15.1 для установившегося режима, определены следующим образом. В этом режиме $R_E(n + 1/n + 1) = R_E(n/n) = R_E$, поэтому уравнения (15.72), решенные относительно ошибки фильтрации, позволяют получить следующее квадратное уравнение: $R_E^2 + QR_E - QP = 0$, решение которого $R_{E=1,2} = -1 \pm 1,6124$. Так как дисперсия – величина положительная, то ошибка фильтрации $R_E = 0,6124$, что дает возможность вычислить коэффициент усиления оптимального фильтра. Уравнение для оценки сигнала в установившемся режиме имеет вид

$$\hat{g}_1(n + 1 / n + 1) = \hat{g}_1(n / n) + 0,7655[E(n + 1) - \hat{g}_1(n / n)] = \\ = 0,2345 - \hat{g}_1(n / n) + 0,7655E(n + 1).$$

Осуществив Z-преобразование последнего разностного уравнения, найдем дискретную передаточную функцию оптимального фильтра:

$$W_\phi(z) = \frac{0,7655z}{z - 0,2345} \blacktriangleleft$$

15.7. Непрерывный фильтр Калмана

Определим непрерывный оптимальный фильтр на основе дискретного фильтра, рассмотренного в п. 15.6. Первоначально рассмотрим методику перехода к непрерывной модели векторного дифференциального уравнения от разностного уравнения (14.20). С этой целью заменим аргументы в уравнении (14.20) n на t и $n + 1$ на $t + \Delta t$ и разложим матрицу перехода в ряд Тейлора по степеням Δt , ограничившись первыми степенями Δt . В результате получим, что

$$\Phi(t + \Delta t, t) = \Phi(t, t) + \dot{\Phi}(t, t) \Delta t. \quad (15.73)$$

Так как $\Phi(t, t) = \mathbf{1}$, $\dot{\Phi}(t, t) = \mathbf{A}(t)$, то выражение (15.73) принимает вид

$$\Phi(t + \Delta t, t) = \mathbf{1} + \mathbf{A}(t) \Delta t. \quad (15.74)$$

Аналогично для матрицы перехода по управлению (14.19)

$$\Gamma(t + \Delta t, t) = \int_t^{t+\Delta t} \Phi(t + \Delta t, \tau) \mathbf{B}(\tau) d\tau = \mathbf{B}(t) \Delta t. \quad (15.75)$$

Подставив уравнения (15.74) и (15.75) в выражение (14.20), найдем:

$$\mathbf{G}(t + \Delta t) = [\mathbf{1} + \mathbf{A}(t) \Delta t] \mathbf{G}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{V}(t) \Delta t.$$

Перенеся $\mathbf{G}(t)$ из правой части в левую и перейдя к пределу при $t \rightarrow \infty$, получим:

$$\dot{\mathbf{G}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{G}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{V}(t). \quad (15.76)$$

Аналогичным образом для уравнения выхода

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{C}^T(t) \mathbf{C}(t). \quad (15.77)$$

Если применить рассмотренную методику предельного перехода от дискретной модели к непрерывной для векторного разностного уравнения оптимального дискретного фильтра (15.58), то непрерывный оптимальный фильтр будет описываться следующим векторным дифференциальным уравнением:

$$\dot{\hat{\mathbf{G}}}(t) = \mathbf{A}(t) \hat{\mathbf{G}}(t) + \mathbf{K}(t) [\mathbf{F}(t) - \mathbf{C}^T(t) \hat{\mathbf{G}}(t)]. \quad (15.78)$$

Уравнению (15.78) соответствует структурная схема, показанная на рис. 15.10, из которой видно, что оптимальный фильтр – это нестационарная система с обратной связью, внутренним контуром которой является формирующий фильтр сигнала.

Матрица усиления в (15.78) находится из разностного уравнения (15.65) и имеет вид

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{R}_E(t) \mathbf{C}(t) \mathbf{P}^{-1}(t), \quad (15.79)$$

где $\mathbf{P}(t)$ – матрица интенсивностей белого шума вектора помехи.

Матрица корреляционных моментов ошибки вектора $\mathbf{E}(t/t) = \mathbf{G}(t) - \hat{\mathbf{G}}(t/t)$ в выражении (15.79) удовлетворяет векторному дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_E(t) = & \mathbf{A}(t) \mathbf{R}_E(t) + \mathbf{R}_E(t) \mathbf{A}^T(t) - \mathbf{R}_E(t) \mathbf{C}(t) \mathbf{P}^{-1}(t) \mathbf{C}^T(t) \mathbf{R}_E(t) + \\ & + \mathbf{B}(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{B}^T(t) \end{aligned} \quad (15.80)$$

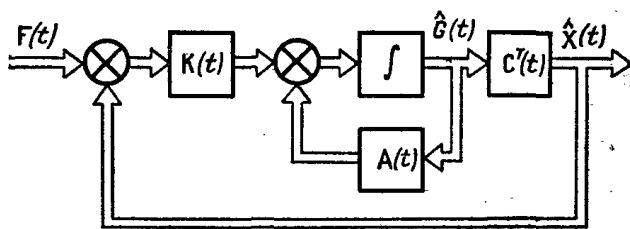


Рис. 15.10. Структурная схема оптимального непрерывного фильтра

с начальными условиями $\mathbf{R}_E(0) = \mathbf{R}_{E0}$.

Выражение (15.80) в теории оптимальных систем называют *уравнением Риккати*. Это нелинейное уравнение, которое в общем виде не решается. Поэтому вычисление элементов матрицы корреляционных моментов ошибки фильтра-

ции сводится к решению системы из дифференциальных уравнений первого порядка, которая получается путем приравнивания в уравнении (15.80) элементов матрицы слева соответствующим элементам матрицы справа.

Так как матрица $\mathbf{R}_E(t)$ симметричная, то число уравнений равно $0,5n(n + 1)$, где n – порядок формирующего фильтра. Из найденных решений следует отобрать только то, при котором матрица $\mathbf{R}_E(t)$ положительно определена (см. прил. П4), такое решение является единственным.

В установившемся режиме $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}$, $\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}$, $\mathbf{C}(t) = \mathbf{C}$, $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}$, $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}_E(t) = \mathbf{R}_E$, поэтому $\dot{\mathbf{R}}_E = 0$ и уравнения (15.78), (15.79) и (15.80) принимают такой вид:

$$\hat{\mathbf{G}}(t) = \mathbf{A} \hat{\mathbf{G}}(t) + \mathbf{K} [\mathbf{F}(t) - \mathbf{C}^T \hat{\mathbf{G}}(t)]; \quad (15.81)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}_E \mathbf{C} \mathbf{P}^{-1}; \quad (15.82)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{A} \mathbf{R}_E + \mathbf{R}_E \mathbf{A}^T - \mathbf{R}_E \mathbf{C} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{R}_E + \mathbf{B} \mathbf{Q} \mathbf{B}^T. \quad (15.83)$$

Уравнение (15.83) в общем виде также не решается, поэтому элементы матрицы \mathbf{R}_E определяются из решения системы алгебраических уравнений, получаемых из (15.83) после выполнения умножения и сложения матриц в правой части уравнения (15.83). Из найденных решений необходимо отобрать только то решение, при котором матрица \mathbf{R}_E положительно определена.

Отметим, что передаточная функция оптимального фильтра, соответствующая уравнениям (15.81) и (15.82), совпадает с передаточной функцией, получаемой при синтезе оптимального фильтра по методу Винера.

Найденный оптимальный фильтр может быть использован для проектирования оптимальной системы РА. Если проектируемая система является счетно-решающим устройством, то при технической реализации могут быть применены однотипные интеграторы и сумматоры, используемые в вычислительной технике. Если проектируемая система предназначена для управления динамическим объектом, то реализация оптимальной системы сводится к определению структуры и параметров корректируемого устройства, подключение которого к объекту управления позволяет получить оптимальную систему.

При стационарных сигнале и помехе реализация оптимальной системы упрощается. В этом случае матрицы в уравнениях (15.78) и (15.79) не зависят от времени, поэтому можно найти передаточные функции оптимальной системы и затем, используя методику темы 10, определить передаточные функции корректирующих устройств, которые в данном случае будут стационарными.

Заметим, что ранее оптимальные решения найдены для случая, когда неслучайная составляющая сигнала равна нулю. В противном случае оптимальный фильтр дает смешанную оценку сигнала, т.е. неслучайная составляющая оценки сигнала не будет равна соответствующей составляющей сигнала.

Если необходимо, чтобы неслучайные составляющие оценки и сигнала были равны, то следует использовать оптимальный фильтр для несмещенной оценки.

► **Пример 15.4.** Определить из условия минимума среднеквадратической ошибки в установившемся режиме структурную схему и параметры оптимальной системы, на которую действует смесь сигнала и помехи со спектральными плотностями

$$S_x(\omega) = \frac{N_x}{1 + \omega^2 T_x^2}; \quad S_n(\omega) = N_n.$$

Решение. Передаточная функция формирующего фильтра сигнала – это инерционное звено с постоянной времени T_x и коэффициентом усиления, равным единице. Такой передаточной функции формирующего фильтра соответствует следующее дифференциальное уравнение:

$$\dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 v(t),$$

где $a_0 = b_0 = 1/T_x$.

В пространстве состояний последнее уравнение имеет вид:

$$\dot{g}_1(t) = -a_0 g_1(t) + b_0 v(t);$$

$$g_1(t) = x(t).$$

Таким образом, в рассматриваемой задаче $\mathbf{A} = -a_0$; $\mathbf{B} = 1$; $\mathbf{C} = 1$; $\mathbf{P} = N_n$; $\mathbf{Q} = b_0^2 N_x$.

В установившемся режиме из уравнения (15.81) следует, что оценка сигнала

$$\hat{g}(t) = -a_0 \hat{g}_1(t) + k[f(t) - \hat{g}_1(t)].$$

Для вычисления коэффициента усиления оптимальной системы необходимо найти дисперсию ошибки фильтрации, для чего нужно решить уравнение (15.83), которое в данном примере следующее:

$$R_E^2 + 2a_0 N_n R_E - b_0^2 N_x N_n = 0.$$

Согласно последнему квадратному уравнению дисперсия ошибки фильтрации

$$\mathbf{R}_E = \sqrt{a_0^2 N_n^2 + b_0^2 N_x N_n} - a_0 N_n = (\sqrt{\rho + 1} - 1) N_n / T_x,$$

где $\rho = N_x / N_n$.

Коэффициент усиления рассчитаем по формуле (15.82):

$$k = \frac{1}{T_x} (\sqrt{1 + \rho}).$$

На рис. 15.11 показана структурная схема оптимальной системы.

Передаточная функция системы

$$W_0(p) = \frac{k_0}{1 + pT_0},$$

где $k_0 = 1 - 1/\sqrt{1+\rho}$; $T_0 = T_x / \sqrt{1+\rho}$. ◀

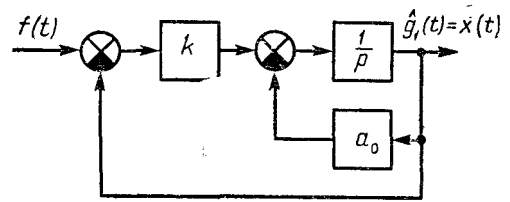


Рис. 15.11. Структурная схема оптимальной системы РА

► **Пример 15.5.** Спектральные плотности сигнала и помехи характеризуются выражениями $S_x(\omega) = k_u^2 N_x / \omega^4$; $S_n(\omega) = N_n$. Определить структурную схему и параметры оптимальной системы.

Решение. Формирующий фильтр состоит из двух интегрирующих звеньев, соединенных последовательно. Такому фильтру соответствует дифференциальное уравнение

$$\ddot{x}(t) = k_u v(t),$$

где $v(t)$ – белый шум интенсивностью N_x .

Уравнения фильтра в пространстве состояний:

$$\begin{aligned} \dot{g}_1(t) &= g_2(t); \\ \dot{g}_2(t) &= k_u v(t). \end{aligned}$$

Уравнение выхода фильтра: $g_1(t) = x(t)$.

Таким образом,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P} = N_n; \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_u^2 N_x \end{bmatrix}.$$

Ограничимся рассмотрением установившегося режима, уравнение Риккати в котором определяется (15.83) и для данного примера имеет такой вид:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \frac{1}{N_n} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_u^2 N_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Из последнего выражения получим следующую систему алгебраических уравнений с неизвестными элементами матрицы корреляционных моментов ошибки:

$$\begin{aligned}
2R_{12} - \frac{R_{11}^2}{N_n} &= 0; \\
R_{22} - \frac{R_{11}R_{12}}{N_n} &= 0; \\
-\frac{R_{21}R_{11}}{N_n} + R_{22} &= 0; \\
-\frac{R_{12}R_{21}}{N_n} + k_u^2 N_x &= 0.
\end{aligned}$$

Матрица \mathbf{R}_E симметричная, поэтому $R_{12} = R_{21}$ и решение системы алгебраических уравнений будет следующим:

$$\mathbf{R}_E = \begin{bmatrix} \sqrt[4]{k_u^2 N_n^3 N_x}, & k_u \sqrt{N_x N_n} \\ k_u \sqrt{N_x N_n}, & k_u \sqrt[4]{4k_u^2 N_x^3 N_n} \end{bmatrix}.$$

Матрица усиления определяется уравнением (15.82):

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt[4]{4k_u^2 N_x / N_n} \\ k_u \sqrt{N_x / N_n} \end{bmatrix}.$$

Уравнения оптимальной системы имеют вид

$$\begin{aligned}
\hat{g}_1(t) &= \hat{g}_2(t) + k_1 e(t); \\
\hat{g}_2(t) &= k_2 e(t),
\end{aligned}$$

где $e(t) = f(t) - \hat{g}_1(t)$.

На рис. 15.12 изображена структурная схема найденной оптимальной системы, передаточная функция которой

$$W_0(p) = \frac{k_2(1 + pT_k)}{p^2 + pk_2T_k + k_2},$$

где $T_k = k_1/k_2$ – постоянная времени. ◀

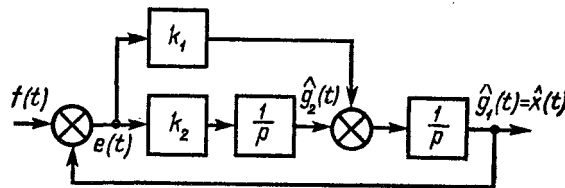


Рис. 15.12. Структурная схема оптимальной системы второго порядка

Вопросы к теме 15

1. Поясните физический смысл переменных состояния в дискретных системах.
2. Сформулируйте задачу синтеза дискретного фильтра Калмана.
3. Поясните структурную схему оптимального фильтра в задаче фильтрации.
4. Что такое неустойчивость фильтров Калмана?
5. Поясните метод предельного перехода от дискретного оптимального фильтра к непрерывному.
6. Как можно получить оптимальный фильтр Винера из фильтра Калмана?
7. Поясните постановку задачи синтеза оптимальных систем РА.
8. Поясните физический смысл оптимальной полосы пропускания системы РА.
9. Каким образом вычисляются значения оптимальных параметров систем РА из условия минимума средней квадратической ошибки?
10. Поясните постановку задачи оптимальной фильтрации Винера и условие физической реализуемости оптимального решения.

РАЗДЕЛ 10. ОПТИМАЛЬНЫЕ И АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ РАДИОАВТОМАТИКИ

Тема 16. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ И АДАПТИВНЫХ СИСТЕМ

16.1. Основные сведения

Систему РА, обеспечивающую наилучшие показатели качества работы при заданных условиях, называют *оптимальной*. Качество таких систем оценивается выбранным критерием оптимальности. При синтезе оптимальных систем различают два типа задач. В задачах первого типа полагают, что структурная схема системы известна и необходимо лишь найти оптимальные значения ее параметров, обеспечивающих экстремальное значение выбранного критерия оптимальности. Подобные задачи уже рассматривались ранее с изложением методики выбора оптимальных регулируемых параметров из условия минимума интегральных оценок при заданном начальном состоянии системы, минимума суммарной средней квадратической ошибки при случайных воздействиях.

В задачах второго типа система неизвестна и необходимо определить ее структурную схему и значения параметров, обеспечивающих экстремум принятого критерия оптимальности. Методы проектирования таких оптимальных систем при случайных воздействиях проанализированы в теме 15; здесь полагали, что характеристики воздействий и объекта управления известны и не изменяются в процессе работы или их изменения являются допустимыми и поэтому можно ограничиться найденными расчетными значениями параметров системы. В действительности статические и динамические характеристики систем РА и действующие на них воздействия в процессе работы изменяются в широких пределах непредвиденным образом, т.е. системы работают в условиях неопределенности (неполноты) априорной информации о характеристиках воздействий и состоянии объекта управления (например, параметры пеленгаторов систем измерения угловых координат РЛС сопровождения могут значительно отличаться от расчетных значений). При этом в ряде случаев практически невозможно описать процессы, возникающие в системе из-за изменения условий работы, а иногда неизвестны и причины, под действием которых изменяются характеристики воздействий и параметры устройств системы.

Одно из возможных условий построения оптимальных систем РА при неполной информации о воздействиях и характеристиках устройств состоит в том, чтобы выбранная структура системы и ее параметры минимизировали критерий оптимальности при наиболее неблагоприятных условиях, например, в системах автосопровождения РЛС обеспечивали минимальную ошибку при максимальном уровне воздействий и минимальном отношении сигнал/шум. Такие оптимальные системы называют *минимаксными*.

Современные системы РА с целью повышения качества их работы в условиях неполноты априорной информации строятся как адаптивные системы, в которых в процессе работы автоматически определяется необходимая информация о текущем управляемом процессе и в нужном направлении изменяются структура и параметры системы. Современный уровень развития радиоэлектроники и вычислительной техники позволяет создавать подобные адаптивные системы.

Оптимальные системы РА классифицируются по различным признакам. Их можно разделить на два основных класса: *системы с постоянной настройкой* (без адаптации) и *адаптивные системы*. Системы с постоянной настройкой в зависимости от вида критерия оптимальности подразделяются:

- на *системы оптимальные по быстрдействию*, где критерием оптимальности является минимум длительности переходного процесса;
- на *системы оптимальные по точности*, в которых критерий оптимальности – минимум ошибки или минимум какой-либо функции от ошибки.

Адаптивные системы в зависимости от способа адаптации делятся:

- на *экстремальные*, в которых достигается режим, соответствующий экстремуму статической характеристики объекта управления, положение и значение которого неизвестны;
- на *самоадаптирующиеся*, в которых требуемый оптимальный режим работы обеспечивается за счет автоматической настройки параметров системы;
- на *обучающиеся*, в которых оптимальный режим работы достигается в результате анализа и накопления информации о процессах в системе и автоматическом изменении ее структуры и параметров в зависимости от накопленного опыта.

Примерами адаптивных систем РА являются адаптивный пеленгатор РЛС и система управления антенной фазированной решеткой.

16.2. Принципы построения оптимальных систем

Синтез оптимальных систем, как отмечалось в п. 10.1, начинается с выбора критерия оптимальности, общей формой которого является следующий квадратичный функционал:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2} \mathbf{E}^T(t) \mathbf{F} \mathbf{E}(t) + \frac{1}{2} \int_0^T [\mathbf{E}^T(t) \mathbf{V} \mathbf{E}(t) + \mathbf{U}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{U}(t)] dt, \quad (16.1)$$

где $\mathbf{E}(t)$ – вектор ошибки; $\mathbf{U}(t)$ – вектор управления.

Матрицы квадратичных форм \mathbf{F} , \mathbf{V} , \mathbf{Q} определяются выражениями

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & q_n \end{bmatrix}.$$

Множитель $1/2$ в (16.1) введен для удобства и не влияет на результат решения оптимальной задачи.

Рассмотрим частные случаи применения критерия (16.1). Если при синтезе систем РА важно оптимизировать лишь конечное состояние объекта управления при заданном начальном, то в (16.1) следует ограничиться только одним первым слагаемым. Примером таких систем являются системы радиоуправления самонаведением летательных аппаратов, в которых требуется обеспечить наименьшую ошибку в момент пролета летательного аппарата относительно цели.

При синтезе систем, в которых накладываются требования к виду переходного процесса и точности системы, первое слагаемое в (16.1) можно не вводить. Если в проектируемой системе необходимо достичь минимальной длительности переходного процесса, то используется критерий вида

$$J = \int_0^T dt = T. \quad (16.2)$$

Задача синтеза оптимальных систем заключается в следующем. Известно векторное дифференциальное уравнение объекта управления, необходимо найти вектор управления (алгоритм управления), который переводит объект управления из начального состояния в конечное, удерживает в этом конечном состоянии или изменяет его в соответствии с входным сигналом, обеспечивая при этом экстремальное значение критерия оптимальности. Синтез считается законченным, если алгоритм управления найден как функция вектора переменных состояния объекта управления при известных ограничениях на составляющие вектора управления.

Рассмотрим синтез системы стабилизации, полагая, что входной сигнал равен нулю, а объект управления описывается векторным дифференциальным уравнением вида

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{G}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{G}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t); \\ \mathbf{Y}(t) &= \mathbf{C}^T\mathbf{G}(t), \end{aligned} \quad (16.3)$$

где $\mathbf{G}(t)$ – выходной вектор объекта управления.

Критерий оптимальности имеет вид

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [\mathbf{G}^T(t)\mathbf{V}\mathbf{G}(t) + \mathbf{U}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{U}(t)] dt, \quad (16.4)$$

где $\mathbf{G}(t) = -\mathbf{E}(t)$, так как входной вектор равен нулю.

В критерии (16.4) по сравнению с (16.1) отсутствует первое слагаемое, так как при $T = \infty$ оценка конечного состояния не имеет смысла. Кроме того, верхний предел интегрирования в (16.4) равен бесконечности. При этом можно гарантировать, что после окончания переходного процесса достигнутое нулевое состояние будет сохранено. Для решения оптимальной задачи стабилизации используем *принцип максимума Понтрягина*, согласно которому оптимальный

вектор управления соответствует максимуму скалярной функции Гамильтона, определяемой выражением

$$H = -1/2[\mathbf{G}^T(t)\mathbf{V}\mathbf{G}(t) + \mathbf{U}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{U}(t)] + \dot{\mathbf{G}}^T(t)\mathbf{P}(t). \quad (16.5)$$

Подставив уравнение (16.3) в (16.5), найдем, что

$$H = -\frac{1}{2}[\mathbf{G}^T(t)\mathbf{V}\mathbf{G}(t) + \mathbf{U}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{U}(t)] + [\mathbf{A}\mathbf{G}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t)]^T\mathbf{P}(t). \quad (16.6)$$

В последних двух выражениях через $\mathbf{P}(t)$ обозначен вспомогательный вектор, являющийся решением векторного дифференциального уравнения

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = -\frac{d\mathbf{H}}{d\mathbf{G}(t)}. \quad (16.7)$$

Производную вектора состояния определим из (16.5):

$$\dot{\mathbf{G}}(t) = \frac{d\mathbf{H}}{d\mathbf{P}(t)}. \quad (16.8)$$

Систему дифференциальных уравнений (16.7) и (16.8) называют *канонической*.

Исследование функции (16.6) на максимум относительно вектора управления позволяет определить оптимальное управление

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t). \quad (16.9)$$

Из (16.9) следует, что для вычисления оптимального управления нужно найти вектор $\mathbf{P}(t)$. Для этого необходимо решить каноническую систему уравнений (16.7) и (16.8), начальными условиями для которой являются начальное состояние объекта управления $\mathbf{G}(0)$ и конечное значение $\mathbf{P}(\infty) = 0$. Вычислив $\mathbf{P}(t)$, найдем оптимальное управление как функцию времени, которое предварительно должно быть рассчитано и запомнено, после чего оно может быть подано на объект управления. Очевидно, что при таком способе управления получается разомкнутая система со всеми присущими ей недостатками. Поэтому следует получить оптимальное управление через вектор переменных состояния $\mathbf{U}(t) = f[\mathbf{G}(t)]$. Для этого необходимо вектор $\mathbf{P}(t)$ выразить через $\mathbf{G}(t)$:

$$\mathbf{P}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{G}(t). \quad (16.10)$$

Матрица усиления \mathbf{K} удовлетворяет следующему матричному уравнению:

$$\mathbf{V} + \mathbf{K}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{K} - \mathbf{K}\mathbf{S}\mathbf{K} = 0, \quad (16.11)$$

где $\mathbf{S} = \mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^T$.

Подставив (16.10) в формулу (16.9), определим:

$$\mathbf{U}(t) = -\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}\mathbf{G}(t). \quad (16.12)$$

На рис. 16.1 показана структурная схема оптимальной системы стабилизации. Система линейна, так как на вектор управления не наложено никаких ограничений.

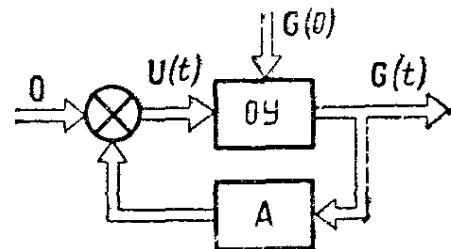


Рис. 16.1. Структурная схема оптимальной системы стабилизации

Определение матрицы \mathbf{K} по (16.11) сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений. Так как \mathbf{K} – симметричная матрица, то число уравнений равно $0,5n(n + 1)$, где n – порядок вектора состояния.

Из найденных решений следует отобрать только то, при котором матрица \mathbf{K} является положительно определенной.

Для вычисления элементов матрицы \mathbf{K} могут быть использованы ЭВМ, на которых следует решить матричное уравнение Риккати

$$\dot{\tilde{\mathbf{K}}}(t) = \mathbf{V} + \tilde{\mathbf{K}}(t)\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\tilde{\mathbf{K}}(t) - \tilde{\mathbf{K}}(t)\mathbf{S}\tilde{\mathbf{K}}(t) \quad (16.13)$$

с граничными условиями $\tilde{\mathbf{K}}(T) = 0$, где время T выбрано достаточно большим. Если момент времени T принять начальным, а $\mathbf{K}(T)$ – начальным условием, то матрица \mathbf{K} определяется как асимптотическое решение уравнения Риккати при уменьшении времени. Для того чтобы получить решение уравнения Риккати, соответствующее увеличению времени, вводят переменную $\tau = T - t$. Тогда уравнение (16.13) принимает вид

$$\dot{\tilde{\mathbf{K}}}(\tau) = \mathbf{V} + \tilde{\mathbf{K}}(\tau)\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\tilde{\mathbf{K}}(\tau) - \tilde{\mathbf{K}}(\tau)\mathbf{S}\tilde{\mathbf{K}}(\tau).$$

Это уравнение решается на ЭВМ с начальным условием $\tilde{\mathbf{K}}(0) = 0$. При достаточно большом T установившееся значение $\mathbf{K}(\tau)$ позволяет найти элементы матрицы \mathbf{K} .

Рассмотрим синтез оптимальной системы слежения, качество работы которой оценивается функционалом

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [\mathbf{E}^T(t)\mathbf{V}\mathbf{E}(t) + \mathbf{U}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{U}(t)] dt, \quad (16.14)$$

где $\mathbf{E}(t) = \mathbf{X}(t) - \mathbf{Y}(t)$ – вектор ошибки; $\mathbf{X}(t)$ – входной вектор.

Объект управления описывается уравнением (16.3), оптимальное управление в задаче слежения определяется выражением (16.9), в котором вспомогательный вектор $\mathbf{P}(t)$ зависит не только от вектора состояния объекта управления, но и от входного вектора:

$$\mathbf{P}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{G}(t) + \mathbf{Z}(t), \quad (16.15)$$

где $\mathbf{Z}(t)$ – неизвестный вектор, являющийся решением уравнения

$$\dot{\mathbf{Z}}(t) = [\mathbf{K}\mathbf{S} - \mathbf{A}^T] \mathbf{Z}(t) + \mathbf{V}\mathbf{X}(t). \quad (16.16)$$

Так как $\mathbf{X}(t)$ известен, то уравнение (16.16) может быть решено при граничных условиях $\mathbf{Z}(\infty) = \mathbf{X}(\infty) = 0$. Для входных сигналов, не удовлетворяющих этим граничным условиям, решение оптимальной задачи слежения не найдено.

Для определения вектора $\mathbf{Z}(t)$ в системе должно быть предусмотрено специальное вычислительное устройство, этот вектор можно рассчитать заранее и поместить в память вычислителя.

► **Пример 16.1.** Определить алгоритм оптимального управления для системы, передаточная функция объекта управления которой $W_0(p) = b_0/(p^2 + a_1p)$. Такую передаточную функцию имеет, например, разомкнутая система ФАПЧ без фильтра нижних частот.

Решение. Этой передаточной функции соответствует система уравнений в пространстве состояний (см. тему 8)

$$\begin{aligned}\dot{g}_1(t) &= g_2(t); \\ g_2(t) &= -a_1g_1(t) + b_0u(t).\end{aligned}$$

Критерий оптимальности

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [g_1^2(t) + \alpha g_2^2(t) + qu^2(t)] dt.$$

Таким образом, в рассматриваемой системе

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q} = q.$$

В соответствии с уравнением (16.12) оптимальное управление имеет вид

$$u(t) = [k_{21}g_1(t) + k_{22}g_2(t)]b_0 / q.$$

Элементы матрицы усиления в последнем выражении определим, решив систему алгебраических уравнений, которая получается из уравнения (16.11):

$$\begin{aligned}k_{12} = k_{21} &= \sqrt{q} / b_0; & k_{11} &= a_1k_{21} + k_{12}k_{22}b_0^2 / q; \\ k_{22} &= \left[a_1^2q^2 / b_0^2 + (2k_{21} + \alpha)q / b_0^2 \right]^{1/2} - a_1q / b_0^2.\end{aligned}$$

Передаточная функция оптимальной системы стабилизации

$$W_{30}(p) = \frac{k_0W_0(p)}{1 + k_0(k_{21} + k_{22}p)}.$$

Найдем оптимальное управление для задачи слежения при входном сигнале $x(t) = 1(t) - 1(t - T)$. Оптимальное управление определяется выражениями (16.9) и (16.15):

$$u(t) = -[k_{21}g_1(t) + k_{22}g_2(t)]\frac{b_0}{q} + z_2(t)\frac{b_0}{q}.$$

Параметр $z_2(t)$ рассчитан в соответствии с (16.15) из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= b_0^2z_2(t)k_{21} / q + x_1(t); \\ \dot{z}_2(t) &= -z_1(t) + (k_{22}b_0^2 / q - a_1)z_2(t) + \alpha x_2(t),\end{aligned}$$

где $x_1(t) = 1(t - T)$; $x_2(t) = \dot{x}_1(t) = 0$.

На рис. 16.2 показана структурная схема спроектированной системы, для вычисления $z_2(t)$ которой включено вычислительное устройство.

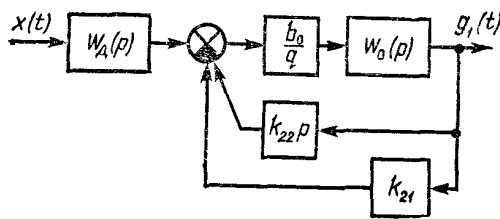


Рис. 16.2. Структурная схема оптимальной системы второго порядка

Передаточную функцию этого устройства определим из последней системы уравнений:

$$W_d(p) = -\frac{1}{p^2 + c_1 p + c_0},$$

где $c_1 = a_1 - k_{22}b_0^2 / q$; $c_0 = k_{21}b_0^2 / q$. ◀

В оптимальных системах стабилизации и слежения, рассмотренных ранее, полагали, что вектор состояния объекта управления полностью известен, т.е. его можно измерить с помощью соответствующих датчиков. В действительности это нереально. Обычно можно измерить только часть переменных состояния или какое-либо их сочетание, при этом измерения содержат случайные ошибки. Кроме того, сама система, как правило, подвержена воздействию случайных возмущений. Таким образом, для формирования оптимального управления необходимо предварительно оценить вектор состояния, что может быть сделано при построении математической модели объекта управления.

Для объекта управления, описываемого уравнениями (16.3), оценку состояния можно осуществить в соответствии с математической моделью

$$\dot{\hat{\mathbf{G}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{G}}(t) + \mathbf{B}U(t), \quad (16.17)$$

где $\hat{\mathbf{G}}(t)$ – оценка вектора состояния.

Если начальные значения векторов $\mathbf{G}(0)$ и $\hat{\mathbf{G}}(0)$ равны, то в любой момент времени $\hat{\mathbf{G}}(t) = \mathbf{G}(t)$. Однако точное значение $\hat{\mathbf{G}}(0)$ получить невозможно, поэтому оценка $\hat{\mathbf{G}}(t)$ по модели (16.17) дает большие ошибки. Для устранения этого недостатка на вход оценщика состояния кроме сигнала $U(t)$ подают сигнал рассогласования $\mathbf{Y}(t) - \mathbf{C}^T \hat{\mathbf{G}}(t)$, а вместо уравнения (16.17) используют уравнение

$$\dot{\hat{\mathbf{G}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{G}}(t) + \mathbf{L}[\mathbf{Y}(t) - \mathbf{C}^T \hat{\mathbf{G}}(t)] + \mathbf{B}U(t) \quad (16.18)$$

или

$$\dot{\hat{\mathbf{G}}}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}^T] \hat{\mathbf{G}}(t) + \mathbf{L}\mathbf{Y}(t) + \mathbf{B}U(t), \quad (16.19)$$

где \mathbf{L} – вектор усиления оценщика размером $n \times m$; m – размерность выходного вектора.

Составляющие вектора \mathbf{L} выбирают такими, чтобы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{G}(t) - \hat{\mathbf{G}}(t)] = 0. \quad (16.20)$$

Если собственные значения матрицы $[A - LC^T]$ в (16.20) выбрать так, чтобы их вещественные части были отрицательными, то при любых начальных значениях $\hat{G}(0)$ обеспечивается выполнение (16.20).

После того как найдена оценка вектора состояния объекта управления, можно использовать алгоритм управления, полученный в задачах оптимальной стабилизации и слежения. На рис. 16.3 показана полная структурная схема оптимальной системы стабилизации с оценщиком вектора состояния и обратной связью.

Оценщик построен в соответствии с уравнением (16.18). Сравнение этого уравнения с уравнением фильтра Калмана показывает, что оценщик – это оптимальный фильтр Калмана, характеристики которого зависят от динамических свойств объекта управления и помех, но не зависят от критерия оптимальности системы управления.

Оценка состояния и оптимальное управление по квадратичному функционалу (16.4) – двойственная дуальная задача. Если один из параметров задан, то в соответствии с принципом двойности нетрудно определить и другой. Поэтому при решении задач фильтрации и детерминированного управления могут использоваться одни и те же программы для ЭВМ.

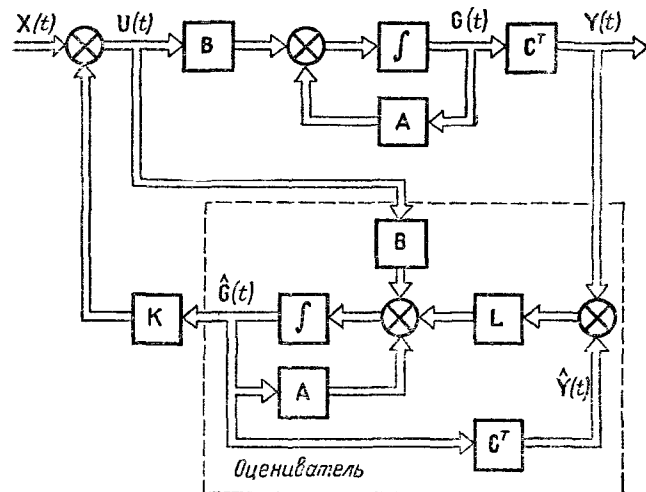


Рис. 16.3. Полная структурная схема оптимальной системы стабилизации

16.3. Адаптивные системы

Проектирование систем РА при неопределенности изменения внешних условий (характеристик объектов управления и внешних воздействий) приводит к необходимости использования адаптивных систем, в которых для достижения оптимального критерия качества работы и поддержания его на этом уровне согласно изменениям внешних условий изменяются параметры и структурная схема системы. В результате система как бы приспосабливается к изменению внешних условий, при этом сохраняя оптимальный режим работы. Адаптивные системы, в которых оптимальный режим поддерживается только за счет регулировки параметров системы при сохранении ее структуры, называют *самонастраивающимися* (СНС). Если оптимальный режим поддерживается и за счет изменения структуры системы, то системы называют *самоорганизующимися*.

