

УДК 512.542

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ТЕОРИИ КРАТНО ω -НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЙ

*д-р физ.-мат. наук, доц. В.Г. САФОНОВ, А.И. РЯБЧЕНКО
(Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины)*

Исследуются n -кратно ω -насыщенные формации конечных групп F , у которых решетка $F/\omega_n(F \wr N)$ n -кратно ω -насыщенных подформаций, заключенных между F и $F \wr N$, имеет длину J . Основной результат работы дает решение проблемы описания n -кратно ω -насыщенных формаций N_n^ω -дефекта 2, которая была поставлена А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым в работе о кратко ω -локальных формациях и классах Фиттинга конечных групп. В частности, нами получено описание n -кратно ω -насыщенных формаций с максимальной нильпотентной n -кратно ω -насыщенной подформацией; установлено внутреннее решеточное строение I_n^ω -приводимых формаций N_n^ω -дефекта J 2; получено описание конечных групп, порождающих I_n^ω -неприводимые формации N_n^ω -дефекта 2.

Все рассматриваемые в работе группы предполагаются конечными. Кроме общепринятой терминологии [1 – 3], нам потребуются некоторые определения и обозначения работы [4].

Пусть ω – некоторое непустое подмножество множества всех простых чисел; ω' – дополнение к ω во множестве всех простых чисел. Формация F называется ω -насыщенной, если ей принадлежит всякая группа G , удовлетворяющая условию $G/L \wr F$, где $L \trianglelefteq \Phi(G) \leq O_{\omega'}(G)$. Всякая формация считается 0-кратно ω -насыщенной. При $n > 0$ формация F называется n -кратно ω -насыщенной [4], если $F = LF_{\omega}(f)$, где все непустые значения ω -локального спутника f являются $(n - 1)$ -кратно ω -насыщенными формациями.

Для любых двух n -кратно ω -насыщенных формаций M и N полагают $M \wr N = M \wr N$, а $M \wr_n N = I_n^\omega \text{form}(M \wr N)$, где $I_n^\omega \text{form}(M \wr N)$ – пересечение всех n -кратно ω -насыщенных формаций, содержащих $M \wr N$. Через $F/\omega_n(F \wr N)$ обозначают решетку n -кратно ω -насыщенных формаций, заключенных между $F \wr N$ и F . Длину решетки $F/\omega_n(F \wr N)$ обозначают $|F : (F \wr N)|_n^\omega$ и называют N_n^ω -дефектом формации F . n -Кратно ω -насыщенную формацию F называют I_n^ω -приводимой, если она может быть представлена в виде решеточного объединения некоторых своих собственных n -кратно ω -насыщенных подформаций в решетке I_n^ω . В противном случае формацию F называют I_n^ω -неприводимой.

Группу G называют критической, если G – группа минимального порядка из $F \setminus N$ для некоторых формаций F и N . Критическая группа $G \in F$ называется N -базисной, если у формации, ею порожденной, имеется лишь единственная максимальная подформация M , причем $M \trianglelefteq N$.

А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым была поставлена задача описания n -кратно ω -насыщенных формаций N_n^ω -дефекта J 2 [4, вопрос 5]. Полученные нами теоремы 1 – 3 завершают описание n -кратно ω -насыщенных формаций такого типа. В частности, теорема 1 и теорема 2 позволяют классифицировать I_n^ω -приводимые n -кратно ω -насыщенные формации, имеющие N_n^ω -дефект J 2, а в теореме 3 получено описание конечных групп, порождающих I_n^ω -неприводимые формации N_n^ω -дефекта 2 ($n \geq 2$). Отметим, что при $n = 1$ решение данной задачи получено в работе [5].

Доказательства основных результатов базируются на следующих вспомогательных фактах.

Следствием теоремы 3.4.3 работы [6] является

ЛЕММА 1. Пусть F – n -кратно ω -насыщенная нильпотентная формация. Тогда в F имеется по крайней мере одна минимальная n -кратно ω -насыщенная нильпотентная подформация.

Доказательство следующей леммы аналогично доказательству леммы 20.4 в [2].

ЛЕММА 2. Пусть F , M , X и N – n -кратно ω -насыщенные формации, причем $F = M \wr_n X$. Тогда если m , r и t соответственно N_n^ω -дефекты формаций M , X и F и m , $r < t$, то $t \leq m + r$.

ЛЕММА 3 [4]. Для всех $n \geq 0$ решетка I_n^ω модулярна.

Аналогично лемме 14 в [7] доказывается

ЛЕММА 4. Пусть $F = M \mathfrak{B}_n^w H_1$, где M – некоторая n -кратно ω -насыщенная нильпотентная подформация формации F , H_1 – минимальная n -кратно ω -насыщенная неньпотентная подформация формации F . Тогда в формации F не существует минимальных n -кратно ω -насыщенных неньпотентных формаций, отличных от H_1 .

ЛЕММА 5. Пусть M , F и H – ω -насыщенные формации и $M \cap F = H$. Тогда $|M : M \cap H| \leq |F : F \cap H|$.

Доказательство аналогично лемме 20.3 в [2].

ЛЕММА 6 [8]. При $n \geq 2$ всякая n -кратно насыщенная формация, имеющая N_n^w -дефект 2, приводима.

ЛЕММА 7 [4]. Пусть $F = LF_w(f)$ – n -кратно ω -насыщенная формация $n \geq 1$. Тогда спутник f является I_{n-1}^w -значным.

ЛЕММА 8 [9]. Пусть Θ – такая полная решетка формаций, что $\Theta^\circ \subseteq \Theta$. Пусть H – ω -локальная формация с каноническим ω -локальным спутником H , F – ω -локальная формация с минимальным ω -локальным Θ -значным спутником f . Тогда в том и только в том случае F – H_{Θ° -критическая формация, когда $F = \Theta^\circ \text{form} G$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $P = G^H$, что либо $\pi = \pi(P) \cap \omega \neq \emptyset$, $\Phi(G) = 1$ и $f(p) = H(p)_{\Theta^\circ}$ -критическая формация для всех $p \in \pi$, либо $\pi = \emptyset$ и $f(\omega) = H_{\Theta^\circ}$ -критическая формация.

ЛЕММА 9 [4]. Пусть $F = I_n^w \text{form} X$, где $n \geq 1$, и пусть f – минимальный I_n^w -значный спутник формации F . Тогда справедливы следующие утверждения: 1) $f(\omega) = I_{n-1}^w \text{form}(G/G_{\omega} \mid G \uparrow X)$; 2) $f(p) = I_{n-1}^w \text{form}(X(F_p))$ для всех $p \in \omega$; 3) $F = LF_w(h)$, спутник h является I_{n-1}^w -значным и p – некоторый фиксированный элемент из ω , то $F = LF_w(f_1)$, где $f_1(a) = h(a)$ для всех $a \in (\omega \setminus \{p\}) \setminus \{\omega\}$, $f_1(p) = I_{n-1}^w \text{form}(G \mid G \text{ Oh}(p) \cap F, O_p(G) = 1)$ и, кроме того, $f_1(p) = f(p)$; 4) $F = LF_w(g)$, где $g(\omega) = F$ и $g(p) = f(p)$ для всех $p \in \omega$.

