УДК 512.542

ГРУППЫ ШМИДТА С ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ 2-МАКСИМАЛЬНЫМИ ИЛИ 3-МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

Ю.В. ЛУЦЕНКО
(Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины)

Пусть G – конечная группа. Подгруппа H группы G называется 2-максимальной (или второй максимальной) подгруппой группы G, если H является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе M группы G. Аналогично могут быть определены 3-максимальные, 4-максимальные подгруппы и т.д. Подгруппа H группы G называется X-перестановочной в G, где $\varnothing \neq X \subseteq G$, если для любой подгруппы T группы G в X найдется такой элемент x, что $HT^x = T^xH$. Будем обозначать пересечение всех 2-максимальных подгрупп группы G через $\Phi^2(G)$ и называть второй подгруппой Фраттини группы G. Работа посвящена исследованию групп Шмидта, у которых все 2-максимальные или все 3-максимальные подгруппы перестановочны между собой. В частности, доказано, что G является группой Шмидта, в которой любые две 3-максимальные подгруппы перестановочны в том и только в том случае, когда G является группой одного из следующих типов: (a) *G – группа с абелевыми силовскими подгруппами*; (b) *$G = [P]Q$, где P изоморфна либо группе $M_3(p)$, либо группе кватернионов порядка* 8; (c) *$G = [P]Q$, где $|P| > p^3$, $|\Phi(P)| = p$ и $\Phi(P) = \Phi^2(P)$.*

1. Введение

Все группы в данной статье являются конечными. Напомним, что подгруппа H группы G называется *2-максимальной (*или *второй максимальной)* подгруппой группы G, если H является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе M группы G. Аналогично могут быть определены 3-максимальные, 4-максимальные подгруппы и т.д.

Результаты, связанные с изучением максимальных подгрупп, составили одно из самых содержательных направлений в теории конечных групп. Это связано с тем, что многие известные классы групп допускают описания на основе свойств максимальных подгрупп.

По мере развития теории максимальных подгрупп многими авторами предпринимались попытки изучения и применения 2-максимальных, 3-максимальных и т.д. подгрупп. Пожалуй, наиболее ранний результат, относящийся к этому направлению, был получен Хуппертом [1], установившим сверхразрешимость группы, в которой все вторые максимальные подгруппы нормальны. В дальнейшем этот результат был развит в нескольких направлениях. В частности, сверхразрешимость разрешимых групп, у которых все вторые максимальные подгруппы перестановочны со всеми силовскими подгруппами, была установлена Агровалем в работе [2], а в работе [3] Л.Я. Поляков доказал, что группа сверхразрешима, если любая ее 2-максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами этой группы. В недавней работе [4] Го Шуин и К.П. Шам доказали разрешимость групп, в которых все вторые максимальные подгруппы обладают свойством покрытия-изолирования. Еще один подход к изучению групп с заданными 2-максимальными подгруппами разрабатывался в работах [5 – 7], где, в частности, доказано, что группа G является сверхразрешимой, если все ее 2-максимальные подгруппы G-перестановочны в G (напомним, что подгруппа H группы G называется X-перестановочной в G [5], где $\varnothing \neq X \subseteq G$, если для любой подгруппы T группы G в X найдется такой элемент x, что $HT^x = T^xH$).

В обзоре [8] были сформулированы задачи описания групп, в которых все 2-максимальные или все 3-максимальные подгруппы перестановочны между собой.

Целью данной работы является изучение перестановочности 2-максимальных и 3-максимальных подгрупп в случае, когда основная группа является группой Шмидта.

2. Предварительные результаты

При доказательстве основных результатов мы будем использовать следующие хорошо известные свойства групп Шмидта [9, гл. VI].

ЛЕММА 2.1. *Пусть G – группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *$G = [P]\langle a\rangle$, где P, $\langle a\rangle$ – силовские p-подгруппа и q-подгруппа группы G, соответственно*;

(2) *G имеет в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются группы $P\langle a^q\rangle$ и $P'\langle a\rangle$*;

(3) $G' = P$;

(4) $\Phi(G) = Z(G) = P'\times\langle a^q\rangle$;

(5) *$P/\Phi(P)$ – главный фактор группы G, причем если $|P/\Phi(P)| = p^\alpha$, то p^α сравнимо с единицей по модулю q*;

(6) *Наибольшая нормальная подгруппа группы G, строго содержащаяся в P, совпадает с $\Phi(P) = P' = C_P(a)$*;

(7) *Если P абелева, то она элементарна*;

(8) *Если P неабелева, то ее центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают и имеют экспоненту p.*

Для доказательства основного результата нам необходима следующая лемма, описывающая общие свойства X-перестановочных подгрупп.