Оптимальные значения параметров устройства управления СНС определяются путем аналитического анализа или за счет использования специальных пробных сигналов, относительно которых оценивается критерий качества рабо-

ты и организуется соответствующая перестройка параметров устройства управления. СНС первого типа называют *аналитическими*, второго – *поисковыми*. Различают также СНС с *настройкой по внешним воздействиям* и *по характеристикам объекта управления*.

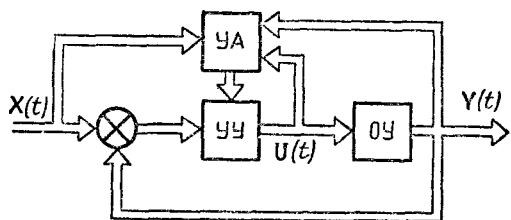


Рис. 16.4. Обобщенная структурная схема СНС

В УА анализируются соответствующие критерия качества заданному (оптимальному) значению, в результате чего вырабатываются сигналы для изменения настраиваемых параметров УУ.

Заметим, что синтез систем без устройств адаптации осуществляется методами, приведенными ранее. Этот этап называют *первичным синтезом СНС*, а проектирование устройств самонастройки – *вторичным синтезом СНС*.

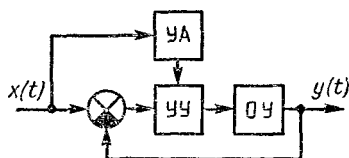


Рис. 16.5. Структурная схема СНС с настройкой по внешним воздействиям

Рассмотрим СНС с настройкой по внешним воздействиям, структурная схема которой является частным случаем обобщенной (рис. 16.5). В таких системах оптимальный режим обеспечивается за счет измерения характеристик внешних воздействий. В УА решается задача оценки параметров входного сигнала и формируется алгоритм самонастройки, обеспечивающий оптимизацию критерия качества работы системы. Обычно критерием является квадрат суммарной ошибки

$$J = \sigma^2(t) = e_o^2(t) + \sigma_e^2(t), \quad (16.21)$$

где e_o – динамическая ошибка; σ_e^2 – дисперсия ошибки относительно случайных составляющих воздействий.

При анализе таких СНС полагают, что число производных от сигнала $x(t)$ ограничено, а характеристики случайных воздействий известны с точностью параметров. Кроме того, считают, что изменение параметров воздействий происходит намного медленнее по сравнению с переходными процессами в СНС. При таких предположениях для анализа СНС можно использовать методы, изложенные в теме 7. Проиллюстрируем это на конкретном примере.

► **Пример 16.2.** Передаточная функция системы в разомкнутом состоянии имеет вид $W_p(p) = K(1 + pT)/p^2$. На вход замкнутой системы поступает сигнал $x(t) = a_2 t^2/2$ и действует помеха с известной спектральной плотностью $S_n(\omega) = N_n$. Найти $K(t)$ для оптимальной системы в смысле минимума (16.21).

Решение. Применив формулы (7.2) и (7.10), найдем, что

$$\sigma^2 = \ddot{x}^2 / k^2 + N_n(1 + kT^2) / (2T).$$

Оптимальное значение коэффициента усиления, соответствующее минимуму (16.21), вычислим из условия

$$d\sigma^2 / dK^2 = -2\ddot{x}^2 / K_0^4 + N_n T / 2 = 0,$$

откуда $K_0^3 = 4\ddot{x}^2 / (N_n T)$.

Таким образом, в УА (см. рис. 16.5) должна вычисляться вторая производная сигнала $\ddot{x}(t)$ и значение коэффициента усиления K_0 , которое следует установить в УУ системы. Оптимальный коэффициент усиления K_0 может быть рассчитан заранее и помещен в память. В процессе работы системы по измеренному значению $\ddot{x}(t)$ в УУ устанавливают нужное значение K_0 . ◀

При выборе структуры УА возможны и другие два подхода. При первом настраиваемые параметры изменяются так, чтобы скомпенсировать отклонение критерия качества от заданного значения и сохранить его на требуемом уровне. При втором подходе параметры объекта управления и внешних воздействий идентифицируются. Связь этих параметров с регулируемыми параметрами УУ системы известна и реализуется в УА, в результате чего и достигается адаптация критерия качества к изменению внешних условий. Системы, в которых реализуется первый подход (без идентификации характеристик внешних воздействий и объекта управления), называют *СНС с эталонными моделями*, а системы, реализующие второй подход, – *СНС с настраиваемой моделью* или *адаптивными системами с идентификатором*.

На рис. 16.6 показана структурная схема СНС с эталонной моделью. Сигнал отклонения $\xi(t)$, равный разности сигналов с модели $y_m(t)$ и с выхода системы $y(t)$, является входным сигналом цепи самонастройки (ЦС), с помощью которой производится изменение параметров УУ, устраняющее рассогласование $\xi(t)$. Из схемы на рис. 16.6 видно, что ЦС образует в СНС замкнутый контур, устойчивость которого влияет на устойчивость всей СНС. Для проверки устойчивости СНС используют прямой метод Ляпунова, в соответствии с которым ограниченное значение $\xi(t)$ свидетельствует об устойчивости СНС. Познакомимся с этим методом на конкретном примере.

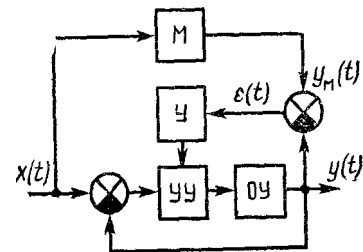


Рис. 16.6. Структурная схема СНС с эталонной моделью

► **Пример 16.3.** Система в разомкнутом состоянии описывается уравнением

$$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = k_0(t) k_y e(t), \quad (16.22)$$

где a_1, a_0 – постоянные коэффициенты; $k_0(t)$ – коэффициент передачи объекта управления; k_y – регулируемый коэффициент усиления УУ.

Уравнение модели имеет вид

$$\ddot{y}_m(t) + a_1 \dot{y}_m(t) + a_0 y_m(t) = k_m e(t). \quad (16.23)$$

Найти алгоритм для регулируемого коэффициента усиления УУ и условие устойчивости СНС.

Решение. Вычтя из (16.23) уравнение (16.22), получим:

$$\ddot{\varepsilon}(t) + a_1 \dot{\varepsilon}(t) + a_2 \varepsilon(t) = b_0(t) e(t), \quad (16.24)$$

где $b_0 = k_m - k_0(t)k_y$.

Перепишем последнее выражение в виде

$$\dot{\varepsilon}_1(t) = \varepsilon_2(t) \varepsilon_1 + a_0 \varepsilon(t); \quad (16.25)$$

$$\dot{\varepsilon}_2(t) = -a_0 \varepsilon_1(t) - a_1 \varepsilon_2(t) + b_0(t) e(t).$$

Выберем функцию Ляпунова следующим образом:

$$V = a_0 \varepsilon_1^2(t) + \varepsilon_2^2(t) + b_0^2(t). \quad (16.26)$$

Полная производная от функции Ляпунова (16.26)

$$dV / dt = 2 \left[a_0 \varepsilon_1(t) \dot{\varepsilon}_1(t) + \varepsilon_2(t) \dot{\varepsilon}_2(t) + b_0(t) \dot{b}_0(t) \right],$$

или с учетом выражений (16.25)

$$dV / dt = 2 \left[-a_1 \varepsilon_2^2(t) + b_0(t) \left[\varepsilon_2(t) e(t) + \dot{b}_0(t) \right] \right]. \quad (16.27)$$

В соответствии с прямым методом Ляпунова, если dV/dt оказывается знакоопределенной функцией противоположного знака по сравнению с V , то система асимптотически устойчива и отклонения $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$ стремятся к нулю. В рассматриваемом примере это условие выполняется, если

$$\dot{b}_0(t) = -\varepsilon_2(t) e(t). \quad (16.28)$$

Представим $k_0(t)$ в виде $k_0(t) = k + \Delta k_0(t)$, где k_0 – постоянное номинальное значение коэффициента передачи; $\Delta k_0(t)$ – его переменная составляющая, изменение которой происходит медленно по сравнению с процессом самонастройки, поэтому его производную на интервале времени самонастройки можно принять равной нулю. Тогда из выражений (16.24) и (16.28) следует, что

$$\dot{k}_y = \varepsilon_2(t) e(t) / k_0, \text{ или}$$

$$k_y = \frac{1}{k_0} \int_0^t \varepsilon_2(t) e(t) dt. \quad (16.29)$$

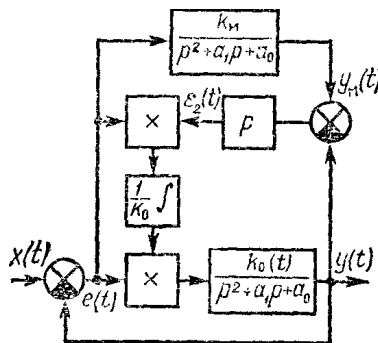


Рис. 16.7. Структурная схема СНС второго порядка

На рис. 16.7 приведена структурная схема СНС, соответствующая алгоритму самонастройки (16.29). ◀

В рассмотренном примере в качестве критерия оптимальности принято приближение выходного сигнала системы $y(t)$ к $y_m(t)$.

Помимо такого критерия наиболее часто используются зависимости вида

$$J = \varepsilon^2(t); \quad J = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt. \quad (16.30)$$

В таких случаях синтез цепи самонастройки осуществляется следующим образом. На основании измеренного отклонения $\varepsilon(t)$ сигналов на выходе модели и системы и выбранного критерия вторичной оптимизации цепи самонастройки определяются требуемые значения параметров УУ, которые и устанавливаются в системе. Для реализации такого принципа самонастройки обычно применяют *градиентный метод*, в соответствии с которым необходимо найти градиент, определяемый выражением

$$\nabla J = [dJ / dc_1, dJ / dc_2, \dots, dJ / dc_m], \quad (16.31)$$

где c_i – регулируемые параметры УУ, число которых равно m .

Выходной сигнал системы запишем в виде

$$y(t) = W_s(p, \mathbf{C}, \mathbf{B})x(t); \quad p = d/dt, \quad (16.32)$$

где $\mathbf{C} = [c_1, c_2, \dots, c_m]$ – вектор регулируемых параметров УУ; \mathbf{B} – вектор неконтролируемых параметров объекта управления.

Эталонная модель описывается уравнением, по форме совпадающим с (16.32).

В соответствии с градиентным методом скорость изменения регулируемых параметров УУ пропорциональна составляющим вектора градиента (16.31):

$$dc_i/dt = -\gamma_i dJ/dc_i, \quad (16.33)$$

где γ_i – постоянный коэффициент.

Критерий оптимальности (16.30) является функцией $\varepsilon(t) = y_m(t) - y(t)$, поэтому выражение (16.33) можно представить в виде

$$dc_i / dt = \gamma_i \frac{dJ}{d\varepsilon} \frac{dy}{dc_i}. \quad (16.34)$$

Сомножитель $dJ/d\varepsilon$ при выбранном критерии оптимальности известен, второй сомножитель, как показано в [21], можно найти по формуле

$$\frac{dy}{dc_i} = \frac{dW_y}{dc_i} \frac{1 - W_m}{W_y}, \quad (16.35)$$

где $W_y(p, \mathbf{C})$ – оператор УУ.

Подставив (16.35) в (16.34), найдем алгоритм цепи самонастройки:

$$\frac{dc_i}{dt} = \gamma_i \frac{dJ}{d\varepsilon} \frac{dW_y}{dc_i} \frac{1 - W_m}{W_y}. \quad (16.36)$$

В поисковых СНС для оптимизации критерия качества применяются специальные поисковые сигналы. Рассмотрим основные методы поиска экстремума, полагая, что функция J унимодальна, т.е. имеет один экстремум. Для конкретно-

сти будем полагать, что экстремумом является минимум, необходимое условие которого – равенство нулю градиента (16.31). Если при каком-то значении вектора \mathbf{C} градиент $J \neq 0$, то это означает, что минимум не достигнут и нужно изменить вектор \mathbf{C} так, чтобы J уменьшалось. Таким образом, поиск минимума состоит из двух этапов – определение градиента и организация движения в направлении минимума. При использовании для поиска метода градиента скорость изменения составляющих вектора пропорциональна составляющим градиента (16.33). Так как градиент измеряется непрерывно, то скорости изменения составляющих вектора \mathbf{C} в любой момент времени пропорциональны градиенту. Если при этом dc_i/dt неположительна, то градиент J уменьшается и при каком-то значении \mathbf{C} достигает минимума.

Если для поиска применяют цифровые ЭВМ, то используют дискретный метод, в соответствии с которым составляющие вектора \mathbf{C} на каждом последующем шаге принимаются следующими:

$$\mathbf{C}_{n+1} = \mathbf{C} - \gamma \nabla J(\mathbf{C}). \quad (16.37)$$

Вычисления по формуле (16.37) производят до тех пор, пока не будет выполняться условие

$$J(\mathbf{C}_{k+1}) > J(\mathbf{C}_k), \quad (16.38)$$

что соответствует достижению минимума, равного $J(\mathbf{C}_k)$.

Кроме метода градиента поиск экстремума осуществляют *методом наискорейшего спуска*, согласно которому скорость изменения вектора \mathbf{C} берется пропорциональной градиенту в точке \mathbf{C}_0 :

$$d\mathbf{C}/dt = -\gamma \nabla J(\mathbf{C}_0). \quad (16.39)$$

Изменение вектора с этой скоростью происходит до тех пор, пока при каком-то значении \mathbf{C}_i не будет удовлетворяться условие $dJ/dt = 0$, после чего находят градиент в точке \mathbf{C}_i и вычисления повторяют.

В дискретной форме алгоритм наискорейшего спуска имеет вид

$$\mathbf{C}_{n+1} = \mathbf{C}_n - \gamma \nabla J(\mathbf{C}_0). \quad (16.40)$$

Вычисления производят до тех пор, пока не будет выполнено условие (16.38). В найденной точке \mathbf{C}_k снова определяют градиент, после чего начинают второй цикл, при этом вместо \mathbf{C}_0 в (16.40) подставляют \mathbf{C}_k . Подобные циклы продолжают до тех пор, пока не будет достигнут минимум J , фиксируемый по какому-либо правилу, например, пока модуль разности J на законченных предыдущих циклах не превзойдет заданного значения.

В рассмотренных методах при поиске экстремума изменяются одновременно все аргументы функции J , что затрудняет реализацию алгоритмов. Процедуру поиска можно упростить, если при начальном значении c_0 изменять только составляющую c_1 до тех пор, пока J не достигнет экстремального значения. После этого следует осуществить аналогичное изменение c_2 и т.д. до c_m до достижения экстремума, затем весь цикл поиска повторяется, начиная с c_1 до выполнения условия $\Delta J = 0$ или (16.38) в дискретном варианте. Этот метод поиска экстремума функции J называют *методом Гаусса – Зайделя*.

Изложенные методы поиска применяют в СНС, когда известен конкретный вид функции J . Во многих СНС функция J в явной форме неизвестна, но могут измеряться ее значения, по которым и находят составляющие градиента. В таких системах помимо метода численного дифференцирования, связанного с использованием ЭВМ, применяется *метод синхронного детектирования*.

В соответствии с этим методом составляющие вектора C получают путем приращения в виде поисковых сигналов $\delta c_i(t)$, в результате чего функция J принимает вид $J[c_1 + \delta c_1(t), \dots, c_m + \delta c_m(t)]$. Разложим эту функцию в ряд Тейлора, ограничь квадратичными членами, и умножим на $\delta c_i(t)$. В результате получим:

$$v_i = \left[J(c) + \sum_{i=1}^m \frac{dJ(c)}{dc_i} \delta c_i(t) + \frac{1}{2} \sum \frac{d^2 J(c)}{dc_i dc_k} \delta c_i \delta c_k(t) \right] \delta c_i(t); \quad i=1,2,\dots,m. \quad (16.41)$$

Усредненное значение функции (13.41)

$$\bar{v}_i = \frac{1}{T} \int_0^T v_i(t) dt, \quad (16.42)$$

где T – время усреднения.

В качестве поисковых сигналов выбирают гармонические воздействия

$$\delta c_i(t) = B \sin \omega_i t; \quad \omega_i = (2i + 1) \Omega = \text{const}; \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Так как

$$\int_0^T \delta c_i(t) dt = 0; \quad \int_0^T \delta c_i(t) \delta c_j(t) \delta c_k(t) dt = 0;$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \delta c_i(t) \delta c_j(t) dt = \begin{cases} B^2 / 2, & \text{при } i = j; \\ 0, & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

то выражение (16.42) принимает вид

$$\bar{v}_i = \frac{dJ}{dc_i} \frac{B^2}{2},$$

т.е. значения \bar{v}_i пропорциональны i -тым составляющим градиента.

Для аппаратной реализации этого способа определения градиента необходим генератор гармонических колебаний, умножитель и фильтр, усредняющий сигналы v_i . Устройство, состоящее из умножителя и сглаживающего фильтра, называют *синхронным детектором*.

На рис. 16.8 приведена структурная схема СНС с эталонной моделью, в которой составляющие градиента определяются по методу синхронного детектирования.

Сигнал ошибки системы $e(t)$ подают на эталонную модель, сигнал рассогласования в цепи самонастройки $\varepsilon(t) = y_m(t) - y(t)$ возводится в квадрат и поступает на умножители, на вторые входы которых подаются поисковые колебания $\delta c_i(t)$, частоты которых намного больше полосы пропускания системы.

Сигналы с умножителей поступают на усредняющие фильтры (Φ) с коэффициентом передачи $2/B^2$. В результате на выходах фильтров вырабатываются сигналы, пропорциональные составляющим градиента J . Эти составляющие интегрируются, выходные сигналы интеграторов определяют параметры устройства управления, которые изменяются до тех пор, пока составляющие градиента не обратятся в нуль, что соответствует приближению $y(t)$ к $y_m(t)$ с минимальной средней квадратической ошибкой.

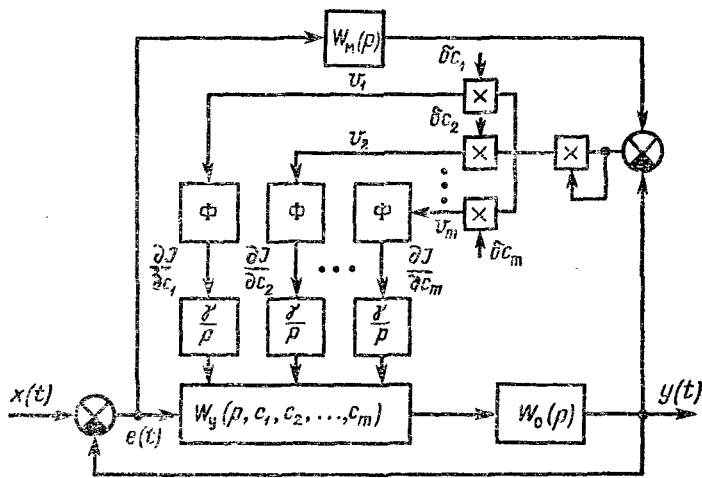


Рис. 16.8. Структурная схема СНС с синхронным детектированием

Число регулируемых параметров устройства управления m выбирается таким, чтобы обеспечить достаточное приближение передаточной функции разомкнутой системы к $W_m(p)$.

16.4. Экстремальные системы

В радиотехнических устройствах экстремальные системы применяются в тех случаях, когда необходимо, чтобы какой-либо параметр соответствовал экстремальному значению. Например, часто требуется, чтобы собственная частота какого-либо колебательного устройства отслеживала изменение частоты сигнала.

Особенностью экстремальных систем является экстремальная характеристика (с явным минимумом или максимумом) объекта управления, которая зависит от входных сигналов и в процессе работы может изменяться непредвиденным образом, сохраняя при этом экстремальный вид. Задача управления состоит в том, чтобы сигналы на входе объекта управления обеспечивали его работу в экстремальном режиме.

Критерий оптимальности в системах определяется не выбранным функционалом, а свойствами объекта управления. Это является основным отличием экстремальных систем от оптимальных, рассмотренных в п. 16.3.

На практике наибольшее распространение нашли одномерные экстремальные системы с показателями качества работы $y = f(u, g)$, где g – возмущающее воздействие. В таких системах осуществляются две операции: 1) выявление отклонения текущего значения $y(t)$ от экстремального значения; 2) организация изменения сигнала управления $u(t)$ для перевода объекта управления в экстремальный режим работы. Первая операция является поисковой, вторая – рабочей.

В зависимости от способа поиска экстремума различают следующие типы экстремальных систем: с определением производной, с определением знака производной, шаговые, с запоминанием экстремума. Существуют также системы с поисковыми сигналами и без них.

На рис. 16.9 показана обобщенная структурная схема экстремальной системы, которая отличается от обычной наличием устройства поискового элемента (УПЭ); через ЛЧ на схеме обозначена линейная часть объекта управления.

В системах с определением производной УПЭ формирует сигнал $\varepsilon(t) = k_0 s$, где k_0 – постоянный коэффициент; $s = dy/du$ – производная от экстремальной характеристики объекта управления. Из-за операции дифференцирования такие системы чувствительны к помехам. Этого недостатка не имеют экстремальные системы, где в УПЭ определяется не производная, а только ее знак. Если производная имеет отрицательный знак, то на экстремальной характеристике рабочая точка находится справа от максимума (слева от минимума), а если положительный, то слева от максимума (справа от минимума). В таких системах $\varepsilon(t) = k_0 \text{sign} s$, т.е. система является релейной.

В шаговых экстремальных системах через определенные интервалы времени в УПЭ измеряются и фиксируются в запоминающем устройстве выходные сигналы объекта управления. Затем эти сигналы, измеренные в начале и конце интервала, сравниваются. Если оказывается, что выходной сигнал объекта

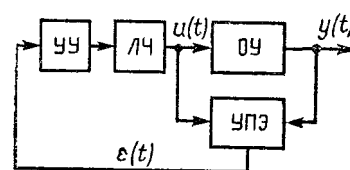


Рис. 16.9. Обобщенная структурная схема экстремальной системы

управления уменьшился, то при движении к максимуму изменяется на противоположный знак сигнала управления (не изменяется при движении к минимуму) и наоборот. Шаг интервала времени выбирается в зависимости от изменений экстремальной характеристики из-за внешних условий и систем защиты от помех. Для защиты от помех шаг следует выбирать как можно бóльшим; при этом ухудшается качество слежения за изменениями экстремума.

В системах с запоминанием экстремума УПЭ содержит блок памяти, который запоминает бóльшие по сравнению с записанными ранее значения y (в системах с максимумом), т.е. запоминание происходит только при увеличении y . Сигналы с выхода объекта управления и запоминающего устройства сравниваются, и если максимум достигнут, то их разность оказывается равной нулю. При достижении или переходе экстремальной точки сигнал на выходе объекта управления уменьшается, а сигнал с запоминающего устройства сохраняет экстремальное значение, поэтому происходит изменение знака сигнала управления, что обеспечивает движение в точке экстремума.

Поиск экстремума может быть выполнен с помощью специальных поисковых колебаний, когда объект управления допускает такой режим работы. На рис. 16.10 изображена экстремальная характеристика объекта управления, на которой действует поисковый сигнал. Если сигналу управления соответствует точка 1 экстремальной характеристики, то на выходе объекта управления создается сигнал той же частоты, совпадающий по фазе с поисковым сигналом.

Если сигналу управления соответствует точка 2 экстремальной характеристики, то сигнал на выходе объекта управления будет иметь противоположную фазу. Таким образом, фаза сигнала на выходе объекта управления определяет положение рабочей точки относительно экстремума характеристики.

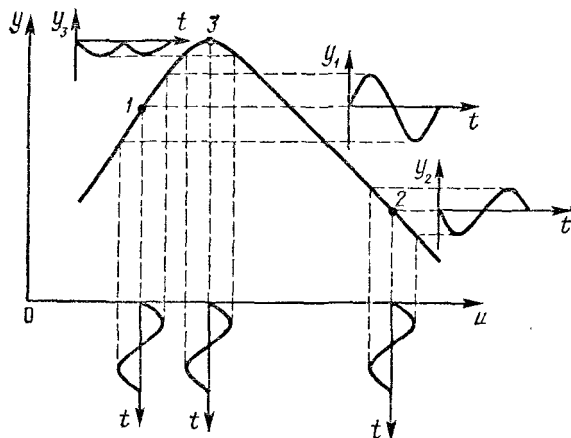


Рис. 16.10. Экстремальная характеристика объекта управления

На рис. 16.11 показана структурная схема одномерной экстремальной системы, в которой для индикации фазы используется синхронный детектор. Поисковые колебания $\delta u = B \sin \omega t$ создаются генератором поисковых колебаний (ГПК). Так же, как и в системах на рис. 16.8, вычисляется градиент dy/du . В зависимости от знака градиента с релейного элемента (РЭ) поступает напряжение того или иного знака, в результате чего исполнительное устройство (ИУ) осуществляет движение к точке экстремума. В рассматриваемой системе усредняющий фильтр

можно исключить, возложив его функции на исполнительное устройство. Основным режимом работы экстремальных систем является колебательный относительно экстремального значения. Поэтому качество работы этих систем оценивается следующими показателями: наибольшее отклонение сигнала u от его экстремального значения, период колебаний T и среднее значение отклонения выходного сигнала от экстремального значения, называемое потерями на поиск (рысканье).

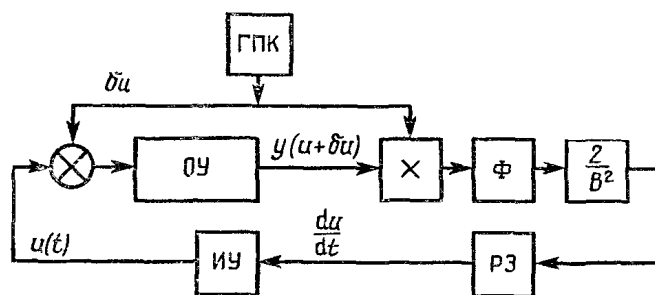


Рис. 16.11. Структурная схема одномерной экстремальной системы

Рассмотрим методику оценки качества работы экстремальных систем с дифференцированием, полагая, что объект управления является безынерционным. Устройством управления в такой системе служит релейный элемент с порогом срабатывания ϵ_0 , исполнительным устройством является интегрирующее звено. Уравнение переключения исполнительного устройства, определяющее отклонение u от экстремального значения, имеет вид $\frac{d}{dt} y[u(t)] = \epsilon_0$.

Так как в рассматриваемой системе $\dot{u} = \pm c$, то уравнение переключения получается следующим: $\pm c dy/du = \varepsilon_0$. При аппроксимации экстремальной характеристики зависимостью $y = ku^2$ уравнение переключения принимает вид $\pm 2cku = \varepsilon_0$, следовательно, $|u_{max}| = \varepsilon_0/(2kc_0)$. Период колебаний – время, за которое сигнал u изменяется от u_{max} до u_{min} : $T_k = (2\varepsilon_0)/(kc^2)$. Потери на поиск определяются выражением

$$R = \frac{1}{u_{max} - u_{min}} \int_{u_{min}}^{u_{max}} [y(u) - y(\bar{u})] du = \varepsilon^2 / (12kc^2),$$

где $y(\bar{u})$ – экстремальное значение сигнала, равное нулю в рассматриваемом случае.

В [17] даны оценки качества работы экстремальных систем других типов.

16.5. Виды адаптивных систем

Адаптивная система управления амплитудным распределением в антенной решетке. Такая система (рис. 16.12) предназначена для подавления сигналов и помех, приходящих с направлений, отличных от направления главного лепестка диаграммы направленности.

Система состоит из антенных элементов, на вход каждого из которых поступает аддитивная смесь сигнала $x_i(t)$ и помехи $v_i(t)$. Выходные сигналы антенных элементов суммируются и образуют выходной сигнал антенной решетки

$$y(t) = \mathbf{W}^T \mathbf{X}(t), \quad (16.43)$$

где $\mathbf{W}^T = [w_1, w_2, \dots, w_n]$ – вектор весовых коэффициентов; $\mathbf{X}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ – вектор входных сигналов; n – число антенных элементов в решетке.

В устройстве адаптации (УА) осуществляется оптимальная весовая обработка принятых сигналов. В качестве критерия оптимальности могут использоваться различные величины – минимум средней квадратической ошибки, максимальное отношение мощности сигнала к мощности помех и др.

Найдем алгоритм адаптации цифрового УА при использовании критерия минимума средней квадратической ошибки. В этом случае ошибка $e(j) = d(j) - y(j)$, где $d(j)$ – желаемый выходной сигнал.

С учетом выражения (16.43) средняя квадратическая ошибка получается следующей:

$$J = M [e^2(t)] = M [d^2] + \mathbf{W}^T \mathbf{R}_x \mathbf{W} - 2\mathbf{W}^T \mathbf{R}_{dx},$$

где $\mathbf{R}_x = M[\mathbf{X}(j)\mathbf{X}^T(j)]$, $\mathbf{R}_{dx} = M[d(j)\mathbf{X}^T(j)]$ – матрицы корреляционных моментов.

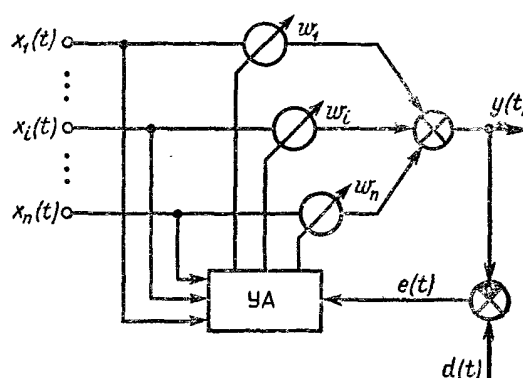


Рис. 16.12. Структурная схема адаптивной системы управления с амплитудным распределением в антенной решетке

Градиент J при минимальном значении среднеквадратической ошибки

$$\nabla J = 2\mathbf{R}_x \mathbf{W} - 2\mathbf{R}_{dx} = 0.$$

Из этого условия находят оптимальный вектор весовых коэффициентов: $\mathbf{W}_0 = \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{R}_{dx}$. Это выражение – уравнение Винера для рассматриваемой задачи, его решение связано со значительными трудностями из-за большого объема вычислений \mathbf{R}_x и ее обращения. Поэтому для поиска оптимального вектора \mathbf{W}_0 целесообразно использовать метод наискорейшего спуска (16.40), в соответствии с которым

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) - \gamma \nabla J(j).$$

Градиент единичного отсчета вычисляют по формуле

$$\nabla J(j) = \nabla [e^2(j)] = 2e(j) \nabla [e(j)] = -2e(j) \mathbf{X}(j).$$

Таким образом, алгоритм адаптации имеет вид

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) + 2\gamma e(j) \mathbf{X}(j).$$

Реализация этого алгоритма сводится к суммированию текущего значения весового коэффициента с входным сигналом, умноженным на ошибку.

Быстродействие процесса адаптации зависит от собственных значений λ_i матрицы \mathbf{R}_x . Переходный процесс адаптации является суммой экспонент с постоянными времени $T_i = 1/(2\gamma\lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

В рассматриваемой системе необходимо знать желаемый выход $d(j)$, который формируется так, чтобы его характеристики были аналогичными принимаемому сигналу.

Адаптивный фазовый суммарно-разностный пеленгатор. Выходное напряжение такого пеленгатора (см. рис. 2.8) определяется формулой (2.11). С учетом нестабильности параметров суммарного и разностного каналов эта формула принимает вид

$$u_{\phi\delta} = k_{\phi\delta} \frac{k_p (1 - g^2) \sin \alpha + 2g \sin(\Delta\phi + \psi) \cos \alpha}{k_c (1 + g^2 + 2g \cos(\Delta\phi + \psi))},$$

где k_p , k_c – коэффициенты усиления разностного и суммарного каналов; g – отношение коэффициентов усиления высокочастотных каналов; ψ – фазовая неидентичность высокочастотных каналов; α – фазовая неидентичность суммарного и разностного каналов.

В том случае, когда $g = 1$ и $\psi = 0$,

$$u_{\phi\delta} = k \operatorname{tg} \Delta\phi / 2; \quad k = k_{\phi\delta} k_p \cos \alpha / k_c.$$

На рис. 16.13 показана структурная схема адаптивного пеленгатора, обеспечивающая компенсацию ошибок, возникающих из-за неидентичности суммарного и разностного каналов.

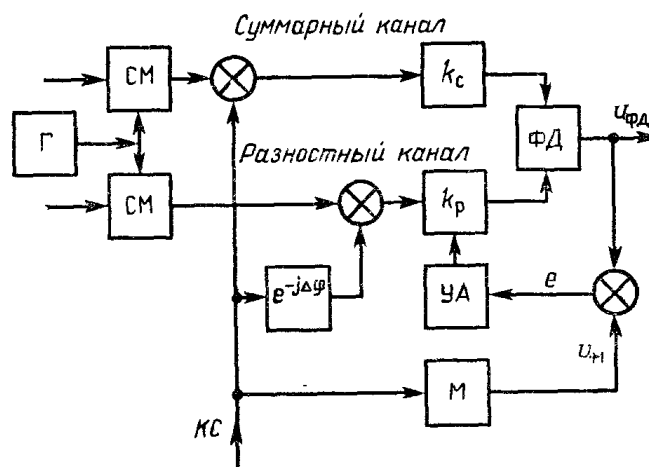


Рис. 16.13. Структурная схема адаптивного пеленгатора

Достигается это следующим образом. Измеряется ошибка отклонения сигнала на выходе пеленгатора от желаемого значения. С этой целью в состав адаптивного пеленгатора включена модель, на вход которой подается контрольный сигнал (КС), этот же сигнал подается в суммарный канал и с запаздыванием на $\Delta\varphi$ – в разностный.

На выходе модели по контрольному сигналу формируется желаемый сигнал пеленгатора. По измеряемой ошибке и выходному сигналу пеленгатора в устройстве адаптации (УА) создается сигнал, под действием которого изменяется коэффициент усиления разностного канала k_p , за счет чего и достигается компенсация влияния нестабильности коэффициента k на точность работы пеленгатора.

Определим алгоритм адаптации при цифровом способе его реализации.

В качестве критерия качества работы пеленгатора примем минимум средней квадратической ошибки:

$$J = M [e^2(j)],$$

где $e(j) = u_k(j) - u_{\phi\Delta}(j) = (k_0 - k) \operatorname{tg} \Delta\varphi/2$; $u_m(j) = k_0 \operatorname{tg} \Delta\varphi/2$.

Градиент функции по коэффициенту $k \Delta J = -2e(j) \operatorname{tg} \Delta\varphi/2$, т.е. равен произведению ошибки и сигнала на выходе модели. Поэтому алгоритм адаптации с методом наискорейшего спуска (16.40) получается следующим:

$$k_p(j+1) = k_p(j) + 2\gamma e(j) u_m(j).$$

На рис. 16.14 показаны графики, иллюстрирующие процессы адаптации при различных значениях нестабильности суммарного и разностного каналов.

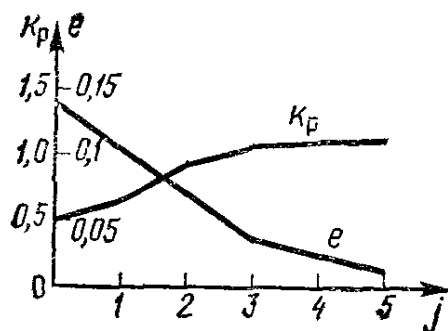


Рис. 16.14. Графики, иллюстрирующие процессы адаптации при различных значениях неустойчивости суммарного и разностного каналов

Вопросы к теме 16

1. Сформулируйте постановку задачи синтеза оптимальных систем.
2. Какие критерии оптимальности применяются при проектировании систем?
3. Каким образом находится оптимальное управление в задачах стабилизации и слежения?
4. Поясните принцип дуальности в оптимальных системах.
5. Какие системы относятся к адаптивным?
6. Поясните принцип работы СНС с эталонной моделью.
7. Какие методы поиска используются в адаптивных системах?
8. В чем главное отличие экстремальных систем от оптимальных?
9. Перечислите типы экстремальных систем.

ЗАДАЧИ ПО ТЕМАМ КУРСА

Непрерывные системы РА

1. Для системы, структурная схема которой изображена на рис. 1, определить передаточные функции: 1) разомкнутой системы $W_p(p)$; 2) замкнутой системы $W_{zx}(p), W_{zy}(p)$; 3) ошибки $W_{ex}(p), W_{ez}(p)$; 4) преобразования Лапласа $Y(p)$ и $E(p)$.