ЛЕММА 10 [4]. Пусть f_i такой внутренний $(n-1)$ -кратно ω -локальный спутник формации F_i , что $f_i(\omega) = F_i$, $i = 1, 2$. Тогда $F = F_1 \mathfrak{B}_n^w F_2 = LF_w(f)$, где $f = f_1 \mathfrak{B}_{n-1}^w f_2$.

ЛЕММА 11 [10]. Тогда и только тогда F является минимальной n -кратно ω -насыщенной неньпотентной формацией, когда $F = I_n^w \text{form} G$, где G – такая монолитическая группа с цоколем $R = G^N$, что либо $\pi = \pi(R) \cap \omega = \emptyset$, либо $\pi \neq \emptyset$ и выполняется одно из следующих условий:

1) $G = [RQ]$ – группа Шмидта с $F(G) = 1$, где $R = C_G(R)$ – абелева p -группа, $p \in \omega$ и $|Q| = q$ – простое число;

2) R – неабелева pd -группа, $G/R \cong N_p$, где $p \in \omega$, причем, если $|\pi| > 1$, то $n = 1$ и $G = R$ – простая неабелева группа.

ЛЕММА 12 [6]. Пусть G – монолитическая группа с неабелевым монолитом R . Тогда если простое число p делит порядок группы R , то $F_p(G) = 1$.

ЛЕММА 13 [1, с. 26]. Пусть F – произвольная непустая формация и пусть у каждой группы $G \in F$ корадикал G^F не имеет фраттиниевых G -главных факторов. Тогда если A – монолитическая группа из $\text{form} X \setminus F$, то $A \cap H(X)$.

ЛЕММА 14 [2, с. 168]. Пусть F и H – формации, причем H – локальна и G – группа минимального порядка из $F \setminus H$. Тогда G монолитична, ее монолит совпадает с G^H и если G^H – p -группа, то $G^H = C_G(G^H) = F_p(G)$.

ЛЕММА 15 [2, с. 171]. Если в группе G имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа и $O_p(G) = 1$ (p – некоторое простое число), то существует точный неприводимый $F_p[G]$ -модуль, где F_p – поле из p элементов.

ЛЕММА 16 [4]. Пусть F – ω -насыщенная формация и f – ее ω -локальный спутник. Если $G/O_p(G) \leq f(p) \leq F$, то $G \leq F$.

ЛЕММА 17 [4]. Пусть f_1 и f_2 – минимальные ω -локальные Q -значные спутники формаций F_1 и F_2 соответственно. Тогда $F_1 \cap F_2$ в том и только в том случае, когда $f_1 \leq f_2$.

Основные результаты

ТЕОРЕМА 1. Пусть F – n -кратно ω -насыщенная формация. Тогда в том и только в том случае N_n^w -дефект формации F равен 1, когда $F = M \cap H$, где M – n -кратно ω -насыщенная нильпотентная подформация формации F , H – минимальная n -кратно ω -насыщенная ненильпотентная подформация формации F , при этом 1) всякая n -кратно ω -насыщенная нильпотентная подформация из F входит в $M \cap (H \cap N)$; 2) всякая n -кратно ω -насыщенная ненильпотентная подформация F_1 из F имеет вид: $H \cap (F_1 \cap N)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть N_n^w -дефект формации F равен 1. Так как F не является нильпотентной формацией, то по лемме 1 в F входит некоторая минимальная n -кратно ω -насыщенная ненильпотентная подформация H . По условию $M = N \cap F$ – максимальная n -кратно ω -насыщенная подформация в F . Значит, $F = M \cap H$.

Достаточность. Пусть $F = M \cap H$, где M – n -кратно ω -насыщенная нильпотентная подформация формации F , H – минимальная n -кратно ω -насыщенная ненильпотентная подформация F . Понятно, что $F \leq N$. Пусть N_n^w -дефекты n -кратно ω -насыщенных формаций F , M и H равны соответственно t , m и r . Поскольку M – n -кратно ω -насыщенная нильпотентная подформация формации F , то $m = 0$. Так как H – минимальная n -кратно ω -насыщенная ненильпотентная формация, то ее N_n^w -дефект r равен 1. В силу леммы 2 имеет место неравенство $t \leq m + r = 0 + 1 = 1$. Если $t = 0$, то F – нильпотентная формация, что противоречит условию $F \leq N$. Таким образом, N_n^w -дефект формации F равен 1.

Докажем теперь справедливость утверждения 1) второй части теоремы. Так как $N \cap H$ – максимальная n -кратно ω -насыщенная подформация в H , то в силу леммы 3 имеет место решеточный изоморфизм:

$$\begin{aligned} & (((N \cap H) \cap M) \cap H) / N_n^w((N \cap H) \cap M); H / N_n^w H \cap ((N \cap H) \cap M) = \\ & = H / N_n^w(N \cap H) \cap (H \cap M) = H / N_n^w N \cap H. \end{aligned}$$

Следовательно, $(N \cap H) \cap M$ – максимальная n -кратно ω -насыщенная подформация в F . Тогда, поскольку $F \leq N$, то всякая n -кратно ω -насыщенная нильпотентная подформация из F входит в $(N \cap H) \cap M$.

Докажем утверждение 2). Используя лемму 4, получаем, что в формации F нет минимальных n -кратно ω -насыщенных ненильпотентных подформаций, отличных от H .

Пусть теперь F_1 – произвольная n -кратно ω -насыщенная ненильпотентная подформация из F . Тогда в силу уже доказанного и леммы 4 получаем, что $H \cap F_1$. Следовательно, применяя лемму 3, получаем $F_1 = F_1 \cap (H \cap M) = H \cap (F_1 \cap M)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть F – l_n^w -приводимая формация, $n \geq 1$. Тогда и только тогда N_n^w -дефект формации F равен 2, когда F удовлетворяет одному из следующих условий: 1) $F = H_1 \cap H_2 \cap M$, где $M \leq N$, H_1 и H_2 – различные минимальные n -кратно ω -насыщенные ненильпотентные формации; 2) $F = H \cap M$, где $M \leq N$, H – l_n^w -неприводимая формация N_n^w -дефекта 2, $M \not\leq H$, причем если $n > 1$, то $\pi(H) \not\leq \omega$.

Доказательство. Заметим, что при $n = 1$, справедливость утверждения теоремы вытекает из теоремы 1.1 в [5], а также теоремы 1 в [11]. Поэтому мы можем считать, что $n > 1$.

Необходимость. Пусть N_n^w -дефект формации F равен 2, X – такая максимальная n -кратно ω -насыщенная подформация формации F , что N_n^w -дефект формации X равен 1. По теореме 1 получа-

ем $X = H_1 \mathcal{B}_n^w M$, где H_1 – минимальная n -кратно ω -насыщенная ненильпотентная формация, а $M \in \mathcal{N}$. Если в формации F имеется еще одна минимальная n -кратно ω -насыщенная ненильпотентная подформация H_2 , отличная от H_1 , то в силу леммы 4 $H_2 \perp X$. Значит,

$$F = X \mathcal{B}_n^w H_2 = H_1 \mathcal{B}_n^w M \mathcal{B}_n^w H_2 = H_1 \mathcal{B}_n^w H_2 \mathcal{B}_n^w M$$

и выполнено условие 1).