ЛЕММА 2.2 [6]. *Пусть A, B – подгруппы группы G и K – нормальная подгруппа в G. Тогда:*

(1) *если A X-перестановочна с B, тогда B X-перестановочна с A;*

(2) *если A X-перестановочна с B, тогда AK/K является XK/K-перестановочной с BK/K в группе G/K;*

(3) *пусть K – подгруппа группы A. Тогда A/K является XK/K-перестановочной с BK/K в G/K тогда и только тогда, когда A X-перестановочна с B в группе G.*

3. Основные результаты

Пусть G – группа. Определим ее подгруппу $F_i(G)$ через соотношения: $F_0(G) = 1$, $F_i(G)/F_{i-1}(G) = F(G/F_{i-1}(G))$ для всех натуральных i [10, с. 132]. Тогда справедлива следующая

ЛЕММА 3.1. *Пусть G – группа. Тогда любые две максимальные подгруппы группы G являются $F_i(G)$-перестановочными в том и только в том случае, когда группа $G/F_i(G)$ нильпотентна.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть для некоторого $i \in \boldsymbol{N}$ любые две максимальные подгруппы группы G являются $F_i(G)$-перестановочными. Тогда по лемме 2.2 любые две максимальные подгруппы из группы $G/F_i(G)$ являются перестановочными и поэтому группа $G/F_i(G)$ является нильпотентной.

Достаточность. Предположим теперь, что группа $G/F_i(G)$ является нильпотентной. Допустим, что $F_i(G) = 1$. В этом случае группа G является нильпотентной и поэтому любые две максимальные подгруппы группы G перестановочны, так как они нормальны в G.

Пусть теперь $F_i(G) \neq 1$. Допустим, что M и T – произвольные максимальные подгруппы в G. Предположим, что $M_G \neq T_G$. Тогда $MT = G = TM$ и поэтому подгруппы M и T являются $F_i(G)$-перестановочными. Теперь допустим, что $M_G = T_G$. Тогда, по теореме 4.43 в [10] в группе G существует такой элемент g, что $M = T^g$. Рассмотрим следующие возможные случаи:

(1) $F_i(G)$ не содержится в T. В этом случае $G = F_i(G)T$ и поэтому $M = T^{tf}$ для некоторых $f \in F_i(G)$ и $t \in T$. Следовательно, $M = T^f$ и поэтому подгруппы M и T являются $F_i(G)$-перестановочными.

(2) $F_i(G)$ содержится в T. В этом случае $T/F_i(G)$ является максимальной подгруппой в группе $G/F_i(G)$ и поэтому группа $T/F_i(G)$ нормальна в $G/F_i(G)$. Это влечет, что подгруппа T нормальна в G и поэтому подгруппы M и T являются $F_i(G)$-перестановочными. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Группа G является метанильпопентной тогда и только тогда, когда любые две ее максимальные подгруппы $F(G)$-перестановочны в группе G.*

СЛЕДСТВИЕ 3.3. *Пусть G – ненильпотентная группа. Если любые две 2-максимальные подгруппы группы G перестановочны, то G является группой Шмидта.*

Следующий результат описывает конечные ненильпотентные группы, в которых все 2-максимальные подгруппы перестановочны между собой.

ТЕОРЕМА 3.4. *Пусть G – ненильпотентная группа. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *G является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами;*

