УДК 517.51+517.53

О РАЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ю.А. ЛАБЫЧ
(Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины)

Изучаются свойства тригонометрических аппроксимаций Паде $\pi^t_{n,m}(\cdot;\, f_\gamma)$ $\pi^t_{n,m}(\cdot;\, f_\gamma)$ *(при* $m = 0$*, соответственно, частных сумм Фурье) класса F, состоящего из непрерывных 2π-периодических функций* f_γ *с регулярно убывающими коэффициентами Фурье. Для каждого* $x \in R$ *устанавливаются точные асимптотические равенства уклонений* $\pi^t_{n,m}(x;\, f_\gamma)$ *от* $f_\gamma(x)$ *при* $n \to \infty$ *равномерно по всем* m*,* $0 \le m \le m(n)$*, где* $m(n) = o\ n^{2/3}$ *. В частности, доказывается, что при этих условиях тригонометрические аппроксимации Паде* $\pi^t_{n,m}(\cdot;\, f_\gamma)$ *приближают функцию* f_γ *в равномерной норме со скоростью, асимптотически равной наилучшей.*

Введение. Будем рассматривать вещественные непрерывные 2π-периодические функции *f*, разлагающиеся в сходящийся ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{1}$$

где коэффициенты Фурье a_k и b_k – действительные числа.

Для удобства ряд Фурье (1) запишем в комплексной форме:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}\,, \tag{2}$$

полагая $c_k = (a_k - ib_k)/2$, $c_0 = a_0/2$, а $c_{-k} = \overline{c}_k$.

Последовательность $c_k\,{}_{k=-\infty}^{\infty}$ обладает всей информацией о *f*, поэтому принципиально возможным является описание различных свойств этой функции непосредственно в терминах, определяемых через коэффициенты ее рядов Фурье (1) или (2).

Обозначим через $R^t_{n,m}$ класс всех рациональных тригонометрических функций $r(x) = p_n(x)/q_m(x)$, у которых числитель $p_n(x)$ и знаменатель $q_m(x)$ являются тригонометрическими многочленами с действительными коэффициентами, и $\deg p_n(x) \le n$, $\deg q_m(x) \le m$. Положим также

$$E^t_{n,m} := \inf\ \|f - r\| : r \in R^t_{n,m}\ \ , \text{ где } \|g\| = \max\ |g(x)| : x \in [0, 2\pi]\ \ .$$

Тригонометрической аппроксимацией Паде (см. [1]) функции *f* назовем такую рациональную тригонометрическую функцию $\pi^t_{n,m}(x; f) = p^t_n(x)/q^t_m(x)$ из класса $R^t_{n,m}$, числитель и знаменатель которой удовлетворяют условию:

$$q^t_m(x) f(x) - p^t_n(x) = \sum_{k=n+m+1}^{\infty}\ a_k \cos kx + b_k \sin kx\ \ , \tag{3}$$

где a_k , b_k – действительные числа.

Введем в рассмотрение некоторые матрицы и определители, элементами которых служат коэффициенты Фурье ряда (2). Для этого каждому $k \in \mathrm{Z}$ поставим в соответствие матрицу-строку

$$C_k = \left\| c_{k-j} \right\|,\ j = \overline{-m, m}\,,$$

а каждому действительному *x* – матрицу-строку

$$E(x) = \left\| e^{ijx} \right\|,\ j = \overline{-m, m}, i = \sqrt{-1}\,.$$

Далее полагаем

$$d_{n,m}(x) = \det\begin{bmatrix} C_{n+m} \\ \dots \\ C_{n+2} \\ C_{n+1} \\ E(x) \\ C_{-n-1} \\ C_{-n-2} \\ \dots \\ C_{-n-m} \end{bmatrix}.$$

Обозначим через $d_{n,m,k}$ – определитель, полученный из $d_{n,m}(x)$ заменой строки $E(x)$ на C_k, $\Delta_{n,m}$ – определитель $2m$-го порядка, полученный из $d_{n,m}(x)$ после вычеркивания $(m+1)$-й строки и $(m+1)$-го столбца.

ТЕОРЕМА 1 [2]. *Пусть функция f задана рядом* (2). *Тогда для любых натуральных* n *и* m *существует тригонометрическая аппроксимация Паде* $\pi^t_{n,m}(\cdot; f)$. *Если* $\Delta_{n,m} \neq 0$, *то* $\pi^t_{n,m}(x; f) = p^t_n(x; f) / q^t_m(x; f)$ *единственна, а ее числитель и знаменатель определяются равенствами:*

$$p^t_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} d_{n,m,k}\, e^{ikx},\ q^t_m(x) = d_{n,m}(x). \tag{4}$$

Тригонометрические полиномы $p^t_n(x)$ и $q^t_m(x)$ равенством (3) определяются неоднозначно, вместе с тем дробь $\pi^t_{n,m}(\cdot\,; f)$, являющаяся их отношением, задается единственным образом.

В дальнейшем будем считать, что p^t_n и q^t_m определяются равенствами (4). В этом случае

$$L^t_{n,m}(x; f) := q^t_m(x) f(x) - p^t_n(x) = \sum_{k=n+m+1}^{\infty} (\tilde{c}_k\, e^{ikx} + \tilde{c}_{-k}\, e^{-ikx}),$$

где $c_k = d_{n,m,k}$, для всех $k \in Z$.

Поскольку f – вещественная функция, то $\overline{c}_k = c_{-k}$. В этом случае $\overline{d_{n,m}(x)} = d_{n,m}(x)$ и $\overline{d_{n,m,k}(x)} = d_{n,m,-k}(x)$. Это означает, что тригонометрические полиномы p^t_n и q^t_m также вещественны.