Пусть теперь в формации F нет отличных от H_1 минимальных n -кратно ω -насыщенных ненильпотентных подформаций. Поскольку $F = I_n^w$ -приводимая формация, то в $F \setminus X$ найдется такая группа G , что $R = I_n^w \text{form} G \not\leq F$. Понятно, что $F = X \mathcal{B}_n^w R$. Ввиду леммы 5 N_n^w -дефект формации R меньше или равен 2. Поскольку $F = X \mathcal{B}_n^w R$ и N_n^w -дефект формации X равен 1, то N_n^w -дефект формации R не равен 0. Допустим, что N_n^w -дефект формации R равен 1. Тогда по теореме 1 и предположению о единственности H_1 получаем, что $R = H_1 \mathcal{B}_n^w M_1$, где $M_1 \in \mathcal{N}$. Значит, $F = X \mathcal{B}_n^w R = H_1 \mathcal{B}_n^w M \mathcal{B}_n^w M_1 = H_1 \mathcal{B}_n^w M_2$, где $M_2 \in \mathcal{N}$. Но тогда в силу леммы 2 N_n^w -дефект формации F равен 1. Противоречие. Поэтому N_n^w -дефект формации R равен 2. Тогда $M \perp R$, так как иначе $X = H_1 \mathcal{B}_n^w M \cap R$, что противоречит максимальной формации X в формации F . Таким образом, $F = X \mathcal{B}_n^w R = M \mathcal{B}_n^w H_1 \mathcal{B}_n^w R = M \mathcal{B}_n^w R$.

Предположим, что $R = I_n^w$ -неприводимая формация. Заметим, что если $\pi(R) \nVdash \omega$ и $R = \omega$ -насыщенная формация, то R является насыщенной формацией. Действительно, из ω -насыщенности формации R получаем, что для любой группы G из условия $G/O_w(G) \nVdash F(G) \text{ OR}$ следует, что $G \text{ OR}$. Но $\pi(R) \nVdash \omega$. Значит, $G = O_w(G)$. Тогда получаем, что из условия $G/F(G) \text{ OR}$ следует, что $G \text{ OR}$. Таким образом, R является насыщенной формацией. Ввиду леммы 6 всякая n -кратно насыщенная формация, имеющая нильпотентный дефект 2, приводима. В этом случае R – приводимая n -кратно насыщенная формация. Противоречие. Поэтому $\pi(R) \Vdash \omega$. Тогда получаем, что формация F удовлетворяет условию 2).

Пусть теперь $R = I_n^w$ -приводимая формация. Воспользуемся индукцией по числу разрешимых n -кратно ω -насыщенных подформаций однопорожденной формации R .

Обозначим через X_1 максимальную n -кратно ω -насыщенную подформацию формации R , имеющую N_n^w -дефект, равный 1. Так как $R = I_n^w$ -приводимая формация, то в $R \setminus X_1$ существует такая группа G_1 , что $R_1 = I_n^w \text{form} G_1 \not\leq R$. Ввиду максимальной формации X_1 в формации R справедливо $R = X_1 \mathcal{B}_n^w R_1$. По теореме 1 и предположению единственности H_1 получаем, что $X_1 = H_1 \mathcal{B}_n^w M_2$, где M_2 – некоторая нильпотентная n -кратно ω -насыщенная подформация формации X_1 . Тогда $R = X_1 \mathcal{B}_n^w R_1 = H_1 \mathcal{B}_n^w M_2 \mathcal{B}_n^w R_1 = M_2 \mathcal{B}_n^w R_1$. Заметим, повторяя приведенные выше рассуждения для R , получаем, что либо формация $F = M_1^* \mathcal{B}_n^w R_1$ (где $M_1^* = M \mathcal{B}_n^w M_1$) удовлетворяет условию 2) и необходимость доказана, либо формация R_1 является I_n^w -приводимой формацией N_n^w -дефекта 2. Понятно, что $M_2 \perp R_1$, так как иначе $X_1 \cap R_1$, что противоречит максимальной формации X_1 в R_1 .

Поскольку R_1 – собственная n -кратно ω -насыщенная подформация формации R , то число разрешимых подформаций формации R_1 меньше, чем у R . Ввиду замечания 3 [4] в однопорожденной формации R имеется лишь конечное множество разрешимых n -кратно ω -насыщенных подформаций. Поэтому, повторяя описанные выше действия, через конечное число шагов мы придем к ситуации, когда либо формация $F = M_m^* \mathcal{B}_n^w R_m$ (где $M_m^* = M \mathcal{B}_n^w M_1 \mathcal{B}_n^w K \mathcal{B}_n^w M_m$) удовлетворяет условию 2) и необходимость доказана, либо $R_m = R_{m+1} \mathcal{B}_n^w M_{m+2}$, где $R_{m+1} = I_n^w$ -приводимая формация N_n^w -дефекта 2, $M_{m+2} \in \mathcal{N}$ – наименьшая неединичная разрешимая подформация формации R такая, что $M_{m+2} \perp R_{m+1}$.

Обозначим через X_{m+2} максимальную n -кратно ω -насыщенную подформацию формации R_{m+1} , имеющую нильпотентный N_n^w -дефект, равный 1. Так как $R_{m+1} = I_n^w$ -приводимая формация, то в $R_{m+1} \setminus X_{m+2}$ существует такая группа G_{m+2} , что $R_{m+2} = I_n^w \text{form} G_{m+2} \not\leq R_{m+1}$. Ввиду максимальной формации X_{m+2} в формации R_{m+1} справедливо $R_{m+1} = X_{m+2} \mathcal{B}_n^w R_{m+2}$. По теореме 1 и предположению

единственности H_1 получаем, что $X_{m+2} = H_1 B_n^w M_{m+3}$, где M_{m+3} – некоторая нильпотентная n -кратно ω -насыщенная подформация формации X_{m+2} . Тогда

$$R_{m+1} = X_{m+2} B_n^w R_{m+2} = H_1 B_n^w M_{m+2} B_n^w R_{m+2} = M_{m+2} B_n^w R_{m+2}.$$

Но $M_{m+3} \cap R_{m+2}$ по предположению индукции. Следовательно, формация R_{m+1} не может быть I_n^w -приводимой формацией. Значит, $F = M_{m+1}^* B_n^w R_{m+1}$, где $M_{m+1}^* = M B_n^w M_1 B_n^w K B_n^w M_{m+1} \cap N$, $R_{m+1} - I_n^w$ -неприводимая формация N_n^w -дефекта 2. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $F = H_1 B_n^w H_2 B_n^w M$, где $M \cap N$, H_1 и H_2 – различные минимальные n -кратно ω -насыщенные ненильпотентные формации. Пусть f , h_1 , h_2 и m N_n^w -дефекты формаций F , H_1 , H_2 и M соответственно. Тогда по лемме 2 N_n^w -дефект формации F не превосходит 2. С другой стороны, по лемме 5 N_n^w -дефект формации F больше либо равен 2. Таким образом, N_n^w -дефект формации F равен 2.

