УДК 511

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧЕТНЫХ ЧИСЕЛ ФОРМАМИ ВАТСОНА[1]

канд. физ.-мат. наук Н.В. БУДАРИНА,
(Владимирский государственный педагогический университет, Россия);
канд. физ.-мат. наук О.С. КУКСО
(Институт математики НАН Беларуси, Минск)

В 1916 году Рамануджан обобщил результат Лагранжа, доказав, что существует 54 положительно определенных кватернарных диагональных квадратичных форм, которые представляют все положительные числа. Диксон назвал такие формы универсальными и далее обобщил результат для недиагонального случая. Позднее Вилердинг в 1948 году доказала существование 168 классически целочисленных универсальных кватернарных форм. Этот список форм был откорректирован и дополнен до 204 таких форм в 2000 году Конвеем, Шнебергером и Бхаргава [1]. Ватсон нашел все четные одноклассные кватернарные квадратичные формы Q с ограничением: если p^2 делит определитель $|Q|$ и если $p^{-2}|Q| \equiv 0$ или $p^{-2}|Q| \equiv 1 \pmod 4$, Q эквивалентна над $\boldsymbol{Z_p}$ прямой сумме $Q_1 \oplus pQ_p$ бинарных форм Q_1 и Q_p. Список Ватсона содержит 27 таких форм Q. В данной работе найдены четные примитивно универсальные формы и почти универсальные формы из списка Ватсона.

Введение. Вопрос о представимости одной квадратичной формы другой формой возвращает нас к началу современной теории чисел: например, теорема Лагранжа о сумме четырех квадратов утверждает, что квадратичная форма $x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ представляет все положительные числа.

На сегодня можем обозначить как минимум 5 направлений, в которых развивается задача универсальности:

1) примитивная универсальность;
2) m-универсальные формы;
3) универсальность над вещественными числовыми полями;
4) почти универсальность;
5) четная/нечетная/.../ универсальность.

Положительно определенная целочисленная форма Q называется (примитивно) m-универсальной, если она (примитивно) представляет все целочисленные формы ранга m. Если форма Q (примитивно) представляет все целочисленные формы ранга m за исключением конечного числа форм, то такая форма называется (примитивно) почти m-универсальной.

С универсальными формами тесно связаны так называемые регулярные формы. Квадратичная форма Q называется m-регулярной, если она представляет над $\boldsymbol{Z}$ каждую форму ранка m, которая представляется ею над всеми кольцами $\boldsymbol{Z_p}$. Каждая m-универсальная форма является m-регулярной формой.

Каждая квадратичная форма удовлетворяет локально-глобальному принципу над $\boldsymbol{Z}$ с некоторыми условиями. В 2008 году Елленберг и Венкатеш в [2] доказали что, если минимальное положительное целое число, которое представляется формой A, является достаточно большим и $\mathrm{rank}(Q) \geq \mathrm{rank}(A) + 7$, то A представляется Q над $\boldsymbol{Z}$ тогда и только тогда, когда A представляется Q над $\boldsymbol{Z_p}$ для каждого простого p.

В работе [3] Ох доказал, что каждая (четная) n-регулярная форма является (четной) m-универсальной для каждого целого $m \geq 27$, т.е. представляет все (четные, соответственно) формы ранга m.

Ватсон нашел все четные одноклассные $h(Q) = 1$ кватернарные квадратичные формы Q с ограничением [4]: если p^2 делит определитель $|Q|$ и если $p^{-2}|Q| \equiv 0$ или $p^{-2}|Q| \equiv 1 \pmod 4$, то Q эквивалентна над $\boldsymbol{Z_p}$ прямой сумме $Q_1 \oplus pQ_p$ бинарных форм Q_1 и Q_p. Список Ватсона содержит 27 таких форм Q (таблица).

Список Ватсона

$Q_4: \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad 2_{Q_4} = 1^{-2}_{II,0}\, 2^{-2}_{II,0},$	$Q_5: \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad 2_{Q_5} = 1^{-4}_{II,0}, \quad 5_{Q_5} = 1^{+3}\, 5^{+1},$
$Q_8: \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad 2_{Q_8} = 1^{-2}_{II,0}\, 2^{+1}_{I,1}\, 4^{-1}_{I,3},$	$Q_9: \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad 2_{Q_9} = 1^{+4}_{II,0}, \quad 3_{Q_9} = 1^{+2}\, 3^{+2},$

[1] При поддержке исследовательского проекта ИНТАС 03-51-5070.