(2) *любые две 2-максимальные подгруппы группы G являются перестановочными.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Предположим, что группа $G = [P]\langle a\rangle$ является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, где P и $\langle a\rangle$ – силовские p-подгруппа и q-подгруппа группы G, соответственно. Тогда, по лемме 2.1 (2) группа G имеет в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются группы $\langle a\rangle$ и $P\langle a^q\rangle$. Тогда группы вида $\langle a^q\rangle$, $P\langle a^{q^2}\rangle$ и $P_1\langle a^q\rangle$, где P_1 – некоторая максимальная подгруппа группы P, являются представителями трех классов 2-максимальных подгрупп группы G. По лемме 2.1(4), $\langle a^q\rangle$ содержится в $Z(G)$ и поэтому $\langle a^q\rangle$ и $\langle a^{q^2}\rangle$ являются нормальными подгруппами в G. Это влечет нормальность 2-максимальных подгрупп $\langle a^q\rangle$ и $P\langle a^{q^2}\rangle$ в группе G. Так как любые две 2-максимальные подгруппы группы G вида $P_1\langle a^q\rangle$ и $P_2\langle a^q\rangle$ перестановочны, где P_1 и P_2 – некоторые максимальные подгруппы в P, то любые две 2-максимальные подгруппы группы G перестановочны.

(2) $\Rightarrow$ (1). Допустим, что G – ненильпотентная группа и любые две 2-максимальные подгруппы группы G перестановочны. Отсюда каждая максимальная подгруппа группы G нильпотентна, и поэтому G является группой Шмидта. Покажем теперь, что G является группой с абелевыми силовскими подгруппами. По лемме 2.1 (1), $G = [P]Q$, где P – силовская p-подгруппа группы G и Q – циклическая q-подгруппа в G.

Допустим, что $P' \neq 1$. Пусть E – максимальная подгруппа группы $P'Q$, индекс которой равен p. Тогда E является 2-максимальной подгруппой в G, по лемме 2.1 (2), и $Q \leq E$. Из условия теоремы вытекает, что EE^x – подгруппа в G для всех элементов x из G. Согласно лемме 4.7 в [11, гл. VI] существует такой элемент y в группе EE^x, что $Q^y = QQ^x$, поэтому $Q = Q^x$ является нормальной подгруппой в группе G. Данное противоречие показывает, что $P' = 1$, что в свою очередь влечет абелевость группы P. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.5. *В том и только в том случае в ненильпотентной группе G каждая 2-максимальная подгруппа нормальна, когда G – группа Шмидта, нормальная силовская подгруппа которой имеет простой порядок.*

СЛЕДСТВИЕ 3.6 [1]. *Если каждая вторая максимальная подгруппа группы G нормальна в G, то G сверхразрешима.*

В следующей теореме мы получим описание групп Шмидта, в которых любые две 3-максимальные подгруппы перестановочны. Будем обозначать пересечение всех 2-максимальных подгрупп группы G через $\mathbf{\Phi^2(G)}$ и называть ***второй подгруппой Фраттини группы G***.

ТЕОРЕМА 3.7. *Пусть G – группа Шмидта. Тогда любые две 3-максимальные подгруппы группы G перестановочны в том и только в том случае, когда G является группой одного из следующих типов:*

a) G – группа с абелевыми силовскими подгруппами;

b) $G = [P]Q$, где P изоморфна либо группе $M_3(p)$ [13, с. 190], *либо группе кватернионов порядка 8*;

c) $G = [P]Q$, где $|P| > p^3$, $|\Phi(P)| = p$ и $\Phi(P) = \Phi^2(P)$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $G = [P]Q$ – группа Шмидта, у которой любые две 3-максимальные подгруппы перестановочны между собой.

Если P – абелева группа, то G является группой типа *a*).

Предположим теперь, что P – неабелева группа. По лемме 2.1 (8), $\Phi(P) = P' = Z(P)$. Допустим, что $|\Phi(P)| > p$. Пусть E – 2-максимальная подгруппа в $\Phi(P)Q$, индекс которой равен p^2. Тогда E является 3-максимальной подгруппой в G, по лемме 2.1(2), и $Q \le E$. Из условия теоремы вытекает, что EE^x – подгруппа в G для всех элементов x из G. Согласно лемме 4.7 в [11, гл. VI] существует такой элемент y в группе EE^x, что $Q^{\,y} = QQ^x$ и поэтому $Q = Q^x$ является нормальной подгруппой в группе G. Данное противоречие показывает, что $|\,\Phi(P)\,| = p$.

Покажем, что в группе P любые две 2-максимальные подгруппы перестановочны. Пусть P_1 и P_2 – произвольные 2-максимальные подгруппы группы P и Q_1 – максимальная подгруппа группы Q. Так как Q_1 нормальна в G, по лемме 2.1(4), то P_1Q_1 и P_2Q_1 являются 3-максимальными подгруппами в G. По условию, $(P_1Q_1)(P_2Q_1) = (P_2Q_1)(P_1Q_1)$ и поэтому $L = Q_1(P_1P_2)$ является подгруппой в группе G. Согласно лемме 4.7 в [11, гл. VI] в группе L существует силовская p-подгруппа L_p, такая, что $L_p = P_1P_2$. Это влечет перестановочность подгрупп P_1 и P_2.