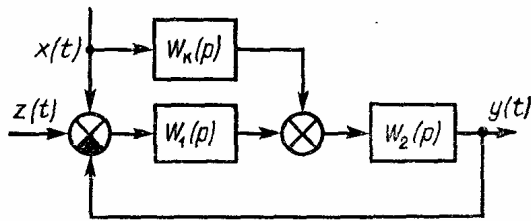


Рис. 1. Структурная схема комплексной системы РА

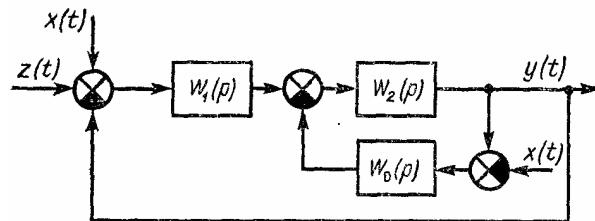


Рис. 2. Структурная схема двухконтурной системы РА

3. Передаточная функция системы имеет вид

$$W_{zx}(p) = \frac{b_1 p + b_0}{p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

Найти уравнение системы в установившемся режиме при постоянном входном сигнале.

4. Оценить устойчивость системы, передаточная функция которой в замкнутом состоянии имеет вид

$$W_3(p) = \frac{2 \cdot 10^4}{p^3 + 130p^2 + 3,2 \cdot 10^3 p + 2 \cdot 10^4}.$$

5. Для системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии

$$W_p(p) = \frac{10}{p(1 + 0,1p)(1 + 0,01p)},$$

определить запас устойчивости по усилению.

6. Для системы с передаточной функцией в разомкнутом состоянии

$$W_p(p) = \frac{20(1 + Tp)}{p^2(1 + 0,1p)}$$

найти постоянную времени T , при которой запас устойчивости по усилению равен двум.

7. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p(p) = \frac{K}{p(1+Tp)^2}.$$

Найти зависимость критического коэффициента усиления от постоянной времени T .

8. По критерию устойчивости Найквиста оценить устойчивость системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии

$$W_p(p) = \frac{100}{p(1+0,05p)(1+0,02p)}.$$

9. По логарифмическим частотным характеристикам определить запас устойчивости в системе, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии

$$W_p(p) = \frac{100(1+0,25p)}{p(1+p)(1+0,01p)^2}.$$

10. По критерию устойчивости Найквиста найти критический коэффициент усиления в системе, передаточная функция которой в замкнутом состоянии

$$W_3(p) = \frac{100(1+0,25p)}{p(1+p)(1+0,01p)^2}.$$

Определить запас устойчивости по усилению.

11. По логарифмическим частотным характеристикам оценить запас устойчивости в системе, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии

$$W_p(p) = \frac{50(1+0,2p)}{p^2(1+0,02p)}.$$

12. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p(p) = \frac{K(1+0,5p)}{p(1+2p)(1+0,02p)^2}.$$

По логарифмическим частотным характеристикам определить коэффициент усиления в системе, при котором запас устойчивости по усилению равен десяти.

13. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p(p) = \frac{3}{(1+0,2p)(1+0,01p)}.$$

Определить переходную и импульсную переходную функции замкнутой системы.

14. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p(p) = \frac{20}{p(1+0,1p)}.$$

Найти переходную и импульсную переходную функции замкнутой системы.

15. Передаточная функция замкнутой системы

$$W_3(p) = \frac{1}{(1+0,1p)(1+0,02p)(1+0,01p)}.$$

Определить выходной сигнал в установившемся режиме при управляющем воздействии $x(t) = 1(t)$ и указать порядок астатизма системы.

16. Передаточная функция замкнутой системы

$$W_3(p) = \frac{0,8}{(1+0,01p)(1+0,05p)(1+0,04p)}.$$

Определить установившееся значение выходного сигнала при входном сигнале $x(t) = 1(t)$ и указать порядок астатизма системы.

17. Передаточная функция системы в разомкнутом состоянии

$$W_p(p) = \frac{100(1+0,2p)}{p^2(1+0,02p)}.$$

Найти аналитическое выражение для выходного сигнала замкнутой системы и сигнала ошибки при управляющем воздействии $x(t) = 10\sin 5t$ и нулевых начальных условиях.

18. Передаточная функция замкнутой системы

$$W_3(p) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

Каковы условия получения порядка астатизма, если: 1) $\nu = 0$; 2) $\nu = 1$; 3) $\nu = 2$?

19. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p(p) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{c_4 p^4 + c_3 p^3 + c_2 p^2 + c_1 p + c_0}.$$

Каковы условия получения порядка астатизма, если: 1) $\nu = 0$; 2) $\nu = 1$; 3) $\nu = 2$?

20. Передаточная функция ошибки системы

$$W_e(p) = \frac{d_4 p^4 + d_3 p^3 + d_2 p^2 + d_1 p + d_0}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

Каковы условия получения порядка астатизма если: 1) $\nu = 0$; 2) $\nu = 1$; 3) $\nu = 2$?

21. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p(p) = \frac{K(1 + T_2 p)}{p(1 + T_1 p)(1 + T_3 p)}.$$

Найти ошибку в замкнутой системе при управляющем воздействии $x(t) = \alpha_0 1(t) + \alpha_1 t 1(t)$.

22. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p(p) = \frac{K}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}.$$

Вычислить ошибку в замкнутой системе при входном сигнале $x(t) = \alpha_1 t 1(t)$.

23. Определить первые два коэффициента ошибок для системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии

$$W_p(p) = \frac{K(1 + T_2 p)}{(1 + T_1 p)^2 (1 + T_3 p)}.$$

24. В комплексной системе (см. рис. 1) при $W_1(p) = 10$, $W_2(p) = 1/p$ и $W_k(p) = p / (1 + 0,01p)$ вычислить первые два коэффициента ошибок комплексной системы и замкнутого контура, а также ошибку относительно воздействий $x(t) = \alpha_x t$ и $z(t) = \alpha_z t$.

25. В комплексной системе (см. рис. 2) вычислить первые два коэффициента ошибок относительно воздействий $x(t)$ и $z(t)$ для случая, когда

$$W_1(p) = 10 / (1 + 0,01p); \quad W_2(p) = 10 / p; \quad W_0(p) = 0,01p.$$

26. Передаточная функция замкнутой системы

$$W_3(p) = b_0 / (p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0).$$

Найти векторное дифференциальное уравнение системы.

27. Оценить устойчивость системы, векторное дифференциальное уравнение которой имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0, \\ 0, & 0, & 1, \\ -0,2 \cdot 10^4, & -380, & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,2 \cdot 10^4 \end{bmatrix} x(t).$$

28. Векторное дифференциальное уравнение системы определяется выражением

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ -167, & -100, & -18,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 167 \end{bmatrix} x(t).$$

Найти матрицу переходных функций.

29. Вычислить матрицу перехода для системы, дифференциальное уравнение которой имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & 1 \\ -500, & -60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 400 \end{bmatrix} x(t).$$

30. Корреляционная функция случайного процесса $R(\tau) \cdot \sigma^2 e^{-\mu|\tau|}$, где μ – параметр затухания. Определить спектральную плотность процесса.

31. Передаточная функция разомкнутой системы $W_p(p) = K / p$. Рассчитать эквивалентную полосу пропускания белого шума замкнутой системы.

32. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p(p) = \frac{K(1+T_2p)}{p(1+T_1p)(1+T_3p)}.$$

Вычислить эквивалентную полосу пропускания белого шума замкнутой системы.

33. Найти эквивалентную полосу пропускания белого шума замкнутых систем, передаточные функции которых в разомкнутом состоянии определяются выражениями:

$$1) W_p(p) = \frac{K(1+T_2p)}{p^2(1+T_3p)}; \quad 2) W_p(p) = \frac{K(1+T_2p)}{p^2}.$$

34. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p(p) = \frac{K}{p(1+Tp)}$$

Рассчитать суммарную среднюю квадратическую ошибку при действии на замкнутую систему управляющего воздействия со спектральной плотностью $S_x(\omega) = N_x / (1 + T_x^2 \omega^2)$ и помехи со спектральной плотностью $S_n(\omega) = N_n$.

35. Вычислить суммарную среднюю квадратическую ошибку в системе с передаточной функцией $W_3(p) = K / (p + K)$, на вход которой подают управляющее воздействие, и помеху со спектральными плотностями $S_x(\omega) = N_x / (1 + \omega^2 T_x^2)$, $S_n = N_n$.

36. В комплексной системе, структурная схема которой приведена на рис. 1, $W_1(p) = 10$; $W_2(p) = 1 / p$; $W_k(p) = p / (1 + 0,01p)$. Определить среднеквадратические ошибки относительно воздействия сигнала $x(t)$ и помехи $z(t)$. Найти суммарную среднюю квадратическую ошибку для случая, когда $S_x(\omega) = 1 / (1 + 0,01\omega^2)$; $S_z(\omega) = 3,05 \cdot 10^{-5} \text{ рад}^2 \cdot \text{с}$.

37. На систему с передаточной функцией в разомкнутом состоянии $W_p(p) = \frac{K}{p(1+Tp)}$ действует стационарный сигнал со спектральной плотностью $S_x(\omega) = \frac{2T_x \sigma_x^2}{1 + \omega^2 T_x^2}$ и помеха со спектральной плотностью $S_n(\omega) = N_n$. Определить оптимальное значение коэффициента усиления, соответствующего минимуму суммарной среднеквадратической ошибки при $T = 0,1 \text{ с}$; $T_x = 20 \text{ с}$; $\sigma_x^2 = 3,05 \cdot 10^{-2} \text{ рад}^2$; $N_n = 3,05 \cdot 10^{-6} \text{ рад}^2 \cdot \text{с}$.

38. Передаточная функция разомкнутой системы $W_p(p) = K(1 + pT) / p^2$, где $K = 100 \text{ с}^2$. На вход замкнутой системы подается управляющее воздействие $x(t) = \alpha t^2 / 2$ и помеха со спектральной плотностью $S_n(\omega) = N_n$. Найти постоянную времени корректирующего устройства T , соответствующую минимуму средней квадратической ошибки системы при $\alpha_2 = 0,17 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-2}$; $N_n = 3,05 \cdot 10^{-5} \text{ рад}^2 \cdot \text{с}$.

Цифровые системы РА

39. Для цифровой системы, структурная схема которой изображена на рис. 3, найти передаточные функции: 1) $W_p(z)$; 2) $W_3(z)$; 3) $W_e(z)$ при $W_H(p) = k_1 / (1 + T_1 p)$.

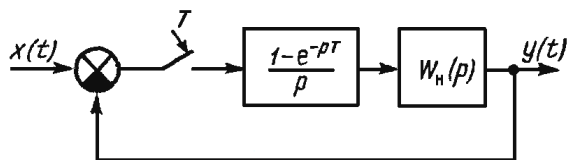


Рис. 3. Структурная схема цифровой системы РА

40. Найти передаточные функции $W_p(z)$, $W_3(z)$, $W_e(z)$ для системы на рис. 3, если $W_H(p) = k / p^2$.

41. Для цифровой системы, структурная схема которой показана на рис. 4, определить передаточные функции $W_p(z)$, $W_3(z)$, $W_e(z)$ при $W_H(p) = k / p$.

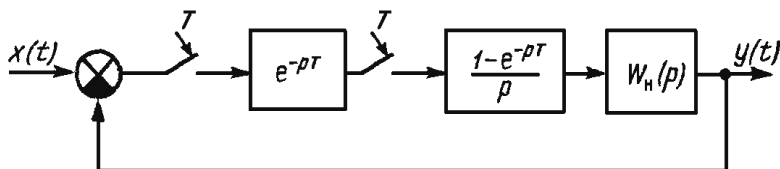


Рис. 4. Структурная схема цифровой системы РА с учетом запаздывания

42. Найти передаточные функции цифровой системы (см. рис. 4), если $W_H(p) = ke^{-pT} / p$.

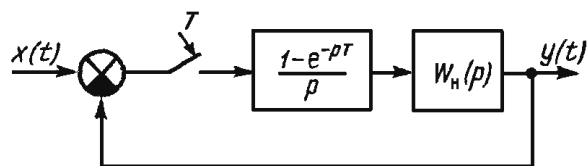


Рис. 5. Структурная схема дальномера с двумя интеграторами

43. Структурная схема дальномера с двумя интеграторами показана на рис. 5. Найти передаточные функции этого дальномера.

44. Определить условие устойчивости цифровой системы в задаче 39.

45. Оценить устойчивость системы в задаче 40.

46. Найти условие устойчивости для системы задачи 41.

47. Определить условие устойчивости в цифровой системе задачи 42.

48. Найти условие устойчивости дальномера с двумя интеграторами, структурная схема которого дана на рис. 5.

49. Вычислить дискретные значения переходного процесса и статической ошибки в цифровой системе задачи 39 для случая, когда $T = T_1 = 0,1$ с; $k_1 = 0,5$.

50. Для условий задачи 41 определить дискретные значения переходного процесса относительно ошибки, если $kT = 0,5$.

51. Для условий задачи 39 вычислить ошибку системы при входном сигнале $x(t) = \alpha t$.

52. Вычислить ошибку в системе задачи 41 относительно управляющего воздействия $x(t) = \alpha t$.

53. Определить среднюю квадратическую ошибку системы задачи 39 при действии белого шума.

Нелинейные системы

54. Для релейной характеристики (рис. 6) определить эквивалентный коэффициент передачи.

55. Для релейной характеристики (рис. 7) найти эквивалентный коэффициент передачи.

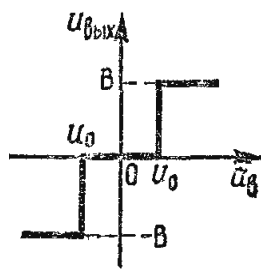


Рис. 6. Релейная характеристика звена

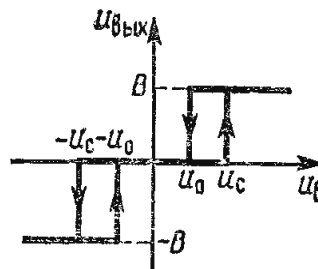


Рис. 7. Релейная характеристика звена с гистерезисом

56. На рис. 8, а, б показаны структурная схема нелинейной системы и характеристика ее нелинейного звена. Определить параметры автоколебаний (амплитуду и частоту) при

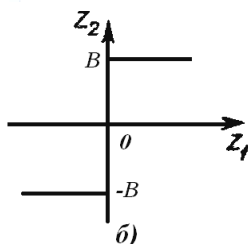
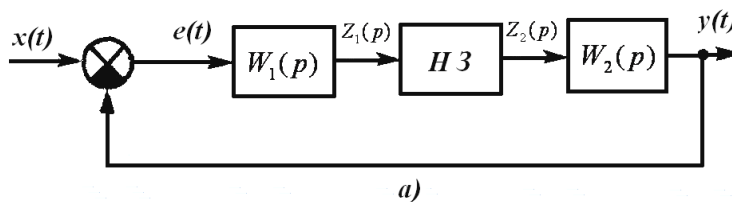


Рис. 8. Релейная система:
а – структурная схема;
б – характеристика нелинейного звена

$$W_1(p) = \frac{k_1}{T_1^2 p^2 + 2\xi T_1 p + 1};$$

$$W_2(p) = \frac{k_2}{1 + T_2 p};$$

$$k_1 k_2 = 50; \quad k_2 = 1;$$

$$T_1^2 = 0,001 \text{ с};$$

$$2\xi T_1 = 0,01 \text{ с};$$

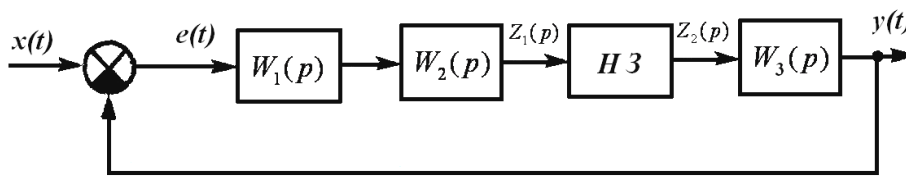
$$T_2 = 0,02 \text{ с}.$$

57. На рис. 9, *а*, *б* изображены структурная схема нелинейной системы и характеристика нелинейного звена. Найти параметры автоколебаний в системе, если

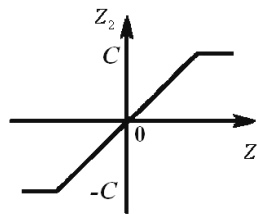
$$W_1(p) = \frac{k_1}{T_1^2 p^2 + 2\xi T_1 p + 1}; \quad W_2(p) = \frac{k_2}{1 + T_2 p}; \quad W_3(p) = \frac{k_3}{1 + T_3 p};$$

$$k_1 k_2 k_3 = 500; \quad k_3 = 10; \quad T_1 = 1 \text{ с};$$

$$2\xi T_1 = 1,4 \text{ с}; \quad T_2 = 1 \text{ с}; \quad T_3 = 4 \text{ с}; \quad C = 50; \quad U_H = 1.$$



а)



б)

Рис. 9. Система РА с ограничением: *а* – структурная схема; *б* – характеристика нелинейного звена

58. На рис. 10 показана структурная схема следящей системы с астатизмом второго порядка. Возможны ли в следящей системе автоколебания, если линейнеаризованная система устойчива?

Рис. 10. Структурная схема следящей системы с астатизмом второго порядка

ОТВЕТЫ

1. 1) $W_p(p) = W_1(p)W_2(p)$;
2) $W_{zx}(p) = \frac{W_p(p) + W_\kappa(p)W_2(p)}{1 + W_p(p)}$; $W_{3z}(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)}$;
3) $W_{ex}(p) = \frac{1 - W_\kappa(p)W_2(p)}{1 + W_p(p)}$; $W_{ez}(p) = \frac{1}{1 + W_p(p)}$;
4) $Y(p) = W_{3x}(p)X(p) + W_{3z}(p)Z(p)$;
 $E(p) = W_{ex}(p)X(p) + W_{ez}(p)Z(p)$.
2. $W_p(p) = \frac{W_1(p)W_2(p)}{1 + W_2(p)W_0(p)}$;
 $W_{3x}(p) = \frac{W_1(p)W_2(p) + W_2(p)W_0(p)}{1 + W_1(p)W_2(p) + W_2(p)W_0(p)}$;
 $W_{3z}(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)}$;
 $E(p) = \frac{1}{1 + W_p(p)}Z(p) + \frac{X(p)}{1 + W_1(p)W_2(p) + W_2(p)W_0(p)}$.
3. $a_0y(t) = b_0x(t)$.
4. Система устойчивая.
5. $\alpha = 11$.
6. $T = 0,5$ с.
7. $K_{кр} = 2 / T$.
8. Система неустойчивая.
9. $\alpha = 8$; $\Delta\varphi = 0,87$ рад.
10. $K_{кр} = 130 \text{ с}^{-1}$; $\alpha = 21$.
11. $\alpha = \infty$; $\Delta\varphi = 0,87$ рад.
12. $K = 38 \text{ с}^{-1}$.
13. $h(t) = 0,75 - 1,09e^{-25t} + 0,34e^{-80t}$; $w(t) = 27,2e^{-25t} - 27,2e^{-80t}$.

14. $h(t) = 1(t) - 1,08e^{-5t} \sin(13,2t + 1,19)$; $w(t) = 15,1e^{-5t} \sin 13,2t$.

15. $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1$; $v = 1$.

16. $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0,8$; $v = 0$.

17. $y(t) = 11,5 \sin(5t - 0,12)$; $e(t) = 2 \sin(5t + 2,8)$.

18. 1) $b_0 \neq a_0$; 2) $b_0 = a_0$; $b_1 \neq a_1$; 3) $b_0 = a_0$; $b_1 = a_1$; $b_2 \neq a_2$.

19. 1) $c_0 \neq 0$; 2) $c_0 = 0$; 3) $c_0 = c_1 = 0$.

20. 1) $d_0 \neq 0$; 2) $d_0 = 0$; 3) $d_0 = d_1 = 0$.

21. $e_\delta = \alpha_1 / K$.

22. $e_\delta = \frac{1}{1+K} \alpha_1 t + \frac{K(T_1 + T_2)}{(1+K)^2} \alpha_1$.

23. $C_0 = 1 / (1 + K)$; $C_1 = \frac{K(2T_1 + T_3 - T_2)}{(1 + K)^2}$.

24. $C_{0x} = C_{1x} = 0$; $C_{0z} = 0$; $C_{1z} = 0,1$ с; $e_{\delta x} = 0$; $e_{\delta z} = 0,1 \alpha_z$.

25. $C_{0x} = C_{1x} = 0$; $C_{0z} = 0$; $C_{1z} = 0,001$ с.

26. $\dot{\mathbf{Z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{Z}(t) + \mathbf{B}x(t)$; $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0_1 & 1 & 0 \\ 0_1 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}$.

27. Система устойчивая.

28. $\begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(t) - 0,5e^{-10t} + 4e^{-5t} - 4,5e^{-3,33t} \\ 5e^{-10t} - 20e^{-5t} + 15e^{-3,33t} \\ -50e^{-10t} + 100e^{-5t} - 50e^{-3,33t} \end{bmatrix}$.

29. $\Phi(t - \tau) = \begin{bmatrix} \frac{5}{4}e^{10(t-\tau)} - \frac{1}{4}e^{-50(t-\tau)}; \frac{1}{40}e^{-10(t-\tau)} - \frac{1}{40}e^{-50(t-\tau)} \\ -\frac{50}{4}e^{-10(t-\tau)} + \frac{50}{4}e^{-50(t-\tau)}; -\frac{1}{4}e^{-10(t-\tau)} + \frac{5}{4}e^{-50(t-\tau)} \end{bmatrix}$.

30. $S(\omega) = (2\mu\sigma^2) / (\mu^2 + \sigma^2)$.
31. $\omega_{\text{ЭК}} = K / 2$.
32.
$$\omega_{\text{ЭК}} = \frac{K(KT_2^2 + T_1 + T_3)}{2(T_1 + T_3 + K(T_1T_2 + T_2T_3 - T_1T_3))}$$
.
33. 1) $\omega_{\text{ЭК}} = \frac{1 + KT_2^2}{2(T_2 - T_3)}$; 2) $\omega_{\text{ЭК}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{T_2} + KT_2 \right)$.
34.
$$\sigma_{\Sigma}^2 = N_x \frac{T(1 + KT_x) + T_x}{2T_x(T + T_x + KT_x^2)} + N_n \frac{K}{2}$$
.
35.
$$\sigma_{\Sigma}^2 = N_x \frac{1}{2T_x(1 + KT_x)} + N_n \frac{K}{2}$$
.
36. $\sigma_{ex}^2 = 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ рад}^2$; $\sigma_{ez}^2 = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ рад}^2$; $\sigma_{\Sigma}^2 = 1,45 \cdot 10^{-4} \text{ рад}^2$.
37. $K_0 = 30 \text{ с}^{-1}$; $\sigma_{\Sigma}^2 = 2,7 \cdot 10^{-4} \text{ рад}^2$.
38. $T_0 = 0,1 \text{ с}$.
39. 1) $W_p(z) = \frac{K}{z - e^{-\beta}}$; 2) $W_3(z) = \frac{K}{z - e^{-\beta} + K}$;
3) $W_e(z) = \frac{z - e^{-\beta}}{z - e^{-\beta} + K}$, где $K = k_1(1 - e^{-\beta})$; $\beta = T / T_1$.
40.
$$W_p(z) = \frac{k T^2 (z+1)}{2 (z-1)^2}, W_3(z) = \frac{k T^2 (z+1)}{2 (z-1)^2 + KT^2 (z+1) / 2};$$

$$W_e(z) = \frac{(z-1)^2}{(z-1)^2 + KT^2 (z+1) / 2}$$
.
41.
$$W_p(z) = \frac{KT}{z(z-1)}; W_3(z) = \frac{KT}{z(z-1) + kT}; W_e(z) = \frac{z(z-1)}{z(z-1) + KT}$$
.
42.
$$W_p(z) = \frac{KT}{z^2(z-1)}; W_3(z) = \frac{KT}{z^2(z-1) + KT};$$

$$W_e(z) = \frac{z^2(z-1)}{z^2(z-1) + KT}$$
.

43. $W_p(z) = KT \frac{z(T + 2T_0) + T - 2T_0}{2(z-1)^2}$; $W_3(z) = \frac{W_p(z)}{1 + W_p(z)}$;
 $W_e(z) = \frac{1}{1 + W_p(z)}$.
44. $K < 1 - e^{-\beta}$; $\beta = T / T_1$.
45. Система неустойчива.
46. $K < 1 / T$.
47. $K < 0,62 / T$.
48. $(2 / KT) > T > T / 2$.
49. $y(nT) = 0,33[1 - (0,055)^n]$; $e_c = 0,67$.
50. $e(nT) = 2(\sqrt{0,5})^{n+1} \sin \pi(n+1) / 4$.
51. $e(nT) = \frac{1}{1+k_1} \alpha nT + \frac{k_1 T \alpha}{(1-e^{-\beta})(1+k_1)}$; $\beta = T / T_1$.
52. $e(nT) = \alpha / k$.
53. $\sigma^2 = \frac{N K_1^2}{T} \frac{1}{1+k_1} \frac{1}{1+e^{-\beta} - k_1(1-e^{-\beta})}$; $\beta = T / T_1$.
54. $g(a) = \frac{4B}{\pi a} \sqrt{1+a/u_0}$; $b(a) = 0$.
55. $g(a) = \frac{2B}{\pi a} (\cos \psi_1 - \cos \psi_2)$; $b(a) = \frac{2B}{\pi a} (\sin \psi_2 - \sin \psi_1)$;
 $\psi_1 = \arcsin(u_c / a)$; $\psi_2 = \pi - \arcsin(u_0 / a)$.
56. $a_{z2} = 12,7$; $\omega_k = 39 \text{ с}^{-1}$.
57. $a_{yк} = 3$; $\omega_k = 0,8 \text{ с}^{-1}$.
58. Режим автоколебаний невозможен.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛИНЕЙНЫХ ЗВЕНЬЕВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Цель работы: экспериментальное исследование динамических характеристик моделей линейных звеньев систем автоматического управления (САУ) и определение их параметров по переходным и частотным характеристикам.

Продолжительность работы – 4 часа.

Теоретические сведения

При создании системы управления технологическим процессом или промышленным объектом необходимо иметь математическое описание объекта управления, управляющего устройства и других элементов, входящих в систему, которые в дальнейшем будем называть звеньями САУ. Математическое описание или математическая модель звена представляет собой совокупность дифференциальных и алгебраических уравнений связи между входными и выходными сигналами. Алгебраические уравнения, описывающие установившееся состояние, когда все производные входных и выходных сигналов равны нулю, называются уравнениями статики.

Дифференциальные уравнения, характеризующие поведение системы во времени при изменении входных воздействий, называются уравнениями динамики.

Для получения динамических характеристик применяют аналитические и экспериментальные методы. Аналитические методы основаны на законах физики, химии, электротехники и др. Часто оказывается эффективным сочетание аналитических методов с экспериментальными. При этом аналитическим путем находят структуру уравнений связи, а числовые значения коэффициентов уравнений определяют экспериментально.

Все экспериментальные методы базируются на предположении о сосредоточенности параметров звена (системы), стационарности во времени его динамических свойств и линейности их при малых изменениях входных воздействий.

Совокупность рассмотренных допущений позволяет описать динамические свойства отдельного звена или системы управления математическими выражениями следующего вида:

1) дифференциальным уравнением

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x(t),$$

где $x(t)$ – входное воздействие ; $y(t)$ – выходной сигнал (управляемая переменная); $a_n, a_{n-1} \dots a_0; b_m, b_{m-1} \dots b_0$ – постоянные коэффициенты, определяемые физическими параметрами звена (системы); для физически реализуемых систем $m \leq n$;

2) передаточной функцией

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{\sum_{i=1}^m b_i p^i}{\sum_{k=1}^n a_k p^k},$$

где p – оператор Лапласа; $y(p)$ и $x(p)$ – изображения $y(t)$ и $x(t)$ соответственно;

3) комплексной передаточной функцией $W(j\omega)$ или амплитудно-фазовой характеристикой (АФХ)

$$W(j\omega) = \frac{y(j\omega)}{x(j\omega)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i (j\omega)^i}{\sum_{k=0}^n a_k (j\omega)^k},$$

где $y(j\omega)$ и $x(j\omega)$ – преобразования Фурье сигналов $y(t)$ и $x(t)$ соответственно.

Между перечисленными динамическими характеристиками линейного звена (системы) существует однозначная связь.

Определение динамических характеристик по переходной характеристике

Переходной характеристикой $h(t)$ называется реакция звена (системы) на единичное ступенчатое воздействие $x(t) = 1(t)$ при нулевых начальных условиях.

Единичная ступенчатая функция представляет собой мгновенное изменение величины воздействия на единицу (рис. Л1.1):

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Ступенчатый сигнал характеризуется амплитудой спектра, быстро убывающей с ростом частоты, причем максимум спектра достигается при $\omega = 0$. Кроме того, спектр физического реализуемого сигнала ограничен сверху частотой $2\pi/a$, где a – скорость нарастания сигнала (рис. Л1.2).

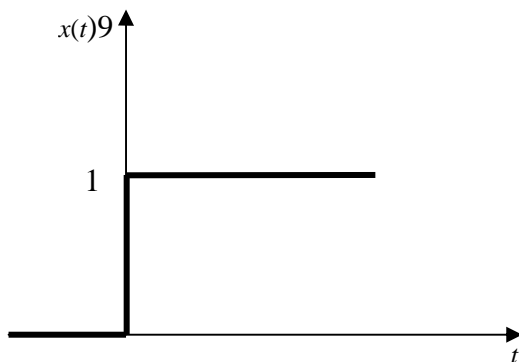


Рис. Л1.1. Единичный ступенчатый сигнал

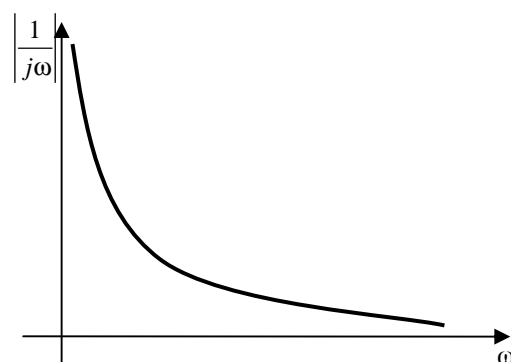


Рис. Л1.2. Спектр единичного ступенчатого сигнала

Из сказанного следует, что с помощью единичного скачка может быть получена достаточно надежная оценка статического коэффициента передачи ($\omega = 0$), а также низкочастотной части динамической характеристики (постоянной времени наиболее низкочастотного контура) исследуемого звена.

Рассматриваемый метод определения динамических характеристик наиболее эффективен для систем первого и второго порядков, реже – для апериодических систем высоких порядков. При известной передаточной функции звена $W(p)$ переходная характеристика $h(t)$ определяется аналитически, как обратное преобразование Лапласа:

$$h(t) = L^{-1}\{W(p)/p\} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{(K_i - 1)!} \cdot \lim_{p \rightarrow p_i} \frac{d^{K_i-1}}{dp^{K_i-1}} \left[\frac{W(p)}{p} (p - p_i)^{K_i} e^{pt} \right],$$

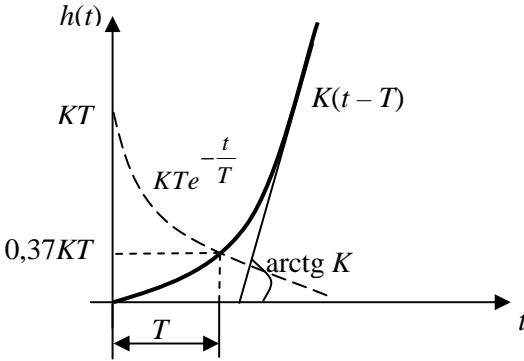
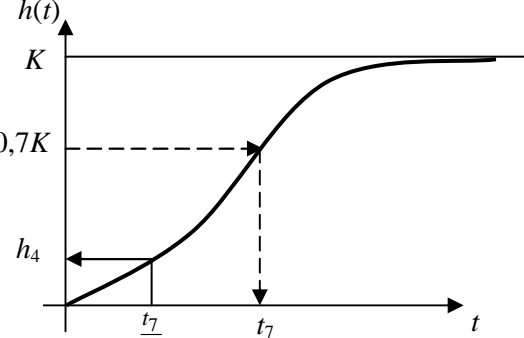
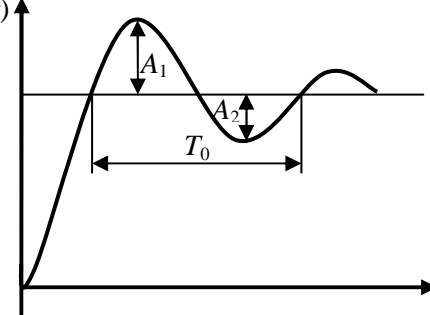
где m – число полюсов функции $W(p)/p$; K_i – кратность i -того полюса.

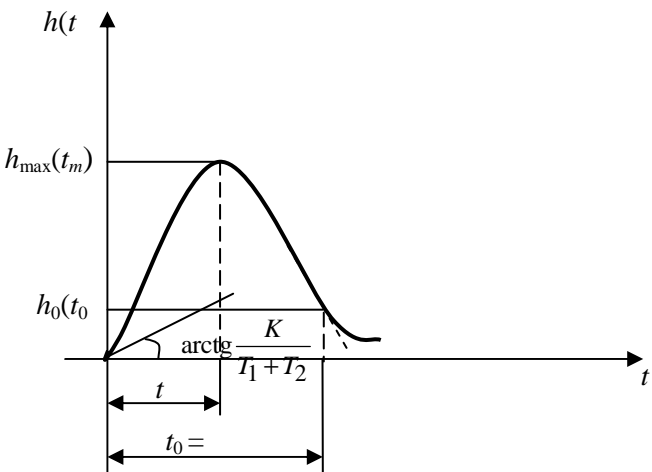
В табл. Л1.1 приведены наиболее распространенные переходные характеристики звеньев САУ, показаны примеры аппроксимации каждой характеристики передаточными функциями типовых звеньев, а также способы определения их параметров.

Таблица Л1.1

№	Аппроксимация переходных характеристик динамических звеньев	Аналитические выражения аппроксимирующих функций
1	2	3
1	 <p style="text-align: center;"> $h(t) _{t=T} = K(1 - e^{-1}) = 0,63K ;$ $\frac{dh}{dt} \Big _{t=0} = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}} \Big _{t=0} = \frac{K}{T} .$ </p>	$W(p) = \frac{K}{Tp + 1} ;$ $h(t) = K \left(1 - e^{-t/T} \right) .$

1	2	3
2	<p style="text-align: center;">касательная $\left. \frac{dh}{dt} \right _{t=0}$</p> $h(t) _{t=T} = \frac{K}{T} e^{-1} = 0,37 \frac{K}{T};$ $\left. \frac{dh(t)}{dt} \right _{t=0} = -\frac{K}{T^2} e^{-\frac{t}{T}} \Big _{t=0} = -\frac{K}{T^2}.$	$W(p) = \frac{Kp}{Tp+1};$ $h(t) = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}}.$
3	$h(t) _{t=0} = K + 0,37K \left(\frac{T_1}{T_2} - 1 \right); \quad \left. \frac{dh(t)}{dt} \right _{t=0} = \frac{K}{T_2} \left(1 - \frac{T_1}{T_2} \right).$	$W(p) = \frac{K(T_1 p + 1)}{T_2 p + 1};$ $h(t) = K \times \left[1 - \left(1 - \frac{T_1}{T_2} \right) e^{-t/T_2} \right].$

1	2	3
4	 <p style="text-align: center;"> $\left. \frac{dh(t)}{dt} \right _{t=0} = 0; \quad h(T) = 0,37KT.$ </p>	$W(p) = \frac{K}{p(Tp+1)};$ $h(t) = K \times \left[t - T(1 - e^{-t/T}) \right] = K(t - T) + KTe^{-t/T}.$
5	 <p style="text-align: center;"> $T_1 + T_2 = \frac{t_7}{1,2}; \quad T_1 - T_2 \approx \sqrt{\frac{h_4 - 0,191K}{0,143K}} \quad (T_1 > T_2); \quad \left. \frac{dh(t)}{dt} \right _{t=0} = 0.$ </p>	$W(p) = \frac{K}{(T_1p+1)(T_2p+1)};$ $h(t) = K \times \left[1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right]$
6	 <p style="text-align: center;"> $\xi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi}{\ln a}\right)^2}}; \quad a = \frac{A_1}{A_2};$ $T = T_0 \frac{\xi}{\ln a}; \quad \left. \frac{dh(t)}{dt} \right _{t=0} = 0$ </p>	$W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1};$ $h(t) = K \left[1 - \frac{e^{-\frac{\xi}{T}t}}{\omega_0 T} \times \sin(\omega_0 t + \varphi) \right];$ <p style="text-align: center;"> $\varphi = \arcsin \omega_0 T;$ $\omega_0 = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}.$ </p>

1	2	3
7	 <p data-bbox="287 940 558 1052">1. $\left. \frac{dh(t)}{dt} \right _{t=0} = \frac{K}{T_1 T_2}$;</p> <p data-bbox="287 1142 782 1276">2. $h_{\max}(t_m) = \frac{K}{T_1 - T_2} \left(e^{-\frac{t_m}{T_1}} - e^{-\frac{t_m}{T_2}} \right)$;</p> <p data-bbox="287 1366 845 1500">3. $h_0(t_0 = 2t_m) = \frac{K}{T_1 - T_2} \left(e^{-\frac{2t_m}{T_1}} - e^{-\frac{2t_m}{T_2}} \right)$.</p>	$W(p) = \frac{Kp}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)};$ $h(t) = \frac{K}{T_1 - T_2} \times \left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right).$

На рис. Л1.3 показаны шкалы на осях координат логарифмических частотных характеристик. В табл. Л1.2 приведены значения высокочастотных наклонов ЛАЧХ.