$Q^1_{12}:\begin{pmatrix}2&1&1&0\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\0&1&1&4\end{pmatrix}$ $2_{Q^1_{12}}=1^{-2}_{II,0}\,2^{+2}_{I,2},\quad 3_{Q^1_{12}}=1^{+3}\,3^{+1},$	$Q^2_{12}:\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$ $2_{Q^2_{12}}=1^{-2}_{II,0}\,2^{+2}_{I,2},\quad 3_{Q^2_{12}}=1^{-3}\,3^{-1},$
$Q_{13}:\begin{pmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&4\end{pmatrix}$ $2_{Q_{13}}=1^{-4}_{II,0},\quad 13_{Q_{13}}=1^{+3}\,13^{+1},$	$Q_{17}:\begin{pmatrix}2&1&0&1\\1&2&0&1\\0&0&2&1\\1&1&1&4\end{pmatrix}$ $2_{Q_{17}}=1^{+4}_{II,0},\quad 17_{Q_{17}}=1^{-3}\,17^{-1},$
$Q^1_{20}:\begin{pmatrix}2&1&1&0\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\0&1&1&6\end{pmatrix}$ $2_{Q^1_{20}}=1^{-2}_{II,0}\,2^{+2}_{II,0},\quad 5_{Q^1_{20}}=1^{+3}\,5^{+1},$	$Q^2_{20}:\begin{pmatrix}2&0&0&1\\0&2&0&1\\0&0&2&1\\1&1&1&4\end{pmatrix}$ $2_{Q^2_{20}}=1^{+2}_{II,0}\,2^{-2}_{II,0},\quad 5_{Q^2_{20}}=1^{-3}\,5^{-1},$
$Q^1_{21}:\begin{pmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&6\end{pmatrix}$ $2_{Q^1_{21}}=1^{-4}_{II,0},\quad 3_{Q^1_{21}}=1^{+3}\,3^{+1},\quad 7_{Q^1_{21}}=1^{+3}\,7^{-1},$	$Q^2_{21}:\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&1&4\end{pmatrix}$ $2_{Q^2_{21}}=1^{-4}_{II,0},\quad 3_{Q^2_{21}}=1^{-3}\,3^{-1},\quad 7_{Q^2_{21}}=1^{-3}\,7^{+1},$
$Q_{24}:\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&1\\0&0&2&1\\0&1&1&4\end{pmatrix}$ $2_{Q_{24}}=1^{+2}_{II,0}\,2^{+1}_{I,1}\,4^{-1}_{I,5},\quad 3_{Q_{24}}=1^{-3}\,3^{+1},$	$Q_{25}:\begin{pmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&4&-1\\1&1&-1&4\end{pmatrix}$ $2_{Q_{25}}=1^{+4}_{II,0},\quad 5_{Q_{25}}=1^{-2}\,5^{-2},$
$Q_{28}:\begin{pmatrix}2&1&1&1\\1&2&0&1\\1&0&4&-1\\1&1&-1&4\end{pmatrix}$ $2_{Q_{28}}=1^{-2}_{II,0}\,2^{-2}_{I,2},\quad 7_{Q_{28}}=1^{-3}\,7^{-1},$	$Q_{33}:\begin{pmatrix}2&0&1&0\\0&2&1&1\\1&1&4&-1\\0&1&-1&4\end{pmatrix}$ $2_{Q_{33}}=1^{+4}_{II,0},\quad 3_{Q_{33}}=1^{-3}\,3^{+1},\quad 11_{Q_{33}}=1^{+3}\,11^{+1},$
$Q^1_{36}:\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&2&0&0\\0&0&4&2\\0&0&2&4\end{pmatrix}$ $2_{Q^1_{36}}=1^{-2}_{II,0}\,2^{-2}_{II,0},\quad 3_{Q^1_{36}}=1^{-2}\,3^{-2},$	$Q^2_{36}:\begin{pmatrix}2&0&1&1\\0&2&1&1\\1&1&4&1\\1&1&1&4\end{pmatrix}$ $2_{Q^2_{36}}=1^{+2}_{II,0}\,2^{+2}_{II,0},\quad 3_{Q^2_{36}}=1^{+2}\,3^{+2},$
$Q^1_{45}:\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&1&8\end{pmatrix}$ $2_{Q^1_{45}}=1^{-4}_{II,0},\quad 3_{Q^1_{45}}=1^{+2}\,3^{-2},\quad 5_{Q^1_{45}}=1^{+3}\,5^{+1},$	$Q^2_{45}:\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&2&0&0\\0&0&4&1\\0&0&1&4\end{pmatrix}$ $2_{Q^2_{45}}=1^{-4}_{II,0},\quad 3_{Q^2_{45}}=1^{-2}\,3^{+2},\quad 5_{Q^2_{45}}=1^{-3}\,5^{-1},$
$Q_{49}:\begin{pmatrix}2&0&0&1\\0&2&1&0\\0&1&4&0\\1&0&0&4\end{pmatrix}$ $2_{Q_{49}}=1^{+4}_{II,0},\quad 7_{Q_{49}}=1^{+2}\,7^{+2},$	$Q_{60}:\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&4&2&1\\0&2&4&2\\0&1&2&4\end{pmatrix}$ $2_{Q_{60}}=1^{+2}_{II,0}\,2^{+2}_{I,6},\quad 3_{Q_{60}}=1^{-3}\,3^{+1},\quad 5_{Q_{60}}=1^{+3}\,5^{-1},$
$Q_{69}:\begin{pmatrix}2&0&0&1\\0&2&1&1\\0&1&4&1\\1&1&1&6\end{pmatrix}$ $2_{Q_{69}}=1^{-4}_{II,0},\quad 3_{Q_{69}}=1^{-3}\,3^{+1},\quad 23_{Q_{69}}=1^{-3}\,23^{-1},$	
$Q^1_{100}:\begin{pmatrix}2&0&1&1\\0&2&1&1\\1&1&6&1\\1&1&1&6\end{pmatrix}$ $2_{Q^1_{100}}=1^{-2}_{II,0}\,2^{-2}_{II,0},\quad 5_{Q^1_{100}}=1^{+2}\,5^{+2},$	$Q^2_{100}:\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&4&2&1\\0&2&4&2\\0&1&2&6\end{pmatrix}$ $2_{Q^2_{100}}=1^{+2}_{II,0}\,2^{+2}_{II,0},\quad 5_{Q^2_{100}}=1^{-2}\,5^{-2},$
$Q_{169}:\begin{pmatrix}2&1&0&1\\1&4&1&1\\0&1&4&2\\1&1&2&8\end{pmatrix}$ $2_{Q_{169}}=1^{+4}_{II,0},\quad 13_{Q_{169}}=1^{-2}\,13^{-2},$	$Q_{484}:\begin{pmatrix}2&0&1&0\\0&4&0&2\\1&0&6&0\\0&2&0&12\end{pmatrix}$ $2_{Q_{484}}=1^{-2}_{II,0}\,2^{-2}_{II,0},\quad 11_{Q_{484}}=1^{-2}\,11^{-2}$