В.Н. Русаком в [2, 3] поставлена задача о нахождении таких условий на последовательность коэффициентов $c_k\,{}_{k=-\infty}^{\infty}$, при которых приближение функции *f* тригонометрическими аппроксимациями Паде $\pi^t_{n,m}(\cdot\,; f)$ сравнимо с наилучшим.

Классы функций *f*, для которых тригонометрические аппроксимации Паде $\pi^t_{n,m}(\cdot; f)$ (при $m=0$, соответственно, $\pi^t_{n,0}(\cdot; f)$ – частные суммы ряда Фурье (2)) приближают функцию *f* в равномерной норме со скоростью, асимптотически равной наилучшей, впервые были обнаружены Л.Л. Березкиной [2] и Та Хонг Куангом [3].

В алгебраическом случае аналогичные задачи поставлены А. Левиным и Д. Любински [4 – 6] в связи с анализом результатов Э. Саффа [7], относящихся к рациональной аппроксимации экспоненты.

В работах [4 – 11] найдены широкие классы целых функций, для которых классические аппроксимации Паде $\pi_{n,m}(\cdot; f)$ приближают *f* в единичном круге со скоростью, асимптотически равной наилучшей, т.е. наблюдается так называемый эффект Саффа.

В работе [10] для функций Миттаг – Леффлера установлены соответствующие аналоги хорошо известных в теории аппроксимации теорем, относящихся к экспоненте.

В данной статье, в частности, некоторые результаты этой работы переносятся на тригонометрический случай.

1. Формулировка основных результатов

Предполагая, что параметр $\gamma \in R \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$, рассмотрим однопараметрическое семейство целых функций $F = \{f_\gamma\}$ представимых в виде:

$$f_\gamma(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin kx}{(\gamma)_k},$$

где $(\gamma)_0 = 1, (\gamma)_k = \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)$, если $k \geq 1$, или в комплексной форме:

$$f_\gamma(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \tag{5}$$

где $c_k = -c_{-k} = -i\big/\left(2(\gamma)_k\right)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Будем говорить, что бесконечно малые α_n и β_n при $n \to \infty$ эквивалентны ($\alpha_n \sim \beta_n$), если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n \big/ \beta_n = 1$.

Основным результатом работы являются следующие теоремы:

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $f_\gamma \in F$. *Тогда, если* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(m(n)\right)^{3/2} \big/ n = 0$, *то для* $\forall x \in R$ *равномерно по всем* $m, 0 \leq m \leq m(n)$, *при* $n \to \infty$

$$f_\gamma(x) - \pi^t_{n,m}(x; f_\gamma) = \frac{(-1)^{m+1} m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}} Re\left[ie^{i(n+m+1)x}\left(1 + o(1)\right)\right]. \tag{6}$$

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $f_\gamma \in F$. *Тогда, если* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(m(n)\right)^{3/2} \big/ n = 0$, *то равномерно по всем* $m, 0 \leq m \leq m(n)$, *при* $n \to \infty$

$$E^t_{n,m}(f_\gamma) \sim \left\| f_\gamma - \pi^t_{n,m}(\cdot; f_\gamma) \right\| \sim \frac{m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m+1}(\gamma)_{n+m}}. \tag{7}$$

В частности, для $f_1(x) = \cos x \sin(\sin x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$

$$E^t_{n,m}(f_1) \sim \left\| f_1 - \pi^t_{n,m}\left(\cdot; f_1\right) \right\| \sim \frac{m!n!}{(n+m)!(n+m+1)!}$$

При $m = 0$ теоремы 2 и 3 установлены С.Н. Бернштейном [12]. Для фиксированного $m = 1, 2, 3, \ldots$ соотношения (6) и (7) ранее доказаны в [2]. В случае, когда $\gamma \in N$, при более ограниченном условии на $n(m)$: $n(m) = o\left(n^{1/4}\right)$, равенства (6) и (7) получены в [3].

2. Вспомогательные утверждения

Введем в рассмотрение две квадратные матрицы $(m+1)$-го порядка:

$$\tilde{A}(k) = \begin{bmatrix} 2c_{n+m+k} & c_{n+m+k-1} + c_{n+m+k+1} & \ldots & c_{n+k} + c_{n+2m+k} \\ 2c_{n+1} & c_n + c_{n+2} & \ldots & c_{n-m+1} + c_{n+m+1} \\ 2c_{n+2} & c_{n+1} + c_{n+3} & \ldots & c_{n-m+2} + c_{n+m+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2c_{n+m} & c_{n+m-1} + c_{n+m+1} & \ldots & c_n + c_{n+2m} \end{bmatrix},$$

$$A(y) = \begin{bmatrix} 2 & y^{-1} + y & \ldots & y^{-m} + y^m \\ 2c_{n+1} & c_n + c_{n+2} & \ldots & c_{n-m+1} + c_{n+m+1} \\ 2c_{n+2} & c_{n+1} + c_{n+3} & \ldots & c_{n-m+2} + c_{n+m+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2c_{n+m} & c_{n+m-1} + c_{n+m+1} & \ldots & c_n + c_{n+2m} \end{bmatrix}$$

и две квадратные матрицы m-го порядка:

$$A_0 = \begin{bmatrix} c_{n+2}+c_n & c_{n+3}+c_{n-1} & \dots & c_{n+m+1}+c_{n-m+1} \\ c_{n+3}+c_{n+1} & c_{n+4}+c_n & \dots & c_{n+m+2}+c_{n-m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+m+1}+c_{n+m-1} & c_{n+m+2}+c_{n+m-2} & \dots & c_{n+2m}+c_n \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} c_{n+2}-c_n & c_{n+3}-c_{n-1} & \dots & c_{n+m+1}-c_{n-m+1} \\ c_{n+3}-c_{n+1} & c_{n+4}-c_n & \dots & c_{n+m+2}-c_{n-m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+m+1}-c_{n+m-1} & c_{n+m+2}-c_{n+m-2} & \dots & c_{n+2m}-c_n \end{bmatrix},$$

элементами которых являются коэффициенты Фурье ряда (5).