В табл. Л1.3 приведена аппроксимация логарифмических частотных характеристик.

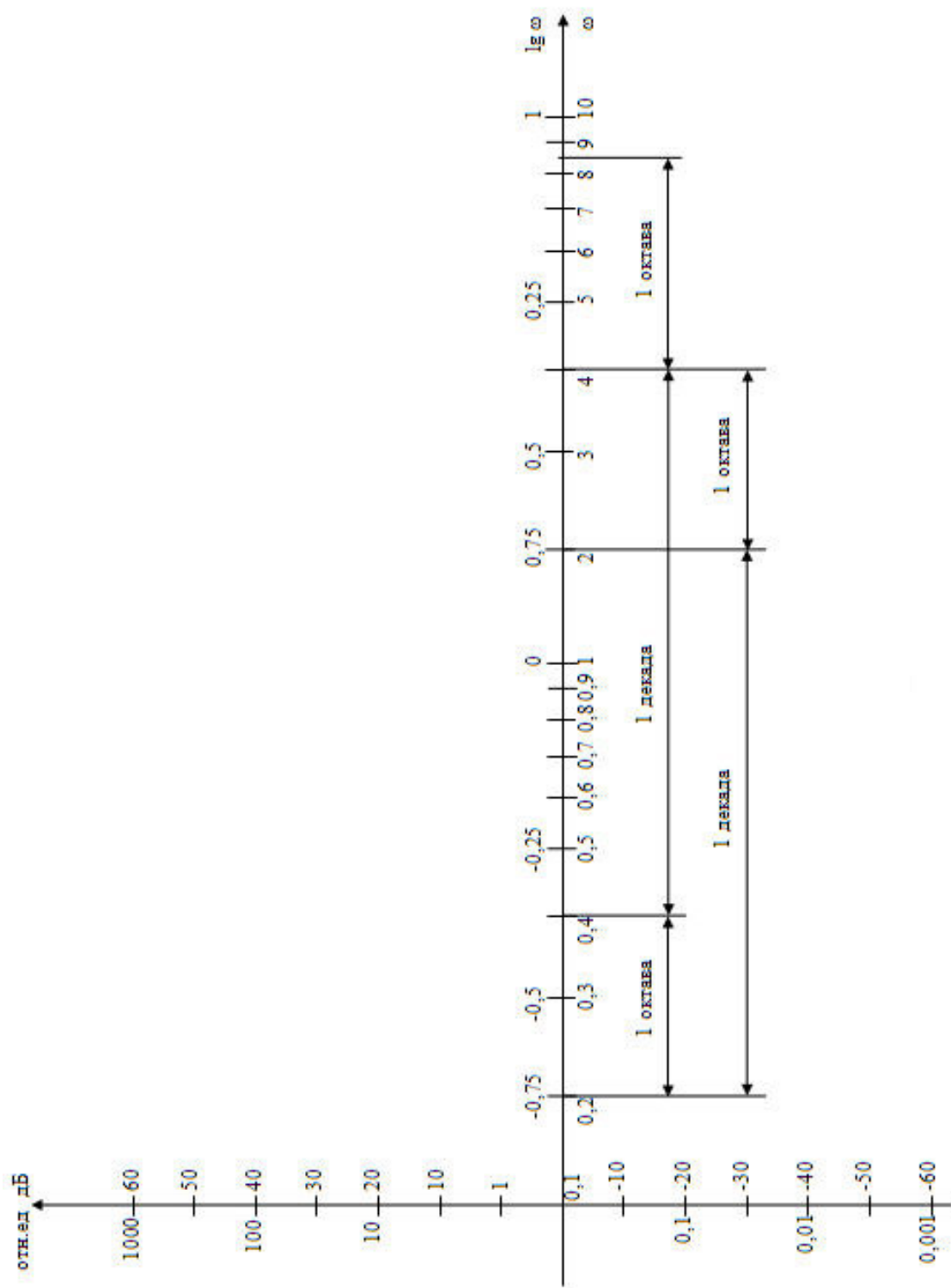


Рис. Л1.3. Шкалы на осях координат логарифмических частотных характеристик

Значения высокочастотных наклонов ЛАЧХ

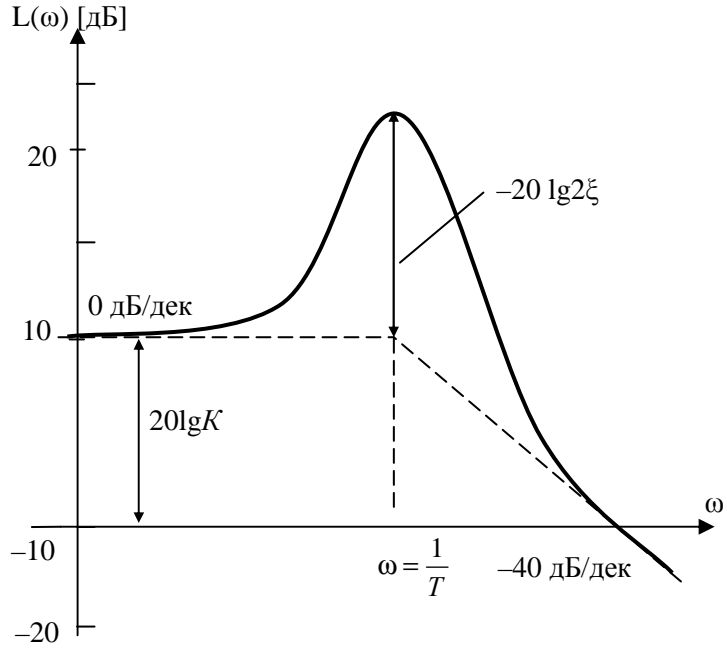
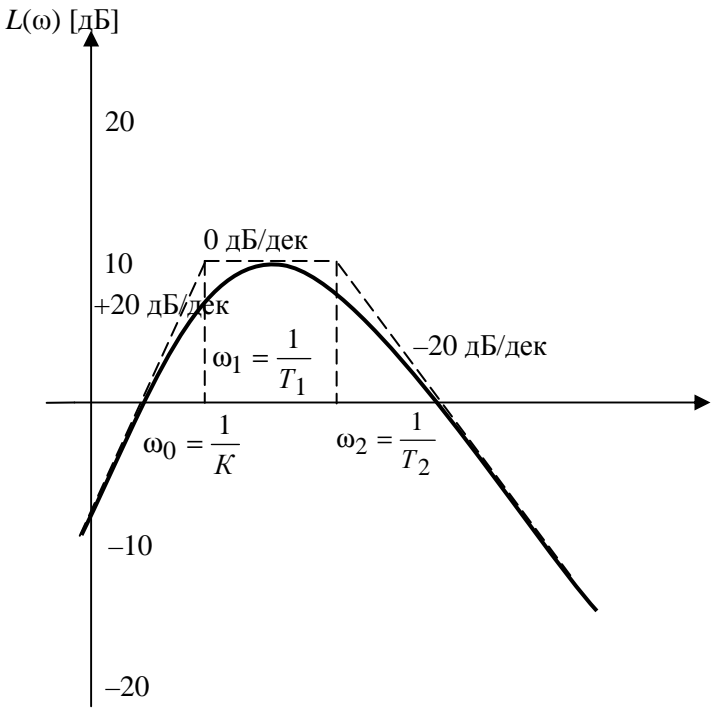
Звено	$L(\omega) = 20\lg W(j\omega) $	Наклон, дБ/дек		Значение ЛАЧХ на сопрягающей частоте, $\omega = \frac{1}{T}$, дБ
		$\omega \ll \frac{1}{T}$	$\omega \gg \frac{1}{T}$	
$W(p) = K$	$20\lg K$	0	0	$20\lg K$
$W(p) = \frac{1}{Tp}$	$-20\lg T\omega$	-20	-20	0
$W(p) = Tp$	$20\lg T\omega$	+20	+20	0
$W(p) = \frac{1}{Tp+1}$	$-20\lg\sqrt{T^2\omega^2+1}$	0	-20	-3
$W(p) = Tp+1$	$20\lg\sqrt{T^2\omega^2+1}$	0	+20	+3
$W(p) = \frac{K}{T^2p^2+2\xi Tp+1};$ $0 \leq \xi < 1$	$-20\lg\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2+4T^2\xi^2\omega^2}$	0	-40	$-20\lg 2\xi$
$W(p) = T^2p^2+2\xi Tp+1;$ $0 \leq \xi < 1$	$20\lg\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2+4T^2\xi^2\omega^2}$	0	+40	$20\lg 2\xi$

Таблица Л1.3

Аппроксимация логарифмических частотных характеристик

№	Аппроксимация логарифмических частотных характеристик динамических звеньев	Передаточная функция
1	<p style="text-align: center;">2</p>	<p style="text-align: center;">3</p> $W(p) = \frac{K}{Tp + 1}$
2		$W(p) = \frac{Kp}{Tp + 1}$

1	2	3
3	<p style="text-align: center;">$T_1 > T_2$</p>	$W(p) = \frac{K(T_1 p + 1)}{T_2 p + 1}$
4	<p style="text-align: center;">$T_1 < T_2$</p>	$W(p) = \frac{K}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$

1	2	3
5		$W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}$
6		$W(p) = \frac{Kp}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$

Лабораторное задание

1. Провести экспериментальное исследование переходных характеристик динамических звеньев, приведенных в табл. Л1.4. Варианты параметров звеньев получить у преподавателя.

Таблица Л1.4

Варианты параметров динамических звеньев

№	Передаточная функция	Параметр	Вариант			
			1	2	3	4
1	$W(p) = \frac{C_0 K_0}{T_{01} p + 1}$	$C_0 K_0$	1	3	1	3
		T_{01}	0,01	0,02	T_{x1}	T_{x2}
2	$W(p) = \frac{C_0 K_0 p}{T_{01} p + 1}$	$C_0 K_0$	1	2	1	2
		T_{01}	0,02	0,1	T_{x1}	T_{x2}
3	$W(p) = \frac{C_0 K_0 (p+1)}{T_{02} p + 1}$	$C_0 K_0$	1	2	1	2
		T_{02}	0,01	0,05	T_{x3}	T_{x4}
4	$W(p) = \frac{C_0 K_0}{p(T_{01} p + 1)}$	$C_0 K_0$	1	4	1	2
		T_{01}	0,02	0,25	T_{x1}	T_{x2}
5	$W(p) = \frac{C_0 K_0}{(T_{01} p + 1)(T_{02} p + 1)}$	$C_0 K_0$	1	2	2	4
		T_{01}	0,01	0,01	T_{x1}	T_{x2}
		T_{02}	0,05	0,25	T_{x3}	T_{x4}
6	$W(p) = \frac{C_0 K_0}{T^2 p^2 + 2T \xi p + 1}$ (при $K_0 = 10$ $T = 0,316 \sqrt{T_{01} T_{02}}$ $\xi = 0,158 \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}$)	$C_0 K_0$	1	0,5	1	1
		T_{01}	0,5	0,1	T_{x1}	T_{x2}
		T_{02}	0,25	0,02	T_{x4}	T_{x3}
7	$W(p) = \frac{C_0 K_0 p}{(T_{01} p + 1)(T_{02} p + 1)}$	$C_0 K_0$	1	2	4	4
		T_{01}	0,01	0,02	T_{x2}	T_{x1}

2. Сопоставить результаты эксперимента с заданными параметрами звеньев. В случае существенных различий (более 20 %) установить причину и повторить эксперимент.
3. Провести экспериментальное исследование переходных характеристик динамических звеньев при неизвестных параметрах (T_{x1}, \dots, T_{x4}).
4. Провести экспериментальное исследование частотных характеристик динамических звеньев при заданных известных параметрах (за исключением звена № 4, содержащего интегрирующий элемент).
5. Сопоставить результаты эксперимента с заданными параметрами и определить причину расхождения полученных результатов.
6. Провести экспериментальное исследование частотных характеристик динамических звеньев при неизвестных параметрах (T_{x1}, \dots, T_{x4}).

Методика выполнения работы

1. Лабораторная работа выполняется на лабораторном стенде СУЛ-3. Параметры динамических звеньев задаются на панели управления системы. Генераторы задающего воздействия $y(t)$ и случайного сигнала $N(t)$ в этой лабораторной работе не используются. Поэтому потенциометры g и C_N следует установить в положение нулевого коэффициента передачи. Следует также отключить интегрирующий элемент $\frac{K_U}{p} \left(\frac{10K_U}{p} \right)$, нелинейный элемент и элемент задания начальных условий (НУ), установив соответствующие тумблеры в нижнее положение. Структурная схема модели, из которой исключены ненужные элементы, должна соответствовать рис. Л1.4.

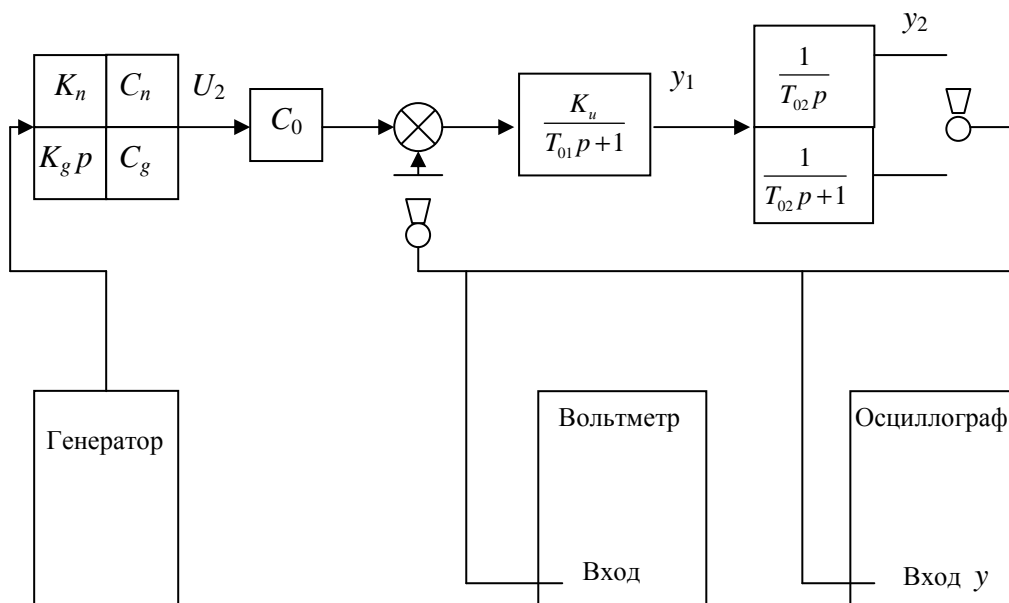


Рис. Л1.4. Схема моделирования к лабораторной работе № 1

2. На вход модели подать сигнал от внешнего генератора. Выходной сигнал модели наблюдается с помощью высокочастотного вольтметра и осциллографа, которые постоянно подключены к управляющей системе. Вход осциллографа следует подключить к точке y_2 . При выполнении пп. 1 и 3 лабораторного задания используется сигнал генератора прямоугольной формы («меандр»), для пп. 4 и 6 лабораторного задания – синусоидальный сигнал.

3. При исследовании звеньев 1, 4 – 6 дифференцирующий элемент отключается. Для этого задается $C_g = 0$. Для всех звеньев устанавливается $C_{\Pi} = 1$, при этом коэффициент передачи пропорциональной ветви управляющего устройства становится равным единице ($K_{\Pi} = 1$; $C_{\Pi}K_{\Pi} = 1$).

Для звеньев 2, 3, 7, имеющих дифференцирующий элемент, задается $C_g = 1$ ($K_g = 1 \text{ с}^{-1}$). Коэффициент передачи всех звеньев устанавливается потенциометром C_0 . Требуемый коэффициент передачи (соответствующий варианту в табл. Л1.4) получается как произведение C_0K_0 ($K_0 = 10$).

4. При исследовании колебательного звена в модели объекта управления вводится отрицательная обратная связь (тумблер в цепи инвертирующего входа сумматора модели ставится в верхнее положение). Тумблер выходного сигнала y_2 также ставится в верхнее положение. В этом случае передаточная функция исследуемого звена определяется с помощью преобразования

$$W(p) = \frac{\frac{K_0}{(T_{01}p + 1)T_{02}p}}{1 + \frac{K_0}{(T_{01}p + 1)T_{02}p}} = \frac{1}{\frac{T_{01}T_{02}}{K_0}p^2 + \frac{T_{02}}{K_0}p + 1} = \frac{1}{T^2p^2 + 2T\xi p + 1},$$

где

$$T = \sqrt{\frac{T_{01}T_{02}}{K_0}}, \quad \xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T_{02}}{K_0T_{01}}}.$$

При фиксированном значении коэффициента передачи $K_0 = 10$ получим:

$$T = 0,316 \sqrt{T_{01}T_{02}}; \quad \xi = 0,1580 \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}.$$

Эти значения используются при проверке соответствия полученных экспериментальных данных известным заданным параметрам колебательного звена.

5. При исследовании динамических звеньев следует учитывать, что они реализованы на интегральных операционных усилителях, линейный участок статической характеристики которых лежит в пределах от -10 В до $+10 \text{ В}$. Поэтому следует подобрать сигнал генератора таким образом, чтобы при переходных процессах переменная y_2 принимала значения $\pm 5 \text{ В} \dots \pm 8 \text{ В}$. При слишком малых значениях переменной y_2 (менее $\pm 0,5 \text{ В}$) могут сказываться шумы операционных усилителей. При работе с интегрирующим звеном (п. 4 в табл. Л1.4) кривая переходного процесса будет отличаться от теоретической наличием зоны насыщения при $y_2 > 10 \text{ В}$ и $y_2 < -10 \text{ В}$.

Содержание отчета

1. Переходные характеристики исследуемых звеньев по п. 1 и их экспериментально измеряемые параметры.
2. Переходные характеристики звеньев по п. 3 и их измеряемые параметры.
3. Экспериментальные логарифмические амплитудно-частотные характеристики, их аппроксимация и вычисленные параметры звеньев.
4. Экспериментальные логарифмические амплитудно-частотные характеристики по п. 6, их параметры и соответствующие им передаточные функции.

Контрольные вопросы

1. Объяснить способы вычисления параметров звеньев по экспериментальным переходным характеристикам.
2. Объяснить способы вычисления параметров и составления передаточной функции по экспериментальным логарифмическим амплитудно-частотным характеристикам.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ И КАЧЕСТВА ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Цель работы: экспериментальное исследование статического и астатического регулирования. Теоретическое и экспериментальное исследование влияния отдельных параметров системы на устойчивость и точность ее работы. Определение оптимальных параметров управляющего устройства.

Продолжительность работы – 4 часа.

Теоретические сведения

Для нормального функционирования САУ необходимо прежде всего обеспечить устойчивость ее движения. Однако устойчивость – необходимое, но не достаточное условие, которое отвечало бы требованиям, предъявляемым к качеству систем автоматического управления. Задача исследования качества САУ заключается в определении косвенных или прямых показателей качества, таких, например, как время переходного процесса t_n , максимальное перерегулирование σ , %, оценка точности работы системы и др.

На рис. Л2.1 представлена типичная переходная характеристика $h(t)$, по которой можно определить основные показатели качества:

- 1) установившуюся ошибку $e_{уст} = e(\infty) = x_{уст} - y_{уст} = 1 - h(\infty)$;
- 2) перерегулирование σ , %:

$$\sigma\% = \frac{y_{\max} - y_{уст}}{y_{уст}} \cdot 100\% = \frac{h_{\max} - h_{уст}}{h_{уст}} \cdot 100\%;$$

- 3) время переходного процесса t_n – время, в течение которого отклонение регулируемой координаты достигает величины, не превосходящей заданного допустимого значения $e_{дон}$.

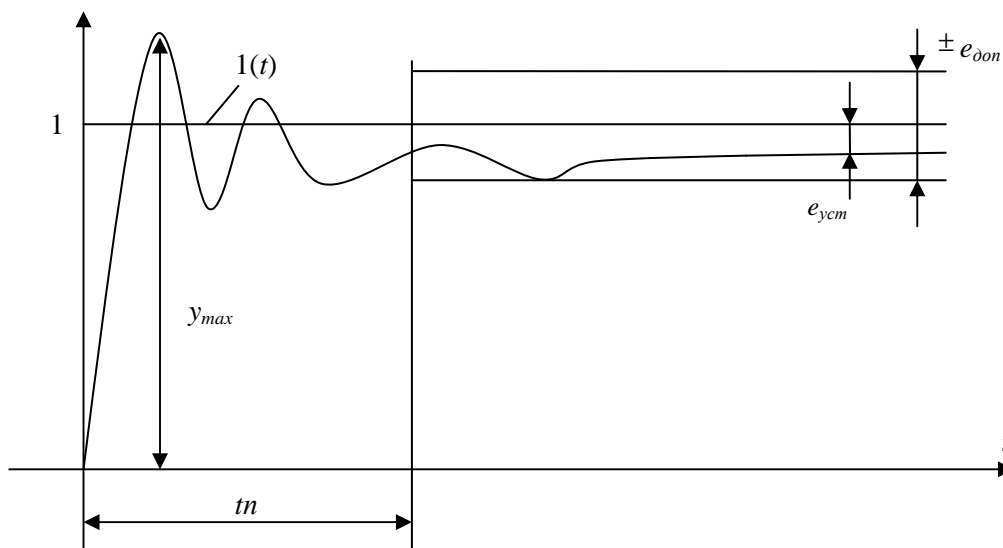


Рис. Л2.1. Общий вид переходной характеристики линейной системы

В более общем случае критерием качества может служить минимум некоторого критерия оптимальности, чаще всего задаваемого в виде интегрального квадратичного функционала от функции ошибки системы.

В лабораторной работе исследуется система, структурная схема которой представлена на рис. Л2.2.

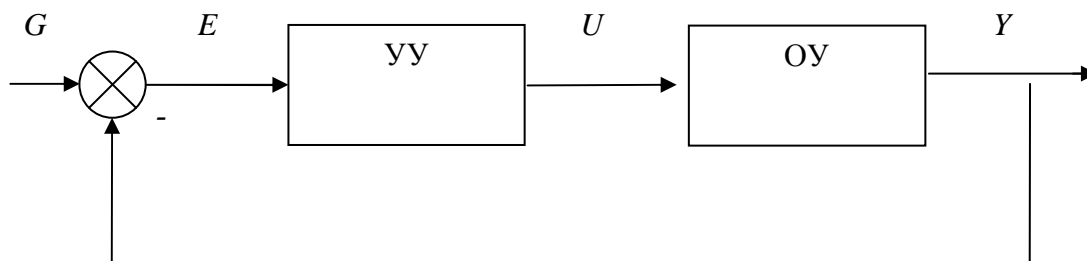


Рис. Л2.2. Структурная схема САУ

Объект управления описывается передаточной функцией вида

$$W_0(p) = \frac{K_0}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}.$$

В качестве управляющего устройства поочередно используются три типа регуляторов:

– пропорционально-интегральный (ПИ) регулятор, имеющий передаточную функцию и уравнение

$$W_p(p) = K_n + \frac{1}{T_u p} = \frac{U(p)}{E(p)};$$

$$u(t) = K_n e(t) + \frac{1}{T_u} \int_0^t e(t) dt;$$

– интегральный (И) регулятор:

$$W_p(p) = \frac{1}{T_u p};$$

$$u(t) = \frac{1}{T_u} \int_0^t e(t) dt;$$

– пропорциональный (П) регулятор:

$$W_p(p) = K_n;$$

$$u(t) = K_n e(t).$$

Определение условий устойчивости системы автоматического управления

При исследовании САУ важно не только установить, устойчива система или нет, но и определить граничные значения параметров управляющего устройства (параметры объекта управления считаются неизменными), при которых сохраняется устойчивость системы, наметить пути устранения неустойчивости.

При исследовании устойчивости линейных систем широко используется алгебраический критерий устойчивости Гурвица, представляющий собой формулировку необходимых и достаточных условий, которым должны удовлетворять определенные соотношения между коэффициентами характеристического уравнения САУ:

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Условия устойчивости, вытекающие из критерия Гурвица для системы с характеристическими уравнениями второй и третьей степени, имеют вид:

$$\text{для } n = 2 \quad a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0; \quad (1)$$

$$\text{для } n = 3 \quad a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0; \\ a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0. \quad (2)$$

В общем виде характеристическое уравнение исследуемой замкнутой системы имеет вид:

$$1 + W_0(p) W_p(p) = 0.$$

Определим условия устойчивости САУ при различных типах регуляторов.

Запишем характеристическое уравнение системы с ПИ-регулятором:

$$T_u T_1 T_2 p^3 + T_u (T_1 + T_2) p^2 + T_u (1 + K_n K_0) p + K_0 = 0.$$

Поскольку все параметры положительны, то необходимое условие устойчивости – положительность всех коэффициентов (1) выполнено для всех типов регуляторов. Если коэффициент передачи выбран заранее (например, из условий технической реализации регулятора), то для обеспечения устойчивости системы требуется подобрать постоянную времени интегратора T_u из условия (2)

$$T_u > \frac{K_0 T_1 T_2}{(T_1 + T_2)(1 + K_n K_0)}. \quad (3)$$

Получим условия устойчивости при использовании И-регулятора. Характеристическое уравнение в этом случае будет

$$T_u T_1 T_2 p^3 + T_u (T_1 + T_2) p^2 + T_u p + K_0 = 0.$$

Область возможных значений постоянной времени интегратора определится неравенством

$$T_u > \frac{K_0 T_1 T_2}{T_1 + T_2}. \quad (4)$$

Из сопоставления неравенств (3) и (4) следует, что для системы с ПИ-регулятором данные условия являются менее жесткими, чем для системы с И-регулятором, т.е. постоянная времени интегратора может изменяться в более широких пределах при сохранении устойчивости.

При включении П-регулятора характеристическое уравнение системы имеет второй порядок и согласно критерию Гурвица (1) система устойчива при любых значениях параметров.

Следовательно, с точки зрения устойчивости система с объектом второго порядка с П-регулятором имеет предпочтение перед системами с И- и ПИ-регуляторами, которые, повышая порядок системы, ограничивают область устойчивости.

Анализ точности системы автоматического управления

Одним из показателей качества САУ является точность, которая определяется величиной ошибки $e(t)$ в различных режимах работы системы. Однако из-за сложности определения $e(t)$ в любой момент времени точность принято оценивать по величине установившейся ошибки

$$e_{уст} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t).$$

В зависимости от наличия установившейся ошибки в системе различают статические и астатические САУ.

Статическими называют такие САУ, в которых регулируемая величина при различных постоянных внешних воздействиях на объект принимает по окончании переходного процесса различные значения, зависящие от величины внешнего воздействия.

Астатическими называют такие САУ, в которых при различных постоянных значениях внешнего воздействия на объект управления отклонение регулируемой величины от требуемого значения по окончании переходного процесса становится равным нулю.

Величину установившейся ошибки можно вычислить, используя теорему о конечном значении преобразования Лапласа, по формуле

$$e_{уст} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pE(p) = \lim_{p \rightarrow 0} pG(p)\Phi_e(p),$$

где $E(p) = L\{e(t)\}$ – изображение ошибки; $G(p)$ – изображение входного сигнала, в качестве которого примем ступенчатый сигнал $g(t) = A \cdot 1(t)$; $G(p) = L\{A \cdot 1(t)\} = A/p$;

$\Phi_e(p) = \frac{1}{1 + W_0(p)W_p(p)}$ – передаточная функция ошибки.

Запишем выражения передаточной функции ошибки для различных видов регуляторов:

– для ПИ-регулятора

$$\Phi_e(p) = \frac{T_u p (T_1 p + 1) (T_2 p + 1)}{T_u p (T_1 p + 1) (T_2 p + 1) + K_0 (K_n T_u p + 1)};$$

– для И-регулятора

$$\Phi_e(p) = \frac{T_u p (T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{T_u p (T_1 p + 1)(T_2 p + 1) + K_0};$$

– для П-регулятора

$$\Phi_e(p) = \frac{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) + K_n K_0}.$$

Вычислим $e_{уст}$ для различных регуляторов.

Очевидно, что для ПИ-регулятора и И-регулятора

$$e_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{A}{p} \Phi_e(p) = 0,$$

т.е. система является астатической.

В случае П-регулятора

$$e_{уст} = \frac{A}{1 + K_n K_0}.$$

Следовательно, при ступенчатом воздействии система является астатической, если ее передаточная функция содержит хотя бы одно интегрирующее звено. Поэтому, с точки зрения точности, системы с И- и ПИ-регуляторами предпочтительнее системы с П-регулятором.

Таким образом, требование к САУ по устойчивости и точности противоречивы. Задачей синтеза САУ является выбор таких параметров, которые при выполнении условий устойчивости обеспечивали бы заданную точность системы.

Интегральная оценка качества

Интегральная оценка качества относится к аналитическим методам исследования качества системы и дает общую оценку скорости затухания и отклонения управляемой величины в совокупности без определения данных параметров в отдельности.

Простейшей интегральной квадратичной оценкой является оценка

$$I_0 = \int_0^{\infty} e^2(t) dt,$$

где $e(t) = g(t) - y(t)$ – ошибка системы; $g(t)$ – задающее воздействие; $y(t)$ – регулируемая величина.

Если $e(t)$ имеет постоянную составляющую в виде установившегося значения $e_{уст}$, то интеграл будет расходящимся, поэтому в качестве ошибки берут динамическую ошибку системы $e_1(t)$, т.е. отклонение регулируемой величины $y(t)$ от ее установившегося значения;

$$e_1(t) = y_{уст} - y_1(t) = g(t) - e_{уст} - y(t) = e(t) - e_{уст}.$$

Интегральная квадратичная оценка может быть определена по изображению ошибки:

$$I_0 = \int_0^{\infty} e_1^2(t) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} E_1(p) E_1(-p) dp. \quad (5)$$

Для практических целей более удобной является формула Релея, которая получается из (5) заменой $p = j\omega$:

$$I_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |E_1(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_e(j\omega)|^2 |G(j\omega)|^2 d\omega. \quad (6)$$

Если подынтегральное выражение представить в виде

$$|E(j\omega)|^2 = |\Phi_e(j\omega)|^2 |G(j\omega)|^2 = \frac{B(j\omega)}{|A(j\omega)|^2} = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)A(-j\omega)},$$

где

$$A(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n; \quad (7)$$

$$B(j\omega) = b_0(j\omega)^{2n-2} + b_1(j\omega)^{2n-4} + \dots + b_{n-2}(j\omega) + b_{n-1}, \quad (8)$$

то интеграл (6) вычисляется по формуле

$$I_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B(j\omega)}{|A(j\omega)|^2} d\omega = \frac{(-1)^{n+1} M_n}{2a_0 \Delta_n}, \quad (9)$$

где $\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$ – старший определитель Гурвица;

$$M_n = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Выбор оптимальных параметров управляющего устройства по минимуму интегральной оценки

При заданной структуре САУ задача выбора параметров сводится к следующему. Необходимо отыскать такие значения изменяемых параметров, при которых квадратичная интегральная оценка становится минимальной.

В системе автоматического управления, которая исследуется в лабораторной работе, переменным параметром является постоянная времени интегратора T_u . Все постоянные времени и коэффициенты передачи заданы постоянными. Следовательно, задача состоит в определении оптимального значения $T_{u\text{ опт}}$, при котором $I_0 = \min$. В качестве управляющего устройства рассматриваются И- и ПИ-регуляторы.

Запишем изображения ошибки $E_1(p)$ для И- и ПИ-регуляторов соответственно при $T_1 = T_2$.

$$\text{И: } E_1(p) = \frac{1}{p} \frac{1}{1 + W_0(p) \cdot W_p(p)} = \frac{T_u T_1^2 p^2 + 2T_u T_1 p + T_u}{T_u T_1^2 p^3 + 2T_u T_1 p^2 + T_u p + K_0};$$

$$\text{ПИ: } E_1(p) = \frac{T_u T_1^2 p^2 + 2T_u T_1 p + T_u}{T_u T_1^2 p^3 + 2T_u T_1 p^2 + T_u (1 + K_n K_0) p + K_0}.$$

Составим выражение для квадратичной интегральной оценки в случае ПИ-регулятора. Определим полиномы $A(j\omega)$ и $B(j\omega)$ согласно уравнениям (7) и (8):

$$A(j\omega) = T_u T_1^2 (j\omega)^3 + 2T_u T_1 (j\omega)^2 + T_u (1 + K_n K_0) (j\omega) + K_0; \quad (10)$$

$$B(j\omega) = T_u^2 T_1^4 (j\omega)^4 - 2T_u^2 T_1^2 (j\omega)^2 + T_u^2. \quad (11)$$

Из выражений (9) и (10) найдем коэффициенты a_i и b_i :

$$\begin{aligned} a_0 &= T_u T_1^2; & b_0 &= T_u^2 T_1^4; \\ a_1 &= 2T_u T_1; & b_1 &= -2T_u^2 T_1^2; \\ a_2 &= T_u (1 + K_n K_0); & b_2 &= T_u^2; \\ a_3 &= K_0. \end{aligned}$$

При подстановке этих коэффициентов в (9) получим выражение интегральной квадратичной оценки.

$$\text{ПИ: } I_0 = \frac{T_u [2T_u + (3 + K_n K_0) K_0 T_1]}{2K_0 [2T_u (1 + K_n K_0) - K_0 T_1]}. \quad (12)$$

Выражение для I_0 в случае И-регулятора получается из (12) как частный случай подстановкой $K_n = 0$:

$$\text{И: } I_0 = \frac{T_u (2T_u + 3K_0 T_1)}{2K_0 (2T_u - K_0 T_1)}. \quad (13)$$

Искомое значение $T_{u\text{ опт}}$, при котором квадратичная оценка имеет минимум, найдем, дифференцируя (12) и (13) по T_u и приравнявая производную нулю. Окончательно имеем:

– для ПИ-регулятора

$$T_{u\text{ опт}} = \frac{(3 + K_n K_0) K_n T_1}{2(1 + K_n K_0)}; \quad (14)$$

– для И-регулятора

$$T_{u\text{ опт}} = 1,5 T_1 K_0. \quad (15)$$

При схемотехнической и программной реализации рассмотренных регуляторов удобнее пользоваться коэффициентом передачи интегрирующего блока, который является обратной величиной по отношению к постоянной времени. В управляющей системе СУЛ-3 суммарный коэффициент передачи интегрирующего блока определяются двумя параметрами – K_u и C_u .

$$K_{u\Sigma} = K_u C_u = T_u^{-1}.$$

Исходя из выражений (14) и (15), получим значение оптимального суммарного коэффициента передачи интегрирующего блока. При использовании ПИ-регулятора он равен

$$K_{u\Sigma} = \frac{2(1 + K_{n\Sigma} K_{o\Sigma})}{K_{n\Sigma} T_{01} (3 + K_{n\Sigma} K_{o\Sigma})}.$$

Для И-регулятора оптимальный коэффициент передачи интегрирующего блока равен

$$K_{u\Sigma} = \frac{0,67}{K_{o\Sigma} T_{01}}.$$

Лабораторное задание

1. Собрать схему моделирования линейной САУ (рис. Л2.3), задав параметры в соответствии с табл. Л2.1.

2. Рассчитать область возможных значений суммарного коэффициента передачи интегрирующего блока $K_{u\Sigma}$, при которых выполняется условие устойчивости САУ. Расчет выполнить отдельно для И- и ПИ-регуляторов с учетом приведенных в таблице параметров.

3. Для САУ с П-регулятором рассчитать установившуюся ошибку $e_{уст}$. Построить график зависимости $e_{уст} = f(K_{n\Sigma})$, где $K_{n\Sigma} = C_{П} K_{П}$.