ТЕОРЕМА 1. *Формы* Q_5, Q_{13}, Q_{17}, $Q_{20}{}^1$, $Q_{20}{}^2$, $Q_{21}{}^1$, $Q_{21}{}^2$, Q_{24}, Q_{33}, $Q_{45}{}^1$, $Q_{45}{}^2$, Q_{60}, Q_{69} *из списка Ватсона являются четными примитивно универсальными формами. Формы* Q_9, Q_{25}, $Q_{36}{}^2$, Q_{49}, $Q_{100}{}^2$, Q_{169} *не являются четными примитивно почти универсальными формами.*

Относительно форм Q_4, Q_8, $Q_{12}{}^1$, $Q_{12}{}^2$, Q_{28}, Q_{36}, $Q_{100}{}^1$, Q_{484} можно только сказать, что они примитивно представляют все положительные числа над нечетными кольцами $\boldsymbol{Z_p}$, и вопрос об их четной (примитивной) универсальности сводится к рассмотрению над кольцом $\boldsymbol{Z_2}$.

Задача о представлениях квадратичными формами над кольцом целых чисел $\boldsymbol{Z}$ сводится к локальным задачам над кольцами целых p-адических чисел $\boldsymbol{Z_p}$. В силу того, что формы Ватсона одноклассные, то локально-глобальный принцип дает следующий результат: представление формы A формой Q над $\boldsymbol{Z}$ существует тогда и только тогда, когда существуют представления формы A над всеми $\boldsymbol{Z_p}$ и $\boldsymbol{R}$.