ЛЕММА 1. *Пусть функция* f_γ *представима рядом (5). Тогда*

$$\Delta_{n,m} = (-1)^m \det A_0 \cdot \det B,$$

$$\tilde{c}_{n+m+k} = \frac{(-1)^m}{2} \det \tilde{A}(k) \cdot \det B,$$

$$q_m^t = \frac{(-1)^m}{2} \det A(y) \cdot \det B, \; y = e^{ix}.$$

Утверждение леммы 1 можно получить с помощью рассуждений и преобразований, используемых при доказательстве леммы 2.1 из работы [13].

ЛЕММА 2. *Если* $f_\gamma \in F$*, то для всех* $n, m \in N$ *таких, что* $n \ge m$*,*

$$A^0 := \begin{vmatrix} c_{n+1} & c_n & \dots & c_{n-m+1} \\ c_{n+2} & c_{n+1} & \dots & c_{n-m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+m+1} & c_{n+m} & \dots & c_{n+1} \end{vmatrix} = \left(\frac{-i}{2}\right)^{m+1} \cdot \prod_{j=1}^{m} j! \prod_{j=1}^{m+1} \frac{1}{(\gamma)_{n+j}},$$

где c_j – коэффициенты ряда (5).

Доказательство. Учитывая, что $c_j = -i / 2(\gamma)_j$, и применяя элементарные преобразования определителя, получим, что

$$A^0 = \left(\frac{-i}{2}\right)^{m+1} \begin{vmatrix} \frac{1}{(\gamma)_{n+1}} & \frac{1}{(\gamma)_n} & \dots & \frac{1}{(\gamma)_{n-m+1}} \\ \frac{1}{(\gamma)_{n+2}} & \frac{1}{(\gamma)_{n+1}} & \dots & \frac{1}{(\gamma)_{n-m+2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(\gamma)_{n+m+1}} & \frac{1}{(\gamma)_{n+m}} & \dots & \frac{1}{(\gamma)_{n+1}} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{-i}{2}\right)^{m+1} \cdot \prod_{j=1}^{m+1} \frac{1}{(\gamma)_{n+j}} \begin{vmatrix} 1 & (\gamma+n)_1 & \dots & (\gamma+n-m+1)_m \\ 1 & (\gamma+n+1)_1 & \dots & (\gamma+n-m+2)_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (\gamma+n+m)_1 & \dots & (\gamma+n+1)_m \end{vmatrix}.$$

Обозначим определитель в правой части последнего равенства через $K(n,\ m)$. Вычтем из второй строки этого определителя первую строку, из третьей строки вычтем вторую и т.д., наконец, из $(m+1)$-й строки вычтем m-ю строку. Тогда, учитывая равенства $(\gamma+j+1)_i-(\gamma+j)_i=i(\gamma+j+1)_{i-1}$, будем иметь:

$$K(n,m)=\begin{vmatrix}1 & (\gamma+n)_1 & (\gamma+n-1)_2 & \dots & (\gamma+n-m+1)_m\\ 0 & (\gamma+n+1)_0 & 2(\gamma+n)_1 & \dots & m(\gamma+n-m+2)_{m-1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & (\gamma+n+m)_0 & 2(\gamma+n+m-1)_1 & \dots & m(\gamma+n+1)_{m-1}\end{vmatrix}=$$

$$=m!\begin{vmatrix}1 & (\gamma+n)_1 & \dots & (\gamma+n-m+2)_{m-1}\\ 1 & (\gamma+n+1)_1 & \dots & (\gamma+n-m+3)_{m-1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & (\gamma+n+m-1)_1 & \dots & (\gamma+n+1)_{m-1}\end{vmatrix}=m!K(n,m-1).$$

Поскольку

$$K(n,1)=\begin{vmatrix}1 & (\gamma+n)_1\\ 1 & (\gamma+n+1)_1\end{vmatrix}=1,$$

то из предыдущих рекуррентных соотношений имеем

$$K(n,m)=\prod_{j=1}^{m}j!. \tag{8}$$

Тогда окончательно получим, что

$$A^0=\left(\frac{-i}{2}\right)^{m+1}\cdot\prod_{j=1}^{m}j!\prod_{j=1}^{m+1}\frac{1}{(\gamma)_{n+j}}.$$

Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. *Если f_γ представима в виде (5), а $A^j_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_j}$ – определитель вида*

$$\begin{vmatrix}c_{n+1} & c_{n_1} & \dots & c_{n_m}\\ c_{n+2} & c_{n_1+1} & \dots & c_{n_m+1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ c_{n+m+1} & c_{n_1+m} & \dots & c_{n_m+m}\end{vmatrix},$$