Аналогично рассматривается случай, когда $F = H B_n^w M$, где $M \cap N$, $H - I_n^w$ -неприводимая формация N_n^w -дефекта 2. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть F – n -кратно ω -насыщенная формация ($n \geq 2$). Тогда и только тогда формация $F - I_n^w$ -неприводимая формация N_n^w -дефекта 2, когда $F = I_n^w \text{form} G$, где G – такая монолитическая группа с цоколем P , что выполняется одно из следующих условий:

1) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – p -группа, $p \nmid \omega$, а H – группа, удовлетворяющая одному из следующих условий:

1.1) циклическая примарная группа порядка q^2 ($q \nmid \omega$);

1.2) неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты $q \nmid \omega$;

1.3) монолитическая группа с цоколем $Q = H^{N_p}$ и $Q - \omega'$ -группа;

2) P – неабелева группа, $\pi(P) \cap \omega = \{p\}$, а группа $(G/P)/O_p(G/P)$ удовлетворяет одному из следующих условий:

2.1) q -группа, где $q \nmid \omega$;

2.2) элементарная абелева q -группа, $q \nmid \omega$;

2.3) подпрямое произведение групп, изоморфных M , где M – такая монолитическая группа с цоколем L , что $L = M^{N_p}$ – неабелева группа, $\pi(L) \cap \omega = \{p\}$;

3) $P - \omega'$ -группа, формация $I_n^w \text{form}(G/P)$ имеет N_n^w -дефект 1, $G - M$ -базисная группа, где $M = I_n^w \text{form} M B_n^w K$, $K \cap N$, а M – такая монолитическая группа с цоколем $L = M^N$, что выполнено одно из следующих условий:

3.1) $M = [L]N$ – группа Шмидта с $F(M) = 1$, где $L = C_M(L)$ – абелева p -группа, $p \nmid \omega$ и $|N| = q$ – простое число, $q \nmid \omega$;

3.2) $L = M^{N_p}$ – неабелева группа, причем $\pi(L) \cap \omega = \{p\}$;

3.3) $L - \omega'$ -группа.

Доказательство. Необходимость. Пусть $F - I_n^w$ -неприводимая формация N_n^w -дефекта 2, M – максимальная n -кратно ω -насыщенная подформация формации F с каноническим спутником M^* . Заметим, что ввиду леммы 7 спутник M^* является $(n-1)$ -кратно ω -локальным. Тогда F является минимальной n -кратно ω -насыщенной не M -формацией. Пусть f и m – минимальные $(n-1)$ -кратно ω -локальные спутники формаций F и M соответственно. В силу замечания 2 в [4] имеем $M^*(p) = N_p m(p)$ для всех $p \nmid \omega$.

Применяя лемму 8, получим, что $F = I_n^w \text{form} G$, где G – такая монолитическая группа с цоколем $P = G^M$, что либо $\pi = \pi(P) \cap \omega \neq \emptyset$, $F(G) = 1$ и $f(p) - (N_p m(p))_{n-1}^w$ -критическая формация для всех

$p \nmid \pi$, либо $\pi = \mathbb{E}$ и $f(\omega) - \mathbf{M}_{n-1}^w$ -критическая формация. По теореме 1 $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \mathbf{B}_n^w \mathbf{K}$, где $\mathbf{M}_1$ – минимальная n -кратно ω -насыщенная ненильпотентная подформация формации $\mathbf{M}$, $\mathbf{K} \in \mathbf{N}$.

Предположим, что $\pi(\mathbf{M}) \not\subseteq \omega \perp \pi(\mathbf{F}) \not\subseteq \omega$. Тогда найдется простое число $r \nmid (\pi(\mathbf{F}) \not\subseteq \omega) \setminus \pi(\mathbf{M})$. Пусть Z_r – группа порядка r . Тогда $I_n^w \text{form} Z_r = \mathbf{N}_r \perp \mathbf{M}$. Так как $\mathbf{M}$ – максимальная n -кратно ω -насыщенная подформация формации $\mathbf{F}$ и $\mathbf{N}_r \perp \mathbf{M}$, то $\mathbf{F} = \mathbf{M} \mathbf{B}_n^w \mathbf{N}_r$. Но формация $\mathbf{F}$ является I_n^w -неприводимой по условию теоремы. Противоречие. Следовательно, $\pi(\mathbf{M}) \not\subseteq \omega = \pi(\mathbf{F}) \not\subseteq \omega$.

Пусть m_1 и k – минимальные $(n-1)$ -кратно ω -локальные спутники формаций $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{K}$ соответственно. По лемме 9 формации $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{K}$ имеют такие внутренние $(n-1)$ -кратно ω -локальные спутники $\bar{m}_1$ и $\bar{k}$, принимающие соответственно значения: $\bar{m}_1(a) = m_1(a)$ при $a \nmid \omega \not\subseteq \pi(\mathbf{M}_1)$; $\bar{m}_1(a) = \mathbf{M}_1$ при $a = \omega'$; $\bar{m}_1(a) = \mathbb{J}$ при $a \nmid \omega \setminus \pi(\mathbf{M}_1)$ и $\bar{k}(a) = k(a)$ при $a \nmid \omega \not\subseteq \pi(\mathbf{K})$; $\bar{k}(a) = \mathbf{K}$ при $a = \omega'$; $\bar{k}(a) = \mathbb{J}$ при $a \nmid \omega \setminus \pi(\mathbf{K})$. Ввиду леммы 10 справедливо равенство $\bar{m} = \bar{m}_1 \mathbf{B}_{n-1}^w \bar{k}$.

В силу леммы 11 $\mathbf{M}_1 = I_n^w \text{form} M$, где M – такая монолитическая группа с цоклем $L = M^N$, что либо $\tau = \pi(L) \not\subseteq \omega = \mathbb{E}$, либо $\tau \nmid \mathbb{E}$ и выполняется одно из следующих условий:

- (1) $M = [L]N$ – группа Шмидта с $F(M) = 1$, где $L = C_M(L)$ – абелева l -группа, $l \nmid \omega$ и $|N| = q$ – простое число;
- (2) L – неабелева ld -группа $M/L \in \mathbf{N}_l$, где $\tau = \{l\}$.

Заметим, что если $\pi(\mathbf{F}) \nmid \omega$, то любая ω -насыщенная подформация из $\mathbf{F}$ является насыщенной. Следовательно, любая n -кратно ω -насыщенная подформация формации $\mathbf{F}$ является n -кратно насыщенной. По лемме 6 при $n \geq 2$ всякая n -кратно насыщенная формация с $\mathbf{N}_n^w$ -дефектом 2 приводима. Поэтому при $\pi(\mathbf{F}) \nmid \omega$ формация $\mathbf{F}$ не может быть I_n^w -неприводимой формацией, что противоречит условию. Таким образом, $\pi(\mathbf{F}) \not\subseteq \omega \perp \mathbb{E}$.

Допустим, что P – неабелев цокль группы G . Пусть $\pi = \pi(P) \not\subseteq \omega \perp \mathbb{E}$ и $p \nmid \pi$. Тогда по лемме 12 имеем $F_p(G) = 1$. Значит, $f(p) = I_{n-1}^w \text{form}(G/F_p(G)) = I_{n-1}^w \text{form} G$.

Пусть для формации $\mathbf{M}_1$ выполнено условие (1). Предположим, что $p \nmid \mathbb{N}_l$. Так как $p \nmid \pi(\mathbf{F}) \not\subseteq \omega = \pi(\mathbf{M}) \not\subseteq \omega$, то имеем $\bar{m}(p) = \bar{m}_1(p) \mathbf{B}_{n-1}^w \bar{k}(p) = (1)$. Тогда $f(p) = I_{n-1}^w \text{form} G$ – минимальная $(n-1)$ -кратно ω -насыщенная не $\mathbf{N}_p$ -формация. Значит, $G/P \in \mathbf{N}_p \cap \mathbf{N}$, $\pi(G) \not\subseteq \omega = \{p\}$ и $\mathbf{N}_n^w$ -дефект формации $\mathbf{F}$ равен 1 по лемме 11. Противоречие. Поэтому $p = l$. Используя лемму 9, имеем

$$\bar{m}_1(p) = m_1(p) = I_{n-1}^w \text{form}(M/F_p(M)) = I_{n-1}^w \text{form} N \in \mathbf{N}_q.$$

Следовательно, $G/P \in \mathbf{N}_p m_1(p) = \mathbf{N}_p I_{n-1}^w \text{form} N \in \mathbf{N}_p \mathbf{N}_q$.