Условие представимости положительно определенной формой Q над R означает, что представляемая форма A должна быть положительно определенной.

Следует различать случаи нечетного p и $p = 2$. Квадратичные формы над $\boldsymbol{Z_2}$ имеют дополнительные локальные инварианты (см. [5]), и это одна из причин существенно более сложного поведения таких форм. Предложения 1 – 2 и предложение 3 посвящены представимости форм над нечетным кольцом $\boldsymbol{Z_p}$ и $\boldsymbol{Z_2}$ соответственно.

Если не существует представления формы A формой Q хотя бы над одним кольцом $\boldsymbol{Z_p}$, то этого достаточно, чтобы утверждать, что форма Q не является почти универсальной (предложение 1).

Формы Ватсона и их локальные инварианты см. таблицу.

Докажем следующие предложения, из которых вытекает теорема.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть форма Q имеет над нечетным кольцом $\boldsymbol{Z_p}$ жорданово разложение*

$$Q = Q_1 \oplus pQ_q, \tag{1}$$

с невырожденными блоками $|Q_1|$, $|Q_p| \not\equiv 0 \pmod p$, *размерностей* $\dim Q_1 = \dim Q_p = 2$.

Если выполняются следующие условия для знаков блоков Q_1 и Q_p

$$\varepsilon_1\ Q\ = \left(\frac{-1}{p}\right) \text{ или } \varepsilon_p\ Q\ = \left(\frac{-1}{p}\right), \tag{2}$$

то Q примитивно представляет все положительные числа над всеми нечетными кольцами $\boldsymbol{Z_p}$.

Если

$$\varepsilon_1\ Q\ = \varepsilon_p\ Q\ = -\left(\frac{-1}{p}\right), \tag{3}$$

то форма Q представляет примитивно над $\boldsymbol{Z}$ *числа вида* $A = p^{\nu} A_{p^{\nu}}$, $\nu \geq 2$.

Доказательство. Будем рассматривать кольцо целых p-адических чисел $\boldsymbol{Z_p}$. Пусть Q и A – целые симметрические невырожденные матрицы размеров $\nu > m \geq 1$ $|Q| = \det Q$ и $|A| = \det Q$. Отождествим матрицы Q, A с определяемыми ими квадратичными формами. Форма A примитивно представима формой Q, если существует целая $(n \times m)$-матрица X с условием:

$$Q\ X\ = {}^tXQX = A,$$

при этом X примитивна, т.е. наибольший общий делитель ее миноров порядка m равен единице кольца $\boldsymbol{Z_p}$. Существование примитивного представления равносильно эквивалентности формы Q относительно унимодулярной группы $GL_n(\boldsymbol{Z_p})$ целой форме:

$$Q_G^A\ C\ = \begin{pmatrix} A & C \\ {}^tC & \frac{1}{a}\ E\ C\ + G \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где G – целая симметрическая невырожденная матрица порядка $n - m > 0$ и определителя $|G| = a^{n-m}|Q|/|A|$. Здесь a – степень формы A, т.е. ненулевое целое число, для которого целой будет матрица $E = aA^{-1}$. Сцепляющая матрица $C \in M_{m,\, n-m}(\boldsymbol{Z_p})$ содержится во множестве решении сравнения:

$$E\ C\ \equiv -G \mod a\ . \tag{5}$$

I. Далее пусть p – простое нечетное число. Рассмотрим представления одномерных форм $A = p^{\nu} A_{p^{\nu}}$, $\nu \geq 0$, формами Q.

Вначале исследуем случаи, когда $\nu \geq 1$. Пусть $G = \oplus_{\alpha} G_{\alpha}$ с блоками $G_{\alpha} = p^{\alpha} G_{p^{\alpha}}$ размеров $k_{\alpha} = \dim G_{\alpha}$, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$, и с определителями $|G_{p^{\alpha}}|$ из группы единиц $\boldsymbol{Z_p}^{\times}$. Разобьем сцепляющие векторы $C = (C_0|\ldots|C_{\alpha}|\ldots)$ соответственно на блоки C_{α} длины k_{α}.

