УДК 517.929.7

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ, СВЯЗАННЫМ С КРАЕВЫМИ ЗАДАЧАМИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ДВУХСЛОЙНЫХ ТЕЛ

канд. пед. наук, доц. В.С. ВАКУЛЬЧИК,
канд. физ.-мат. наук, доц. И.Б. СОРОГОВЕЦ, С.А. ШЛАПАКОВ

Представлено обоснование метода Фурье для решения краевых задач теплопроводности в случае двухслойной пластины. Рассмотрены шесть задач на собственные значения и собственные функции типа Штурма – Лиувилля с разрывными коэффициентами. Построены функции Грина, что позволило каждую краевую задачу привести к соответствующему интегральному уравнению с симметричным нагруженным ядром. Сформулированы основные свойства собственных значений и собственных функций рассмотренных задач. Показано, что они следуют из общей теории интегральных уравнений.

1. Постановка задачи

Моделирование температурных полей двухслойной неограниченной пластины методом разделения переменных приводит к задачам на собственные значения и собственные функции. В безразмерных величинах эти задачи формулируются следующим образом: *требуется найти нетривиальные решения дифференциального уравнения:*

$$fdc^2 l(Y) = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dY(x)}{dx}\right) = \mu\cdot Y(x) \Rightarrow \begin{cases} -Y1^{//}(x) = \mu Y1(x),\ -1_1 \le x < 0, \\ -K_a^2 Y2^{//}(x) = \mu Y2(x),\ 0 < x \le K_R, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$p(x) = 1, Y(x) = Y1(x) \text{ при } -1 \le x < 0,\ p(x) = K_a^2, Y(x) = Y2(x) \text{ при } < x \le K_R, \tag{2}$$

удовлетворяющие условиям сопряжения

$$Y1(0) = Y2(0), \quad Y1^{/}(0) = K_\lambda Y2^{/}(0) \tag{3}$$

и одному из граничных условий 1 – 6:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ Y1(-1) = 0, Y2(K_R) = 0; \\ 2)\ Y1(-1) = 0, Y2^{/}(K_R) = 0; \\ 3)\ Y1(-1) = 0, Y2^{/}(K_R) + Bi_2 Y2(K_R) = 0; \\ 4)\ Y1^{/}(-1) = 0, Y2^{/}(K_R) = 0; \\ 5)\ Y1^{/}(-1) = 0, Y2^{/}(K_R) + Bi_2 Y2(K_R) = 0; \\ 6)\ Y1^{/}(-1) - Bi_1 Y1(-1) = 0, Y2^{/}(K_R) + Bi_2 Y2(K_R) = 0. \end{array}\right\} \tag{4}$$

В (1) – (4): λ1, c1, ρ1, λ2, c2, ρ2 – теплофизические характеристики слоев неограниченной пластины; R1, R2 – толщины слоев; $K_R = \dfrac{R2}{R1}$, $K_a = \sqrt{\dfrac{\lambda 2}{c2\rho 2}\cdot\dfrac{c1\rho 1}{\lambda 1}}$, $K_\lambda = \dfrac{\lambda 2}{\lambda 1}$ – безразмерные комплексы, определенные в [1]; α1 и α2 – коэффициенты теплообмена на левой и правой сторонах неограниченной пластины, $Bi_1 = \dfrac{\alpha 1 R1}{\lambda 1}$, $Bi_2 = \dfrac{\alpha 2 R1}{\lambda 2}$ – безразмерные комплексы, называемые критерием Био.

В (1) – (4) содержится 6 различных задач, которые будем называть задача 1, задача 2, ..., задача 6. Номер задачи соответствует номеру граничного условия в (4). Подробный смысл этих задач указан в [2].

2. Классическая задача Штурма – Лиувилля

Задачи (1) – (4) можно считать обобщением классической задачи Штурма – Лиувилля:

$$l(Y) = -\ \ p(x)Y^{/}(x)\ \ ^{/} + q(x)Y(x) = \mu r(x)Y(x), a < x < b, \tag{5}$$

$$\beta_1 Y^{/}(a) - \alpha_1 Y(a) = 0, \beta_2 Y^{/}(b) - \alpha_2 Y(b) = 0, \tag{6}$$

при следующих дополнительных ограничениях: на отрезке $[a;\ b]$ функции $q(x)$ и $r(x)$ непрерывны, а функция $p(x)$ непрерывно дифференцируема и $p(x) > 0$ [3 – 5]. Обобщение следует понимать в том смысле, что функция $p(x)$ разрывная и присутствуют дополнительные условия (3).