у которого $n_{\nu_1}=n+1+\nu_1,\quad n_{\nu_2}=n+1+\nu_2,\dots,\quad n_{\nu_j}=n+1+\nu_j$, *а остальные* $n_i=n+1-i,\quad i=\overline{1,m}$, $i\neq\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_j,\ 1\le\nu_1<\nu_2<\dots<\nu_j\le m,\ \ j=\overline{1,m}$, *то*

$$A^j_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_j}=\left(\frac{-i}{2}\right)^{m+1}\frac{(-1)^q m!}{\prod\limits_{i=1}^{j}(\gamma+n+m+1-\nu_i)_{2\nu_i}}\cdot\prod_{k=1}^{m+1}\frac{1}{(\gamma)_{n+k}}\cdot\prod_{\substack{k\neq\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_j\\ k<\nu_j}}(m-k)!\cdot\prod_{i=1}^{j}\frac{(m+\nu_i)!(\nu_i+1)_{\nu_1-1}}{(2\nu_i)!(\nu_i-1)!}\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{j-1}\prod_{k=i+1}^{j}\frac{(\nu_k-\nu_i)^2(\nu_k+\nu_i+1)_{\nu_{i+1}-\nu_i-1}}{(\nu_k+\nu_i)}\cdot\prod_{k=1}^{m-\nu_j-1}k!,$$

где $q=j\nu_1+\sum\limits_{i=1}^{j-1}(\nu_{i+1}-\nu_i)(j-i)$.

Доказательство. Положим $\lambda_i^+=\dfrac{1}{(\gamma)_{n+1+i}}$, $\lambda_i^-=\dfrac{1}{(\gamma)_{n+1-i}}$, $B_i^+(l)=\dfrac{1}{(\gamma+n+l)_i}$, $B_i^-(l)=(\gamma+n+m+l-i)_i$.

Тогда по условию леммы

$$A^j_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_j}=\left(\frac{-i}{2}\right)^{m+1}\begin{vmatrix}\lambda_0^- & \lambda_1^- & \dots & \lambda_{\nu_1-1}^- & \lambda_{\nu_1}^+ & \lambda_{\nu_1+1}^- & \dots & \lambda_{\nu_j-1}^- & \lambda_{\nu_j}^+ & \lambda_{\nu_j+1}^- & \dots & \lambda_m^-\\ \lambda_{-1}^- & \lambda_0^- & \dots & \lambda_{\nu_1-2}^- & \lambda_{\nu_1+1}^+ & \lambda_{\nu_1}^- & \dots & \lambda_{\nu_j-2}^- & \lambda_{\nu_j+1}^+ & \lambda_{\nu_j}^- & \dots & \lambda_{m-1}^-\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \lambda_{-m}^- & \lambda_{-m+1}^- & \dots & \lambda_{-m+\nu_1-1}^- & \lambda_{\nu_1+m}^+ & \lambda_{-m+\nu_1+1}^- & \dots & \lambda_{-m+\nu_j-1}^- & \lambda_{\nu_j+m}^+ & \lambda_{-m+\nu_j+1}^- & \dots & \lambda_0^-\end{vmatrix}.$$

Вынесем из определителя в правой части элементы первого столбца. В результате получим:

$$A^j_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_j} = \left(\frac{-i}{2}\right)^{m+1} \prod_{k=1}^{m+1} \frac{1}{(\gamma)_{n+k}} A', \tag{9}$$

где A' – определитель следующего вида:

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & B_1^-(1) & \cdots & B_{\nu_1-1}^-(1) & B_{\nu_1}^+(1) & B_{\nu_1+1}^-(1) & \cdots & B_{\nu_j-1}^-(1) & B_{\nu_j}^+(1) & B_{\nu_j+1}^-(1) & \cdots & B_m^-(1) \\ 1 & B_1^-(2) & \cdots & B_{\nu_1-1}^-(2) & B_{\nu_1}^+(2) & B_{\nu_1+1}^-(2) & \cdots & B_{\nu_j-1}^-(2) & B_{\nu_j}^+(2) & B_{\nu_j+1}^-(2) & \cdots & B_m^-(2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & B_1^-(m+1) & \cdots & B_{\nu_1-1}^-(m+1) & B_{\nu_1}^+(m+1) & B_{\nu_1+1}^-(m+1) & \cdots & B_{\nu_j-1}^-(m+1) & B_{\nu_j}^+(m+1) & B_{\nu_j+1}^-(m+1) & \cdots & B_m^-(m+1) \end{vmatrix}.$$

Для явного выражения последнего определителя вычтем из второй строки первую строку, из третьей – вторую и т.д., наконец, из $(m+1)$-й строки вычтем m-ю строку, учитывая равенства $(\gamma+j+1)_i - (\gamma+j)_i = i(\gamma+j+1)_{i-1}$, $1/(\gamma+j+1)_i - 1/(\gamma+j)_i = -i/(\gamma+j)_{i+1}$, а затем разложим полученный определитель по элементам первого столбца. Тогда будем иметь:

$$A' = (-1)^j m! \begin{vmatrix} 1 & B_1^-(1) & \cdots & B_{\nu_1-2}^-(1) & B_{\nu_1+1}^+(1) & B_{\nu_1}^-(1) & \cdots & B_{\nu_j-2}^-(1) & B_{\nu_j+1}^+(1) & B_{\nu_j}^-(1) & \cdots & B_{m-1}^-(1) \\ 1 & B_1^-(2) & \cdots & B_{\nu_1-2}^-(2) & B_{\nu_1+1}^+(2) & B_{\nu_1}^-(2) & \cdots & B_{\nu_j-2}^-(2) & B_{\nu_j+1}^+(2) & B_{\nu_j}^-(2) & \cdots & B_{m-1}^-(2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & B_1^-(m) & \cdots & B_{\nu_1-2}^-(m) & B_{\nu_1+1}^+(m) & B_{\nu_1}^-(m) & \cdots & B_{\nu_j-2}^-(m) & B_{\nu_j+1}^+(m) & B_{\nu_j}^-(m) & \cdots & B_{m-1}^-(m) \end{vmatrix}.$$