Согласно (5) имеем $E\ \ C_0\ \ \equiv -G_0 \mod p^{\nu}$ для $\nu \geq 1$. Поэтому можем взять $k_0 = 0$ или $k_0 = 1$ и $E \sim_p -G_0$, где $\sim_p$ обозначает эквивалентность по модулю квадратов единиц $(\boldsymbol{Z_p}^{\times})^2$.

Если $k_0 = 0$, то можем взять $C = (0|\ldots|0)$ и согласно (4) получим:

$$Q_G^A\ \ C\ \ = A \oplus \tfrac{1}{p^{\nu}} G,\ G = \oplus_{\alpha \geq \nu} G_{\alpha}. \tag{6}$$

В случае $k_0 = 0$ и $\nu > 1$ существуют и другие ненулевые сцепляющие векторы C (см. [6]), но мы здесь ограничимся рассмотрением только тех сцепляющих векторов C, которые являются общими для всех показателей $\nu \geq 1$.

Если же $k_0 = 1$, то в силу (5) получим, что $k_1 = \ldots = k_{\nu\text{-}1} = 0$. Согласно (4) сцепляющий вектор $C = (C_0|0|\ldots|0)$ дает форму:

$$Q_G^A\ \ C\ \ = \begin{pmatrix} A & C_0 \\ C_0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \frac{1}{p^{\nu}} G_{\neq 0} \sim_p J\ \ A\ \ \oplus \frac{1}{p^{\nu}} G_{\neq 0}, \tag{7}$$

где в $G_{\neq 0}$ исключен блок G_0 и $J\ \ A\ \ = \begin{pmatrix} A & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ – гиперболическая форма размерности 2.

Таким образом, существует два типа так называемых минимальных неразложимых представлении формы A формой Q:

$$p^{\nu} \cdot \varepsilon \to p^{\nu} \cdot \varepsilon, \tag{8}$$

$$p^{\nu} \cdot \varepsilon \to J\ \ p^{\nu} \cdot \varepsilon\ \ = \begin{pmatrix} p^{\nu} \cdot \varepsilon & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

размерностей 1 и 2 соответственно. Здесь ε – единица кольца $\boldsymbol{Z_p}$ и $\nu \geq 1$.
Рассмотрим оставшийся случай, когда $A = A_1$, $|A_1| \not\equiv 0 \pmod p$, $\dim A = 1$. В этом случае форма $A \in GL_1(\boldsymbol{Z_p})$ отщепляется от формы $Q_G^A\ \ C\ \ \sim_p\ A \oplus G$. Поэтому получаем следующее минимальное неразложимое представление формы A формой Q:

$$\varepsilon \to \varepsilon, \quad \varepsilon \in \boldsymbol{Z_p}^{\times}, \tag{10}$$

размерности 1.

II. Рассмотрим формы со следующим жордановым разложением над нечетным кольцом $\boldsymbol{Z_p}$:

$$Q = Q_1 \oplus pQ_q, \dim \mathrm{Q}_1 = \dim \mathrm{Q}_\mathrm{p} = 2. \tag{11}$$

Пусть p – нечетное простое число, не делящее $|Q|$. Тогда существуют представления (9) и (10), и форма $A = p^{\nu} A_{p^{\nu}}$, $\nu \geq 0$, примитивно представимы над $\boldsymbol{Z_p}$ формой Q только в том случае, если выполняется неравенство $J_A \leq Q$. Здесь $J_A = \begin{cases} A, \text{если } \nu = 0, \\ J(A), \text{если } \nu \geq 1 \end{cases}$. Квадратичные формы X и Y удовлетворяют неравенству $Y \leq X$, если $X \sim_p Y \oplus Z$ для некоторой формы Z. Поэтому условие $Y \leq X$ равносильно существованию разности форм $X(-)Y$. В данном случае вычисление форм $Q(-)J_A$ сводится к следующим формулам вычитания p-адических символов:

$$1^{\varepsilon_1\ Q\ 4}(-)1^{\varepsilon_1\ A\ 1} = 1^{\varepsilon_1\ Q\ \varepsilon_1\ A\ 3},\ \text{если } \nu = 0,$$

$$1^{\varepsilon_1\ Q\ 4}(-)1^{\frac{-1}{3}\ 2} = 1^{\varepsilon_1\ Q\ \frac{-1}{3}\ 2},\ \text{если } \nu \geq 1.$$

Соответствующие p-адические символы справа всегда существуют (см. [5]). Следовательно, кватенарная форма Q примитивно представляет все числа над нечетными кольцами $\boldsymbol{Z_p}$, $p \nmid |Q|$.