4. Снять экспериментально зависимость $e_{уст} = f(K_{n\Sigma})$ для САУ с П-регулятором. Сопоставить результаты эксперимента с расчетными данными. Пронаблюдать величину установившейся ошибки при использовании И- и ПИ-регуляторов.

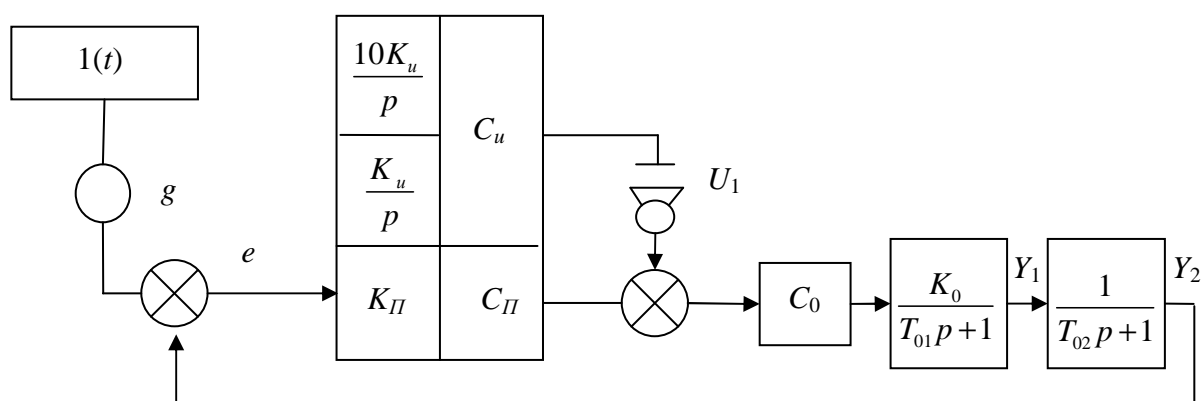


Рис. Л2.3. Схема моделирования к лабораторной работе № 2

Таблица Л2.1

Тип регулятора	Параметр САУ				
	$K_{n\Sigma}$	$K_{u\Sigma}, c^{-1}$	$K_{0\Sigma}$	T_{01}, c	T_{02}, c
П	0,05 – 1	0	10	1	1
И	0	0,05 – 10	1	1	1
ПИ	1	0,05 – 10	1	1	1

5. Проверить экспериментально выполнение условий устойчивости для И- и ПИ-регуляторов.

6. Рассчитать оптимальные значения суммарного коэффициента передачи интегрирующего блока $K_{u\Sigma}$ для И- и ПИ-регуляторов. Проверить выполнение условий устойчивости при $K_{u\Sigma} = K_{u\Sigma onm}$.

7. Определить экспериментально зависимость интегральной оценки от суммарного коэффициента передачи $K_{u\Sigma}$, представить полученные результаты в виде графика $I_0 = f\left(\frac{K_{u\Sigma}}{K_{u\Sigma onm}}\right)$.

8. Для САУ с И- и ПИ-регуляторами экспериментально исследовать переходный процесс. Определить величину перерегулирования и время переходного процесса при следующих значениях суммарного коэффициента передачи интегрирующего блока:

$$K_{u\Sigma} = 0,2K_{u\Sigma onm}, K_{u\Sigma} = K_{u\Sigma onm}, K_{u\Sigma} = 2K_{u\Sigma onm}.$$

Методические указания

1. При задании суммарных коэффициентов передачи

$$K_{n\Sigma} = C_{\Pi} K_{\Pi};$$

$$K_{u\Sigma} = K_{u\Sigma onm}$$

следует учитывать, что постоянные коэффициенты имеют значения:

$$K_{II} = 1;$$
$$K_u = 1 \text{ с}^{-1}.$$

Коэффициенты передачи потенциометров C_{II} и C_u могут задаваться в пределах 0,05 – 1. Интегрирующий блок имеет два диапазона, K_u и $10K_u$, т.е. позволяет получить постоянные коэффициенты передачи 1 с^{-1} и 10 с^{-1} .

2. При подготовке схемы моделирования следует отключить ненужные блоки путем установки потенциометров C_N , C_g в положение нулевого коэффициента передачи. Тумблеры в цепях обратной связи модели объекта управления и выходного сигнала управляющего устройства следует поставить в нижнее положение.

3. Для всех экспериментов следует выбрать задающее воздействие $g(t) = 0,5 \cdot 1(t)$. Величину задающего воздействия следует отрегулировать соответствующим потенциометром после подачи команды «Пуск».

4. При определении времени переходного процесса переключатель секундомера следует установить в положение «от e ».

5. При определении квадратичной оценки могут использоваться два диапазона (J или $10J$) вычислителя оценки. При выборе диапазона следует руководствоваться удобством отсчета значений и отсутствием зашкаливания измерительного прибора.

Содержание отчета

1. Структурная схема исследуемой системы автоматического управления.
2. Расчеты условий устойчивости, установившейся ошибки и $K_{u \text{ onm}}$.
3. Графики:
 - теоретической и экспериментальной зависимости $e_{ycm} = f(K_{n\Sigma})$;
 - экспериментальной зависимости $I_0 = f\left(\frac{K_u}{K_{u \text{ onm}}}\right)$;
 - переходных процессов по п. 8 лабораторного задания.

Контрольные вопросы и задания

1. Определение статической и астатической системы.
2. Связь установившейся ошибки с передаточной функцией системы и входным сигналом.
3. Влияние параметров П-, ПИ-, И-регуляторов на переходной процесс системы.
4. Оценки качества переходного процесса.
5. Влияние типа регулятора на устойчивость и ошибку системы.
6. Проанализировать результаты эксперимента. Объяснить причину возникновения экстремума оценки.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ СЛУЧАЙНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Цель работы: исследование влияния помех на точность линейной системы автоматического управления.

Продолжительность работы – 4 часа.

Теоретические сведения

Случайные функции. Основные понятия и определения

На практике большинство систем автоматического управления (САУ) работает в условиях постоянно действующих случайных полезных и вредных воздействий. Полезным является, например, такое воздействие, как входной (задающий) сигнал следящей системы. К вредным случайным воздействиям относятся различные внутренние и внешние помехи, изменения нагрузки, напряжения сети и т.п. Полезные случайные (и неслучайные) воздействия система управления должна воспроизводить и преобразовывать по заданному закону как можно точнее. Система управления строится таким образом, чтобы вредные случайные воздействия вносили минимальную ошибку в закон преобразования полезного сигнала.

Для анализа поведения системы при случайных воздействиях, в частности, для выбора ее параметров, обеспечивающих наибольшую точность работы, необходимо привлекать математический аппарат теории случайных функций.

Случайная функция $X(t)$ (или случайный процесс) – такая функция времени, значение которой в каждый конкретный момент времени t является случайной величиной. В результате проведения эксперимента случайная функция реализуется в виде какой-либо конкретной функции, которая называется реализацией. Бесконечное множество возможных реализаций и обобщается понятием случайной функции. Ордината случайной функции в каждый заданный момент времени – случайная величина. Следовательно, случайная функция представляет собой совокупность бесконечного множества случайных величин, поэтому дать полную вероятностную ее характеристику в виде закона распределения не представляется возможным.

В практических задачах обычно ограничиваются неполной характеристикой случайной функции, используя понятия «математическое ожидание», «дисперсия», «корреляционная функция».

Математическим ожиданием функции $X(t)$ называется такая неслучайная функция $m_x(t)$, значение которой при каждом данном значении аргумента t равно математическому ожиданию случайной функции $X(t)$ при этом значении t :

$$m_x(t) = M[X(t)].$$

Математическое ожидание случайной функции характеризует ее среднее значение. Разность между случайной функцией и ее математическим ожиданием – отклонение случайной функции от ее математического ожидания – называется центрированной случайной функцией:

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t).$$

Дисперсией случайной функции $X(t)$ называется математическое ожидание квадрата центрированной случайной функции:

$$D_X(t) = [D_X(t)] = M \left[\left\{ \overset{\circ}{X}(t) \right\}^2 \right].$$

Дисперсия случайной функции характеризует разброс возможных реализаций относительно математического ожидания. Она определяет ширину полосы, заполненной возможными реализациями случайной функции. Среднее квадратическое отклонение случайной функции

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_X(t)}.$$

Корреляционная функция случайной функции $X(t)$ – неслучайная функция двух аргументов $K_X(t, t')$, которая при каждой паре значений t и t' равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайной величины:

$$K_X(t, t') = M \left[\overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{X}(t') \right].$$

Полагая, что $t = t'$, имеем:

$$K_X(t, t') = M \left[\overset{\circ}{X}^2(t) \right] = D_X(t),$$

т.е. в этом случае корреляционная функция обращается в дисперсию случайной функции. Она характеризует степень зависимости между двумя сечениями случайной функции.

Для определения зависимости между двумя случайными функциями $X(t)$ и $Y(t)$ служит взаимная корреляционная функция

$$K_{XY}(t, t') = M \left[\overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{Y}(t) \right].$$

Случайные функции, для которых математическое ожидание и дисперсия постоянны, а корреляционная функция зависит только от интервала времени $\tau = t - t'$, называются стационарными. Следовательно, для стационарной случайной функции

$$\begin{aligned} m_x(t) &= m_x = \text{const}; \\ D_X(t) &= D_X = \text{const}; \\ K_X(t, t') &= K_X(t - t') = K_X(\tau). \end{aligned}$$

Поскольку $D_X(t) = K_X(t, t')$, то для стационарной случайной функции

$$D_X = K_X(t - t') = K_X(0).$$

Требование постоянства значения математического ожидания для стационарной случайной функции несущественно, т.к. последнюю всегда можно центрировать и получить случайную функцию с $m_X = 0 = \text{const}$. Таким образом, единственным условием стационарности является следующее:

$$K_X(t, t') = K_X(t - t') = K_X(\tau).$$

Существуют случайные процессы, для которых доказана эргодическая теорема: любая статическая характеристика, полученная усреднением по множеству с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, совпадает с характеристикой, полученной усреднением по времени. Иногда данное положение считают очевидным, даже если оно не доказано. Тогда говорят об эргодической гипотезе, которая применяется для многих стационарных процессов. На практике эргодическая гипотеза позволяет получить характеристики случайного процесса всего лишь при одной реализации достаточной продолжительности.

Для эргодических случайных процессов математическое ожидание m_X , корреляционная функция $R_X(\tau)$ и дисперсия D_X определяются выражениями

$$m_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt;$$

$$K_X(\tau) = R_X(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{X}(t + \tau) dt;$$

$$D_X = R_X(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \overset{\circ}{X}^2(t) dt.$$

Для стационарных случайных функций вводится еще одно понятие – спектральная плотность, характеризующая спектральный состав функции. Спектральная плотность – это Фурье-изображение корреляционной функции:

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Соответственно обратное преобразование Фурье дает возможность найти корреляцию по спектральной плотности:

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_X(\omega) \cos \omega\tau d\omega. \quad (1)$$

Дисперсия случайной функции связана со спектральной плотностью выражением

$$D_X = R_X(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega. \quad (2)$$

Для двух случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$, как и для корреляционных функций, вводится понятие взаимной спектральной плотности:

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau;$$

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Преобразование стационарного случайного сигнала линейной динамической системой

Пусть на линейную систему, имеющую передаточную функцию $W(p)$, действует стационарный случайный сигнал $X(t)$ с математическим ожиданием $m_x(t)$ и корреляционной функцией $R_x(\tau)$. На выходе системы сигнал $Y(t)$ будет также случайным $m_y(t)$ и зависимым от корреляционной функции в установившемся режиме $R_y(\tau)$. Поскольку $m_x(t)$ – неслучайная функция времени, то $m_y(t)$ находим обычным способом для неслучайных сигналов:

$$m_y(p) = W(p)m_x(p),$$

где

$$m_y(p) = L\{m_y(t)\};$$

$$m_x(p) = L\{m_x(t)\}.$$

Определим корреляционную функцию стационарного случайного сигнала на выходе системы:

$$R_y(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t) y(t + \tau) dt. \quad (3)$$

На основании уравнения свертки имеем:

$$y(t) = \int_0^t w(\lambda_1) x(t - \lambda_1) d\lambda_1; \quad (4)$$

$$y(t + \tau) = \int_0^t w(\lambda_2) x(t + \tau - \lambda_2) d\lambda_2, \quad (5)$$

где $w(t) = L^{-1}\{W(p)\}$ – весовая функция системы.

Определим стационарный сигнал на выходе, который устанавливается при $t \rightarrow \infty$. Заменяя верхние пределы в (4) и (5) на ∞ и подставляя в (3), получим:

$$R_y(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} w(\lambda_1) w(\lambda_2) x(t - \lambda_1) x(t + \tau - \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 dt =$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} w(\lambda_1) w(\lambda_2) R_x(\tau - \lambda_2 + \lambda_1) d\lambda_1 d\lambda_2. \quad (6)$$

Из уравнения (6) можно найти корреляционную функцию случайного сигнала на выходе по известной корреляционной функции входного сигнала.

Определим закон преобразования спектральной плотности. Пусть корреляционной функции $R_x(\tau)$ соответствует спектральная плотность $S_x(\omega)$. Тогда для спектральной плотности выходного сигнала имеем:

$$S_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (7)$$

Подставляя выражение для $R_y(\tau)$ из (6) в (7), получим:

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_x(\tau - \lambda_2 + \lambda_1) w(\lambda_1) w(\lambda_2) e^{-j\omega\tau} d\lambda_1 d\lambda_2 d\tau = \\ &= \int_0^{\infty} w(\lambda_1) e^{j\omega\lambda_1} d\lambda_1 \int_0^{\infty} w(\lambda_2) e^{-j\omega\lambda_2} d\lambda_2 \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau - \lambda_2 + \lambda_1) e^{-j\omega(\tau - \lambda_2 + \lambda_1)} d\tau. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} w(\lambda_1) e^{j\omega\lambda_1} d\lambda_1 &= W(-j\omega); \\ \int_0^{\infty} w(\lambda_2) e^{-j\omega\lambda_2} d\lambda_2 &= W(j\omega); \\ W(j\omega) \cdot W(-j\omega) &= |W(j\omega)|^2, \end{aligned}$$

то окончательно имеем:

$$S_y = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega).$$

Дисперсия сигнала на выходе

$$D_y = R_y(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega. \quad (8)$$

При вычислении интеграла (8) подынтегральное выражение представляется в виде

$$|W(j\omega)|^2 S_x(\omega) = \frac{G(j\omega)}{A(j\omega)A(-j\omega)},$$

где

$$\begin{aligned} A(j\omega) &= a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n; \\ G(j\omega) &= b_0(j\omega)^{2n-2} + b_1(j\omega)^{2n-4} + \dots + b_n. \end{aligned}$$

В общем случае при любом n для устойчивой системы интеграл

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \frac{G(j\omega)}{A(j\omega)A(-j\omega)} d\omega$$

может быть представлен в виде

$$I_n = \frac{(-1)^{n+1} M_n}{2a_0 \Delta_n}, \quad (9)$$

где

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}; \quad M_n = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}.$$

Расчет линейной САУ при наличии помех

Рассмотрим САУ, на которую действуют одновременно полезный стационарный случайный сигнал $g(t)$ и стационарная помеха $N(t)$ (рис. ЛЗ.1).

Рассмотрим способ вычисления дисперсии ошибки воспроизведения полезного сигнала $g(t)$ в установившемся режиме (D_e).

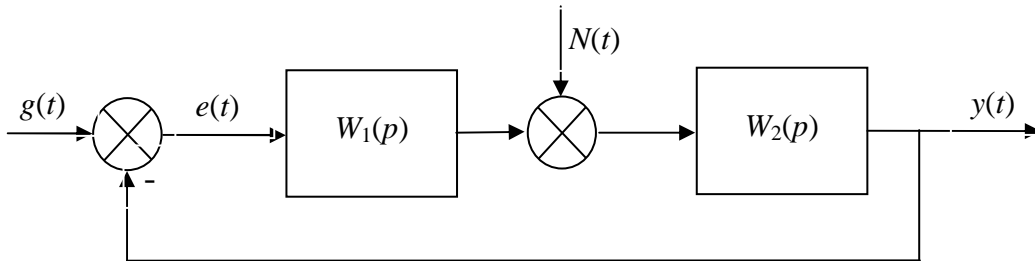


Рис. ЛЗ.1. Структурная схема САУ с помехой

Ошибкой системы $e(t)$ считают разность между действительной выходной величиной $y(t)$ и желаемой (идеальной), за которую обычно принимают входную величину $g(t)$. Чем точнее обрабатывается системой входная величина, тем качественнее система и меньше ее ошибка:

$$e(t) = g(t) - y(t).$$

Поскольку система линейная, то ошибка $e(t)$ определяется двумя составляющими, обусловленными действием сигналов $g(t)$ и $N(t)$:

$$e(t) = e_g(t) + e_N(t).$$

Дисперсия ошибки

$$D_e = M \{e^2(t)\} = M \left\{ [e_g(t) + e_N(t)]^2 \right\} = \\ = M \{e_g^2(t)\} + M \{e_N^2(t)\} + 2M \{e_g(t) \cdot e_N(t)\} = D_{eg} + D_{eN} + 2K_{gN},$$

где

$D_{eg} = M \{e_g^2(t)\}$ – дисперсия составляющей ошибки от полезного сигнала;

$D_{eN} = M \{e_N^2(t)\}$ – дисперсия составляющей ошибки от сигнала помехи;

$K_{gN} = M \{e_g(t)e_N(t)\}$ – взаимный корреляционный момент $e_g(t)$ и $e_N(t)$.

Считая $g(t)$ и $N(t)$ некоррелированными, получим:

$$D_e = D_{eg} + D_{eN}. \quad (10)$$

Согласно (8) для составляющих дисперсии имеем:

$$D_{eg} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_g(j\omega)|^2 S_g(\omega) d\omega; \quad (11)$$

$$D_{eN} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_N(j\omega)|^2 S_N(\omega) d\omega, \quad (12)$$

где

$\Phi_g(j\omega) = \frac{1}{1 + W_1(j\omega)W_2(j\omega)}$ – передаточная функция ошибки от полезного сигнала $g(t)$;

$\Phi_N(j\omega) = \frac{W_2(j\omega)}{1 + W_1(j\omega)W_2(j\omega)}$ – передаточная функция ошибки от помехи $N(t)$.

При известных параметрах объекта, применяя формулу (10), можно вычислить D_e .

В настоящей лабораторной работе требуется определить оптимальное значение одного из параметров системы – постоянной времени T_u интегрирующего элемента управления, при которой обеспечивается минимум дисперсии ошибки. Для этого по формуле (10) вычисляется $D_e = f(T_u)$. Оптимальное значение T_u находят обычным способом из выражения

$$\frac{\partial D_e}{\partial T_u} = 0.$$

Вычисление дисперсии ошибки исследуемой системы

Получим выражение для дисперсии ошибки системы, исследуемой в лабораторной работе. Структурная схема системы приведена на рис. Л3.2.

Передаточная функция ошибки от полезного сигнала

$$\Phi_g(p) = \frac{1}{1 + K_{n\Sigma} \frac{K_{0\Sigma}}{T_{02}p}} = \frac{T_{02}p}{T_{02}p + K_{n\Sigma}K_{0\Sigma}},$$

где

$$K_{n\Sigma} = K_n C_n; \quad K_n = 10;$$

$$K_{0\Sigma} = K_0 C_0; \quad K_0 = 10.$$

Искомый параметр $T_u = T_{02}$.

Передаточная функция ошибки от помехи

$$\Phi_N(p) = \frac{K_{n\Sigma}K_{0\Sigma}C_N}{T_{02}p + K_{n\Sigma}K_{0\Sigma}}.$$

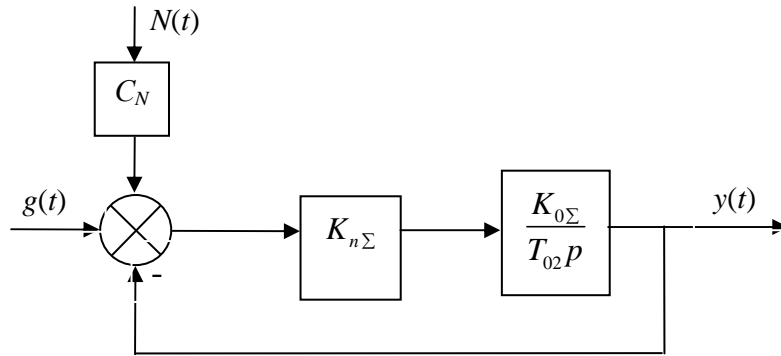


Рис. Л3.2. Структурная схема исследуемой САУ с помехой на входе

Полезный сигнал представляет собой синусоидальный сигнал со случайной фазой

$$g(t) = a \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

у которого фаза распределена по равномерному закону

$$p(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & |\varphi| \leq \pi; \\ 0, & |\varphi| \geq \pi. \end{cases}$$

Составляющая ошибки от полезного сигнала может быть вычислена по формуле (11). Спектральная плотность синусоидального сигнала представляет собой сумму двух δ -функций, расположенных на частотах ω_0 и $-\omega_0$:

$$S_g(\omega) = \pi a^2 [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]. \quad (13)$$

Подставляя (13) в выражение (11), получим:

$$D_{eg} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{T_{02}j\omega}{T_{02}j\omega + K_{n\Sigma}K_{0\Sigma}} \right|^2 \pi a^2 [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] d\omega.$$

На основании фильтрующего свойства δ -функций

$$\int_0^t f(t)\delta(t-\tau)dt = f(\tau),$$

тогда получим:

$$\begin{aligned} D_{eg} &= \frac{a^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T_{02}^2 \omega^2}{T_{02}^2 \omega^2 + (K_{n\Sigma} K_{0\Sigma})^2} [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] d\omega = \\ &= \frac{a^2 T_{02}^2 \omega_0^2}{T_{02}^2 \omega_0^2 + (K_{n\Sigma} K_{0\Sigma})^2}. \end{aligned}$$

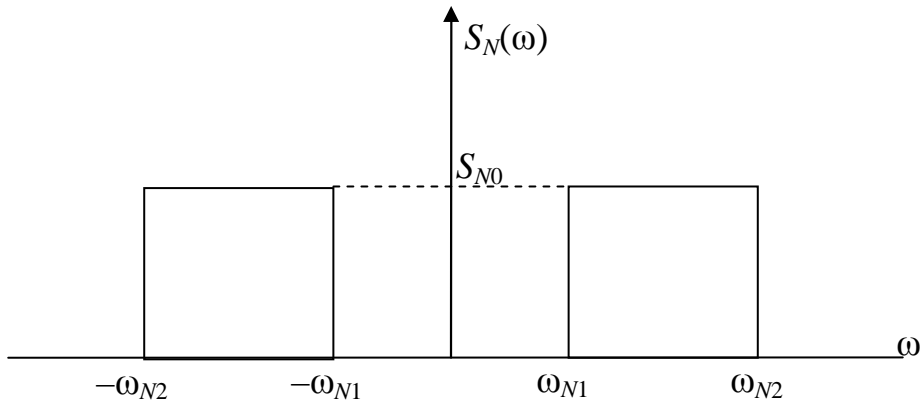


Рис. Л3.3. Спектр помехи

Рассчитаем составляющую дисперсии ошибки D_{eN} от помехи $N(t)$.

График спектральной плотности помехи показан на рис. Л3.3.

Математическое ожидание помехи равно нулю.

Величина S_{NO} определяется из выражения

$$\sigma_N^2 = D_N = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_{N1}}^{\omega_{N2}} S_{NO} d\omega = \frac{S_{NO}}{\pi} (\omega_{N2} - \omega_{N1}) = \frac{S_{NO}}{\pi} \Delta\omega_N.$$

Отсюда

$$S_{NO} = \frac{\pi}{\Delta\omega_N} \sigma_N^2.$$

Верхняя ω_{N2} и нижняя ω_{N1} частоты спектра помехи и среднеквадратичное значение σ_N заданы.

Дисперсия ошибки от помехи согласно (12)

$$\begin{aligned}
D_{eN} &= \frac{1}{N} \int_{\omega_{N1}}^{\omega_{N2}} S_{N0} \left| \frac{K_{n\Sigma} K_{0\Sigma} C_N}{T_{02} j\omega + K_{n\Sigma} K_{0\Sigma}} \right|^2 d\omega = \\
&= \frac{S_{N0} (K_{n\Sigma} K_{0\Sigma} C_N)^2}{\pi} \int_{\omega_{N1}}^{\omega_{N2}} \frac{d\omega}{T_{02}^2 \omega^2 + (K_{n\Sigma} K_{0\Sigma})^2} = \\
&= \frac{S_{N0} K_{n\Sigma}^2 K_{0\Sigma}^2 C_N^2}{\pi T_{02}} \operatorname{arctg} \frac{\Delta\omega_N T_{02} K_{n\Sigma} K_{0\Sigma}}{(K_{n\Sigma} K_{0\Sigma})^2 + \omega_{N1} \omega_{N2} T_{02}^2} = \\
&= \frac{\sigma_N^2 K_{n\Sigma}^2 K_{0\Sigma}^2 C_N^2}{\Delta\omega_N T_{02}} \operatorname{arctg} \frac{\Delta\omega_N T_{02} K_{n\Sigma} K_{0\Sigma}}{(K_{n\Sigma} K_{0\Sigma})^2 + \omega_{N1} \omega_{N2} T_{02}^2}.
\end{aligned}$$

Суммарная дисперсия ошибки

$$\begin{aligned}
D_e = D_{eg} + D_{eN} &= \frac{a^2 T_{02}^2 \omega_0^2}{T_{02}^2 \omega_0^2 + (K_{n\Sigma} K_{0\Sigma})^2} + \\
&+ \frac{\sigma_N^2 K_{n\Sigma}^2 K_{0\Sigma}^2 \cdot C_N^2}{\Delta\omega_N T_{02}} \operatorname{arctg} \frac{\Delta\omega_N T_{02} K_{n\Sigma} K_{0\Sigma}}{(K_{n\Sigma} K_{0\Sigma})^2 + \omega_{N1} \omega_{N2} T_{02}^2}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Выражение (14) позволяет построить график зависимости дисперсии ошибки от постоянной времени T_{02} . Качественно график показан на рис. ЛЗ.4.

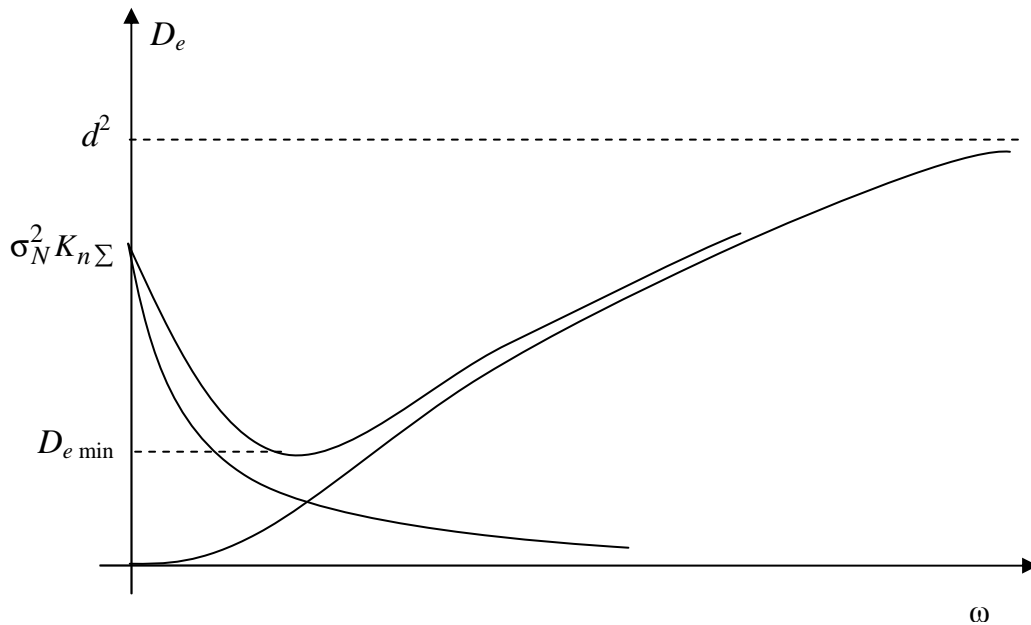


Рис. ЛЗ.4. График зависимости ошибки воспроизведения полезного сигнала от постоянной времени интегрирующего блока

Как видно из графика, функция $D_e(T_{02})$ имеет минимум. Определение оптимального значения постоянной времени $T_{02\text{ опт}}$ и является конечной целью исследования в настоящей лабораторной работе.

Значения параметров, входящих в формулу (14):

$$\omega_0 = 6 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{N1} = 7,85 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{N2} = 126 \text{ с}^{-1};$$

$$K_n C_n = 1; \quad (C_n = 0,1);$$

$$K_0 C_0 = 10; \quad (C_0 = 1);$$

$$C_N \sigma_N = 13; \quad (C_N = 0,15);$$

$T_{02} = 0,01 - 1 \text{ с}$ – изменяется в ходе эксперимента.

Экспериментальное определение дисперсии

Рассмотрим способ экспериментального определения дисперсии ошибки, который применяется в настоящей лабораторной работе. Сигнал ошибки $e(t)$ пропускается через квадратор, на выходе которого получаем случайный сигнал $e^2(t)$. Затем этот сигнал поступает на апериодическое звено с постоянной времени τ . Сигнал на выходе апериодического звена запишется в виде

$$f(e) = \frac{1}{\tau} \int_0^t e^2(\lambda) e^{-\frac{t-\lambda}{\tau}} d\lambda,$$

где $\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{\tau p + 1} \right\}$ – весовая функция апериодического звена.

Определим предел $f(e)$ при $\tau \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} f(e) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^t e^2(\lambda) d\lambda.$$

Положив верхний предел равным τ и переобозначив переменную интегрирования, получим:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} f(e) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} e^2(t) dt = D_e.$$

Таким образом, если постоянная времени апериодического звена $\tau \rightarrow \infty$, то на его выходе получим значение дисперсии ошибки D_e . Здесь τ играет роль времени наблюдения. Но так как время наблюдения и постоянная времени реально не могут быть бесконечными, то фактически на выходе апериодического звена мы получим оценку дисперсии

$$\tilde{D}_e = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} e^2(t) dt.$$

Если выбрать время наблюдения – постоянную времени τ из условия

$$\tau \geq \frac{50}{\omega_H},$$

где ω_H – низшая частота спектра случайного сигнала $e^2(t)$, то точность вычисления дисперсии составит примерно 2 %, что нас вполне удовлетворяет.

За низшую частоту спектра можно принять частоту полезного сигнала $\omega_0 = 6 \text{ с}^{-1}$. Тогда необходимая постоянная времени апериодического звена $\tau \approx 10 \text{ с}$, что и реализовано на лабораторном стенде.

Лабораторное задание

1. Рассчитать и построить график зависимости дисперсии ошибки D_e от постоянной времени интегрирующего элемента модели объекта управления T_{02} . Определить ее оптимальное значение $T_{02 \text{ opt}}$, при котором достигается минимум дисперсии D_e и само значение дисперсии $D_{e \text{ min}}$.

2. Собрать схему моделирования (рис. Л3.5). Задать следующие значения параметров моделируемой системы:

$$\begin{aligned} K_{n\Sigma} &= 0,1; & (C_n &= 0,1); \\ K_{0\Sigma} &= 10; & (C_0 &= 1); \\ T_{01} &= 0; \\ C_N &= 0,15; \end{aligned}$$

$a = 7 \text{ В}$ (значение амплитуды a измеряется в точке g с помощью осциллографа).

3. Получить экспериментально зависимость дисперсии ошибки от постоянной времени T_{02} , задавая значения от $T_{02} = 0,01 \text{ с}$ до $T_{02} = 1 \text{ с}$.

4. Экспериментально пронаблюдать и объяснить изменение характера сигнала ошибки $e(t)$ и параметра D_e при изменении постоянной времени T_{02} в случае нулевого сигнала задающего воздействия ($g = 0$). Аналогичный эксперимент следует провести при нулевом значении сигнала помехи ($N = 0$).

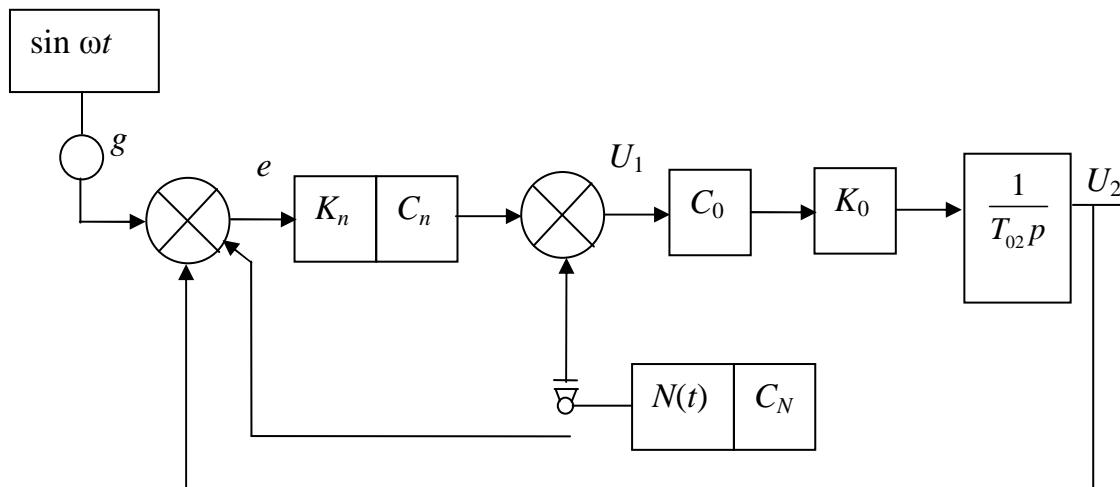


Рис. Л3.5. Схема моделирования к лабораторной работе №3

Методические указания

1. При задании суммарных коэффициентов передачи

$$K_{n\Sigma} = K_n C_n;$$

$$K_{0\Sigma} = K_0 C_0$$

следует учитывать, что постоянные коэффициенты имеют значения

$$K_n = 1;$$

$$K_0 = 10.$$

2. При подготовке схемы моделирования следует отключить ненужные блоки, установив потенциометр C_g в положение нулевого коэффициента передачи. Тумблеры в цепях обратной связи модели объекта управления, выходного сигнала управляющего устройства и блока задания начальных условий следует установить в нижнее положение.

3. Величина амплитуды задающего воздействия измеряется в точке g осциллографом.

4. Отсчет дисперсии следует производить не менее, чем через 30 с после подачи команды «Пуск». Отсчет времени можно осуществлять по секундомеру.

Содержание отчета

1. Структурная схема исследуемой системы.
2. Теоретический расчет и график зависимости $D_e(T_{02})$.
3. Таблица экспериментальных данных и экспериментальный график $D_e(T_{02})$.
4. Выводы по результатам работы.

Контрольные вопросы

1. Основные характеристики случайной функции: математическое ожидание, корреляционная функция, спектральная плотность.
2. Преобразование стационарной случайной функции линейной системой.
3. Вычисление дисперсии ошибки.
4. Экспериментальное вычисление дисперсии.
5. Влияние параметров системы на величину дисперсии ошибки.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Цель работы: экспериментальное исследование автоколебательных процессов в нелинейной системе, влияние вида нелинейности на качество нелинейной системы.

Продолжительность работы – 4 часа.

Теоретические сведения

Нелинейные системы – это системы автоматического управления, движение которых описывается нелинейными дифференциальными уравнениями. Нелинейность чаще всего обусловлена характеристиками входящих в систему элементов, которые по своей физической природе являются нелинейными. Например, релейные элементы, в которых выходная величина меняется скачкообразно при непрерывном изменении входной величины; ограничение напряжения у всех электронных усилителей, определяемое напряжением питания; зона нечувствительности двигателей постоянного тока, определяемая моментом трения в подшипниках, и т.д.

Теоретический анализ нелинейных систем является более сложным из-за отсутствия единых математических методов решения нелинейных дифференциальных уравнений. Теория автоматического управления располагает несколькими методами анализа и синтеза нелинейных систем, как точными, так и приближенными. Из точных методов наибольшее применение находит метод фазового пространства для систем первого, второго, а иногда и третьего порядка. Из приближенных методов наиболее эффективным инженерным методом является метод гармонической линеаризации.