Покажем, что $\pi(P) \not\subseteq \omega = \{p\}$. Действительно, если $|\pi(P) \not\subseteq \omega| > 1$, то найдется такое $s \nmid \pi(P) \not\subseteq \omega$, что $s \nmid \mathbb{N}_p$. Поскольку $\pi(\mathbf{F}) \not\subseteq \omega = \pi(\mathbf{M}) \not\subseteq \omega$, то $s \nmid \pi(\mathbf{M}) \not\subseteq \omega$. Тогда $\bar{m}(s) = \bar{m}_1(s) \mathbf{B}_{n-1}^w \bar{k}(s) = (1)$. Так как s делит порядок P , то по лемме 12 имеем $F_s(G) = 1$. Тогда $f(s) = I_{n-1}^w \text{form}(G/F_s(G)) = I_{n-1}^w \text{form} G$ – минимальная $(n-1)$ -кратно ω -насыщенная не $\mathbf{N}_s$ -формация. Поскольку $p \nmid \pi(P) \not\subseteq \omega$ и $n \geq 2$, то $\mathbf{N}_p \nmid f(s)$. Так как при этом $\mathbf{N}_p \in I_{n-1}^w$ и $\mathbf{N}_p \perp M f(s)$, то $\mathbf{N}_p \in \mathbf{N}_s$. Но $s \nmid \mathbb{N}_p$. Противоречие. Поэтому $\pi(P) \not\subseteq \omega = \{p\}$.

По лемме 9 имеем $m_1(p) = I_{n-1}^w \text{form}(M/F_p(M)) = I_{n-1}^w \text{form}(M/L) = I_{n-1}^w \text{form} N$. Следовательно, $m(p) = m_1(p) \mathbf{B}_{n-1}^w k(p) = I_{n-1}^w \text{form} N$ и $f(p) = I_{n-1}^w \text{form} G$ является минимальной $(n-1)$ -кратно ω -насыщенной не $(\mathbf{N}_p I_{n-1}^w \text{form} N)$ -формацией.

Ясно также, что $G/P \in \mathbf{N}_p$, поскольку в противном случае $\mathbf{N}_n^w$ -дефект формации $\mathbf{F}$ равен 1 в силу леммы 11.

Если $q = |N| \nmid \omega$, то $\mathbf{N}_p I_{n-1}^w \text{form} N = \mathbf{N}_p \mathbf{N}_q$. Значит, $I_{n-1}^w \text{form} G$ является минимальной $(n-1)$ -кратно ω -насыщенной не $\mathbf{N}_p \mathbf{N}_q$ -формацией. Поэтому $G/P \in \mathbf{N}_p \mathbf{N}_q$. Значит, $(G/P)/O_p(G/P) \in \mathbf{N}_q$, и формация $\mathbf{F}$ удовлетворяет условию 2.1) теоремы.

Если $q \nmid \omega$, то $N_p I_{n-1}^w \text{form} N = N_p \text{form} N$. Тогда $G/P \text{ ON}_p \text{form} N$. Так как $G/P \Pi N_p$, то $(G/P)/O_p(G/P) \text{ O form} N$, т.е. $(G/P)/O_p(G/P)$ является элементарной абелевой q -группой, и формация F удовлетворяет условию 2.2) теоремы.

Пусть для формации M_1 выполнено условие (2). Покажем, что $\pi(P) \not\subseteq \omega = \pi(L) \subseteq \omega$. Предположим, что существует $r \nmid \omega \not\subseteq (\pi(P) \setminus \pi(L))$. Тогда $m(r) = m_1(r) \mathbb{B}_{n-1}^w k(r) = (1)$. Значит, $f(r) = I_{n-1}^w \text{form} G$ – минимальная $(n-1)$ -кратно ω -насыщенная не N_r -формация. Последнее невозможно, так как $N_r M f(r)$. Поэтому $\pi(P) \subseteq \omega \nsubseteq \pi(L) \subseteq \omega = \{l\}$. Но $\pi(P) \subseteq \omega \nsubseteq E$. Следовательно, $l = p$.

Ввиду леммы 12, $F_p(M) = 1$. Так как $m_1(p) = I_{n-1}^w \text{form} M$, то $f(p) = I_{n-1}^w \text{form} G$ – минимальная не $N_p I_{n-1}^w \text{form} M$ -формация. Значит, $G/P \text{ ON}_p I_{n-1}^w \text{form} M$. Но, как нетрудно показать, $N_p I_{n-1}^w \text{form} M = N_p \text{form} M$. Если $G/P \text{ ON}_p$, то по лемме 11 N_n^w -дефект формации F равен 1. Противоречие. Следовательно, $G/P \Pi N_p$ и $(G/P)/O_p(G/P) \text{ O form} M$. Но тогда $\text{form}((G/P)/O_p(G/P)) = \text{form} M$. Так как при этом группа M является монолитической группой с неабелевым цоклем L , то, применяя лемму 13, получим, что $(G/P)/O_p(G/P)$ – подпрямое произведение групп изоморфных группе M . Таким образом, группа G удовлетворяет условию 2.3) теоремы.

Пусть теперь $M_1 = I_n^w \text{form} M$ – такая формация, что M – монолитическая группа с цоклем $L = M^N$, $\tau = \pi(L) \subseteq \omega = E$. Так как $p \nmid \pi(M) \subseteq \omega$, то $m(p) = (1)$. Но тогда $f(p) = I_{n-1}^w \text{form} G$ – минимальная $(n-1)$ -кратно ω -насыщенная не N_p -формация. Значит, $G/P \text{ ON}_p$ и по лемме 11 получаем, что N_n^w -дефект формации F равен 1. Противоречие. Таким образом, данный случай невозможен.

Пусть P – абелева p -группа, $p \nmid \omega$. Тогда по лемме 14 имеем $F_p(G) = P$. Пусть формация M_1 удовлетворяет условию (1).

Предположим, что $p \nmid \omega$. Тогда $m(p) = (1)$. Значит, $f(p) = I_{n-1}^w \text{form}(G/P)$ – минимальная $(n-1)$ -кратно ω -насыщенная не N_p -формация. Пусть H – группа минимального порядка из $f(p) \setminus N_p$. Тогда H является монолитической группой с цоклем $Q = H^{N_p}$. Ясно, что $f(p) = I_{n-1}^w \text{form}(G/P) = I_{n-1}^w \text{form} H$ и $O_p(H) = 1$. Применяя лемму 15, получаем, что существует точный неприводимый $F_p[H]$ -модуль V . Обозначим через $T = [V] \mathbb{H}$. Ввиду леммы 16 группа $T \text{ OF}$. Так как $T/F_p(T); H \Pi m(p)$, то $F = I_n^w \text{form} T$. Поскольку $f(p) = I_{n-1}^w \text{form}(G/P) \Pi M$ и формация M разрешима, то Q – абелева r -группа для некоторого простого числа $r \nmid p$. Но $M = M_1 \mathbb{B}_n^w K \Pi N_p N$. Если $r \nmid \omega$, то группа H нильпотентна. Поскольку $H/Q \text{ ON}_p$, то $H = Q$ – группа простого порядка r . Но тогда по лемме 11 получаем, что N_n^w -дефект формации F равен 1. Противоречие. Поэтому $r = l$. Так как при этом $\{p, l\} \nsubseteq \omega$, то $\pi(G) \nsubseteq \omega$, что невозможно. Поэтому $p = l$.