Пусть p – нечетное простое число, делящее $|Q|$. Тогда существуют все три типа представлении (8) – (10). Минимальные представления форм $A = p^{\nu}A_{p^{\nu}}$, $\nu \geq 1$, дает возможность построить два вида форм Q с заданным Жордановым разложением (11):

$$Q^{I} = \begin{pmatrix} p^{\nu}A_{p^{\nu}} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus pQ_p = J\left(p^{\nu}A_{p^{\nu}}\right) \oplus pQ_p,$$

$$Q^{II} = \begin{cases} Q_1 \oplus p\begin{pmatrix} p^{\nu-1}A_{p^{\nu}} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = Q_1 \oplus pJ\left(p^{\nu-1}A_{p^{\nu}}\right), \nu \geq 2, \\ Q_1 \oplus pA_p \oplus p\left(Q_p(-)A_p\right), \nu = 1. \end{cases} \tag{12}$$

Форма Q^I существует, если $\varepsilon_1\left(Q^I\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)$, где $\left(\frac{*}{p}\right)$ – символ Лежандра. Форма Q^{II} для $\nu \geq 2$ существует при условии, что $\varepsilon_{\mathrm{p}}\left(Q^{II}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)$, а для $\nu = 1$ существует всегда.

Используя минимальное представление (10) получаем, что форма A=A_1 примитивно представляется обеими формами Q^{I} и Q^{II}.

Если знаки блоков формы Q (11) соответствую условию (2), т.е. p-адические символы формы Q равны $1^{\left(\frac{-1}{p}\right)2} p^{\varepsilon_p(Q)2}$ или $1^{\varepsilon_1(Q)2} p^{\left(\frac{-1}{p}\right)2}$ (см. [5]), то Q примитивно представляет все числа над всеми нечетными кольцами $\boldsymbol{Z_p}$.

Форма Q (11), у которой знаки блоков Q_1 и Q_p удовлетворяют условию (3) (т.е. $p_Q = 1^{-\left(\frac{-1}{p}\right)2} p^{-\left(\frac{-1}{p}\right)2}$) не могут примитивно представлять одномерные формы A=$p^{\nu}A_{p^{\nu}}$, $\nu \geq 2$, над нечетным кольцом $\boldsymbol{Z_p}$, $p \mid |Q|$, а следовательно, и над $\boldsymbol{Z}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть положительно определенная кватернарная квадратичная форма Q имеет жорданово разложение*

$$Q = Q_1 \oplus Q_p, \dim Q_1 \geq 3, \tag{13}$$

над нечетным кольцом $\boldsymbol{Z_p}$, ($p \mid |Q|$). Тогда форма Q примитивно представляет все положительные числа A над всеми нечетными кольцами $\boldsymbol{Z_p}$.

Доказательство этого предложения можно найти в [7].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Положительно определенная кватернарная квадратичная форма Q, имеющая следующий 2-адический символ*:

$$1_{II}^{+4}, 1_{II}^{-4} \text{ или } 2^{\beta}{}_{II}^{+2} \prod_{g} g^{\varepsilon_g(Q), n_g(Q)}_{\xi_g(Q), t_g(Q)} \text{ для } \beta \geq 0,\ g = 2^{\gamma},\ \gamma = 0, 1, 2, \ldots,$$

примитивно представляет все четные числа над кольцом $\boldsymbol{Z_2}$.

Доказательство. Рассмотрим представление формы A формой Q над четным кольцом $\boldsymbol{Z_2}$.

Формы Ватсона являются четными (т.е. имеют четную диагональ), поэтому они могут представлять только четные числа над $\boldsymbol{Z}$.

Вначале, пусть определитель формы Q будет нечетным и $a = 2^{\alpha}$ – ступень формы A. Для четных форм Q с точностью до эквивалентности над $GL(\boldsymbol{Z_2})$ имеет место матричное сравнение (5) с дополнительным условием сравнимости диагоналей форм по mod $2a$.