Один из методов исследования задачи (5) – (6) состоит в приведении ее к однородному интегральному уравнению Фредгольма:

$$Y(x) = \mu\int_a^b G(x,\xi)r(\xi)Y(\xi)d\xi,$$

путем построения функции Грина $G(x,\ \xi)$ этой задачи. Функция Грина непрерывна и обладает свойством симметрии, т.е. $G(x,\ \xi) = G(\xi,\ x)$. Из общей теории таких уравнений вытекают свойства, которыми обладают собственные значения и собственные функции задачи Штурма – Лиувилля. Перечислим их:

1) собственные значения μ_j ($j = 1, 2, ...$) неотрицательны и образуют бесконечную монотонно возрастающую последовательность;

2) каждое собственное значение – простое, т.е. ему соответствует только одна собственная функция (с точностью до постоянного сомножителя);

3) собственные функции $\varphi_j(x)$ ($j = 1, 2, ...$) образуют полную ортогональную на отрезке $[a;\ b]$ систему, т.е.

$$\varphi_i,\varphi_j\ = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)r(x)dx = 0\,(i\neq j),\ \ U,\varphi_j\ = 0\,(j=1,2,...)\Rightarrow U(x)\equiv 0;$$

4) если $f(x)$ является дважды непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a;\ b]$ функцией, удовлетворяющей условиям (6), то ее ряд Фурье по собственным функциям задачи (5) – (6)

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j\cdot\varphi_j(x)\left(f_j = \int_a^b f(x)\varphi_j(x)dx\right)$$

сходится равномерно к функции $f(x)$ (теорема разложения Гильберта – Шмидта).

Отметим, что различные теоремы разложения по собственным функциям при весьма общих условиях, независимо от теории интегральных уравнений, даны в работах В.А. Стеклова.

3. Приведение задач (1) – (4) к интегральным уравнениям

Перейдем теперь к рассмотрению задач (1) – (4). Основная цель исследования – построение интегрального оператора, обратного дифференциальному оператору L, порожденному дифференциальным выражением $l(Y)$ в (1) и условиями (2) –(4). Ядро интегрального оператора назовем функцией Грина.

Как и в [3], построение функции Грина начнем с решения уравнения (1) при $\mu = 0$:

$$p(x)Y'(x)\ '= 0 \Rightarrow \begin{cases} Y1''(x) = 0,\ -1\le x<0, \\ K_a^2 Y2''(x) = 0,\ 0<x\le K_R. \end{cases}$$

С учетом условий (3), общее решение этой системы можно записать в виде:

$$Y(x) = \begin{cases} Y1(x),\ -1\le x<0 \\ Y2(x),\ 0<x\le K_R \end{cases} = \begin{cases} Ax+B,\ -1\le x<0 \\ \dfrac{A}{K_\lambda}x+B,\ 0<x\le K_R, \end{cases} \tag{7}$$

где A и B – произвольные постоянные. Существенным является вопрос о том, будет число нуль собственным значением или не будет. Этот вопрос решим для каждой из шести поставленных выше задач.

Обозначим через $U_i\,(x)$ ($i = 1, 2, 3$) решения вида (7), удовлетворяющие одному из трех возможных граничных условий при $x = -1$: $U_1(-1)=0,\ U_2'(-1)=0,\ U_3'(-1)-Bi_1U_3(-1)=0.$ Аналогично, пусть $V_j\,(x)$ ($j = 1, 2, 3$) решения вида (7), удовлетворяющие одному из трех возможных граничных условий при $x = K_R$: $V_1(K_R)=0, V_2'(K_R)=0, V_3'(K_R)+Bi_1V_3(K_R)=0.$ Легко показать, что с точностью до постоянных сомножителей:

$$U_1(x) = \begin{cases} x+1,\ -1\le x\le 0, \\ \dfrac{x}{K_\lambda}+1,\ 0\le x\le K_R \end{cases},\ U_2(x)=1,\ U_3(x) = \begin{cases} x+1+\dfrac{1}{Bi_1},\ -1\le x\le 0, \\ \dfrac{x}{K_\lambda}+1+\dfrac{1}{Bi_1},\ 0\le x\le K_R, \end{cases} \tag{8}$$

$$V_1(x)=\begin{cases}K_\lambda x-K_R,\ -1\le x\le 0,\\ x-K_R,\ 0\le x\le K_R,\end{cases}\qquad V_2(x)=1, V_3(x)=\begin{cases}K_\lambda x-K_R-\dfrac{1}{Bi_2},\ -1\le x\le 0,\\ x-K_R-\dfrac{1}{Bi_2},\ 0\le x\le K_R.\end{cases}\tag{9}$$

Как видно, только при $i = 2$ и $j = 2$ функция $Y(x) = 1$ удовлетворяет граничному условию как при $x = –1$, так и при $x = K_R$, т.е. $Y(x) = 1$ является собственной функцией задачи 4, соответствующей собственному значению $\mu = 0$. Для остальных задач число $\mu = 0$ не является собственным значением.

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение:

$$-\left(p(x)Y^{/}(x)\right)^{/}=f(x)\Rightarrow\begin{cases}Y1^{//}(x)=-f1(x),\ -1\le x<0,\\ K_a^2Y2^{//}(x)=-f2(x), 0<x\le K_R,\end{cases}\tag{10}$$

для задач, в которых число нуль не является собственным значением. Функцию $f(x)$ будем считать непрерывной на $[–1; K_R]$, за исключением, быть может, точки $x = 0$. При сделанных предположениях уравнение (10) имеет единственное решение, которое будем искать методом вариации произвольных постоянных:

$$Y(x)=A(x)U(x)+B(x)V(x),\tag{11}$$

где $U(x)$ берется из множества (8), а $V(x)$ – из множества (9) (за исключением случая, когда $U(x) = V(x) = 1$).

Для нахождения производных $A^{/}(x)$ и $B^{/}(x)$ получаем систему:

$$\begin{cases}A^{/}(x)U(x)+B^{/}(x)V(x)=0;\\ p(x)\left(A^{/}(x)U^{/}(x)+B^{/}(x)V^{/}(x)\right)=-f(x).\end{cases}\tag{12}$$

Вычислением можно показать, что определитель системы (12)

$$\Delta(x)=p(x)\cdot w(x)=p(x)\cdot\begin{vmatrix}U(x) & V(x)\\ U^{/}(x) & V^{/}(x)\end{vmatrix}=\begin{cases}D,\ -1\le x<0\\ \dfrac{K_a^2}{K_\lambda}D, 0<x\le K_R\end{cases}$$

для всех задач.

Выпишем значение D для каждой из рассматриваемых задач.

№ задачи	1	2	3	5	6
Значение D	$K_\lambda+K_R$	-1	$K_\lambda+K_R+\frac{1}{Bi_2}$	K_λ	$K_\lambda+K_R+\frac{K_\lambda}{Bi_1}+\frac{1}{Bi_2}$

Обозначая $\Delta = \Delta1$, $U(x) = U1(x)$, $V(x) = V1(x)$ для $x \in[–1; 0)$ и $\Delta = \Delta2$, $U(x) = U2(x)$, $V(x) = V2(x)$ для $x\in(0; K_R]$, выпишем решение системы (12):

$$A^{/}(x)=\frac{V(x)f(x)}{\Delta(x)}=\begin{cases}\dfrac{V1(x)f1(x)}{\Delta1}, x\in[-1;0)\\ \dfrac{V2(x)f2(x)}{\Delta2}, x\in(0;K_R]\end{cases},\ B^{/}(x)=-\frac{U(x)f(x)}{\Delta(x)}=-\begin{cases}\dfrac{U1(x)f1(x)}{\Delta1}, x\in[-1;0)\\ \dfrac{U2(x)f2(x)}{\Delta2}, x\in(0;K_R].\end{cases}$$