Основное понятие о фазовом пространстве

Фазовым пространством называется пространство, по осям координат которого отложены переменные, характеризующие состояние динамической системы. Если движение системы описывается дифференциальным уравнением n -ного порядка, то состояние этой системы в любой момент времени можно характеризовать некоторой точкой n -мерного фазового пространства, по осям которого отложены одна из координат системы и $n - 1$ ее производных. Точка, характеризующая состояние системы, называется изображающей точкой. При движении системы ее координаты меняются и изображающая точка, отражающая состояние системы, будет описывать в фазовом пространстве некоторую кривую, называемую фазовой траекторией. Движение изображающей точки по фазовой траектории характеризуется вектором фазовой скорости, который направлен по касательной к траектории в сторону движения этой точки. Совокупность фазовых траекторий при различных начальных условиях называется фазовым портретом

данной системы. Если движение системы описывается дифференциальным уравнением второго порядка, то фазовое пространство является двумерным, т.е. превращается в фазовую плоскость.

При изображении процессов на фазовой плоскости дифференциальное уравнение второго порядка обычно приводят к системе двух уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2); \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (1)$$

При этом предполагается, что для системы (1) выполнены условия теоремы Коши о существовании и единственности решения системы дифференциальных уравнений, и поэтому существует единственная система функций

$$\begin{aligned} x_1 &= \Phi_1(x_{10}, x_{20}, t, t_0); \\ x_2 &= \Phi_2(x_{10}, x_{20}, t, t_0), \end{aligned} \quad (2)$$

удовлетворяющая уравнениям (1) и заданным начальным условиям $x_1 = x_{10}$; $x_2 = x_{20}$ при $t = t_0$.

Уравнения (2) являются параметрическими уравнениями фазовых траекторий. Исключив из них время t , можно получить уравнение фазовых траекторий в виде $x_2 = f(x_1)$.

Выполнение условий теоремы Коши о единственности решений системы (1) означает, что через каждую точку фазовой плоскости проходит единственная фазовая траектория.

Для получения уравнений интегральных кривых разделим второе уравнение системы (1) на первое:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}.$$

Это уравнение первого порядка, из которого исключено время, в общем случае является нелинейным. Его решение дает семейство интегральных кривых

$$Q(x_1, x_2) = C,$$

где C – постоянная интегрирования.

На основании той же теоремы Коши через каждую точку фазовой плоскости проходит единственная интегральная кривая, за исключением, может быть, особых точек этого уравнения, где оно теряет смысл.

Особые точки – это те точки фазовой плоскости, в которых одновременно обращаются в нуль функции f_1 и f_2 , т.е.

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 0; \\ f_2(x_1, x_2) &= 0. \end{aligned}$$

В особых точках интегральные кривые могут пересекаться. Каждая фазовая траектория – интегральная кривая или, по крайней мере, ее часть, а интегральная кривая (или ее дуга), не проходящая через особую точку, непременно является фазовой траекторией. В то же время интегральная кривая, проходящая через особую точку, всегда состоит из нескольких фазовых траекторий. Таким образом, фазовые траектории – это особые точки, представляющие собой состояние равновесия, интегральные кривые, не проходящие через особые точки, и дуги интегральных кривых, заключенные между особыми точками.

Направление движения изображающей точки по фазовым траекториям определяется из уравнения (1). В большинстве случаев эти уравнения имеют вид

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2;$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2).$$

Тогда, очевидно, в верхней полуплоскости, где $x_2 > 0$ (т.е. скорость координаты x_1 положительна), координата x_1 должна возрасть. Следовательно, движение изображающей точки будет проходить слева направо. В нижней полуплоскости, где $x_2 < 0$ (т.е. скорость координаты x_1 отрицательна), координата x_1 должна уменьшаться и движение изображающей точки – справа налево.

Фазовые портреты линейного звена второго порядка

Несмотря на то, что метод фазовой плоскости разработан для исследования нелинейных систем, целесообразно вначале рассмотреть фазовые портреты линейного звена, описываемого дифференциальным уравнением второго порядка.

Пусть линейное звено автоматической системы управления описывается дифференциальным уравнением вида

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + cx = 0, \quad (3)$$

характеристическое уравнение которого

$$\lambda^2 + 2h\lambda + c = 0. \quad (4)$$

Решение уравнения (3) зависит от корней характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 + c}.$$

Эти корни бывают следующих типов:

- действительные отрицательные;
- действительные положительные;
- действительные с разными знаками;
- комплексные с отрицательными вещественными частями;
- комплексные с положительными вещественными частями;
- мнимые (при $h = 0$).

Методику построения фазового портрета рассмотрим на примере так называемой консервативной системы ($h = 0$, случай чисто мнимых корней):

$$\ddot{x} + cx = 0. \quad (5)$$

Решение уравнения (5) при $c = \omega_0^2 > 0$:

$$\begin{aligned} x &= x_1 = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \\ x_2 &= \frac{dx_1}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi). \end{aligned} \quad (6)$$

Исключив из (6) время, получим уравнение фазовых траекторий на плоскости $x_1 x_2$:

$$\frac{x_1^2}{A^2} + \frac{x_2^2}{A^2 \omega_0^2} = 1. \quad (7)$$

Уравнение (7) – уравнение семейства эллипсов с постоянным отношением осей, причем через каждую точку фазовой плоскости проходит только один эллипс, соответствующий определенным начальным условиям A, φ (рис. Л4.1).

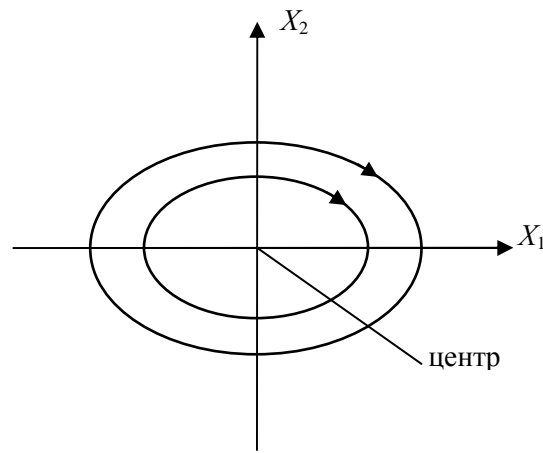


Рис. Л4.1. Фазовый портрет консервативного звена второго порядка

Для получения уравнения интегральных кривых представим уравнение (5) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\omega_0^2 x_1. \end{aligned}$$

При делении второго уравнения на первое имеем:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\omega_0^2 \frac{x_1}{x_2}. \quad (8)$$

Проинтегрировав уравнение (8), получим уравнение интегральных кривых:

$$\frac{x_1^2}{B^2} + \frac{x_2^2}{B^2 \omega_0^2} = 1. \quad (9)$$

где B – постоянная интегрирования.

Отсюда следует, что в данном случае интегральные кривые совпадают с фазовыми траекториями. Особая точка $x_1=0, x_2=0$ называется центром.

Аналогичным образом могут быть получены фазовые портреты при других корнях характеристического уравнения (4).

На рис. Л4.2 в плоскости параметров h и c построены фазовые портреты, соответствующие дифференциальному уравнению (3) при различных корнях характеристического уравнения.

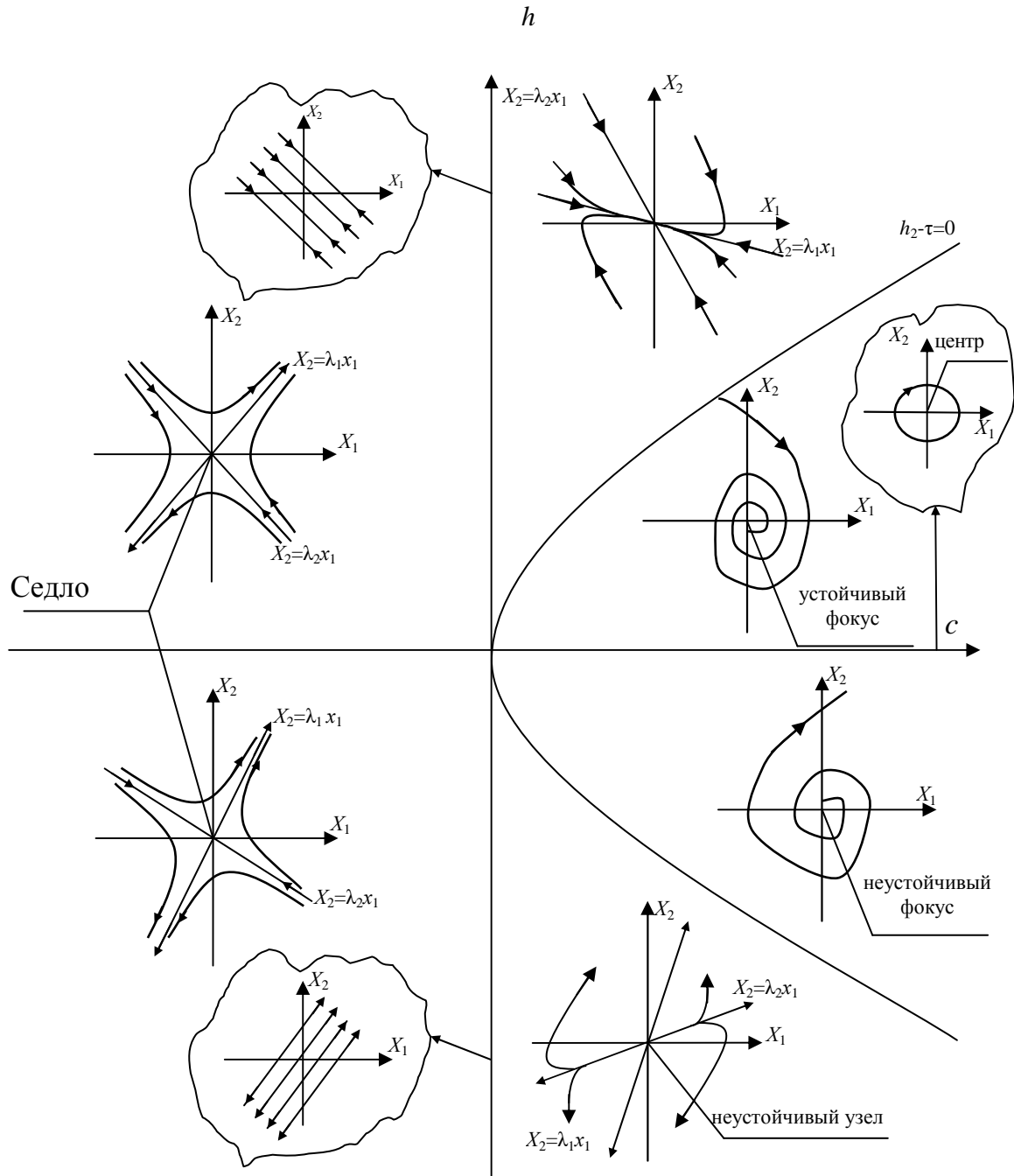


Рис. Л4.2. Диаграмма фазовых портретов линейного звена второго порядка

Из диаграммы (рис. Л4.2) видно, что система, описываемая дифференциальным уравнением (3), устойчива только при $h > 0$ и $c > 0$, когда корни характеристического уравнения (4) оба либо действительные отрицательные, либо комплексные с отрицательной вещественной частью. Система является колебательной при $h^2 - c < 0$, т.е. в случае комплексных корней.

Кроме фазовых траекторий, показанных на рис. Л4.2, линейное дифференциальное уравнение может иметь фазовые траектории другого типа. Рассмотрим систему, описываемую дифференциальным уравнением вида

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} = a, \quad (10)$$

где $a = \text{const}$.

Запишем уравнение (10) в форме Коши:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} &= -2hx_2 + a. \end{aligned}$$

Исключая время t , получим:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-2hx_2 + a}{x_2}, \quad (11)$$

или

$$\frac{x_2 dx_2}{-2hx_2 + a} = dx_1.$$

Интегрируя, получим уравнение интегральных кривых:

$$x_1 = -\frac{x_2}{2h} + \frac{a}{4h^2} \ln |2hx_2 - a| + C. \quad (12)$$

Характер фазовых траекторий, соответствующий уравнению (12), можно установить, воспользовавшись понятием изоклины. Изоклина – геометрическое место точек, на котором наклон касательной к фазовой траектории постоянен. Наклон касательной к фазовой траектории задан уравнением (11). Положив

$$\frac{dx_2}{dx_1} = H,$$

получим уравнение изоклин:

$$x_2 = \frac{a}{H + 2h}. \quad (13)$$

Из этого уравнения видно, что изоклины представляют собой прямые, параллельные оси x_1 ; $\frac{dx_2}{dx_1} = 0$ при $x_2 = \frac{a}{2h}$, и $\frac{dx_2}{dx_1} = \infty$ при $x_2 = 0$.

Характер фазовых траекторий показан на рис. Л4.3.

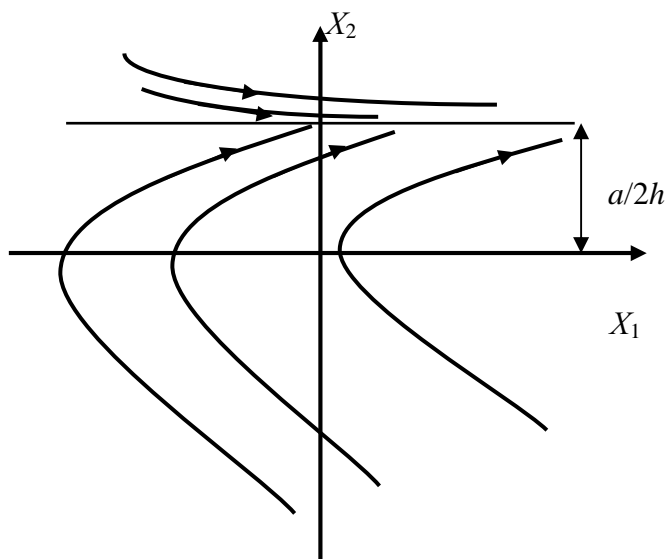


Рис. Л4.3. Фазовый портрет дифференциального уравнения второго порядка с одним нулевым корнем и с правой частью

Как видно из рис. Л4.3 и уравнения (11), $\frac{dx_1}{dt}$ и $\frac{dx_2}{dt}$ одновременно не обращаются в нуль, т.е. система особых точек не имеет.

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\ddot{x} = a, \quad (14)$$

или

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2;$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a.$$

Исключая t , получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a}{x_2},$$

решение которого дает семейство интегральных кривых

$$x_2^2 = 2ax_1 + C, \quad (15)$$

представленных на рис. Л4.4.

Особые точки также отсутствуют.

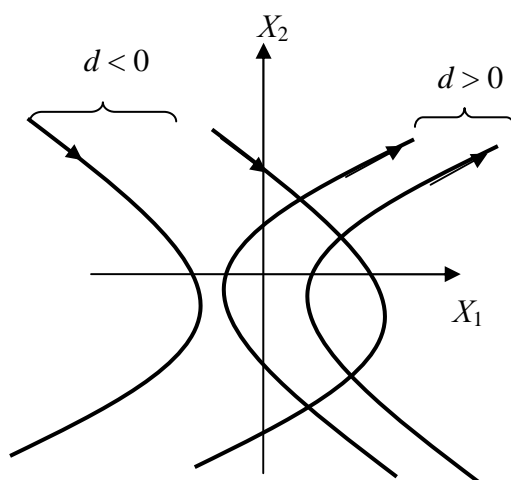


Рис. Л4.4. Фазовый портрет линейного уравнения второго порядка с двумя нулевыми корнями

Исследование нелинейной системы методом фазовой плоскости

Рассмотрим нелинейную систему, структурная схема которой представлена на рис. Л4.5.

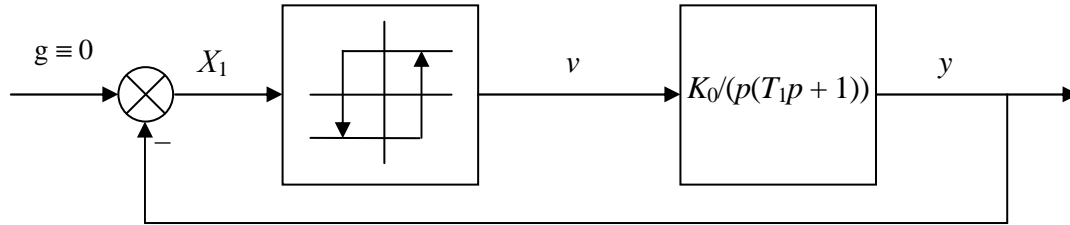


Рис. Л4.5. Структурная схема нелинейной системы

Запишем дифференциальное уравнение системы. Уравнение объекта:

$$Y(p) = U(p) \frac{K_0}{p(T_1 p + 1)},$$

или в оригиналах:

$$T_1 \ddot{y} + \dot{y} = K_0 U. \quad (16)$$

Для нелинейного элемента:

$$U = \begin{cases} +B & \text{при } x_1 > C; \\ -B & \text{при } x_1 < -C; \end{cases} \quad |x_1| < C, \quad \begin{cases} \dot{x}_1 < 0; \\ \dot{x}_1 > 0; \end{cases} \quad (17)$$

$$x_1 = -y, \quad \dot{x}_1 = \dot{x}_2.$$

Уравнение (16) запишем в виде двух уравнений:

$$\begin{aligned} \text{а) } T_1 \ddot{x}_1 + \dot{x}_1 &= -Bk_0 \quad \text{при } x_1 > C, \quad |x_1| < C, \quad \dot{x}_1 = \dot{x}_2 < 0, \\ \text{б) } T_1 \ddot{x}_1 + \dot{x}_1 &= Bk_0 \quad \text{при } x_1 < -C, \quad |x_1| < C, \quad \dot{x}_1 = \dot{x}_2 > 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Решение уравнений (18), как показано в предыдущем параграфе, имеет вид:

для области (а)

$$x_1 = -T_1(x_2 - Bk_0 \ln|x_2 + Bk_0|) + C_1; \quad (19)$$

для области (б)

$$x_1 = -T_1(x_2 + Bk_0 \ln|x_2 - Bk_0|) + C_2. \quad (20)$$

Фазовые траектории, соответствующие уравнениям (19), (20), показаны на рис. Л4.6.

Особенностью этих фазовых траекторий является то, что все они стягиваются к одной изолированной замкнутой фазовой траектории А, называемой предельным циклом. Предельный цикл соответствует незатухающим колебаниям в нелинейной системе (автоколебаниям).

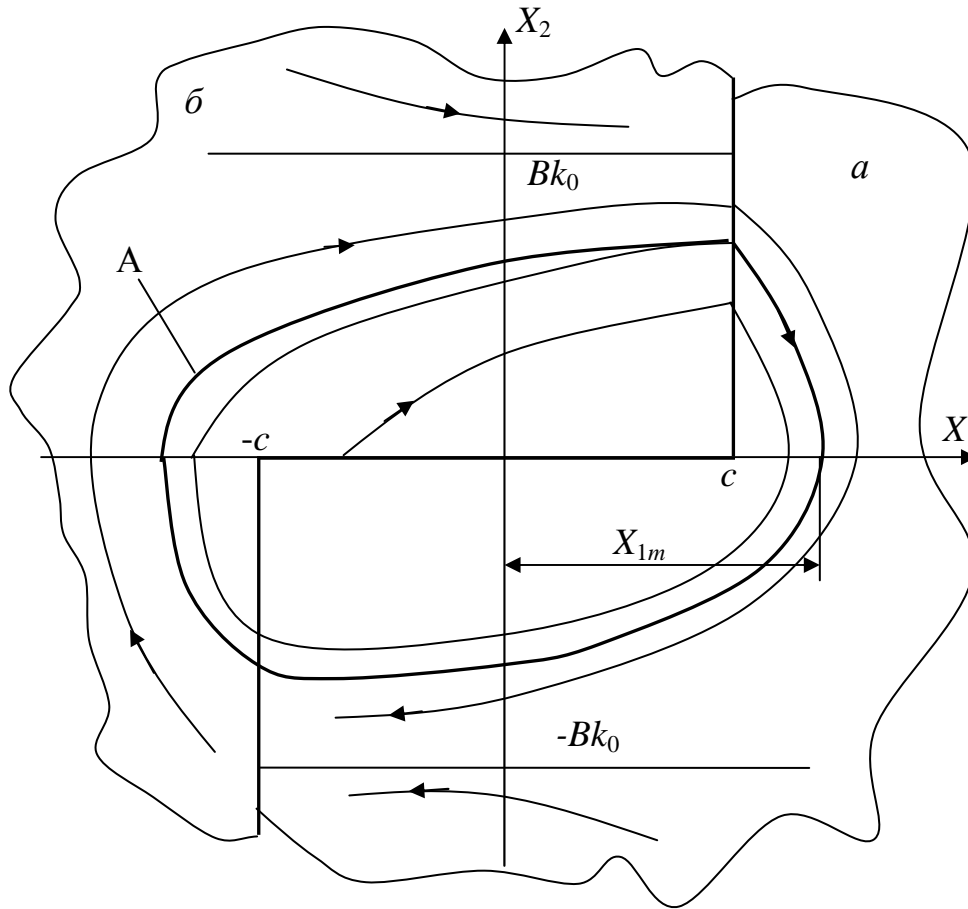


Рис. Л4.6. Фазовый портрет нелинейной системы с предельным циклом

Основные положения метода гармонической линеаризации. Гармонический коэффициент передачи нелинейного элемента

Метод гармонической линеаризации является приближенным методом исследования нелинейных систем автоматического управления. Условием его применения является гармонический характер колебаний, возникающих в нелинейной системе, что позволяет решать задачу только в первом приближении. Однако, как правило, линейная часть системы представляет собой низкочастотный фильтр, поэтому ошибка, допускаемая при расчете этим методом, тем меньше, чем больше фильтрующее действие линейной части системы.

Параметры периодических колебаний (амплитуда и частота), возникающих в системе, зависят от параметров нелинейного элемента и параметров линейной части нелинейной системы. Эти периодические колебания называются автоколебаниями. На фазовой плоскости автоколебаниям соответствуют изолированные замкнутые фазовые траектории – предельные циклы.

Пусть нелинейная система содержит один нелинейный элемент (НЭ) и линейные звенья, которые можно объединить в одно звено с передаточной функцией $W_n(p)$ (рис. Л4.7).

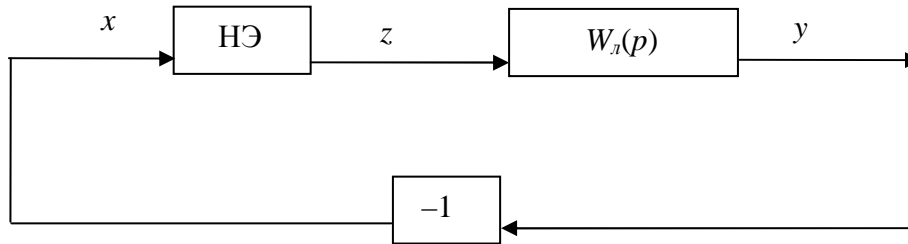


Рис. Л4.7. Структурная схема нелинейной системы

Предположим, что в указанной системе возникли автоколебания. Поскольку линейная часть (ЛЧ) системы, как правило, представляет собой низкочастотный фильтр, то независимо от характера периодических колебаний на ее входе $Z(t)$ колебания на выходе ЛЧ $y(t)$ не будут содержать высших гармоник. Если ограничиться только первой гармоникой автоколебаний на выходе ЛЧ, то на вход НЭ подается сигнал

$$x(t) = -y(t) = a \sin \omega t .$$

На выходе НЭ, имеющего характеристику

$$Z = F(x),$$

возникнут сложные периодические колебания, которые в общем случае будут содержать весь спектр гармоник:

$$Z(t) = F(a \sin \omega t) .$$

Учитывая фильтрующее действие линейной части системы, при разложении в ряд Фурье сигнала $Z(t)$ ограничимся первой гармоникой. Имеем:

$$Z(t) \approx Z_1(t) = aQ(a) \sin[\omega t + \varphi(a)] = a[q(a) \sin \omega t + q_1(a) \cos \omega t] .$$

Коэффициенты $q(a)$ и $q_1(a)$ являются коэффициентами первой гармоники ряда Фурье

$$\begin{aligned} q(a) &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \Psi) \sin \Psi d\Psi; \\ q_1(a) &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \Psi) \cos \Psi d\Psi; \end{aligned} \quad (21)$$

$$(\Psi = \omega t) .$$

В комплексной форме гармонический сигнал на входе нелинейного элемента записывается в виде $x(t) = a e^{j\omega t}$.

Для первой гармоники колебаний на выходе НЭ, используя комплексную форму ряда Фурье, будем иметь:

$$Z_1(t) = aQ(a) e^{j[\omega t + \varphi(a)]} = a[q(a) + jq_1(a)] e^{j\omega t} .$$

Отношение

$$\frac{Z_1(t)}{x(t)} = W_H(a) = q(a) + jq_1(a) \quad (22)$$

называют гармоническим коэффициентом передачи НЭ или эквивалентной передаточной функцией НЭ.

Таким образом, согласно (22) можно записать уравнение, связывающее сигналы на входе и выходе НЭ:

$$Z_1(t) = W_H(a)x(t),$$

предполагая, что x и Z_1 меняются по гармоническому закону.

Из выражения (22) видно, что гармонический коэффициент передачи зависит только от амплитуды входного сигнала и не зависит от его частоты. Легко доказать, что для НЭ, имеющих однозначную характеристику, $q_1(a) = 0$.

В качестве примера рассмотрим вычисление гармонического коэффициента передачи для НЭ, имеющего характеристику поляризованного реле, приведенную на рис. Л4.8, а. Входной сигнал НЭ показан на рис. Л4.8, б, а выходной – на рис. Л4.8, в.

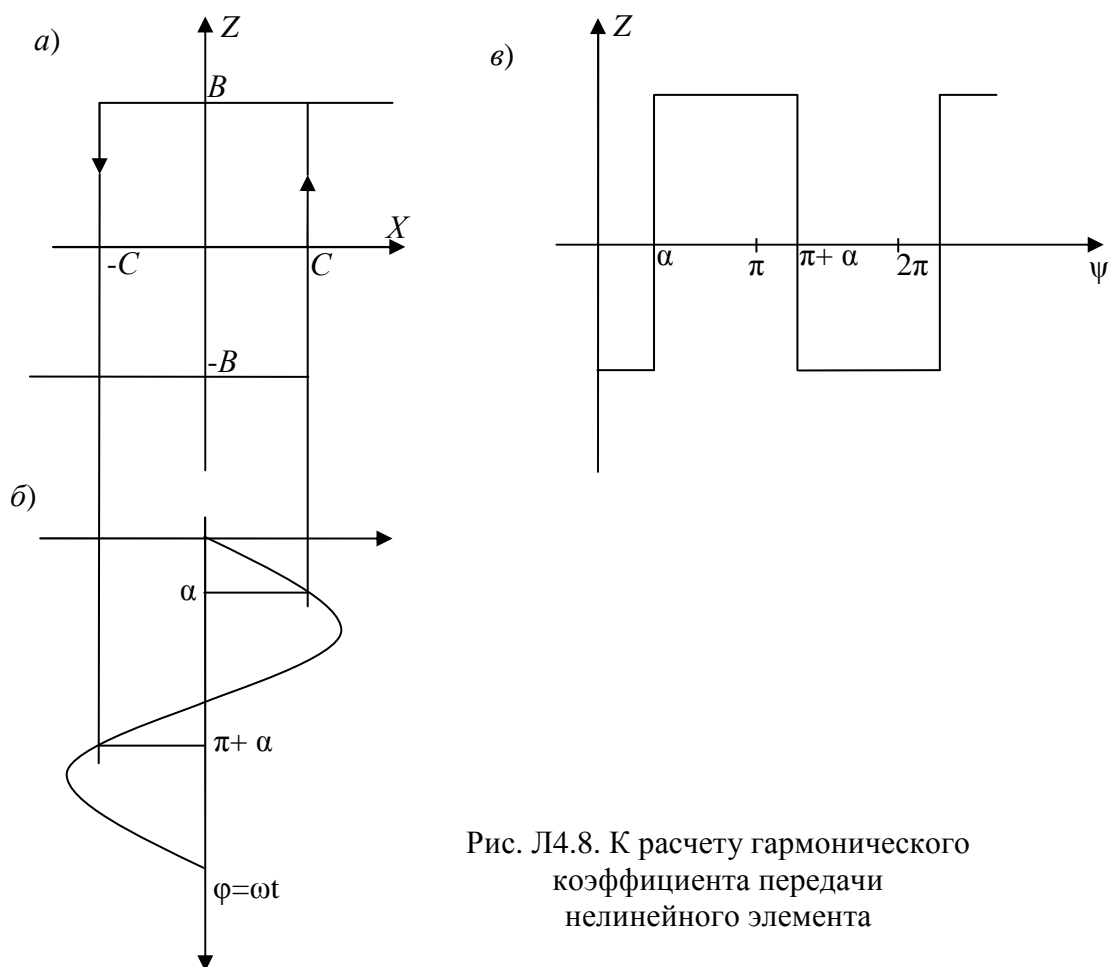


Рис. Л4.8. К расчету гармонического коэффициента передачи нелинейного элемента

Согласно (21) имеем:

$$q(a) = \frac{1}{\pi a} \left[\int_0^{\alpha} (-B) \sin \Psi d\Psi + \int_{\pi+\alpha}^{\pi} B \sin \Psi d\Psi + \int_{\pi+\alpha}^{2\pi} (-B) \sin \Psi d\Psi \right] = \frac{4B}{\pi a} \cos \alpha;$$

$$q_1(a) = \frac{1}{\pi a} \left[\int_0^{\alpha} (-B) \cos \Psi d\Psi + \int_{\pi+\alpha}^{\pi} B \cos \Psi d\Psi + \int_{\pi+\alpha}^{2\pi} (-B) \cos \Psi d\Psi \right] = -\frac{4B}{\pi a} \sin \alpha.$$

На рис. Л4.8, б видно, что $a \sin \alpha = c$, откуда

$$\sin \alpha = \frac{c}{a}, \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}.$$

Окончательно

$$\begin{aligned} q(a) &= \frac{4B}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} & q_1(a) &= -\frac{4Bc}{\pi a^2}; \\ W_H(a) &= \frac{4B}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} - j \frac{4Bc}{\pi a^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Определение параметров автоколебаний нелинейных систем

Рассмотрим систему, структурная схема которой показана на рис. Л4.7. Пусть ЛЧ имеет уравнение вида

$$N(p)x(t) = -M(p)Z(t),$$

где $N(p)$, $M(p)$ – некоторые полиномы от p ; $p = \frac{d}{dt}$.

Пусть также задано уравнение НЭ:

$$Z = F(x).$$

Тогда уравнение замкнутой системы:

$$N(p) + M(p)F(x) = 0. \quad (24)$$

Для решения нелинейного уравнения (24) используем метод гармонической линеаризации.

Запишем выражение для первой гармоники входного и выходного сигналов НЭ:

$$\begin{aligned} x(t) &= a \sin \omega t; \\ Z_1(t) &= a [q(a) \sin \omega t + q_1(a) \cos \omega t]. \end{aligned} \quad (25)$$

Исключим из этих выражений тригонометрические функции, для чего продифференцируем x по t :

$$\frac{dx}{dt} = px = a\omega \cos \omega t$$

и подставим во второе уравнение (25) значения $a \sin \omega t = x$ и $a \cos \omega t = \frac{px}{\omega}$, в результате получим:

$$Z = F(x) \approx Z_1 = q(a)x + \frac{q_1(a)}{\omega} px. \quad (26)$$

Уравнение (26) нелинейное, поскольку $q(a)$ и $q_1(a)$ являются нелинейными функциями амплитуды a , но для каждого установившегося значения автоколебаний $q(a)$ и $q_1(a)$ рассматриваются как постоянные величины. Поэтому (26) в окрестности искомых автоколебаний можно считать линеаризованным уравнением. Подставляя (26) в (24), получаем гармоническую линеаризацию уравнения системы:

$$\left[N(p) + M(p) \left(q + \frac{q_1}{\omega} p \right) \right] x = 0. \quad (27)$$

Частоту ω и амплитуду a автоколебаний находим из условия существования периодического решения уравнения (27), т.е. $j\omega$ – корень характеристического уравнения

$$N(\lambda) + M(\lambda) \left(q + \frac{q_1}{\omega} \lambda \right) = 0.$$

Но если $\lambda = j\omega$ – корень этого уравнения, то он обращает его в нуль, т.е.

$$N(j\omega) + M(j\omega) \left(q + jq_1 \right) = 0. \quad (28)$$

Приравнивая к нулю вещественную и мнимую части (28), получаем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} N(j\omega) + q \operatorname{Re} M(j\omega) + q_1 \operatorname{Im} M(j\omega) &= 0 \\ \operatorname{Im} N(j\omega) + q \operatorname{Im} M(j\omega) + q_1 \operatorname{Re} M(j\omega) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (29)$$

решая которую относительно a и ω , находим амплитуду $a = A$ и частоту $\omega = \Omega$ автоколебаний.

Кроме рассмотренного аналитического метода определения параметров автоколебаний в нелинейной системе Л.С. Гольдфарбом предложен графический метод, который заключается в следующем. Из уравнения первого приближения для системы, изображенной на рис. Л4.7,

$$\begin{aligned} Z &= W_H(a)x; \\ -x &= W_L(j\omega)Z, \end{aligned}$$

получаем уравнение свободных колебаний в системе:

$$1 + W_L(j\omega)W_H(a) = 0. \quad (30)$$

Представим (30) в виде уравнения Гольдфарба:

$$W_L(j\omega) = -G_H(a), \quad (31)$$

где

$$G_H(a) = \frac{1}{W_H(a)}.$$

Уравнение (31) решается графически. Для этого на комплексной плоскости строится амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) линейной части $W_L(j\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ . На той же плоскости изображается обратная АФХ нелинейного элемента $-1/W_H(a)$ при изменении a от 0 до ∞ (рис. Л4.9).

Точки пересечения характеристик $W_n(j\omega)$ и $-1/W_H(a)$ определяют амплитуду и частоту возможных автоколебаний в системе. Если они не пересекаются, то это означает, что нет действительных значений a и ω , удовлетворяющих уравнению (31) и, следовательно, в системе автоколебания невозможны.

Устойчивость автоколебаний определяется методом Гольдфарба по АФХ нелинейного элемента.

Критерий устойчивости автоколебаний Гольдфарба формулируется следующим образом. Если линейная часть разомкнутой системы устойчива, то точка пересечения характеристик $W_n(j\omega)$ и $-1/W_H(a)$ соответствует устойчивым колебаниям, когда в этой точке характеристика $-1/W_H(a)$ выходит из контура $W_n(j\omega)$. Если же в точке пересечения характеристика $-1/W_H(a)$ входит в контур $W_n(j\omega)$, то такая точка соответствует неустойчивым автоколебаниям.

На рис. Л4.9 точка N определяет устойчивые автоколебания, точка M – неустойчивые.

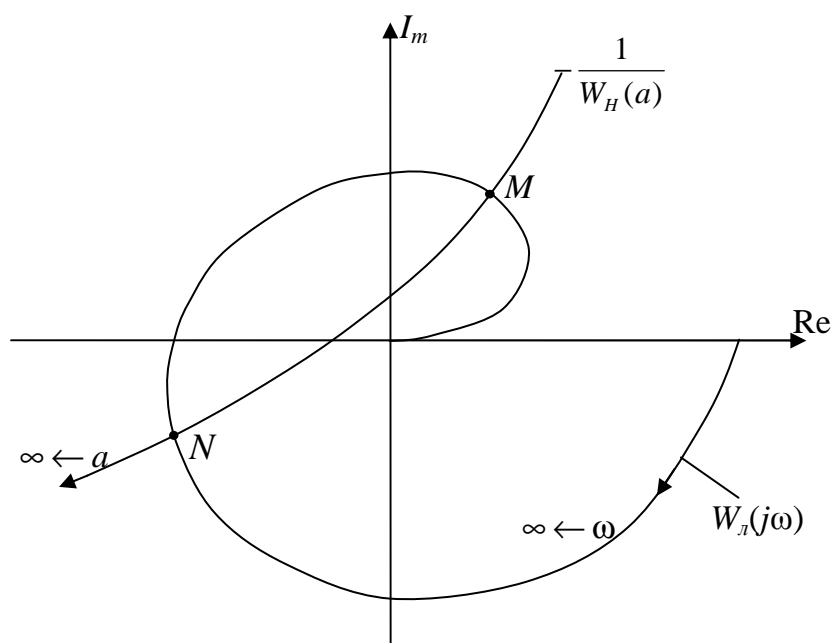


Рис. Л4.9. Амплитудно-фазовые характеристики линейного и нелинейного звеньев

Сформулированный критерий Гольдфарба является необходимым, но недостаточным. Однако в большинстве практических задач критерий оказывается достаточным, причем тем вероятнее, чем больше фильтрующее действие линейной части системы.