Рассмотрим нетривиальный одномерный случаи $A = qA_q$, dim $A_q = 1$, со ступенью $a = q = 2^{\alpha}$, $\alpha \geq 1$ [8]. Сравнения (5) налагают на форму G следующие ограничения:

$$G = G_1 \oplus qG_q, \dim G_1 = 1, G_1 \equiv -A_q \pmod{q}. \tag{14}$$

В качестве сцепляющих векторов C можно выбрать следующие $C = (C_1|0\ldots|0)$, где C_1 удовлетворяет условию $C_1^2 \equiv 1 \pmod{q}$ и

$$C_1 = \begin{cases} 1, \text{ если } \alpha = 1, \\ \pm 1, \text{ если } \alpha = 2, \\ \pm 1, \pm(1 + 2^{\alpha-1}), \text{ если } \alpha \geq 3. \end{cases}$$

В силу (4) имеем разложение

$$Q = J(qA_q) \oplus G_q, \tag{15}$$

где с точностью до эквивалентности

$$J(qA_q) = \begin{cases} \begin{pmatrix} qA_q & 1 \\ 1 & (A_q + G_1)/q \end{pmatrix} \textit{для } \alpha = 1, 2, \\ \begin{pmatrix} qA_q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{II}, \begin{pmatrix} qA_q & 1+q/2 \\ 1+q/2 & A_q(1+q/4) \end{pmatrix}_{I} \textit{для } \alpha \ge 3. \end{cases} \tag{16}$$

Следовательно, $J(qA_q)$ задают минимальные неразложимые представления одномерных форм $A = qA_q$. Прямым вычислением можно найти все инварианты форм $J = J(qA_q)$, используя локальные инварианты форм A и G_1. Учитывая условия существования 2-адических символов (см. [5]), получим:

$$2_J = \begin{cases} 1_{II}^{+2}, 1_{II}^{-2} \textit{ для } \alpha = 1; \\ 1_{II}^{+2}, 1_{I,4}^{-2} \textit{ для } \alpha = 2; \\ 1_{II}^{+2}, 1_{I,0}^{+2} \textit{ для } \alpha \ge 3. \end{cases} \tag{17}$$

Для форм Q со следующими 2-инвариантами 1_{II}^{+4} или 1_{II}^{-4} в работе [7] было доказано, что они представляют все четные числа над $\boldsymbol{Z}_2$.

Если определители форм A и Q – четные, то ситуация усложняется.

Но минимальные представления (16) в случае нечетного определителя $|Q|$, дают возможность построить некоторые формы четного определителя, которые представляют все четные числа над $\boldsymbol{Z}_2$. Из (17) следует, что форма J_1 с 2-адическим символом 1_{II}^{+2} представляет все одномерные формы $A = qA_q$, $q = 2^{\alpha}$, $\alpha \ge 1$, над $\boldsymbol{Z}_2$. Следовательно, формы Q с жордановым разложением над $\boldsymbol{Z}_2$:

$$Q^{III} = J_1 \oplus \sum_g gQ_g,$$

$$Q^{IV} = 2^{\beta} J_1 \oplus \sum_g gQ_g, \beta \ge 1, g = 2^{\gamma}, \gamma = 0, 1, 2, \ldots,$$

содержащие блок J_1, будут представлять все четные числа над $\boldsymbol{Z}_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bhargava, M. On the Conway-Schneeberger Fifteen Theorem / M. Bhargava // Contemp. Math., amer. Math. Soc. Providence, RI, 2000. – № 272. – P. 27 – 37.
2. Ellenberg, J. Local-global principles for representations of quadratic forms / J. Ellenberg, A.Venkatesh // Invent. math. – 2008. – N. 171. – P. 257 – 279.
3. Oh, B.-K. Positive definite *n*-regular quadratic forms / B.-K. Oh // Invent. math. – 2007. – № 170. – P. 421 – 453.
4. Watson, G. One-class genera of positive quaternary quadratic forms / G. Watson // Acta Arithmetica. – 1974. – Vol. 24. – P. 461 – 475.
5. Конвей, Д. Упаковки шаров, решетки и группы / Д. Конвей, Н. Цлоен. – М.: Мир, 1982.
6. Журавлев, В.Г. Орбиты представления чисел локальными квадратичными формами / В.Г. Журавлев // Тр. МИРАН. – 1997. – Т. 218. – С. 151 – 164.
7. Budarina, N.V. On primitive universal quadratic forms / N.V. Budarina (submitted).
8. Журавлев, В.Г. Деформации квадратичных диофантовых систем / В.Г. Журавлев // Изв. РАН. Сер. матем. – 2001. – Т. 65, № 6. – С. 15 – 56.

Поступила 24.09.2008