Но тогда $m(p) = I_{n-1}^w \text{form} N$ и $f(p) = I_{n-1}^w \text{form}(G/P)$ – минимальная $(n-1)$ -кратно ω -насыщенная не $(N_p I_{n-1}^w \text{form} N)$ -формация.

Рассмотрим группу $H \text{ O } f(p) \setminus N_p I_{n-1}^w \text{form} N$. Тогда H является монолитической группой с цоклем $Q = H^{N_p I_{n-1}^w \text{form} N}$. Поскольку $f(p) = I_{n-1}^w \text{form}(G/P) \Pi M$ и формация M разрешима, то Q – абелева r -группа для некоторого простого числа r . Ясно, что $O_p(H) = 1$. Применяя лемму 15, получаем, что существует точный неприводимый $F_p[H]$ -модуль V . Обозначим через $T = [V] \mathbb{H}$. Ввиду леммы 16 группа $T \text{ OF}$. Так как $T/F_p(T); H \Pi m(p)$, то $F = I_n^w \text{form} T$. Но $M = M_1 \mathbb{B}_n^w K \Pi N_p N$. Значит, $H \text{ ON}$. Но H – монолитическая группа. Значит, $H = r$ -группа. Если $r \nmid \omega$, то $\pi(G) \nsubseteq \omega$, что невозможно. Значит, $r \nmid \omega$. Если $H = Q$, то по лемме 11 N_n^w -дефект формации F равен 1. Противоречие. Следовательно, $H \nsubseteq Q$. Поскольку $H/Q \text{ O } I_{n-1}^w \text{form} N$, то $r = q$. Таким образом, $I_{n-1}^w \text{form} N = \text{form} N$ и $H/Q \text{ O form} N$. Тогда $f(p)$ – минимальная не $\text{form} N$ -формация. Поскольку группа H нильпотентна, то любая собственная подгруппа из H принадлежит $f(p)$. Таким образом, H – минимальная не $\text{form} N$ -

группа. Так как при этом H – q -группа, то H либо циклическая примарная группа порядка q^2 , либо неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q . Но тогда группа T удовлетворяет условию 1.1) или 1.2) теоремы.

Пусть для формации $\mathbf{M}_1$ выполнено условие (2). Допустим, что $p \nmid l$. Тогда $m(p) = (1)$. Значит, $f(p) = l_{n-1}^w \text{form}(G/P)$ – минимальная $(n-1)$ -кратно ω -насыщенная не $\mathbf{N}_p$ -формация. Поскольку $l \nmid \pi(\mathbf{F}) \nsubseteq \omega = \pi(\mathbf{M}) \nsubseteq \omega$, то $l \nmid \pi(G/P)$. Так как при этом $n \geq 2$, то $\mathbf{N}_l \cap l_{n-1}^w \text{form}(G/P) = f(p)$. Если $\mathbf{N}_l = l_{n-1}^w \text{form}(G/P)$, то $\pi(G) \nsubseteq \omega$, что невозможно. Значит, $\mathbf{N}_l \cap l_{n-1}^w \text{form}(G/P)$. Но $\mathbf{N}_p \cap l_{n-1}^w \text{form}(G/P)$. Следовательно, $\mathbf{N}_l \cap \mathbf{N}_p$. Противоречие. Таким образом, $p = l$.

Тогда $m(p) = l_{n-1}^w \text{form} \mathbf{M}$ и $f(p) = l_{n-1}^w \text{form}(G/P)$ – минимальная $(n-1)$ -кратно ω -насыщенная не $\mathbf{N}_p \cap l_{n-1}^w \text{form} \mathbf{M}$ -формация. Выберем в $f(p) \setminus \mathbf{N}_p \cap l_{n-1}^w \text{form} \mathbf{M}$ группу H минимального порядка. Тогда H – монолитическая группа с цоклем $Q = H^{\mathbf{N}_{p^{n-1} \text{form} \mathbf{M}}}$ и $O_p(H) = 1$. Применяя лемму 15, получаем, что существует точный неприводимый $F_p[H]$ -модуль V . Обозначим через $T = [V] \mathbf{H}$. Ввиду леммы 16 группа $T \in \mathbf{F}$. Так как $T/F_p(T) \leq H \leq \Pi m(p)$, то $\mathbf{F} = l_n^w \text{form} T$. Предположим, что Q – неабелев цокль группы H . Ввиду того, что $H \cap \mathbf{M} = l_n^w \text{form}(\{M\} \cap \mathbf{K})$ и $l_n^w \text{form}(\{M\} \cap \mathbf{K}) \cap \mathbf{S} \text{form}(\{M\} \cap \mathbf{K})$, то $H \cap \text{form}(\{M\} \cap \mathbf{K}) \setminus \mathbf{N}$. Следовательно, по лемме 13 имеем $H \cap \mathbf{H}(\{M\} \cap \mathbf{K})$. Поскольку $H \leq \mathbf{K}$ и $M/L \cap \mathbf{N}_p$, то группа H изоморфна группе M . Но тогда $T \cap \mathbf{N}_p \cap l_n^w \text{form} \mathbf{M}$. Однако $\mathbf{N}_p \cap l_n^w \text{form} \mathbf{M} = l_n^w \text{form} \mathbf{M}$. Поэтому $\mathbf{F} = l_n^w \text{form} \mathbf{M}$ и $\mathbf{N}_n^w$ -дефект формации $\mathbf{F}$ равен 1. Противоречие. Следовательно, Q – абелева q -группа, для некоторого простого числа $q \nmid p$. Допустим, что $q \nmid \omega$. Пусть D – группа порядка q . Тогда $D \in f(p)$. Пусть V – точный неприводимый $F_p[D]$ -модуль и $W = [V] \mathbf{D}$. Применяя лемму 16, получим $W \in \mathbf{F}$. Ввиду леммы 11 формация $\mathbf{L} = l_n^w \text{form} W$ имеет $\mathbf{N}_n^w$ -дефект 1. Поскольку $\mathbf{L} \cap \mathbf{H}$ и $\mathbf{L} \nsubseteq \mathbf{M}_1$, то мы получаем противоречие с леммой 5. Значит, $q \nmid \omega'$. Поскольку $H \cap \mathbf{M} = l_n^w \text{form}(\{M\} \cap \mathbf{K})$ и $l_n^w \text{form}(\{M\} \cap \mathbf{K}) \cap \mathbf{S}_w \text{form}(\{M\} \cap \mathbf{K})$, то $H \cap \text{form}(\{M\} \cap \mathbf{K}) \setminus \mathbf{N}$. Следовательно, по лемме 13 имеем $H \cap \mathbf{H}(\{M\} \cap \mathbf{K})$. Так как $H \leq \mathbf{K}$ и $M/L \cap \mathbf{N}_p$, то группа H изоморфна группе M . Но L – неабелева ld -группа. Противоречие. Следовательно, данный случай невозможен.