Очевидно, что $A^{/}(x)$ и $B^{/}(x)$ непрерывны на $[–1; K_R]$ за исключением, быть может, точки $x = 0$, в которой возможны разрывы 1-го рода. Функции $A(x)$ и $B(x)$ находятся интегрированием и будут непрерывными на отрезке $[–1; K_R]$ функциями. При их нахождении пределы интегрирования выберем так, чтобы $A(K_R) = 0$ и $B(–1) = 0$. Тогда граничные условия для функции (11) будут выполнены и ее можно записать в виде:

$$Y(x)=-\left(\int_x^{K_R}\frac{V(\xi)f(\xi)}{\Delta(\xi)}d\xi\right)\cdot U(x)-\left(\int_{-1}^{x}\frac{U(\xi)f(\xi)}{\Delta(\xi)}d\xi\right)\cdot V(x).\tag{13}$$

Для функции (13) легко проверяется выполнимость условий сопряжения. Действительно, эта функция непрерывна на $[-1; K_R]$ как сумма произведений непрерывных функций, т.е. первое из условий (3) выполнено.

Далее, в силу первого из уравнений (12) и того, что условия сопряжения выполнены для функций (8) и (9), имеем:

$$Y'(x) = A(x)U'(x) + B(x)V'(x) \Rightarrow Y1'(x) = A(x)U1'(x) + B(x)V1'(x),\; Y2'(x) = A(x)U2'(x) + B(x)V2'(x),$$

$$Y1'(0) - K_\lambda Y2'(0) = A(0)\underbrace{\left(U1'(0) - K_\lambda U2'(0)\right)}_{=0} + B(0)\underbrace{\left(V1'(0) - K_\lambda Y2'(0)\right)}_{=0} = 0,$$

т.е. вторoе из условий (3) так же выполнено.

Представим теперь формулу (13) в виде:

$$Y(x) = \int_{-1}^{K_R} G(x,\xi) r(\xi) f(\xi) d\xi, \tag{14}$$

где

$$G(x,\xi) = -\begin{cases} U(x)\cdot V(\xi), & -1 \le x \le \xi; \\ V(x)\cdot U(\xi), & \xi \le x \le K_R; \end{cases} \qquad r(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{D}, & -1 \le x < 0; \\ \dfrac{K_\lambda}{K_a^2 D}, & 0 < x \le K_R. \end{cases} \tag{15}$$

Функция $G(x, \xi)$, определенная формулой (15), называется функцией Грина дифференциального оператора L, порожденного дифференциальным выражением $l(Y)$, определенным формулой (1) и условиями (2) – (4). Перечислим некоторые свойства функции Грина, вытекающие из свойств функций (8), (9) и из формулы (15):

1) непрерывна в замкнутом квадрате $[-1 \le x, \xi \le K_R]$;
2) симметрична $G(x, \xi) = G(\xi, x)$;
3) как функция переменной x удовлетворяет граничным условиям и условиям сопряжения;
4) при $x \ne \xi$ удовлетворяет однородному уравнению $l(G(x, \xi)) = 0$.

Кусочно-непрерывная функция $r(x)$, определенная формулой (15) и входящая в интеграл (14), называется *весом* (или *нагрузкой*). Правую часть в (14) называют *интегральным оператором с нагруженным симметричным ядром* [5].

Рассмотрим теперь задачу 4. Вместо нее введем новую задачу, заменяя в (1) дифференциальное выражение $l(Y)$ на $l_1(Y) = l(Y) + Y$. Получаем задачу: найти нетривиальные решения уравнения

$$l_1(Y) = -\left(p(x)Y'(x)\right)' + Y(x) = \nu Y(x), x \in [-1; 0) \cup (0; K_R], \tag{16}$$

при условиях (2) – (4; 4), т.е. из (4) следует взять только условие задачи 4. Задача (16), (2) – (4; 4) эквивалентна задаче (1) – (4; 4) при $\nu = \mu + 1$, причем нуль не является собственным значением новой задачи. При построении функции Грина задачи (16), (2) – (4; 4) поступаем, как и выше.