Предположим, что существует такая 2-максимальная подгруппа T в группе P, что $\Phi(P)$ не содержится в T. Так как $P/\Phi(P)$ – абелева группа и $T\Phi(P)/\Phi(P) \le P/\Phi(P)$, то $T \approx T\Phi(P)/\Phi(P)$ также является абелевой группой и поэтому $T \times \Phi(P)$ – абелева максимальная подгруппа в P. Тогда, по теореме 5.1.9 в [12] $|\,P\,| = p^3$. В этом случае, по теореме 5.1 в [13], P изоморфна одной из следующих групп: $M_3(p)$, $M(p)$, D или Q, где D – диэдральная группа, Q – группа кватернионов порядка 8,

$$M_3(p) = \langle a, b \mid a^{p^2} = b^p = 1,\ a^b = a^{1+p} \rangle \text{ и}$$

$$M(p) = \langle x, y, z \mid x^p = y^p = z^p = 1, [x, z] = [y, z] = 1, [x, y] = z \rangle \text{ [13, с. 190, 191, 203].}$$

Если P изоморфна $M(p)$, то

$$P = \Omega_1(P) = \{\, g \in G \mid g^p = 1\}.$$

Но всякая подгруппа порядка p группы P является 2-максимальной подгруппой. Так как в группе P любые две 2-максимальные подгруппы перестановочны, то P – абелева группа, противоречие.

Если P изоморфна диэдральной группе, то по теореме 4.3 в [13] $P = \Omega_1(P)$, что невозможно, как показано выше. Следовательно, подгруппа P изоморфна либо группе $M_3(p)$, либо группе кватернионов порядка 8. Таким образом, G является группой типа *b*).

Теперь допустим, что $\Phi(P)$ содержится в каждой 2-максимальной подгруппе группы P, тогда $\Phi(P) = \Phi^2(P)$. Если при этом $|\,P\,| = p^3$, то G снова является группой типа *b*). Если же $|\,P\,| > p^3$, то G является группой типа *c*).

Достаточность. Пусть G – группа типа *a*), т.е. $G = [P]Q$ – группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. В этом случае максимальными подгруппами в G являются группы Q^x (для всех $x \in G$) и PQ_1 (Q_1 – максимальная подгруппа в Q). По лемме 2.1 (4) 2-максимальная подгруппа из Q нормальна в группе G. С другой стороны, поскольку, P – абелева группа, по условию, то PQ_1 также является абелевой группой и поэтому все ее 2-максимальные подгруппы перестановочны. Таким образом, любые две 3-максимальные подгруппы в группе G перестановочны.

Пусть теперь G является группой типа *b*). Покажем вначале, что любые две 2-максимальные подгруппы из P перестановочны. Если P изоморфна $M_3(p)$, то по теореме 4.3 в [13] $|\,\Phi(P)\,| = p$ и $\Omega_1(P)$ является абелевой группой типа (p, p). Так как каждая 2-максимальная подгруппа группы P содержится в $\Omega_1(P)$, то любые две 2-максимальные подгруппы из P перестановочны. Если же P изоморфна группе кватернионов порядка 8, то $\Phi(P)$ является единственной 2-максимальной подгруппой группы P.

Рассмотрим максимальную подгруппу $M_1 = \Phi(P)Q^x$ группы G. Так как $|\ \Phi(P)\ | = p$, то каждая 2-максимальная подгруппа группы M_1 является нормальной в G, по лемме 2.1(4), и поэтому любые две 2-максимальные подгруппы группы M_1 перестановочны.

Теперь рассмотрим максимальную подгруппу $M_2 = PQ_1$ группы G, где Q_1 – максимальная подгруппа в Q. Для того чтобы показать, что любые две 2-максимальные подгруппы группы M_2 перестановочны, достаточно проверить перестановочность любых двух 2-максимальных подгрупп из M_2, имеющих индеком p^2. Но это следует из того, что в группе P любые две 2-максимальные подгруппы перестановочны. Следовательно, любые две 3-максимальные подгруппы в G перестановочны.