Пусть формация $\mathbf{M}_1$ такая, что $\tau = \pi(L) \nsubseteq \omega = \mathbb{E}$. Так как $p \nmid \pi(\mathbf{M}) \nsubseteq \omega$, то $m(p) = (1)$. Но тогда $f(p) = l_{n-1}^w \text{form}(G/P)$ – минимальная $(n-1)$ -кратно ω -насыщенная не $\mathbf{N}_p$ -формация. Пусть H – группа минимального порядка из $f(p) \setminus \mathbf{N}_p$. Тогда H является монолитической группой с цоклем $Q = H^{\mathbf{N}_p}$. Понятно, что $f(p) = l_{n-1}^w \text{form}(G/P) = l_{n-1}^w \text{form} H$ и $O_p(H) = 1$. Применяя лемму 15, получаем, что существует точный неприводимый $F_p[H]$ -модуль V . Обозначим через $T = [V] \mathbf{H}$. Ввиду леммы 16 группа $T \in \mathbf{F}$. Так как $T/F_p(T) \leq H \leq \Pi m(p)$, то $\mathbf{F} = l_n^w \text{form} T$.

Пусть Q – абелева q -группа для некоторого простого числа q . Если $q \nmid \omega$, то $\pi(T) \nsubseteq \omega$. Противоречие. Значит, $q \nmid \omega'$. Кроме того, понятно, что $H \leq \mathbf{N}$. Так как в противном случае $H \cap \mathbf{N}_q$ и по лемме 11 формация $\mathbf{F} = l_n^w \text{form} T$ имеет $\mathbf{N}_n^w$ -дефект 1, что невозможно. Поскольку $H \cap \mathbf{M} = l_n^w \text{form}(\{M\} \cap \mathbf{K})$ и $l_n^w \text{form}(\{M\} \cap \mathbf{K}) \cap \mathbf{S}_w \text{form}(\{M\} \cap \mathbf{K})$, то $H \cap \text{form}(\{M\} \cap \mathbf{K}) \setminus \mathbf{N}$. Тогда по лемме 13 получим, что $H \cap \mathbf{H}(\{M\} \cap \mathbf{K})$. Так как $H \leq \mathbf{K}$ и $M/L \cap \mathbf{N}$, то группа H изоморфна группе M .

Пусть Q – неабелев цокль группы H . Тогда так как $H \cap \mathbf{M} = l_n^w \text{form}(\{M\} \cap \mathbf{K})$ и $l_n^w \text{form}(\{M\} \cap \mathbf{K}) \cap \mathbf{S} \text{form}(\{M\} \cap \mathbf{K})$, то $H \cap \text{form}(\{M\} \cap \mathbf{K}) \setminus \mathbf{N}$. Применяя теперь лемму 13, заключаем, что $H \cap \mathbf{H}(\{M\} \cap \mathbf{K})$. Так как $H \leq \mathbf{K}$ и $M/L \cap \mathbf{N}_l$, получаем ввиду монолитичности H , что группы H и M изоморфны.

Кроме того, заметим, что $M/L \cap \mathbf{N}_p$. Поскольку иначе найдется группа R простого порядка $r \nmid p$ такая, что $R \cap l_{n-1}^w \text{form} \mathbf{M} = f(p)$. Пусть V – точный неприводимый $F_p[R]$ -модуль и $W = [V] \mathbf{R}$.

Применяя лемму 16, получим $W \in \mathcal{F}$. Ввиду леммы 11 формация $L = l_n^w \text{form} W$ имеет N_n^w -дефект 1. Поскольку $L \in \mathcal{F}$ и $L \notin \mathcal{M}_1$, то мы получаем противоречие с леммой 5. Значит, $M/L \in \mathcal{N}_p$. Таким образом, группа T удовлетворяет условию 1.3) теоремы.

Пусть теперь P – ω' -группа и пусть формация M_1 удовлетворяет условию (1) или (2). Тогда $G/P \in \mathcal{O} M \cap \mathcal{N}_1 \mathcal{N}$ или, соответственно, $G/P \in \mathcal{O} M \cap \mathcal{G}_{\omega'} \mathcal{N}$. Если $P \in \mathcal{F}(G)$, то $G \in \mathcal{O} \mathcal{N}_1 \mathcal{N}$ или $G \in \mathcal{O} \mathcal{G}_{\omega'} \mathcal{N}$. Но P – ω' -группа. Значит, $G \in \mathcal{O} \mathcal{N}$. Противоречие. Поэтому $P \in \mathcal{MF}(G)$. Но тогда $\text{form}(G/P)$ – единственная максимальная подформация $\text{form} G$ и G – M -базисная группа. Если $G/P \in \mathcal{O} \mathcal{N}$, то по лемме 11 формация F имеет N_n^w -дефект 1. Противоречие. Значит, $G/P \in \mathcal{P} \mathcal{N}$. Так как при этом $G/P \in \mathcal{O} M$, то N_n^w -дефект формации $l_n^w \text{form}(G/P)$ равен 1. Значит, G удовлетворяет условию 3.1) или 3.2) теоремы.

Пусть теперь для формации M_1 выполняется условие $\pi(L) \not\subseteq \omega = \mathbb{A}$. Тогда по лемме 8 $f(\omega) = l_{n-1}^w \text{form} G$ – минимальная $(n-1)$ -кратно ω -насыщенная не M -формация. Снова применяя лемму 8, получим, что $l_{n-2}^w \text{form} G$ – M_{n-2}^w -критическая формация, ..., $\text{form} G$ – минимальная не M -формация и G – M -базисная группа. Если $G/P \in \mathcal{O} \mathcal{N}$, то по лемме 11 формация F имеет N_n^w -дефект 1. Противоречие. Значит, $G/P \in \mathcal{P} \mathcal{N}$. Так как при этом $G/P \in \mathcal{O} M$, то N_n^w -дефект формации $l_n^w \text{form}(G/P)$ равен 1. Таким образом, группа G удовлетворяет условию 3.3) теоремы.

Достаточность. Пусть для формации F выполнено условие 1) теоремы и H – циклическая примарная группа порядка q^2 , $q \nmid \omega$. Пусть f – минимальный $(n-1)$ -кратно ω -локальный спутник формации F . По лемме 14 имеем $f(p) = l_{n-1}^w \text{form}(G/F_p(G)) = l_{n-1}^w \text{form} H$. Так как $q \nmid \omega$, то $l_{n-1}^w \text{form} H = \text{form} H$. Заметим, что $\text{form} Z_q$ является единственной максимальной подформацией формации $\text{form} H$, где Z_q – группа порядка q .

Построим $(n-1)$ -кратно ω -локальный спутник m , принимающий следующие значения: $m(a) = \text{form} Z_q$ при $a = p$; $m(a) = f(a)$ при $a = (\omega \setminus \{\omega'\}) \setminus \{p\}$. Рассмотрим n -кратно ω -насыщенную формацию $M = LF_w(m)$. Пусть m_1 – минимальный $(n-1)$ -кратно ω -локальный спутник формации M . Тогда так как $m_1 \leq m \leq f$, то ввиду леммы 17 $M \in \mathcal{F}$.