Снова вынесем за знак последнего определителя элементы первого столбца, затем вычтем из второй строки первую, из третьей – вторую и т. д., из m-й строки $(m-1)$-ю и, наконец, разложим полученный определитель по элементам первого столбца. Выполняя последовательно ν_j таких редукций, получим:

$$A' = \frac{(-1)^q m!}{\prod_{i=1}^{j-1}(\gamma+n+m+1-\nu_i)_{2\nu_i}} \cdot \prod_{\substack{k\neq\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_j \\ k<\nu_j}} (m-k)! \cdot \prod_{i=1}^{j} \frac{(m+\nu_i)!(\nu_i+1)_{\nu_1-1}}{(2\nu_i)!(\nu_i-1)!} \cdot \prod_{i=1}^{j-1}\prod_{k=i+1}^{j} \frac{(\nu_k-\nu_i)^2(\nu_k+\nu_i+1)_{\nu_{i+1}-\nu_i-1}}{(\nu_k+\nu_i)} \cdot$$

$$\cdot \prod_{k=1}^{m-\nu_j+1} \frac{1}{(\gamma+n+k)_{2\nu_j}} \cdot \begin{vmatrix} (\gamma+n+1)_{2\nu_j} & (\gamma+n)_{2\nu_j+1} & \ldots & (\gamma+n-m+2+\nu_j)_{m+\nu_j-1} \\ (\gamma+n+2)_{2\nu_j} & (\gamma+n+1)_{2\nu_j+1} & \ldots & (\gamma+n-m+3+\nu_j)_{m+\nu_j-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\gamma+n+m-\nu_j)_{2\nu_j} & (\gamma+n+m-1-\nu_j)_{2\nu_j+1} & \ldots & (\gamma+n+1)_{m+\nu_j-1} \end{vmatrix},$$

где $q = j\nu_1 + \sum_{i=1}^{j-1}(\nu_{i+1}-\nu_i)(j-i).$

Далее, вынося из последнего определителя элементы первого столбца, будем иметь:

$$A' = \frac{(-1)^q m!}{\prod_{i=1}^{j}(\gamma+n+m+1-\nu_i)_{2\nu_i}} \cdot \prod_{\substack{k\neq\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_j \\ k<\nu_j}} (m-k)! \cdot \prod_{i=1}^{j} \frac{(m+\nu_i)!(\nu_i+1)_{\nu_1-1}}{(2\nu_i)!(\nu_i-1)!} (m-k)! \cdot$$

$$\cdot \prod_{i=1}^{j-1}\prod_{k=i+1}^{j} \frac{(\nu_k-\nu_i)^2(\nu_k+\nu_i+1)_{\nu_{i+1}-\nu_i-1}}{(\nu_k+\nu_i)} \cdot K(n, m-\nu_j-1).$$

Теперь, учитывая равенства (8) и (9), получим утверждение леммы 3. Лемма 3 доказана.

Пусть

$$A_1 := \begin{vmatrix} c_{n+1} & c_n + c_{n+2} & \ldots & c_{n-m+1} + c_{n+m+1} \\ c_{n+2} & c_{n+1} + c_{n+3} & \ldots & c_{n-m+2} + c_{n+m+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n+m} & c_{n+m-1} + c_{n+m+1} & \ldots & c_n + c_{n+2m} \\ c_{n+m+1} & c_{n+m} + c_{n+m+2} & \ldots & c_{n+1} + c_{n+2m+1} \end{vmatrix}.$$

ЛЕММА 4. *Если* $f_\gamma \in F$ *, то равномерно для всех* $m,\ 0 \le m \le m(n),$ *где* $\lim\limits_{n\to\infty}(m(n))^{3/2}\big/n = 0,$ *при* $n \to \infty$

$$A_1 \sim A^0 .$$

Доказательство. Представим A_1 в виде суммы 2^m определителей, полученных в результате разбиения столбцов:

$$A_1 = \sum_{n_1,n_2,\ldots,n_m} \begin{vmatrix} c_{n+1} & c_{n_1} & \cdots & c_{n_m} \\ c_{n+2} & c_{n_1+1} & \cdots & c_{n_m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n+m+1} & c_{n_1+m} & \cdots & c_{n_m+m} \end{vmatrix}, \tag{10}$$

где n_i принимает либо значение $n+1-i$, либо значение $n+1+i,\quad i=\overline{1,m}$. Через $A^j_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_j}$, $1 \le \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_j \le m \quad (j=\overline{1,m})$ обозначим тот определитель в сумме (10), у которого $n_{\nu_1} = n+1+\nu_1$, $n_{\nu_2} = n+1+\nu_2$, ..., $n_{\nu_j} = n+1+\nu_j$, а остальные $n_i = n+1-i,\ i=\overline{1,m}$, $i \ne \nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_j$, Тогда (10) можно переписать в виде:

$$A_1 = A^0 + \sum_{\nu_1} A^1_{\nu_1} + \sum_{\nu_1<\nu_2} A^2_{\nu_1,\nu_2} + \ldots + \sum_{\nu_1<\nu_2<\ldots<\nu_j} A^j_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_j} + A^m_{1,2,\ldots,m} =$$

$$= A^0 + S^1 + S^2 + \ldots + S^j + \ldots + S^m = A^0\left(1 + \sum_{j=1}^{m}\frac{S^j}{A^0}\right),$$