Предварительно рассматриваем уравнение (16) при $\nu = 0$:

$$\begin{cases} -Y1''(x) + Y1 = 0, \; -1 \le x < 0, \\ -Y2''(x) + \dfrac{1}{K_a^2} Y2 = 0, 0 < x \le K_R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y1(x) = C_1 ch(x) + D_1 sh(x), \\ Y2(x) = C_2 ch\left(\dfrac{x}{K_a}\right) + D_2 sh\left(\dfrac{x}{K_a}\right). \end{cases}$$

Из условий (3) $C_1 = C_2 = A,\; D_1 = BK_\lambda,\; D_2 = BK_a$. Из граничных условий, соответствующих задаче 4

$$Y1'(-1) = 0 \Rightarrow B = \frac{A}{K_\lambda} th(1),\; Y2'(K_R) = 0 \Rightarrow B = -\frac{A}{K_a} th(1).$$

Получаем два решения $U(x)$ и $V(x)$, каждое из которых удовлетворяет условиям сопряжения и только одному из граничных условий: $U(x) = U1(x)$, $V(x) = V1(x)$ для $x \in [-1; 0]$ и $U(x) = U2(x)$, $V(x) = V2(x)$ для $x \in [0; K_R]$. Их выражения:

$$U1(x) = ch(x) + th(1)\cdot sh(x),\; U2(x) = ch\left(\frac{x}{K_a}\right) + \frac{K_a}{K_\lambda} th(1)\cdot sh\left(\frac{x}{K_a}\right), \tag{17}$$

$$V1(x)=ch\ x\ -\frac{K_\lambda}{K_a}th(1)\cdot sh(x),\ V2(x)=ch\left(\frac{x}{K_a}\right)-th(1)\cdot sh\left(\frac{x}{K_a}\right). \tag{18}$$

Далее поступаем точно так же, как и в случае, когда число $\mu = 0$ не является собственным значением. Решение неоднородного уравнения

$$l_1(Y)=-(p(x)Y'(x))'+Y(x)=f(x) \tag{19}$$

ищем в виде (11), где $U(x)$ и $V(x)$ определяются формулами (17) и (18). Для нахождения производных $A'(x)$ и $B'(x)$ получаем систему (12), определитель которой

$$\Delta(x)=\begin{cases}\Delta 1,\ -1\le x<0\\ \Delta 2,\ 0<x\le K_R\end{cases}, \text{где } \Delta 1=-\frac{K_a+K_\lambda}{K_a}th(1),\ \ \Delta 2=-\frac{K_a+K_\lambda}{K_aK_\lambda}th(1). \tag{20}$$

Решение уравнения (19) представляется в виде (13) с той лишь разницей, что функции $U(x)$ и $V(x)$ определяются формулами (17) и (18), а определитель $\Delta(x)$ – формулой (20). Введем далее вес

$$r(x)=\begin{cases}\dfrac{K_a}{K_a+K_\lambda\ \ th(1)},\ -1\le x<0\\[2ex] \dfrac{K_aK_\lambda}{K_a+K_\lambda\ \ th(1)},\ 0<x\le K_R\end{cases}$$

и функцию Грина по формуле (15). Тогда решение уравнения (19), удовлетворяющее условиям (2) – (4; 4), представится в виде (14).

Заключение. Для каждой из рассматриваемых шести задач построена функция Грина $G(x, \xi)$. Приведение этих задач к интегральным уравнениям осуществляется заменой в правой части соотношения (14) функции $f(x)$ на $\mu Y(x)$. В результате каждая из шести задач сводится к интегральному уравнению:

$$Y(x)=\mu\int_{-1}^{K_R}G(x,\xi)r(\xi)Y(\xi)d\xi.$$

На основании классических результатов, полученных в теории интегральных уравнений [5], можно утверждать, что собственные значения и собственные функции задач (1) – (4) удовлетворяют всем свойствам, сформулированным в пункте 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лыков, А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков. – М., 1967. – 600 с.
2. Сороговец, И.Б. Моделирование температурных полей двухслойных тел / И.Б. Сороговец, С.А. Шлапаков // Современные информационные компьютерные технологии: материалы междунар. науч. конф., Гродно, 21 – 24 апр. 2008 г. – Гродно. – Ч. 2. – С. 261 – 265.
3. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М., 1971. – 512 с.
4. Смирнов, В.И. Курс высшей математики / В.И. Смирнов. – М., 1981. – Т. 4, Ч. 2. – 552 с.
5. Соболев, С.Л. Уравнения математической физики / С.Л. Соболев. – М., 1966. – 444 с.

Поступила 11.02.2009