Пусть X – произвольная собственная n -кратно ω -насыщенная подформация формации F . И пусть x – минимальный $(n-1)$ -кратно ω -локальный спутник формации X . Если $x(p) = f(p)$, то так как $G/O_p(G) \in \mathcal{O} x(p)$, получаем $G \in \mathcal{O} X$. Следовательно, $F \subseteq X$. Противоречие. Значит, $x(p) \in \mathcal{MF}(p)$. Тогда так как $m(p) = \text{form} Z_q$ – единственная максимальная подформация $f(p)$, то $x(p) \in m_1(p)$ и $x(a) \in m(a)$ для $a \in (\omega \setminus \{\omega'\}) \setminus \{p\}$, т.е. $x \leq m_1$. По лемме 17 получаем, что $X \in \mathcal{M}$. Таким образом, M – единственная максимальная n -кратно ω -насыщенная подформация формации F , т.е. F является l_n^w -неприводимой формацией.

Поскольку $O_p(Z_q) = 1$, то ввиду леммы 15 существует точный неприводимый $F_p[Z_q]$ -модуль V , где F_p – поле из p элементов. Пусть $G_1 = \langle V, Z_q \rangle$. Тогда так как $G_1/O_p(G_1) \cong Z_q \in \mathcal{O} m(p)$, то ввиду леммы 16, $G_1 \in \mathcal{O} M$. Если предположить, что $R = l_n^w \text{form} G_1 \in \mathcal{M}$, то по лемме 17 получаем $r \leq m_1$, где r – минимальный $(n-1)$ -кратно ω -насыщенный спутник формации R . Но тогда $r(p) = l_{n-1}^w \text{form} Z_q = \text{form} Z_q \not\leq \text{form} Z_q$. Противоречие. Значит, $M = l_n^w \text{form} G_1$, т.е. формация M порождается группой Шмидта и имеет нильпотентный l_n^w -дефект 1. Но тогда N_n^w -дефект формации F равен 2.

Случаи, когда H – неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты ($q \nmid \omega$), и H – монолитическая группа с цоклем $Q = H^{N_p}$, где Q – ω' -группа, рассматриваются аналогично.

Пусть для формации F выполнено условие 2) теоремы. Построим l_n^w -значный ω -локальный спутник m , принимающий следующие значения: $m(a) = l_{n-1}^w \text{form}((G/P)/O_p(G/P))$ при $a = p$; $m(a) = f(a)$ при $a = (\omega \setminus \{\omega'\}) \setminus \{p\}$. Ясно, что $m(p) \in \mathcal{MF}(p)$.

Рассмотрим n -кратно ω -насыщенную формацию $\mathbf{M}$, порожденную спутником m . Пусть m_1 – минимальный $(n-1)$ -кратно ω -локальный спутник формации $\mathbf{M}$. Тогда так как $m_1 \leq m \leq f$, то ввиду леммы 17 $\mathbf{M} \leq \mathbf{F}$.

Пусть $\mathbf{X}$ – произвольная собственная n -кратно ω -насыщенная подформация формации $\mathbf{F}$, x – ее минимальный I_{n-1}^ω -значный ω -локальный спутник. Тогда $x(a) \leq m(a)$ для любого $a \in (\omega \setminus \{\omega'\}) \setminus \{p\}$. Кроме того, как нетрудно показать, имеет место включение:

$$x(p) \leq N_p I_{n-1}^\omega \text{form} \mathbf{M} = N_p I_{n-1}^\omega \text{form}((G/P)/O_p(G/P)) = N_p m(p).$$

Поэтому $\mathbf{X} \leq \mathbf{M}$. Таким образом, $\mathbf{M}$ – единственная максимальная n -кратно ω -насыщенная подформация формации $\mathbf{F}$, т.е. $\mathbf{F}$ является I_n^ω -неприводимой формацией.

В силу леммы 11 N_n^ω -дефект n -кратно ω -насыщенной формации $\mathbf{M}$ равен 1. Но тогда N_n^ω -дефект I_n^ω -неприводимой формации $\mathbf{F}$ равен 2.

Пусть для формации $\mathbf{F}$ выполнено условие 3). Построим ω -локальный спутник f_n такой, что $f_n(\omega') = \text{form} G$ и $f_n(a) = m(a)$ для любого $a \in \omega$. Так как группа G является $\mathbf{M}$ -базисной, то всякая подформация из $\text{form} G$ содержится в $\mathbf{M}$. Следовательно, формация $\mathbf{F}_{n-1} = LF_\omega(f_n)$ по лемме 8 является $\mathbf{M}$ -критической. Пусть теперь f_n – такой I_1^ω -значный ω -локальный спутник, что $f_{n-1}(\omega') = I_1^\omega \text{form} G$ и $f_{n-1}(a) = m(a)$ для любого $a \in \omega$. Снова применяя лемму 8, получаем, что формация $\mathbf{F}_{n-2} = LF_\omega(f_{n-1})$ является $\mathbf{M}^\omega$ -критической и т.д. Построим I_{n-1}^ω -значный ω -локальный спутник f_1 такой, что $f_1(\omega') = I_{n-1}^\omega \text{form} G$ и $f_1(a) = m(a)$ для любого $a \in \omega$. Опять применяя лемму 8, получим, что формация $\mathbf{F} = LF_\omega(f_1)$ является $\mathbf{M}_n^\omega$ -критической. Заметим также, что ввиду леммы 11 N_n^ω -дефект n -кратно ω -насыщенной формации $\mathbf{M}$ равен 1. Следовательно, N_n^ω -дефект I_n^ω -неприводимой формации $\mathbf{F}$ равен 2. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М., 1978. – 267 с.
2. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М., 1989. – 256 с.
3. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларус. навука, 1997. – 240 с.
4. Скиба, А.Н. Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. тр. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114 – 147.
5. Частично локальные формации с заданными системами подформаций: отчет о НИР (закл.): ГБЦМ 20-07 / УО «Гомельск. гос. ун-т им. Ф. Скорины»; рук. В.Г. Сафонов; исполн.: В.М. Селькин, В.В. Аниськов. – Гомель, 2001. – 69 с. – № ГР 2000419.
6. Шаблина, И.П. Модулярные и алгебраические решетки n -кратно ω -насыщенных формаций конечных групп: автореф дис. ... канд. физ.-мат. наук / И.П. Шаблина. – Гомель, 2003. – 92 с.
7. Рябченко, А.И. О частично насыщенных формациях с $\mathbf{X}^\omega$ -дефектом 1 / А.И. Рябченко // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2008. – № 1. – С. 28 – 34.
8. Сафонов, В.Г. О минимальных кратно локальных не $\mathbf{H}$ -формациях конечных групп / В.Г. Сафонов // Вопросы алгебры. – Гомель: Изд-во Гомельск. ун-та, 1995. – Вып. 8. – С. 109 – 138.
9. Селькин, В.М. О $\mathbf{H}_{\omega}^\omega$ -критических формациях / В.М. Селькин, А.Н. Скиба // Вопросы алгебры. – Гомель: Изд-во ГГУ им. Ф. Скорины, 1999. – Вып. 14. – С. 127 – 131.
10. Рябченко, А.И. О минимальных n -кратно ω -насыщенных ненильпотентных формациях / А.И. Рябченко // Вестн. Полоцк. гос. ун-та. Сер. С. – 2008. – № 5. – С. 41 – 46.
11. Рябченко, А.И. К теории частично насыщенных формаций / А.И. Рябченко // Изв. Гом. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2008. – № 6(51). – Ч. 2. – С. 153 – 160.

Поступила 03.02.2009