где сумма S^j состоит ровно из $C^j_m = \dfrac{m!}{j!(m-j)!}$ слагаемых. Из леммы 2 и леммы 3 следует, что

$$A^0 = \left(\frac{-i}{2}\right)^{m+1}\prod_{j=1}^{m} j!\prod_{j=1}^{m+1}\frac{1}{(\gamma)_{n+j}},$$

$$A^j_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_j} = \left(\frac{-i}{2}\right)^{m+1}\frac{(-1)^q m!}{\prod\limits_{i=1}^{j}(\gamma+n+m+1-\nu_i)_{2\nu_i}}\cdot\prod_{k=1}^{m+1}\frac{1}{(\gamma)_{n+k}}\cdot\prod_{\substack{k\ne\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_j \\ k<\nu_j}}(m-k)!\cdot\prod_{i=1}^{j}\frac{(m+\nu_i)!(\nu_i+1)_{\nu_1-1}}{(2\nu_i)!(\nu_i-1)!}\cdot$$

$$\cdot\prod_{i=1}^{j-1}\prod_{k=i+1}^{j}\frac{(\nu_k-\nu_i)^2(\nu_k+\nu_i+1)_{\nu_{i+1}-\nu_i-1}}{(\nu_k+\nu_i)}\cdot\prod_{k=1}^{m-\nu_j-1}k!,\ \textit{где}\ q = j\nu_1 + \sum_{i=1}^{j-1}(\nu_{i+1}-\nu_i)(j-i).$$

Заметим, что

$$\prod_{i=1}^{j}\frac{(\nu_i+1)_{\nu_1-1}}{(2\nu_i)!}\cdot\prod_{i=1}^{j-1}\prod_{k=i+1}^{j}(\nu_k+\nu_i+1)_{\nu_{i+1}-\nu_i-1} < 1,$$

$$\prod_{i=1}^{j-1}\prod_{k=i+1}^{j}\frac{\nu_k-\nu_i}{\nu_k+\nu_i} < 1,\quad \frac{\prod\limits_{i=1}^{j-1}\prod\limits_{k=i+1}^{j}(\nu_k-\nu_i)}{\prod\limits_{i=1}^{j}(\nu_i-1)!} \le 1.$$

Поэтому

$$\left|\frac{A^j_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_j}}{A^0}\right| \le \frac{\prod\limits_{k=1}^{m-\nu_j-1}k!\prod\limits_{k=1}^{\nu_j}(m-k)!\prod\limits_{k=1}^{j}(m+\nu_k)!}{\prod\limits_{k=1}^{m-1}j!\prod\limits_{k=1}^{j}(m-\nu_k)!(\gamma+n+m+1-\nu_k)_{2\nu_k}} = \prod_{k=1}^{j}\frac{(m+\nu_k)!}{(m-\nu_k)!(\gamma+n+m+1-\nu_k)_{2\nu_k}} =$$

$$= \prod_{k=1}^{j}\frac{(m+1-\nu_k)_{2\nu_k}}{(\gamma+n+m+1-\nu_k)_{2\nu_k}} \le \prod_{k=1}^{j}\frac{(2m)^{2\nu_k}}{n^{2\nu_k}} = \left(\frac{2m}{n}\right)^{2(\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_j)} \le \left(\frac{2m}{n}\right)^{2j\nu_j} \le \left(\frac{2m}{n}\right)^{2j}.$$

Так как $S^j \le C_m^j \max\limits_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_j} \left| A^j_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_j} \right|$ и $C_m^j \le m^j$, то

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{S^j}{A^0} \le \sum_{j=1}^{m} m^j \left(\frac{2m}{n} \right)^{2j} = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{2m^{3/2}}{n} \right)^{2j}.$$

Тогда окончательно получаем, что

$$A_1 = A^0 \left(1 + \sum_{j=1}^{m} \frac{S^j}{A^0} \right) = A^0 \left[1 + O\left(\frac{m^3}{n^2} \right) \right].$$

Лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5. *Если* $f_\gamma \in F$ *, то равномерно для всех* $m,\ 0 \le m \le m(n),$ *где* $\lim\limits_{n\to\infty} (m(n))^{3/2} / n = 0,$ *при* $n \to \infty$

$$\det \tilde{A}(1) \sim \frac{(-i)^{m+1}(-1)^m}{2^m} \prod_{j=1}^{m} j! \prod_{j=0}^{m} \frac{1}{(\gamma)_{n+1+j}}, \tag{11}$$

$$\det \tilde{A}(k) \sim \frac{(-i)^{m+1}(-1)^m}{2^m} \prod_{j=1}^{m-1} j! \prod_{j=1}^{m} (j+k-1)(\gamma+n+j)_{k-1} \prod_{j=0}^{m} \frac{1}{(\gamma)_{n+k+j}}, \tag{12}$$

$$A(y) \sim \frac{(-i)^m}{2^{m-1}} \prod_{j=1}^{m-1} j! \prod_{j=0}^{m-1} \frac{1}{(\gamma)_{n+j}}, \tag{13}$$

где $y = e^{ix}$.

Доказательство. Аналогично, как и при доказательстве леммы 4, устанавливается, что при $n \to \infty$

$$\det \tilde{A}(k) \sim 2(-1)^m \begin{vmatrix} c_{n+1} & c_n & \dots & c_{n-m+1} \\ c_{n+2} & c_{n+1} & \dots & c_{n-m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+m} & c_{n+m-1} & \dots & c_n \\ c_{n+m+k} & c_{n+m+k-1} & \dots & c_{n+k} \end{vmatrix}.$$

Отсюда с помощью элементарных преобразований и леммы 1 из работы [10], учитывая, что $c_j = -i / 2(\gamma)_j$, получим (12). Эквивалентность (11) следует из (12) при $k = 1$.