Пусть теперь G является группой типа c). Рассмотрим максимальную подгруппу $M_1 = \Phi(P)Q^x$ группы G. Так как $|\ \Phi(P)\ | = p$, то каждая 2-максимальная подгруппа группы M_1 является нормальной в G по лемме 2.1 (4) и поэтому любые две 2-максимальные подгруппы группы M_1 перестановочны.

Теперь рассмотрим максимальную подгруппу $M_2 = PQ_1$ группы G, где Q_1 – максимальная подгруппа в Q. Для того чтобы показать, что любые две 2-максимальные подгруппы группы M_2 перестановочны, достаточно проверить перестановочность любых двух 2-максимальных подгрупп из M_2, имеющих индексом p^2. Но это следует из того, что в группе P каждая 2-максимальная подгруппа нормальна (в силу условия $\Phi(P) = \Phi^2(P)$). Следовательно, любые две 3-максимальные подгруппы в G перестановочны.

Теорема доказана.

ПРИМЕР 3.8. Пусть P – нециклическая группа порядка 4, Q – циклическая группа порядка 9, V – максимальная подгруппа из Q. Существует гомоморфизм f из Q в $Aut(P)$ такой, что $Ker\ f = V$. Следовательно, мы можем рассмотреть группу $G = [P]Q$, где $C_G(P) = V$. Ясно, что G является группой Шмидта типа a) в теореме 3.7.

ПРИМЕР 3.9. Хорошо известно, что группа автоморфизмов $Aut(Q_8)$ группы кватернионов Q_8 порядка 8 имеет элемент a порядка 3. Пусть $G = [Q_8]\langle a\rangle$. Тогда G является группой Шмидта. Действительно, пусть Z – единственная подгруппа порядка 2 группы Q_8. Тогда Z нормальна в G и поэтому $C_G(Z) = G$. Понятно, что Q_8/Z – главный фактор группы G и $Z \le \Phi(G)$. Также понятно, что $Z\langle a\rangle$ – максимальная подгруппа группы G и каждая максимальная подгруппа M группы G с $|\ G : M\ | = 2^a$ является сопряженной к подгруппе $Z\langle a\rangle$. Таким образом, G – группа Шмидта типа b), описанного в теореме 3.7.

В заключение заметим, что кроме приведенных выше результатов нами получено полное описание конечных ненильпотентных групп, у которых любые две 3-максимальные подгруппы перестановочны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Huppert, B. Normalteiler and maximal Untergruppen endlicher gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. – Vol. 60. – P. 409 – 434.
2. Agrawal, R.K. Generalized center and hypercenter of a finite group / R.K. Agrawal // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – Vol. 54. – P. 13 – 21.
3. Поляков, Л.Я. Конечные группы с перестановочными подгруппами / Л.Я. Поляков // Конечные группы / Ин-т мат. АН БССР; под ред. Е. Волкинда. – Минск: Наука и техника, 1966. – С. 75 – 88.
4. Guo, X.Y. Cover-avoidance properties and the structure of finite groups / X.Y. Guo, K.P. Shum // Journal of Pure and Applied Algebra. – 2003. – Vol. 181. – P. 297 – 308.
5. Skiba, A.N. H-permutable subgroups / A.N. Skiba // Изв. Гом. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2003. – Vol. 4(19). – P. 37 – 39.
6. Guo, W. Conditionally Permutable Subgroups and Supersolubility of Finite Groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // SEAMS Bull Math. – 2005. – Vol. 29, № 2. – P. 792 – 810.
7. Guo, W. X-semipermutable Subgroups of Finite Groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 31 – 41.
8. Skiba, A.N. Finite groups with given systems of generalized permutable subgroups / A.N. Skiba // Изв. Гом. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2006. – № 3(36). – С. 12 – 31.
9. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978.
10. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Выш. шк., 2006.
11. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin–Heidelberg–New York: Springer – Verlag, 1967.
12. Kurzweil, H. The theory of finite groups: an introduction / H. Kurzweil, B. Stellmacher. – Berlin–Heidelberg–New York: Springer–Verlag, 2004.
13. Gorenstein, D. Finite groups. – 2nd edn. / D. Gorenstein. – New York: Chelsea, 1980.

Поступила 03.09.2008