Расчет нелинейной системы методом гармонической линеаризации

Рассмотрим нелинейную систему, структурная схема которой приведена на рис. Л4.5. Целью расчета является определение возможности существования автоколебаний и их параметров – амплитуды и частоты. Поскольку линейная часть системы представляет собой низкочастотный фильтр, то правомочным является применение метода гармонической линеаризации.

Для данного типа нелинейности выражение для гармонического коэффициента передачи дается формулой (23). Обратный гармонический коэффициент передачи НЭ

$$-\frac{1}{W_H(a)} = -\frac{\pi a}{4B} \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} - j \frac{\pi a}{4B}. \quad (32)$$

Амплитудно-фазовая характеристика линейной части системы

$$W_L(j\omega) = \frac{k_0}{j\omega(T_1 j\omega + 1)} = \frac{k_0 T_1}{1 + \omega^2 T_1^2} - j \frac{k_0}{\omega(1 + \omega^2 T_1^2)}. \quad (33)$$

На рис. Л4.10 приведены АФХ нелинейного элемента и линейной части, построенные по выражениям (32) и (33). Как видно из этого рисунка, в системе возникают автоколебания при любых параметрах НЭ и линейной части. Эти автоколебания устойчивы, т.к. в точке пересечения N АФХ НЭ выходит из контура $W_L(j\omega)$.

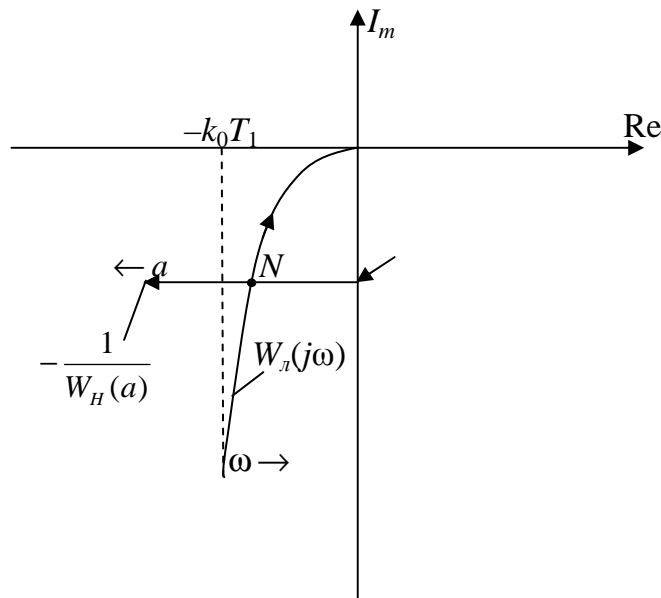


Рис. Л4.10. К расчету устойчивости и параметров автоколебаний в нелинейной системе

Рассчитаем параметры автоколебаний, соответствующих точке пересечения N .

Запишем уравнение Гольдфарба

$$W_L(j\omega) = -\frac{1}{W_H(a)} \quad (34)$$

и приравняем отдельно действительные и мнимые части:

$$\frac{k_0 T_1}{1 + \omega^2 T_1^2} = \frac{\pi a}{4B} \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}; \quad (35)$$

$$\frac{k_0}{\omega(1 + \omega^2 T_1^2)} = \frac{\pi c}{4B}. \quad (36)$$

Уравнение (36) кубическое относительно ω , и его решение достаточно громоздко. Поэтому уравнения (34) – (36) решаются во время занятия на ЭВМ.

Приближенные выражения для параметров предельного цикла при

$$\frac{BT_1 k_0}{c} \gg 0,3$$

имеют вид:

$$\Omega = \frac{1}{T_1} \sqrt[3]{D};$$

$$A = C \sqrt{1 + \frac{D^2}{(1 + \Omega^2 T_1^2)^2}},$$

где

$$D = \frac{4BT_1 k_0}{\pi c}.$$

Лабораторное задание

1. Собрать схему моделирования (рис. Л4.11), задать следующие значения постоянных параметров:

$$g(t) = 0;$$

$$K_{п\Sigma} = 1; \quad (C_n = 1);$$

$$K_{0\Sigma} = 1; \quad (C_0 = 0,1).$$

$$T_{01} = 0,1 \text{ с};$$

$$T_{02} = 1 \text{ с};$$

2. Определить цену деления осциллографа, наблюдая статическую характеристику нелинейного элемента. Для этого переключатель вольтметра пере-

вести в положение U_1 , переключатель режима работы осциллографа – в положение $U_2(U_1)$. Амплитуда выходного сигнала нелинейного элемента U_2 равна ± 10 В. Исходя из этого можно определить масштаб отклонения луча по вертикальной оси. Регулятор ширины петли следует установить в крайнее по часовой стрелке положение. Переводя систему в состояние «Исходное положение» и изменяя начальные условия модели объекта управления, следует определить значения сигнала U_1 (по вольтметру), при которых происходит переключение нелинейного элемента. Сопоставив значения сигнала U_1 , определяемые по вольтметру, и отклонения луча осциллографа, определить масштаб по горизонтальной оси.

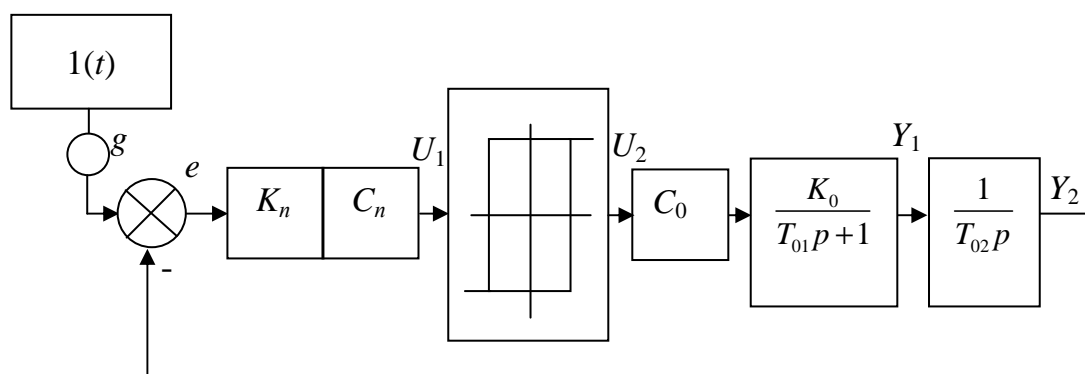


Рис. Л4.11. Схема моделирования нелинейной системы к лабораторной работе № 1

3. Изменяя ширину петли гистерезиса, снять зависимость амплитуды и частоты автоколебаний в точке y_2 от ширины петли статической характеристики нелинейного элемента.

Данные занести в таблицу и построить графики.

	$C_1 = 1$ В	$C_2 = 2$ В	...	$C_n = \dots$, В
A, B				
$\Omega, \text{с}^{-1}$				

Ширину петли следует определять с помощью откалиброванного осциллографа, установив переключатель в положение $U_2(U_1)$.

4. Пронаблюдать и объяснить характер переходных процессов в точках U_1, U_2, Y_1, Y_2 (при $B = 4$ В).

5. Пронаблюдать фазовую траекторию $B = 4$ В (переключатель осциллографа в положении $(Y_1 Y_2)$). Измерить амплитуду сигнала Y_2 по фазовой траектории и сравнить с результатом измерения аналогичного параметра по наблюдаемому переходному процессу.

Методические указания

1. При подготовке схемы моделирования следует отключить ненужные блоки путем установки потенциометров C_N , C_0 и потенциометра в цепи сигнала g в положение нулевого коэффициента передачи. Тумблеры в цепях обратной связи модели объекта управления и элемента задания начальных условий следует поставить в нижнее положение.

2. Частоту автоколебаний Ω можно определить путем подсчета числа автоколебаний в течение десятисекундного временного интервала, определяемого по секундомеру.

3. Амплитуду автоколебаний в точке y_2 следует определять с помощью откалиброванного осциллографа.

Содержание отчета

1. Схема моделирования нелинейной модели.
2. Фазовый портрет и процессы $U_2(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$ по пп. 4, 5 лабораторного задания.
3. Графики зависимостей $A(c)$ и $\Omega(c)$.

Контрольные вопросы и задания

1. Основные понятия метода фазовой плоскости.
2. Методика построения фазового портрета нелинейной системы.
3. Основные положения метода гармонической линеаризации.
4. Методика расчета параметров автоколебаний, определение устойчивости автоколебаний.
5. Объяснить характер экспериментальных фазовых портретов и сигналов на выходе НЭ и выходе системы.
6. Объяснить экспериментальную зависимость параметров автоколебаний от ширины петли гистерезиса НЭ.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Цель работы: изучение влияния помех на точность нелинейной системы, экспериментальное исследование прохождения случайного сигнала через нелинейные элементы.

Продолжительность работы – 4 часа.

Теоретические сведения

Исследование нелинейных систем при случайных воздействиях представляет собой более сложную задачу, чем исследование линейных систем. Если при анализе прохождения случайного сигнала через линейное звено применяются в основном методы усреднения по времени, то для нелинейных звеньев основой являются методы усреднения по множеству. При этом наибольшее распространение получили приближенные методы. Наиболее разработаны методы аналитического исследования преобразования случайного сигнала нелинейной системой, содержащей безынерционный нелинейный элемент с однозначной характеристикой.

При прохождении случайного сигнала через нелинейный элемент изменяется его закон распределения, математическое ожидание, дисперсия, корреляционная функция.

Преобразование плотности распределения

Рассмотрим безынерционный нелинейный элемент (НЭ) с однозначной характеристикой $Z(x)$, на который подан случайный сигнал $X(t)$ с одномерной плотностью распределения $p_1(x)$. На выходе НЭ в тот же момент времени имеем случайный сигнал $Z(t)$, характеризуемый плотностью распределения $p_1(Z)$ (рис. Л5.1, а).

Плотность распределения $p_1(Z)$ сигнала $Z(t_1)$ в момент времени t_1 может быть найдена из условия равенства вероятностей принадлежности сигнала $X(t_1)$ к области $x_1 < X(t_1) < x_1 + dx$ и сигнала $Z(t_1)$ – к области $z_1 < Z(t_1) < z_1 + dz$, где $z_1 = z(x_1)$, а $dz = \left(\frac{dz}{dx}\right)dx$ (см. рис. Л5.1).

Эти вероятности соответственно равны:

$$p[x_1 < X(t_1) < x_1 + dx] = p_1(x)dx;$$
$$p[z_1 < Z(t_1) < z_1 + dz] = p_1(z)dz.$$

Следовательно,

$$p_1(x)dx = p_1(z)dz.$$

Отсюда плотность распределения выходного сигнала

$$p_1(z) = p_1[x(z)] \frac{dx}{dz} = p_1(x) \frac{dx}{dz}. \quad (1)$$

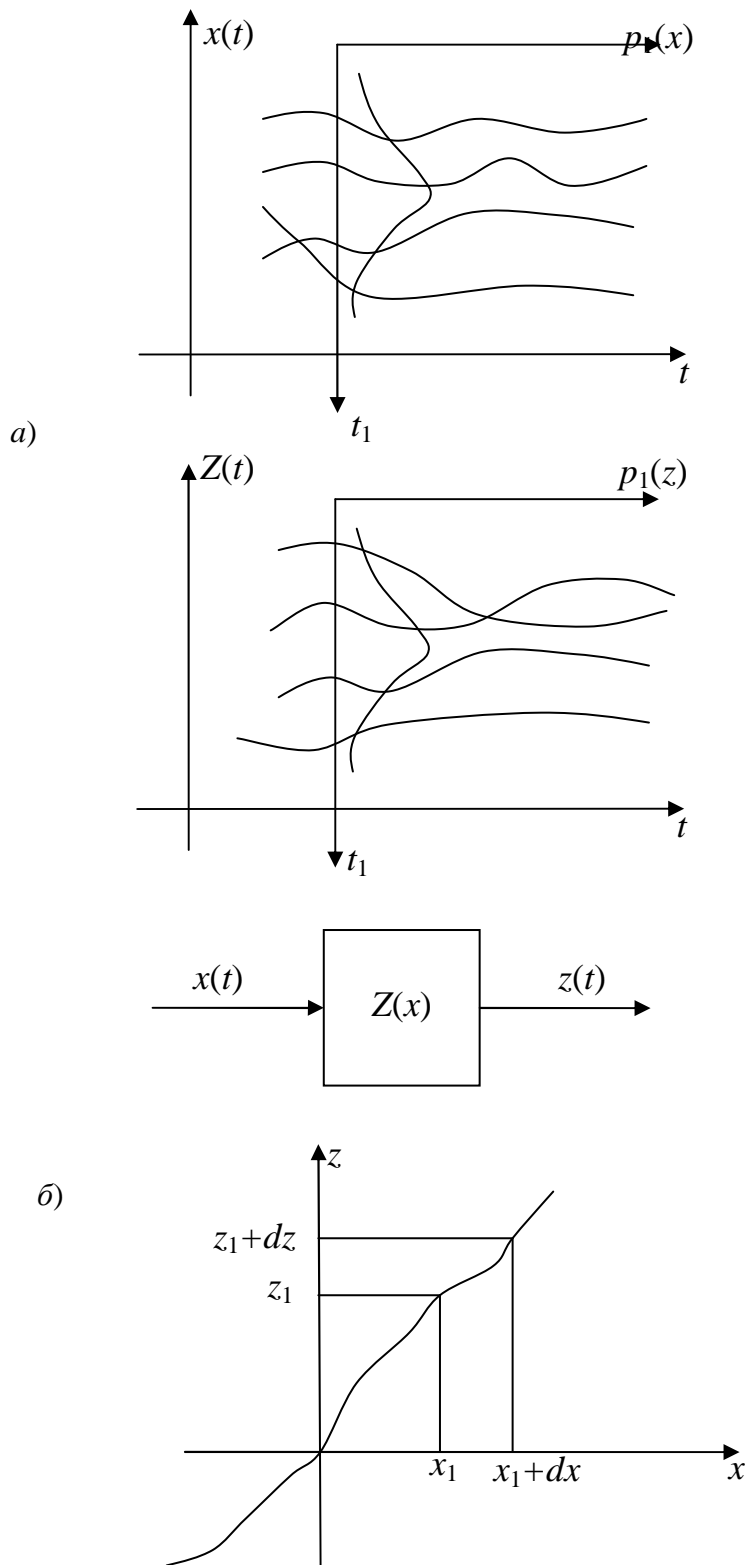


Рис. Л5.1. Преобразование плотности распределения случайного сигнала нелинейным звеном

Преобразование математического ожидания

Если известна плотность распределения сигнала на выходе НЭ, то математическое ожидание (МО) этого сигнала определяется как момент первого порядка:

$$\bar{Z} = m_z = M \{z(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} z p_1(z) dz. \quad (2)$$

С другой стороны, подставляя в формулу (2) выражение (1), получим:

$$m_z = \int_{-\infty}^{\infty} z(x) p_1(x) dx. \quad (3)$$

Формула (3) позволяет определить МО выходного сигнала НЭ, зная характер нелинейности $Z(x)$ и плотность распределения входного сигнала.

Преобразование дисперсии

Дисперсия выходного сигнала определяется выражением

$$D_z = \sigma_z^2 = \bar{z}^2 - m_z^2,$$

где \bar{z}^2 – начальный момент второго порядка;

$$\bar{z}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} z^2(x) p_1(x) dx.$$

С учетом (3) имеем:

$$D_z = \bar{z}^2 - \left[\int_{-\infty}^{\infty} z(x) p_1(x) dx \right]^2.$$

Таким образом,

$$\sigma_z = \sqrt{D_z}$$

– среднеквадратическое значение выходного сигнала.

Преобразование корреляционной функции и спектральной плотности

Выражение для корреляционной функции на выходе НЭ может быть найдено в аналитической форме, если входной сигнал распределен по нормальному закону:

$$R_z(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_x^n(\tau) a_{zn}^2,$$

где

$$\rho_x(\tau) = \frac{\overset{\circ}{R}_x(\tau)}{\sigma_x^2},$$

$\overset{\circ}{R}_x(\tau)$ – корреляционная функция централизованного входного сигнала; σ_x – среднеквадратическое значение входного сигнала;

$$a_{zn} = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi n!}} \int_{-\infty}^{\infty} z(x) H_n \left(\frac{x - m_x}{\sigma_x} \right) e^{-\left(\frac{x - m_x}{2\sigma_x^2}\right)} dx; \quad (4)$$

$H_n(t)$ – ортогональные полиномы Чебышева – Эрмита, вычисляемые по формуле

$$H_n(t) = (-1)^n e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^n}{dt^n} \left(e^{-\frac{t^2}{2}} \right),$$

или при $n > 0$ по рекуррентной формуле

$$H_{n+1}(t) = tH_n(t) - nH_{n-1}(t).$$

Свойство ортогональности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(t) H_m(t) e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \begin{cases} \sqrt{2\pi n!}, & \text{при } m = n, \\ 0, & \text{при } m \neq n. \end{cases}$$

При $n = 0$ $H_0(t) = 1$,

$$a_{z0} = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z(x) e^{-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} z(x) p_1(x) dx = m_z.$$

Тогда

$$R_z(\tau) = m_z^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_x^n a_{zn}^2 = m_z^2 + \overset{\circ}{R}_z(\tau),$$

т.е. корреляционная функция централизованного выходного сигнала может быть получена по формуле

$$\overset{\circ}{R}_z(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_x^n(\tau) a_{zn}^2.$$

Взаимная корреляционная функция входного и выходного сигналов НЭ

$$\overset{\circ}{R}_{xz}(\tau) = \frac{a_{z1}}{\sigma_x} \overset{\circ}{R}_x(\tau),$$

где

$$a_{z1} = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z(x) \frac{x - m_x}{\sigma_x} e^{-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx;$$

так как $H_1(t) = t$, то

$$a_{z1} = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z(x) \frac{x - m_x}{\sigma_x} e^{-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx.$$

Спектральная плотность выходного сигнала

$$\begin{aligned}
 S_z(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_z(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \rho_x^n(\tau) a_{zn}^2 d\tau = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{zn}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \rho_x^n(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{zn}^2}{\sigma_x^{2n}} \int_{-\infty}^{\infty} R_x^n(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Выражение (5) показывает, что спектр случайного сигнала на выходе НЭ обогащается высокочастотными составляющими. Это видно из простого примера. Пусть на вход НЭ с характеристикой $Z = B \operatorname{sign} x$ поступает случайный сигнал с нормальным распределением, имеющий корреляционную функцию вида $R_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}$, $m_x = 0$. Корреляционная функция выходного сигнала

$$R_z(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{zn}^2 e^{-\alpha|\tau|^n}.$$

Спектральная плотность выходного сигнала

$$\begin{aligned}
 S_z(\omega) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{zn}^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n\alpha|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau = a_{z1}^2 \frac{2\alpha}{\omega^2 + \alpha^2} + a_{z2}^2 \frac{2(2\alpha)}{\omega^2 + (2\alpha)^2} + \\
 &+ a_{z3}^2 \frac{2(3\alpha)}{\omega^2 + (3\alpha)^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_{zn}^2 \frac{2\alpha n}{\omega^2 + (n\alpha)^2}.
 \end{aligned}$$

Из полученного выражения видно, что слагаемые при $n = 2, 3, \dots$ расширяют спектр выходного сигнала. Коэффициенты a_{zn} определяются по формуле (4). Из-за наличия множителя $\frac{1}{\sqrt{2\pi n!}}$ эти коэффициенты быстро убывают при $n \rightarrow \infty$, поэтому расширение спектра происходит с одновременным уменьшением ординат.

Метод статистической линеаризации

Метод статистической линеаризации является одним из основных методов исследования нелинейных систем автоматического управления, подверженных случайным воздействиям. Сущность метода заключается в такой замене нелинейного элемента линейным, чтобы некоторые статистические характеристики преобразуемого сигнала оставались неизменными. В качестве таких характеристик принимают математическое ожидание и дисперсию, либо заменяют НЭ линейным так, чтобы обеспечивался минимум среднеквадратической ошибки (СКО) между выходом НЭ и эквивалентного линейного. Из этих условий эквивалентности и выбирают параметры линейного звена.

Пусть НЭ имеет характеристику $Z(x)$.

Входной сигнал $x(t) = m_x + \overset{\circ}{x}(t)$.

Эквивалентный линейный элемент представляется в виде двух линейных элементов с коэффициентами усиления K_0 и K_1 .

Первый из них преобразует математическое ожидание входного сигнала, второй – центрированную случайную составляющую (рис. Л5.2).

Коэффициенты усиления K_0 и K_1 эквивалентного линейного элемента, как уже указывалось, могут быть определены по двум условиям эквивалентности:

1) из равенства МО и дисперсий сигналов $Z(t)$ и $y(t)$ следует

$$m_z = m_y \rightarrow m_z = K_0 m_x;$$

$$K_0 = \frac{m_z}{m_x} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} z(x) p_1(x) dx}{m_x}; \quad (6)$$

$$D_z = D_y \rightarrow D_z = K_1^2 D_x;$$

$$K_1 = \sqrt{\frac{D_z}{D_x}} = \frac{\sigma_z}{\sigma_x} = \frac{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} z^2(x) p_1(x) dx - \left[\int_{-\infty}^{\infty} z(x) p_1(x) dx \right]^2}}{\sigma_x}; \quad (7)$$

2) из условия минимума СКО между выходом НЭ и эквивалентного линейного звена

$$M \left\{ (z - y)^2 \right\} = \min; \quad K_0 = \frac{m_z}{m_x}; \quad K_1 = \frac{a_{z1}}{\sigma_x};$$

$$a_{z1} = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z(x) \frac{x - m_x}{\sigma_x} e^{-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx.$$

Расчеты коэффициентов усиления K_0 и K_1 по двум условиям эквивалентности дают одинаковые результаты для K_0 и разные для K_1 .

На практике для K_1 берут среднее значение:

$$K_1 = \frac{K_1^{(1)} + K_1^{(2)}}{2},$$

где $K_1^{(1)} = \frac{\sigma_z}{\sigma_x}$; $K_1^{(2)} = \frac{a_{z1}}{\sigma_x}$ (обычно $K_1^{(1)} > K_1^{(2)}$).

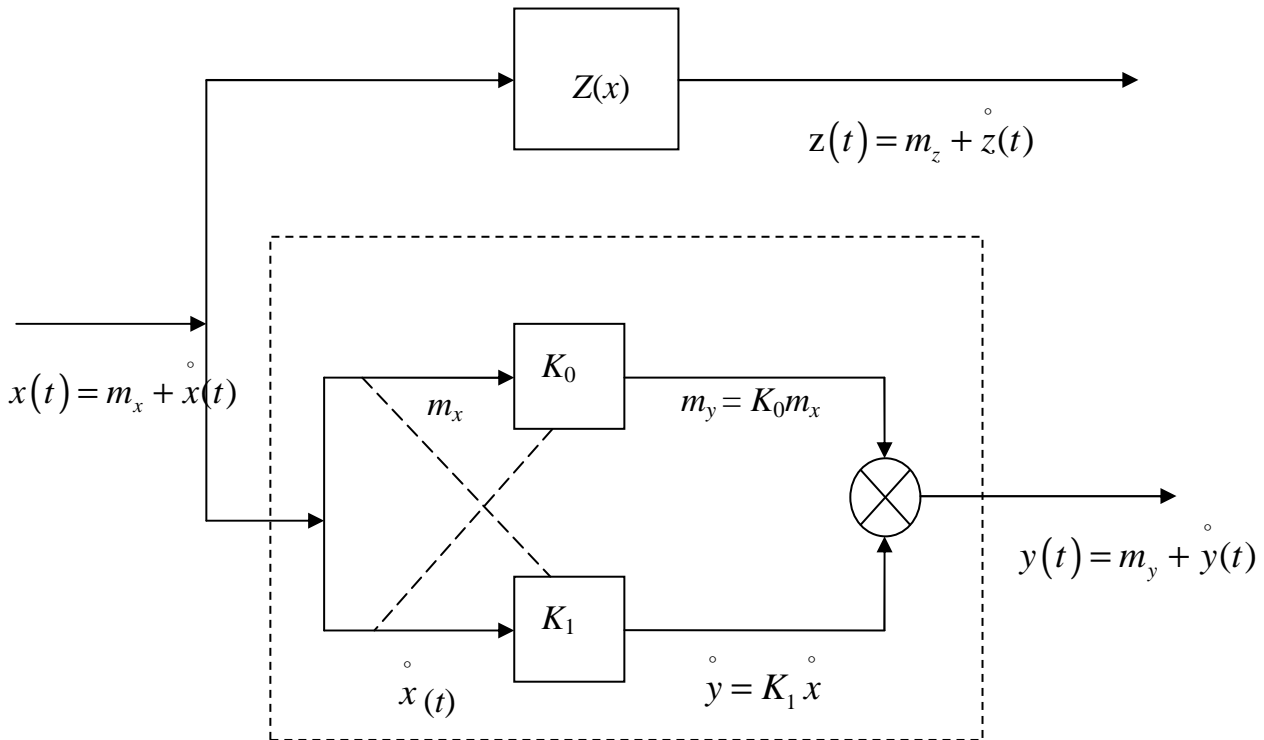


Рис. Л5.2. Замена нелинейного звена статически эквивалентным линейным звеном

Коэффициенты статической линеаризации рассчитаны для большинства применяемых НЭ и приведены в литературе.

Применение метода статической линеаризации для расчета нелинейных систем

Пусть дана система управления с обратной связью, содержащая нелинейное звено (безынерционное) и линейную часть. На вход системы подается сигнал $g(t)$ и сигнал помехи $N(t)$ (рис. Л5.3); $R_n(\tau)$ и $S_n(\omega)$ заданы; $N(t)$ – стационарный случайный сигнал, имеющий нормальное распределение.

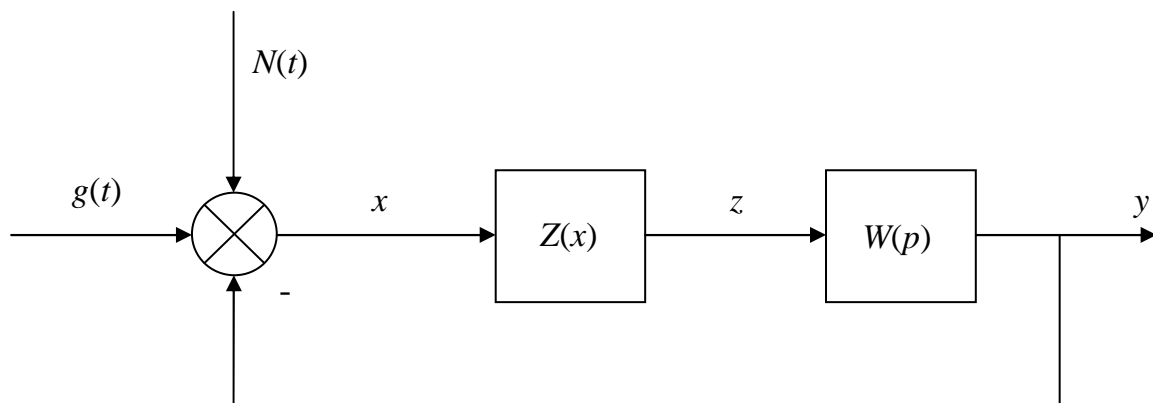


Рис. Л.5.3. Структурная схема нелинейной системы с помехой на входе

Считаем, что сигнал $g(t)$ сравнительно медленно меняется по времени, а помеха $N(t)$ не содержит постоянной составляющей ($m_n = 0$) и является более высокочастотной и стационарной.

Таким образом, сигнал, поступающий на вход системы $g(t) + N(t)$, имеет нормальный закон распределения с параметрами $m = m_g = g(t)$; $\sigma = \sigma_n = \sqrt{R_n(0)}$.

Для применения метода статической линеаризации заменим нелинейный элемент линейным, состоящим из двух каналов, с коэффициентами передачи K_0 и K_1 – по первому проходит медленная регулярная составляющая, по второму – быстрая случайная составляющая (рис. Л5.4).

Для правомерности статистической линеаризации необходимо, чтобы сигнал $x = g + N - y$ (y – выход системы) на входе нелинейного звена имел нормальный закон распределения. Если линейная часть системы является достаточно узкополосным фильтром, то она преобразует сигнал z с распределением, отличным от нормального, в сигнал y , имеющий нормальное распределение.

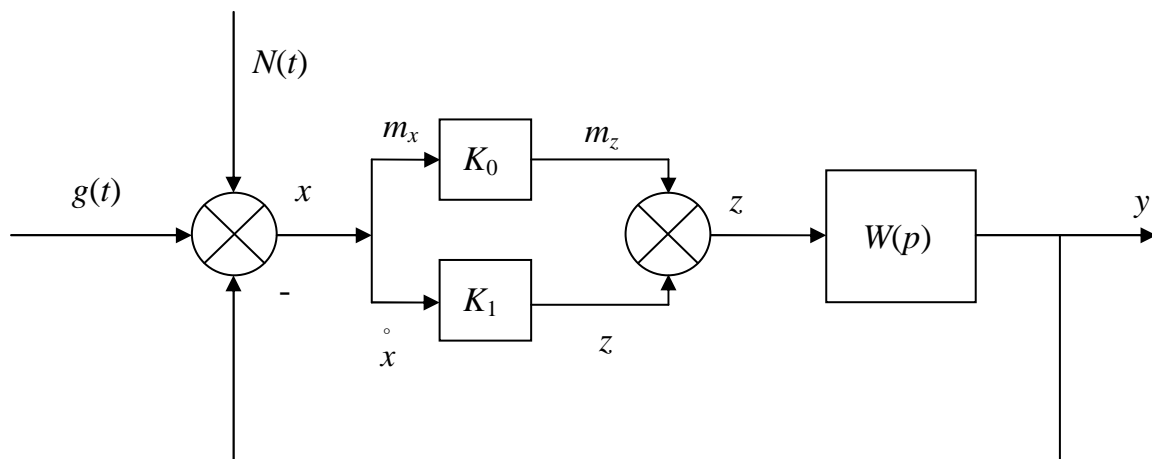


Рис. Л5.4. Структурная схема статически эквивалентной линейной системы

Считаем, что $W(p)$ этому условию удовлетворяет, тогда сигнал $x(t)$ на входе нелинейного элемента имеет нормальный закон распределения с параметрами m_x и σ_x .

Рассмотрим отдельно каналы преобразования математического ожидания (канал I) и случайной составляющей (канал II). Для канала I имеем:

$$X(p) = \frac{G(p)}{1 + K_0 W(p)}.$$

По теореме о конечном значении определяем установившуюся ошибку:

$$m_x(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{pG(p)}{1 + K_0 W(p)}. \quad (8)$$

По каналу II распространяется только случайная составляющая с нулевым математическим ожиданием.

Спектральная плотность ошибки

$$S_x(\omega) = S_n(\omega) \left| \frac{1}{1 + K_1 W(j\omega)} \right|^2.$$

Дисперсия сигнала x определяется по его спектральной плотности

$$D_x = \sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega) \left| \frac{1}{1 + K_1 W(j\omega)} \right|^2 d\omega. \quad (9)$$

В результате получим два уравнения:

$$\begin{aligned} m_x &= m_x(K_0); \\ \sigma_x &= \sigma_x(K_1). \end{aligned} \quad (10)$$

Эти два уравнения содержат четыре неизвестных: m_x , σ_x , K_0 , K_1 . Для решения задачи найдем недостающие два уравнения. Рассмотрим прохождение сигнала x с нормальным законом распределения (с параметрами m_x и σ_x) через нелинейное звено $Z(x)$.

Применяя метод статистической линеаризации, получаем:

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{m_z}{m_x} = K_0(m_x, \sigma_x); \\ K_1 &= 0,5(K_1^{(1)} + K_2^{(2)}) = K_1(m_x, \sigma_x); \\ K_1^{(1)} &= \frac{\sigma_z}{\sigma_x} = K_1^{(1)}(m_x, \sigma_x); \\ K_1^{(2)} &= \frac{a_{z1}}{\sigma_x} = K_1^{(2)}(m_x, \sigma_x). \end{aligned} \quad (11)$$

Решая совместно систему четырех уравнений (10) и (11)

$$\begin{aligned} m_x &= m_x(K_0); \\ \sigma_x &= \sigma_x(K_1); \\ K_0 &= K_0(m_x, \sigma_x); \\ K_1 &= K_1(m_x, \sigma_x), \end{aligned} \quad (12)$$

определяем значения m_x и σ_x , выражающие вероятностные характеристики рас- согласования x в системе управления.

Помеха $N(t)$ не имеет постоянной составляющей ($m_n = 0$), поэтому полученная величина m_x является установившейся ошибкой системы от полезного сигнала при наличии помехи $N(t)$. Полная ошибка системы суммируется из m_x и ошибки от действия случайной составляющей помехи, которую рассчитаем следующим образом. Поскольку для эквивалентной системы справедлив принцип суперпозиции, составляющую ошибки от случайной помехи получаем, положив $g(t) = 0$. Тогда сигнал на выходе системы $y(t)$ и будет представлять собой ошибку системы от действия случайной помехи.

Среднеквадратичное значение ошибки найдем по формуле

$$D_y = \sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega) \left| \frac{K_1 W(j\omega)}{1 + K_1 W(j\omega)} \right|^2 d\omega.$$

Среднеквадратичную ошибку воспроизведения полезного сигнала определим из выражения

$$D\{(g - y)\} = D\{e\} = D_e = m_x^2 + \sigma_y^2.$$

Полученная формула аналогична формуле вычисления ошибки воспроизведения полезного сигнала в линейной системе. Однако если в линейной системе составляющая m_x не зависит от параметров сигнала помехи (в частности, от σ_n), то в нелинейной системе она определяется не только параметрами полезного сигнала m_g , но и параметрами помехи σ_n .

Действительно,

$$m_x = m_x(\sigma_n, m_g),$$

где

$$\sigma_x = \sigma_x[S_n(\omega)] = \sigma_x(\sigma_n),$$

то есть

$$m_x = m_x(\sigma_n, m_g).$$

Расчет дисперсии ошибки нелинейной системы при случайном воздействии

В этой лабораторной работе исследуется нелинейная система, структурная схема которой приведена на рис. Л5.5. Используя методику, приведенную выше, рассчитаем зависимость дисперсии ошибки системы от среднеквадратичного значения помехи $D_e(\sigma_n)$.

Исходные данные для расчета:

- передаточная функция объекта (линейной части системы)

$$W(p) = \frac{1}{T_1 p + 1};$$

- входной задающий сигнал

$$g(t) = A \cdot 1(t);$$

- помеха $N(t)$:

$$m_n = 0, \quad S_n(\omega) \begin{cases} S_{n0} & \text{при } \omega_{n1} \leq |\omega| < \omega_{n2}; \\ 0 & \text{при } |\omega| < \omega_{n1}, |\omega| > \omega_{n2}; \end{cases}$$

- нелинейный элемент

$$U_2 = B \text{sign} U_1.$$

Составляем систему уравнений (12) для расчета коэффициентов статической линейризации K_0 и K_1 (не путать с обозначением на стенде, K_0 – коэффициент передачи объекта).