Перейдем к доказательству эквивалентности (13). Раскладывая определитель $\det A(y)$ по элементам первой строки, а затем, применяя лемму 4, получим, что при $n \to \infty$

$$\det A(y) \sim 2 \begin{vmatrix} c_n & c_{n-1} & \dots & c_{n-m+1} \\ c_{n+1} & c_n & \dots & c_{n-m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+m-1} & c_{n+m-2} & \dots & c_n \end{vmatrix} - 2(y^{-1}+y) \begin{vmatrix} c_{n+1} & c_{n-1} & \dots & c_{n-m+1} \\ c_{n+2} & c_n & \dots & c_{n-m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+m} & c_{n+m-2} & \dots & c_n \end{vmatrix} + \dots$$

$$\dots + 2(-1)^m (y^{-m} + y^m) \begin{vmatrix} c_{n+1} & c_n & \dots & c_{n-m+2} \\ c_{n+2} & c_{n+1} & \dots & c_{n-m+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+m} & c_{n+m-1} & \dots & c_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Учитывая теперь, что $y = e^{ix}$, аналогично, как и при доказательстве лемм 4 и 3, устанавливаем, что при $n \to \infty$

$$\det A(y) \sim 2 \begin{vmatrix} c_n & c_{n-1} & \dots & c_{n-m+1} \\ c_{n+1} & c_n & \dots & c_{n-m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+m-1} & c_{n+m-2} & \dots & c_n \end{vmatrix}.$$

Далее с помощью элементарных преобразований и леммы 1 работы [10] приходим к эквивалентности (13). Лемма 5 доказана.

3. Доказательства основных результатов

Перейдем к доказательству основных теорем.

Доказательство теоремы 2. Учитывая, что $\overline{\tilde{c}_k} = \tilde{c}_{-k}$, для $\forall x \in R$ будем иметь:

$$f_\gamma(x) - \pi^t_{n,m}(x; f_\gamma) = \sum_{k=n+m+1}^{\infty} \frac{\tilde{c}_k e^{ikx} + \tilde{c}_{-k}\, e^{-ikx}}{q^t_m(x)} = 2Re\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{c}_{n+m+k}}{q^t_m(x)} e^{i(n+m+k)x} = 2Re\left\{ \frac{\tilde{c}_{n+m+1}}{q^t_m(x)} e^{i(n+m+1)x} \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\tilde{c}_{n+m+k}}{\tilde{c}_{n+m+1}} e^{i(k-1)x} \right) \right\}.$$

Из леммы 1 и леммы 5 следует, что при $n \to \infty$

$$\frac{\tilde{c}_{n+m+1}}{q^t_m(x)} = \frac{\det \tilde{A}(1)}{\det A(y)} \sim \frac{(-1)^{m+1} i m!(\gamma)_n}{2(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}}$$

и

$$\frac{\tilde{c}_{n+m+k}}{\tilde{c}_{n+m+1}} = \frac{\det \tilde{A}(k)}{\det \tilde{A}(1)} \sim \frac{1}{m!}\prod_{j=1}^{m}(j+k-1)(\gamma+n+j)_{k-1}\prod_{j=0}^{m}\frac{(\gamma)_{n+1+j}}{(\gamma)_{n+k+j}} = \frac{(k)_m}{m!(\gamma+n+m+1)_{k-1}} = \frac{C^{k-1}_{m+k-1}}{(\gamma+n+m+1)_{k-1}}.$$

Тогда

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\tilde{c}_{n+m+k}}{\tilde{c}_{n+m+1}} e^{i(k-1)x} = \sum_{k=2}^{\infty} C^{k-1}_{m+k-1} \frac{e^{i(k-1)x}}{(\gamma+n+m+1)_{k-1}} \le \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{m+1}{\gamma+n+m+1} \right)^{k-1} e^{i(k-1)x}.$$

Окончательно получим, что

$$f_\gamma(x) - \pi^t_{n,m}(x; f_\gamma) = 2Re\left\{ \frac{(-1)^{m+1} i m!(\gamma)_n}{2(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}} e^{i(n+m+1)x} \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{(m+1)e^{ix}}{\gamma+n+m+1} \right)^{k-1} \right) \right\} = \frac{(-1)^{m+1} m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}} Re\ \ ie^{i(n+m+1)x}\ \ 1+o(1)\ \ .$$

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть

$$\varphi(x) = \frac{(-1)^{m+1} i m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}} e^{i(n+m+1)x}.$$

При достаточно больших n знак разности $f_\gamma(x) - \pi^t_{n,m}(x; f_\gamma)$ совпадает со знаком $Re\varphi(x)$. Когда x пробегает весь интервал $[0,2\pi)$, $(n+m+1)x$ пробегает весь интервал $0,2\pi(n+m+1)$. Поэтому существуют $2(n+m+1)$ действительных чисел x_j, $j = 1,2...,2(n+m+1)$ таких, что

$$0 \le x_1 < x_2 < \ldots < x_{2(n+m+1)} < 2\pi, \quad \varphi(x_j) = \frac{(-1)^{m+j} m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}}.$$

Тогда в точках x_j разность $f_\gamma(x) - \pi^t_{n,m}(x; f_\gamma)$ принимает значения с чередующимися знаками. В таком случае согласно теореме Валле Пуссена [12, 14] при достаточно больших n

$$\mathrm{E}^t_{n,m}(f_\gamma) \ge \min_{1\le j\le 2(n+m+1)} \left| f_\gamma(x_j) - \pi^t_{n,m}(x_j; f_\gamma) \right| \ge \frac{m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}}\ \ 1-|\,o(1)\,|\ \ .$$

С другой стороны,

$$\mathrm{E}^t_{n,m}(f_\gamma) \le \max_{x\in R} \left| f_\gamma(x) - \pi^t_{n,m}(x; f_\gamma) \right| \le \frac{m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}}\ \ 1+|\,o(1)\,|\ \ .$$

Теорема 3 доказана.

4. Некоторые обобщения

Будем говорить, что $g_\gamma \in F_d$, если $g_\gamma(x) = f_\gamma(dx)$, где $f_\gamma \in F$.

Основываясь на определении тригонометрических аппроксимаций Паде, нетрудно показать, что если $g_\gamma \in F_d$ и $g_\gamma(x) = f_\gamma(dx)$, то при $0 \le i + j \le d-1$

$$\pi^t_{dn+i,dm+j}(x; g_\gamma) = \pi^t_{n,m}(dx; f_\gamma)$$

и, следовательно,

$$g_\gamma(x) - \pi^t_{dn+i,dm+j}(x; g_\gamma) = f_\gamma(dx) - \pi^t_{n,m}(dx; f_\gamma)\ . \tag{14}$$

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $g_\gamma \in F_d$, $g_\gamma(x) = f_\gamma(dx)$ *и* $f_\gamma \in F$. *Тогда для* $\forall x \in R$ *равномерно по всем* $m, 0 \le m \le m(n)$, *где* $\lim\limits_{n\to\infty} m(n)^{3/2} \big/ n = 0$, *при* $n \to \infty$

$$g_\gamma(x) - \pi^t_{dn+i,dm+j}(x; g_\gamma) = \frac{(-1)^{m+1} m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}} Re\;\; ie^{i(n+m+1)dx}\;\; 1+o(1) \quad ,$$

где $0 \le i + j \le d-1$.

Утверждение теоремы 4 следует из равенств (14) и (7).

ТЕОРЕМА 5. *Пусть* $g_\gamma \in F_d$, $g_\gamma(x) = f_\gamma(dx)$ *и* $f_\gamma \in F$. *Тогда при* $n \to \infty$ *и* $m, 0 \le m \le m(n)$, *где* $\lim\limits_{n\to\infty} m(n)^{3/2} \big/ n = 0$,

$$E^t_{dn+i,dm+j}(g_\gamma) \square \left\| g_\gamma - \pi^t_{dn,dm}(\cdot; g_\gamma) \right\| \square \frac{m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m+1}(\gamma)_{n+m}},$$

где $0 \le i + j \le d-1$.

Утверждение теоремы 5 можно получить с помощью рассуждений, используемых при доказательстве теоремы 3.

В частности, для функции $g_1(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin dkx}{k!}$

$$E^t_{dn+i,dm+j}(g_1) \square \left\| g_1 - \pi^t_{dn,dm}\;\; \cdot; g_1 \;\;\right\| \square \frac{m!n!}{(n+m)!(n+m+1)!}, \text{ где } 0 \le i + j \le d-1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Суетин, С.П. Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда / С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2002. – Т. 57, Вып. 1. – С. 45 – 142.
2. Березкина, Л.Л. Тригонометрические аппроксимации Паде и наилучшие рациональные приближения: дис. ... канд . физ.-мат. наук: 01.01.01 / Л.Л. Березкина. – Минск, 1988. – 112 с.
3. Та Хонг Куанг. Аппроксимации Паде и асимптотики наилучших рациональных приближений: дис. ... канд. физ.-мат. наук 01.01.01 / Та Хонг Куанг. – Минск, 1991. – 104 с.
4. Lubinsky, D.S. Pade tables of entire functions of very slow and smooth growth / D.S. Lubinsky // Constr. Approx. – 1985. – Vol. 1. – P. 349 – 358.
5. Lubinsky, D.S. Uniform convergence of rows of Pade table for functions with smooth Maclaurin series coefficients / D.S. Lubinsky // Constr. Approx. – 1987. – Vol. 3. – P. 307 – 330.
6. Levin, A.L. Best rational approximation of entire functions whose Maclaurin series coefficients decrease rapidly and smoothly / A.L. Levin, D.S. Lubinsky // Trans. Amer. Math. Soc. – 1986. – Vol. 293. – P. 533 – 545.
7. Saff, E.B. The convergence of rational functions of best approximation to the exponential function. II / E.B. Saff // Proc. Amer. Math. Soc. – 1972. – Vol. 32. – P. 187 – 194.
8. Levin, A.L. Rows and diagonals of the Walsh array for entire functions with smooth Maclaurin series coefficients / A.L. Levin, D.S. Lubinsky // Constr. Approx. – 1990. – Vol. 6. – P. 257 – 286.
9. Березкина, Л.Л. О наилучших рациональных аппроксимациях некоторых целых функций / Л.Л. Березкина, В.Н. Русак // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. – 1990. – № 4. – С. 27 – 32.
10. Старовойтов, А.П. Аппроксимации Паде функций Миттаг – Леффлера / А.П. Старовойтов, Н.А. Старовойтова // Матем. сб. – 2007. – Т. 198, № 7. – С. 109. – 122.
11. Русак, В.Н. Аппроксимации Паде для целых функций с регулярно убывающими коэффициентами Тейлора / В.Н. Русак, А.П. Старовойтов // Матем. сб. – 2002. – Т. 193, № 9. – С. 63. – 92.
12. Натансон, И.П. Конструктивная теория функций / И.П. Натансон. – М.– Л.: ГИТТЛ, 1949. – 688 с.
13. Старовойтов, А.П. Тригонометрические аппроксимации Паде функций с регулярно убывающими коэффициентами Фурье / А.П. Старовойтов, Ю.А. Лабыч. – Гомель, 2008. – 47 с. – (Препринт / ГГУ им Ф. Скорины, № 7).
14. Lorentz, G.G. Constructive Approximation. Advanced problems / G.G. Lorentz, M. von Golitschek, Ya. Makavoz . – Berlin: Springer-Verlag, 1996. – 304 p.

Поступила 14.07.2008