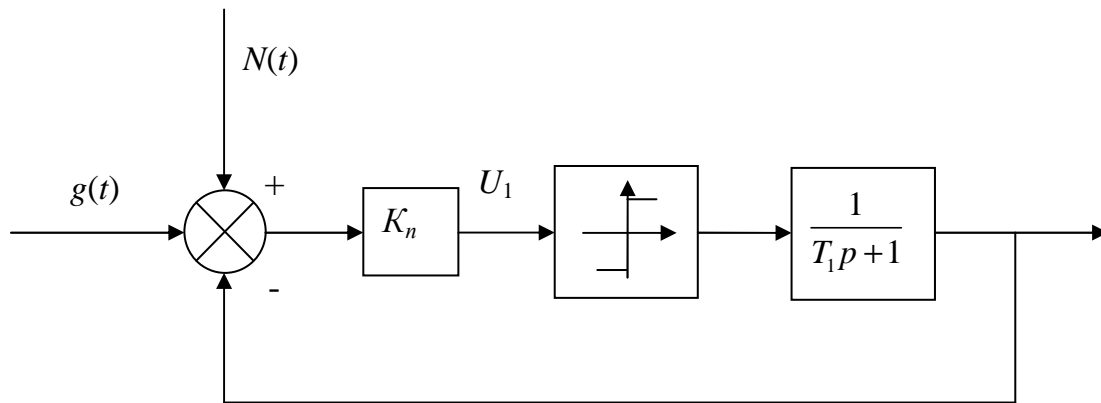


Рис. Л5.5. Структурная схема исследуемой нелинейной системы

По формуле (8) определяем математическое ожидание ошибки от полезного сигнала:

$$m_{u1} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{A}{p} \frac{1}{1 + K_0 \frac{1}{T_1 p + 1}} = \frac{A}{1 + K_0}. \quad (13)$$

По формуле (9) определяем дисперсию сигнала U_1 :

$$\begin{aligned} D_{U_1} &= \frac{1}{\pi} \int_{\omega_{n1}}^{\omega_{n2}} S_{n0} \left| \frac{1}{1 + K_1 \frac{1}{T_1(j\omega) + 1}} \right|^2 d\omega = \frac{S_{n0}}{\pi} \int_{\omega_{n1}}^{\omega_{n2}} \frac{T_1^2 \omega^2 + 1}{T_1^2 \omega^2 + (1 + K_1)^2} d\omega = \\ &= \frac{S_{n0}}{\pi} \left[\Delta\omega_n - \frac{(1 + K_1)^2 - 1}{(1 + K_1) T_1} \operatorname{arctg} \frac{\Delta\omega_n T_1}{1 + \frac{\omega_{n1} \omega_{n2} T_1}{(1 + K_1)^2}} \right] = \\ &= \sigma_n^2 \left[1 - \frac{1}{\Delta\omega_n T_1} \frac{K_1(2 + K_1)}{1 + K_1} \operatorname{arctg} \frac{\Delta\omega_n T_1}{1 + \frac{\omega_{n1} \omega_{n2} T_1}{(1 + K_1)^2}} \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Коэффициенты статистической линейризации для заданной нелинейности определяем по формулам (6) и (7), принимая закон распределения сигнала U_1 нормальным:

$$\begin{aligned}
p_1(U_1) &= \frac{1}{\sigma_{U_1} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(U_1 - m_{U_1})^2}{2\sigma_{U_1}^2}}, \\
K_0 = \frac{m_{U_2}}{m_{U_1}} &= \frac{1}{m_{U_1}} \left[\int_{-\infty}^0 (-B) \frac{1}{\sigma_{U_1} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(U_1 - m_{U_1})^2}{2\sigma_{U_1}^2}} dU_1 + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{\infty} B \frac{1}{\sigma_{U_1} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(U_1 - m_{U_1})^2}{2\sigma_{U_1}^2}} dU_1 \right] = \\
&= \frac{2B}{m_{U_1}} \Phi\left(\frac{m_{U_1}}{\sigma_{U_1}}\right),
\end{aligned} \tag{15}$$

где $\Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – табулированный интеграл вероятности;

$$\begin{aligned}
K_1^{(1)} &= \frac{B}{\sigma_{U_1}} \sqrt{1 - 4\Phi^2\left(\frac{m_{U_1}}{\sigma_{U_1}}\right)}; \quad K_1^{(2)} = \frac{2B}{\sigma_{U_1}} \varphi\left(\frac{m_{U_1}}{\sigma_{U_1}}\right); \\
K_1 &= \frac{K_1^{(1)} + K_1^{(2)}}{2},
\end{aligned} \tag{16}$$

где $\varphi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2}}$.

Уравнения (13) – (16) составляют систему четырех уравнений, решение которой целесообразно выполнять на ЦВМ:

$$\begin{aligned}
m_{U_1} &= m_{U_1}(K_0); \\
\sigma_{U_1} &= \sqrt{D_{U_1}} = \sigma_{U_1}(K_1); \\
K_0 &= K_0(m_{U_1}, \sigma_{U_1}); \\
K_1 &= K_1(m_{U_1}, \sigma_{U_1}).
\end{aligned} \tag{17}$$

В результате решения системы (16) определяем значения m_{U_1} и K_1 . По формуле (10) определяем дисперсию ошибки от помехи:

$$\begin{aligned}
\sigma_y^2 &= \frac{1}{\pi} \int_{\omega_{n1}}^{\omega_{n2}} S_{n0} \left| \frac{\frac{K_1}{T_2(j\omega) + 1}}{1 + \frac{K_1}{T_2(j\omega) + 1}} \right|^2 d\omega = \\
&= \frac{\sigma_N^2}{\Delta\omega_N T_2} \frac{K_1^2}{1 + K_1} \operatorname{arctg} \frac{\Delta\omega_N T_2 (1 + K_1)^2}{(1 + K_1)^2 + \omega_{N1} \omega_{N2} T_2^2}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Среднеквадратичную ошибку воспроизведения полезного сигнала определяем по формуле

$$\sigma_e = \sqrt{m_{U1}^2 + \sigma_y^2}. \quad (19)$$

Блок-схема алгоритма расчета σ_e на ЦВМ приведена на рис. Л5.6. Расхождение результатов расчета и эксперимента будут указывать на степень применимости метода статистической линеаризации для расчета данной конкретной линейной системы.

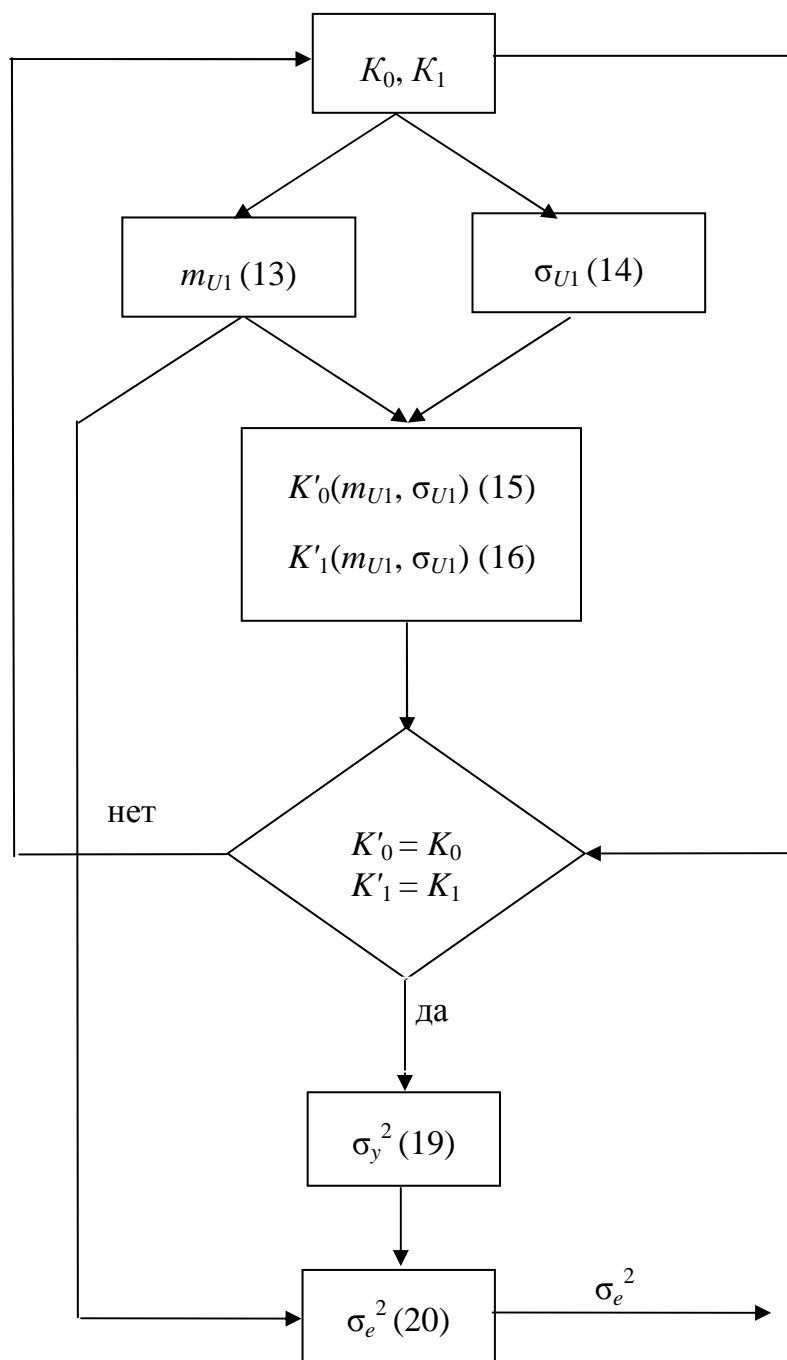


Рис. Л5.6. Блок-схема решения системы уравнений для определения СКО воспроизведения полезного сигнала при наличии помехи

Лабораторное задание

1. Собрать схему моделирования нелинейной системы (рис. Л5.7). Установить следующие параметры элементов моделируемой системы и сигналов:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= A \cdot 1(t); & (A = 8B); \\
 K_{n\Sigma} &= K_n C_n = 0,5; & (C_n = 0,5); \\
 K_{0\Sigma} &= K_0 C_0 = 1; & (C_0 = 0,1); \\
 T_{01} &= 0, \quad T_{02} = 1 \text{ с.}
 \end{aligned}$$

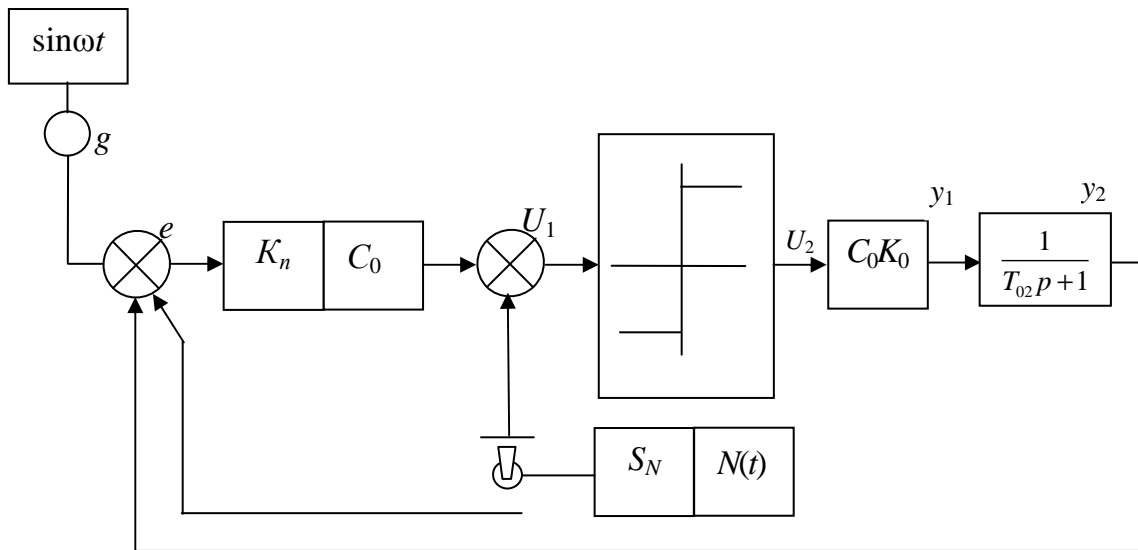


Рис. Л5.7. Схема моделирования к лабораторной работе № 5

2. Экспериментально исследовать прохождение случайного сигнала по элементам моделируемой системы. Снять зависимость дисперсии ошибки воспроизведения задающего воздействия и математического ожидания сигнала ошибки от амплитуды сигнала помехи. Амплитуду сигнала помехи задавать в виде ряда условных коэффициентов $C_N = 0; 0,1; 0,2; \dots; 1$.

3. Снять экспериментально зависимость математического ожидания выходного сигнала нелинейного элемента от амплитуды помехи в разомкнутой системе. С этой целью тумблер в цепи обратной связи установить в нижнее положение. В качестве вычислителя математического ожидания сигнала U_2 в данном случае можно использовать модель объекта управления, задав ее передаточную функцию в соответствии с уравнением

$$W_0(p) = \frac{K_{\Sigma 0}}{(T_{01}p + 1)(T_{02}p + 1)},$$

где

$$\begin{aligned}
 K_{\Sigma 0} &= K_0 C_0 = 1; & (C_0 = 0,1); \\
 T_{01} &= 1 \text{ с;} \\
 T_{02} &= 1 \text{ с.}
 \end{aligned}$$

Эта передаточная функция позволяет получить фильтр нижних частот второго порядка, выходной сигнал y_2 которого является математическим ожиданием сигнала U_2 . Амплитуду сигнала помехи задавать в виде ряда условных коэффициентов $C_N = 0; 0,1; 0,2; \dots; 1$. Амплитуду задающего воздействия установить равной $A = 2$ В.

Методические указания

1. При подготовке схемы моделирования следует отключить ненужные блоки путем установки потенциометра C_g в положение нулевого коэффициента передачи, тумблера в выходной цепи интегрирующего элемента – в нижнее положение. Тумблер в цепи обратной связи модели объекта управления также следует поставить в нижнее положение.

2. Величину сигнала задающего воздействия $A \cdot 1(t)$ следует измерять вольтметром в точке g после подачи команды «ПУСК» и устанавливать соответствующим потенциометром.

3. Отсчет значений дисперсий и матожиданий следует производить не ранее, чем через 15 с после подачи команды «ПУСК» или изменения параметра C_N .

Содержание отчета

1. Схема моделирования нелинейной системы.
2. Графики зависимостей

$$D_e = D_e(C_N);$$

$$m_e = m_e(C_N)$$

для замкнутой нелинейной системы.

3. Графики зависимости

$$m_{U_2} = m_{U_2}(C_N) = \overline{y_2}.$$

Контрольные вопросы

1. Метод статической линеаризации. Вычисление коэффициентов $K_0, K_1^{(1)}, K_1^{(2)}$.
2. Применение метода статической линеаризации к расчету нелинейных систем. Ограничения на линейную часть системы.
3. Вычисление ошибки воспроизведения полезного сигнала нелинейной системой при воздействии помехи.
4. Работа схемы моделирования и выбор ее параметров.
5. Объяснение экспериментальных зависимостей.
6. Влияние уровня помехи на коэффициенты статической линеаризации.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение П.1

Основные положения о преобразовании Лапласа

Функциональное преобразование вида

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = L[f(t)],$$

где $p = c + j\beta$ – комплексная переменная, называют *преобразованием Лапласа*.

Основные теоремы:

линейности

$$\left[\sum_{k=1}^n a_k(t) f_k(t) \right] = \sum_{k=1}^n a_k F_k(p);$$

дифференцирования

$$L[f^{(n)}(t)] = p^n F(p) - \sum_{k=1}^n p^{n-k} f^{(k-1)}(0);$$

интегрирования

$$L\left[\underbrace{\int \dots \int}_n f(t) dt^n = f^{-n}(t) \right] = \frac{F(p)}{p^n} + \sum_{k=1}^n \frac{f^{-k}(0)}{p^{n-k+1}};$$

запаздывания

$$L[f(t - \Delta)] = F(p)e^{-\Delta p};$$

умножения изображений

$$F_1(p)F_2(p) = L\left[\int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau \right];$$

о конечном значении функции

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p);$$

о начальном значении функции

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p);$$

обращения

$$h(t) = L^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)e^{pt} dp = \sum_{i=1}^n \operatorname{Res} F(p)e^{pt} \Big|_{p=\lambda_i},$$

где $\operatorname{Res} F(p)e^{pt} \Big|_{p=\lambda_i}$ – вычет в полюсе λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$; n – число полюсов.

Преобразования Лапласа наиболее часто встречающихся функций приведены в табл. П.1.

Таблица П.1

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
1	$\delta(t)$	1	6	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$
2	$1(t)$	$\frac{1}{p}$	7	$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p^2 + \beta^2)}$
3	t	$\frac{1}{p^2}$	8	$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$
4	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}$	$\frac{1}{p^n}$	9	$e^{-\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p+\alpha)^2 + \beta^2}$
5	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	10	$e^{-\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \beta^2}$

Формулы для интегрирования спектральной плотности

Интеграл от функции спектральной плотности записывают в виде

$$J_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{C(j\omega)}{D(j\omega)} \right|^2 d\omega;$$

$$C(j\omega) = c_{n-1}(j\omega)^{n-1} + c_{n-2}(j\omega)^{n-2} + \dots + c_2(j\omega)^2 + c_1j\omega + c_0;$$

$$D(j\omega) = d_n(j\omega)^n + d_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + d_2(j\omega)^2 + d_1(j\omega) + d_0;$$

Для $n = 1$

$$J_1 = \frac{c_0^2}{2d_0d_1};$$

для $n = 2$

$$J_2 = \frac{c_1^2d_0 + c_0^2d_2}{2d_0d_1d_2};$$

для $n = 3$

$$J_3 = \frac{c_2^2d_0d_1 + (c_1^2 - 2c_0c_2)d_0d_3 + c_0^2d_2d_3}{2d_0d_3(-d_0d_3 + d_1d_2)};$$

для $n = 4$

$$J_4 = \frac{c_3^2(-d_0^2d_3 + d_0d_1d_2) + (c_2^2 - 2c_1c_3)d_0d_1d_4}{2d_0d_4(-d_0d_3^2 - d_1^2d_4 + d_1d_2d_3)} +$$

$$+ \frac{(c_1^2 - 2c_0c_2)d_0d_3d_4 + c_0^2(-d_1d_4^2 + d_2d_3d_4)}{2d_0d_4(-d_0d_3^2 - d_1^2d_4 + d_1d_2d_3)};$$

для $n = 5$

$$J_5 = \frac{1}{2\Delta_5} [c_4^2m_0 + (c_3^2 - 2c_2c_4)m_1 + (c_2^2 - 2c_1c_3 + 2c_0c_4)m_2 +$$

$$+ (c_1^2 - 2c_0c_2)m_3 + c_0^2m_4],$$

где

$$m_0 = \frac{1}{d_5}(d_3m_1 - d_1m_2); \quad m_1 = -d_0d_3 + d_1d_2;$$

$$m_2 = -d_2d_5 + d_1d_4; \quad m_3 = \frac{1}{d_0}(d_2m_2 - d_4m_1);$$

$$m_4 = \frac{1}{d_4}(d_2m_3 - d_4m_2); \quad \Delta_5 = d_0(d_1m_4 - d_3m_3 + d_5m_2).$$

Z – преобразование наиболее часто встречающихся функций

$x(t)$	$X(z)$	$X(z, mT), m=1-\Delta$
$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$\frac{mT}{z-1} + \frac{T}{(z-1)^2}$
t^2	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$	$\frac{(mT)^2}{z-1} + \frac{2mT^2}{(z-1)^2} + \frac{T^2(z+1)}{(z-1)^3}$
t^3	$\frac{T^3 z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$	$\frac{(mT)^3}{(z-1)^3} + 3 \frac{m^2 T^3}{(z-1)^2} +$ $+ 3 \frac{mT^3(z+1)}{(z-1)^3} +$ $+ \frac{T^3(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{z}{z-e^{-\alpha T}}$	$\frac{e^{-\alpha mT}}{z-e^{-\alpha T}}$
$\cos \beta t$	$\frac{z^2 - z \cos \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$	$\frac{z \cos \beta mT - \cos \beta \Delta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$
$\cos \frac{\pi}{T} t$	$\frac{z}{z+1}$	$\frac{z \cos m\pi - \cos \Delta\pi}{(z+1)^2}$
$\sin \beta t$	$\frac{z \sin \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$	$\frac{z \sin \beta mT + \sin \beta \Delta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$
$e^{-\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{z(z - e^{-\alpha T} \cos \beta T)}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}}$	$\frac{(z \cos \beta mT - e^{-\alpha T} \cdot \cos \beta \Delta T)}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}} \times$ $\times e^{-\alpha mT}$
$e^{-\alpha t} \cos \frac{\pi}{T} t$	$\frac{z}{z + e^{-\alpha T}}$	$\frac{z \cos m\pi - e^{-\alpha T} \cdot \cos \Delta T}{(z + e^{-\alpha T})^2} \times$ $\times e^{-\alpha mT}$
$e^{-\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{ze^{-\alpha T} \sin \beta T}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}}$	$\frac{z \sin \beta mT + e^{-\alpha T} \cdot \sin \beta \Delta T}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}} \times$ $\times e^{-\alpha mT}$

Краткие сведения по теории матриц

Определения. Матрицей $A = [a_{ij}]$ размером $m \times n$ называют таблицу чисел, состоящую из m строк и n столбцов; индекс i указывает номер строки, а индекс j – номер столбца. Числа (элементы) матрицы могут быть вещественными или комплексными. Рассмотрим матрицу с вещественными элементами:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}, \dots, & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}, \dots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2}, \dots, & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Матрицу размером $m \times 1$ называют *матрицей-столбцом* или *вектором-столбцом*:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \end{bmatrix}.$$

Если $m = n$, то матрицу называют *квадратной*. В том случае, когда $a_{ij} = 0$, при любых $i \neq j$ имеем *диагональную матрицу*. Диагональную матрицу, в которой $a_{ii} = 1, i = 1, 2, \dots, n$, называют *единичной*:

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0, \dots, & 0 \\ 0 & 1 & 0, \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0, \dots, & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицу произвольных размеров, все элементы которой равны нулю, называют *нулевой*.

Если существует матрица $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ размером $m \times n$, то матрицу $\mathbf{A}^T = [a_{ji}]$ размером $n \times m$ называют *транспонированной по отношению к матрице A*.

Матрицу считают симметричной, если $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, и кососимметричной, если $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$.

Сумму всех диагональных элементов квадратной матрицы называют *следом матрицы*: $S_p = \sum_i a_{ii}$.

Сложение и умножение матриц. Матрицы одинаковых размеров можно складывать. Элементы матрицы $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Равенство $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ означает, что $a_{ij} = b_{ij}$.

Умножение матрицы на число α означает, что все элементы матрицы умножаются на α .

Умножение матрицы \mathbf{A} размером $m \times n$ на матрицу \mathbf{B} размером $n \times r$ позволяет получить матрицу \mathbf{C} размером $m \times r$, элементы которой $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$.

Таким образом, матрицы можно перемножить, если число столбцов первого сомножителя равно числу строк второго. Для умножения матриц несправедлив коммутативный закон, т.е. $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Произведение матрицы \mathbf{A} размером $m \times n$ на вектор-столбец \mathbf{X} размером $n \times 1$ дает вектор-столбец \mathbf{Y} размером $m \times 1$, элементы которого $y_i = \sum a_{ij} x_j$.

Произведение вектора-столбца \mathbf{X} размером $n \times 1$ на вектор-строку \mathbf{Y}^T размером $1 \times n$ позволяет получить квадратную матрицу размером $n \times n$: $\mathbf{X} \mathbf{Y}^T = \mathbf{A}$.

Произведение вектора-строки \mathbf{Y}^T размером $1 \times n$ на вектор-столбец \mathbf{X} размером $n \times 1$ называют *скалярным произведением*:

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{X} = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \dots + y_n x_n.$$

Если $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, то матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} называют *перестановочными*.

При транспонировании матриц имеем:

$$\begin{aligned} (\mathbf{AB})^T &= \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T; \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T &= \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T. \end{aligned}$$

Определитель и обратная матрица. Если \mathbf{A} – квадратная матрица размером $n \times n$, то ее определителем считают величину $|\mathbf{A}| = \det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta_{ij}$ при любом i , где $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ – алгебраическое дополнение элемента. Здесь M_{ij} – минор элемента a_{ij} , т.е. определитель квадратной матрицы, получаемой из матрицы \mathbf{A} вычеркиванием i -той строки и j -того столбца.

Матрицу \mathbf{A} называют *невырожденной (несингулярной)*, если ее определитель не равен нулю, в противном случае матрицу \mathbf{A} называют *вырожденной (сингулярной)*.

Любая невырожденная матрица имеет обратную, которая вычисляется по формуле

$$\mathbf{A}^{-1} = \left[\frac{\Delta_{ji}}{|\mathbf{A}|} \right].$$

Для матрицы второго порядка

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

имеем:

$$|\mathbf{A}| = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12};$$

$$\Delta_{11} = a_{22}; \Delta_{12} = -a_{12}; \Delta_{21} = -a_{21}; \Delta_{22} = a_{11}.$$

Таким образом, обратная матрица

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Действительную квадратную матрицу \mathbf{S} , удовлетворяющую условию $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$, называют *ортогональной*, определитель ортогональной матрицы $|\mathbf{S}| = \pm 1$.

Квадратичные формы. Если \mathbf{A} – вещественная симметричная матрица, а \mathbf{X} – вектор-столбец, то $v(x) = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}$ называют *квадратичной формой с матрицей преобразования \mathbf{A}* .

Квадратичная форма $v(x)$ считается положительно определенной или отрицательно определенной, если, соответственно,

$$v(x) > 0 \quad \text{при } x \neq 0;$$

$$v(x) < 0 \quad \text{при } x \neq 0,$$

причем $v(0) = 0$.

Квадратичная форма $v(x)$ положительно определена, если все главные миноры матрицы \mathbf{A} положительны, т.е.

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, |\mathbf{A}| > 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бесекерский, В.А.** Теория систем автоматического регулирования / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. – М.: Наука, 1975.
2. **Быков, В.В.** Цифровое моделирование в статистической радиотехнике / В.В. Быков. – М.: Советское радио, 1971.
3. **Гришин, Ю.П.** Микропроцессоры в радиотехнических системах / Ю.П. Гришин, Ю.М. Казаринов, В.М. Катиков. – М.: Радио и связь, 1982.
4. **Диткин, В.А.** Операционное исчисление / **В.А. Диткин, А.П. Прудников.** – М.: Высш. шк., 1975.
5. **Джури, Э.** Импульсные системы автоматического регулирования: пер. с англ. / Э. Джури; под ред. Я.З. Цыпкина. – М.: Физматгиз, 1963.
6. **Казаков, И.Е.** Статистическая теория систем управления в пространстве состояний / И.Е. Казаков. – М.: Наука, 1975.
7. **Коновалов, Г.Ф.** Радиоавтоматика / Г.Ф. Коновалов. – М.: Высш. шк., 1990.
8. **Коновалов, Г.Ф.** Системы автоматического управления с электромагнитными порошковыми муфтами / Г.Ф. Коновалов, О.В. Коноваленко. – М.: Машиностроение, 1976.
9. **Кривицкий, Б.Х.** Системы автоматической регулировки усиления / Б.Х. Кривицкий, Е.Н. Салтыков. – М.: Радио и связь, 1982.
10. **Леонов, А.И.** Моноимпульсная радиолокация / А.И. Леонов, К.И. Фомичев. – М.: Радио и связь, 1984.
11. **Лихарев, В.А.** Цифровые методы и устройства в радиолокации / В.А. Лихарев. – М.: Радио и связь, 1973.
12. **Медич, Д.** Статистические оптимальные оценки и управление: пер. с англ. / Д. Медич; под ред. А.С. Шатолова. – М.: Энергия, 1973.
13. Микропроцессоры и микропроцессорные комплекты интегральных микросхем: справочник / под ред. В.А. Шахнова. – М.: Радио и связь, 1988. – Т. 1, 2.
14. **Обрезков, Г.В.** Методы анализа срыва слежения / Г.В. Обрезков, В.Д. Разевиг. – М.: Советское радио, 1972.
15. **Первачев, В.С.** Радиоавтоматика / В.С. Первачев. – М.: Радио и связь, 1982.
16. **Радиоавтоматика** / под ред. В.А. Бесекерского. – М.: Высш. шк., 1985.
17. **Растринин, Л.А.** Система экстремального управления / **Л.А. Растринин.** – М.: Наука, 1974.
18. Современная радиолокация: пер. с англ. / под ред. Ю.Б. Кобзарева. – М.: Советское радио, 1969.
19. Теоретические основы радиолокации / под ред. В.Е. Дулевича. – М.: Советское радио, 1978.
20. **Ушкар, М.Н.** Микропроцессорные устройства в радиоэлектронной аппаратуре / М.Н. Ушкар. – М.: Радио и связь, 1988.
21. Цифровые системы синхронизации / под ред. М.И. Жодзишского. – М.: Советское радио, 1980.
22. **Цыпкин, Я.З.** Основы теории автоматических систем / Я.З. Цыпкин. – М.: Наука, 1977.
23. **Чураков, Е.Л.** Оптимальные и адаптивные системы / Е.Л. Чураков. – М.: Энергоатомиздат, 1987.
24. **Шахгильдян, В.В.** Системы фазовой автоподстройки и частоты / В.В. Шахгильдян, А.А. Ляховкин. – М.: Связь, 1972.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
РАЗДЕЛ 1. ТИПОВЫЕ СИСТЕМЫ РАДИОАВТОМАТИКИ	6
Тема 1. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ И СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ ТИПОВЫХ СИСТЕМ РАДИОАВТОМАТИКИ	6
1.1 Система автоматической подстройки частоты.....	6
1.2. Система фазовой автоподстройки частоты.....	7
1.3. Система автоматического сопровождения цели бортовой РЛС	9
1.4. Система автоматической регулировки усиления	12
1.5. Система измерения дальности РЛС.....	14
1.6. Обобщенная структурная схема системы РА	16
1.7. Классификация систем РА.....	18
Вопросы к теме 1	18
Тема 2. ЭЛЕМЕНТЫ СИСТЕМ РАДИОАВТОМАТИКИ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ.....	19
2.1. Линеаризация уравнений элементов систем РА.....	19
2.2. Фазовые детекторы.....	19
2.3. Частотные дискриминаторы.....	21
2.4. Угловые дискриминаторы	23
2.5. Исполнительные устройства	26
Вопросы к теме 2	27
РАЗДЕЛ 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ РАДИОАВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ЗВЕНЬЕВ.....	28
Тема 3. МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ И ЗВЕНЬЕВ.....	28
3.1. Общее уравнение систем РА	28
3.2. Дифференциальные уравнения систем.....	28
3.3. Передаточная функция.....	29
3.4. Переходная и импульсная переходная функции	30
3.5. Выходной сигнал системы РА при произвольном воздействии.....	33
3.6. Комплексный коэффициент передачи и частотные характеристики	33
3.7. Типовые звенья	35
3.8. Логарифмические частотные характеристики типовых звеньев	38
3.9. Виды соединений звеньев в системах РА	41
3.10. Передаточные функции	43
3.11. Передаточные функции статических и астатических систем	44
3.12. Передаточные функции многоконтурных систем.....	45
3.13. Определение параметров элементов систем.....	46
Вопросы к теме 3	48
РАЗДЕЛ 3. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ РАДИОАВТОМАТИКИ	49
Тема 4. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ	49
4.1. Постановка задачи устойчивости.....	49
4.2. Критерий устойчивости Гурвица	51
4.3. Частотные критерии устойчивости.....	53
4.4. Запасы устойчивости.....	56
4.5. Оценка устойчивости по ЛЧХ.....	57
4.6. Устойчивость систем с запаздыванием	60
Вопросы к теме 4	61
РАЗДЕЛ 4. АНАЛИЗ КАЧЕСТВА РАБОТЫ СИСТЕМ.....	62
Тема 5. АНАЛИЗ КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ	62
5.1. Постановка задачи	62
5.2. Показатели качества переходного процесса.....	63
5.3. Частотные показатели качества	64
Вопросы к теме 5	67

Тема 6. АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ПРИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ	68
6.1 Анализ точности работы систем	68
Вопросы к теме 6	71
Тема 7. АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ72	
7.1. Средняя квадратическая ошибка системы	72
7.2. Система с белым шумом на входе	76
Вопросы к теме 7	83
Тема 8. АНАЛИЗ СИСТЕМ РАДИОАВТОМАТИКИ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ .84	
8.1. Векторные дифференциальные уравнения систем РА.....	84
8.2. Матрица перехода	89
8.3. Интегральные оценки.....	92
Вопросы к теме 8	96
РАЗДЕЛ 5. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ РАДИОАВТОМАТИКИ	97
Тема 9. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ РАДИОАВТОМАТИКИ	97
9.1. Особенности нелинейных систем	97
9.2. Метод гармонической линеаризации нелинейных звеньев.....	99
9.3. Уравнение нелинейной системы	102
9.4. Частотный метод определения параметров автоколебаний.....	103
9.5. Статистическая линеаризация нелинейных характеристик	105
9.6. Применение метода статистической линеаризации для анализа стационарных режимов и срыва слежения.....	109
Вопросы к теме 9	112
РАЗДЕЛ 6. ПРОЕКТИРОВАНИЕ СИСТЕМ РАДИОАВТОМАТИКИ	113
Тема 10. СИНТЕЗ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ СИСТЕМ РАДИОАВТОМАТИКИ	113
10.1. Постановка задачи.....	113
10.2. Желаемая передаточная функция разомкнутой системы	115
10.3. Определение передаточных функций корректирующих устройств	118
10.4. Синтез систем с неполной информацией о воздействиях	125
10.5. Комплексные системы	130
Вопросы к теме 10	136
РАЗДЕЛ 7 ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ РАДИОАВТОМАТИКИ	137
Тема 11. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ И ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ137	
11.1. Общие сведения. Структурная схема цифровой системы.....	137
11.2. Математическая модель процесса преобразования непрерывного сигнала в дискретный	140
11.3. Математический аппарат Z – преобразования	141
11.4. Передаточные функции разомкнутых цифровых систем.....	143
11.5. Передаточные функции и частотные характеристики цифровых систем.....	149
Вопросы к теме 11	153
Тема 12. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА УПРАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ.....	154
12.1. Переходные процессы в цифровых системах.....	154
12.2. Анализ точности работы цифровых систем.....	158
12.3. Анализ устойчивости цифровых систем	161
Вопросы к теме 12	164
Тема 13. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ. ЭЛЕМЕНТЫ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ	165
13.1. Общие сведения.....	165
13.2. Синтез цифровых систем.....	165
13.3. Цифровые корректирующие устройства.....	169
13.4. Импульсные системы.....	174

13.5. Цифровые устройства	178
13.6. Цифровая система автоподстройки частоты	184
13.7. Использование микропроцессорных средств в системах РА.....	187
Вопросы к теме 13	192
Тема 14. МЕТОДЫ АНАЛИЗА И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ.....	193
14.1. Векторные разностные уравнения цифровых систем.....	196
14.2. Дискретная матрица перехода.....	201
14.3. Основные сведения о математическом моделировании систем радиоавтоматики.....	204
14.4. Математическое моделирование систем на АВМ.....	205
14.5. Моделирование систем с помощью цифровых ЭВМ.....	212
Вопросы к теме 14.....	217
РАЗДЕЛ 9. ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В СИСТЕМАХ РАДИОАВТОМАТИКИ	218
Тема 15. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ФИЛЬТРОВ	218
15.1. Постановка задачи.....	218
15.2. Синтез систем при заданной структурной схеме	220
15.3. Физический смысл оптимальной полосы пропускания.....	222
15.4. Синтез оптимальных систем	224
15.5. Постановка задачи синтеза оптимального дискретного фильтра.....	230
15.6. Дискретный фильтр Калмана	232
15.7. Непрерывный фильтр Калмана	237
Вопросы к теме 15	243
РАЗДЕЛ 10. ОПТИМАЛЬНЫЕ И АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ РАДИОАВТОМАТИКИ	244
Тема 16. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ И АДАПТИВНЫХ СИСТЕМ.....	244
16.1. Основные сведения	244
16.2. Принципы построения оптимальных систем.....	245
16.3. Адаптивные системы	251
16.4. Экстремальные системы.....	258
16.5. Виды адаптивных систем.....	261
Вопросы к теме 16.....	264
ЗАДАЧИ ПО ТЕМАМ КУРСА	265
ОТВЕТЫ.....	274
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1. Экспериментальное определение параметров динамических характеристик линейных звеньев систем автоматического управления	278
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2. Исследование устойчивости и качества линейной системы автоматического управления	293
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3. Исследование линейной системы автоматического управления при случайном воздействии	303
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4. Исследование нелинейных систем	316
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5. Исследование нелинейной системы автоматического управления при случайных воздействиях	334
Приложения	349
Приложение П.1. Основные положения о преобразовании Лапласа	349
Приложение П.2. Формулы для интегрирования спектральной плотности	351
Приложение П.3. Z – преобразование наиболее часто встречающихся функций	352
Приложение П.4. Каткие сведения по теории матриц	353
Литература.....	356

Учебное издание

КАПРАЛОВ Михаил Егорович

РАДИОАВТОМАТИКА

Учебно-методический комплекс
для студентов специальности 1-39 01 01 «Радиотехника»

Редактор *Т. В. Булах*

Дизайн обложки *Л. И. Вайдашевич*

Подписано в печать 28.10.2011. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 20,88. Уч.-изд. л. 19,7. Тираж 27 экз. Заказ 1799.

Издатель и полиграфическое исполнение –
учреждение образования «Полоцкий государственный университет».

ЛИ № 02330/0548568 от 26.06.2009 ЛП № 02330/0494256 от 27.05.2009

Ул. Блохина, 29, 211440, г. Новополоцк.