

## МЕХАНИКА

УДК 539.3

## НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТОНКОСТЕННОЙ ГОФРИРОВАННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

*А.Ю. ЗАМБЖИЦКИЙ, канд. физ.-мат. наук Е.А. КОРЧЕВСКАЯ  
(Витебский государственный университет им. П.М. Машерова);  
д-р физ.-мат. наук, проф. Г.И. МИХАСЕВ  
(Белорусский государственный университет, Минск)*

*Исходя из уравнений равновесия безмоментной теории тонких оболочек, а также уравнений физического состояния, связывающих мембранные усилия с перемещениями, с использованием метода многих масштабов, выполнена оценка напряженно-деформированного состояния тонкостенной гофрированной цилиндрической панели, лежащей на упругом основании. В явном виде найдены формулы, позволяющие оценить напряженно-деформированное состояние вдали от краев оболочки, зависящее от физических и геометрических свойств панели, длины гофра, а также принимающие во внимание свойства грунта. В качестве расчетной модели для учета взаимодействия гофрированной цилиндрической панели и грунта была использована модель Фусса – Винклера.*

**Введение.** Гофрированные конструкции имеют широкий спектр областей применения. Чаще всего такие конструкции применяются при строительстве железнодорожных подземных развязок, веток метрополитена, водопропускных труб и малых мостов с пролетами. Чтобы исключить деформации гофрированных конструкций при их эксплуатации, необходимо развитие методов расчета, которые позволят прогнозировать прочность и долговечность гофрированных конструкций.

В развитии методов расчета гофрированных конструкций можно выделить три этапа [1]:

- 1) начало 1890-х годов – 1914 год. Расчет труб производился без учета физической среды, в которой устанавливались конструкции. Действие грунта на гофрированную конструкцию задавалось эпюрами давления, которые не зависели от собственных перемещений конструкции;
- 2) середина 30-х – начало 70-х годов. Появились методы, учитывающие упругий отпор грунта;
- 3) середина 70-х годов прошлого века – настоящее время. Развиваются методы, моделирующие грунт упругой и упругопластической средой и учитывающей совместную работу грунта и гофрированных конструкций.

С момента начала исследований в области гофрированных конструкций было предложено достаточно много методов расчета. Наиболее простыми и популярными являются такие способы расчета, как способ Фельдта (1899), расчет по Леви (1905), расчет по Ясевичу (1901). Также были предложены и более сложные модели, например, модель сыпучего тела, модель упругого тела.

В качестве расчетной модели для учета взаимодействия гофрированной цилиндрической панели и грунта в данной работе используется модель Фусса – Винклера. В этом случае воздействие упругого заполнителя принимается в качестве дополнительного давления, обусловленного нормальным перемещением стенок трубы.

Напряженно-деформированное состояние оболочки часто представляет собой сумму основного напряженного состояния и краевых эффектов [2]. Первое из них распространяется на всю оболочку, а вторые имеют местный характер и локализуются вблизи определенных кривых, которые называются линиями искажения напряженно-деформированного состояния, или просто линиями искажения (к ним принадлежат края оболочки, линии излома срединной поверхности). В данной статье рассмотрено основное напряженно-деформированное состояние.

**Постановка задачи.** Рассмотрим длинную тонкостенную гофрированную цилиндрическую панель, находящуюся под действием собственного веса и переменного гидростатического давления, изменяющегося по высоте панели по линейному закону (рис. 1).

Поставим задачу об оценке основного напряженно-деформированного состояния панели по безмоментной теории тонких упругих оболочек.

Смоделируем гофрированную панель тонкой оболочкой вращения толщиной  $h$ . Расстояние от оси вращения до срединной поверхности оболочки зададим функцией

$$B^*(x^*) = R + \delta^* F^*(x^*) = R \left[ 1 + \mu F^*(x^*) \right],$$

$$F^*(x^*) = \sin\left(\frac{2\pi x^*}{\lambda^*}\right), F_x = \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right), \quad (1)$$

где  $R$  – радиус опорного цилиндра;  $\delta^*$  – высота гофра;  $\lambda^*$  – длина волны гофра;  $x^* = Rx$  – координата, отсчитываемая в направлении оси вращения;  $\mu = \delta^*/R$ ,  $\lambda = \lambda^*/R$ .

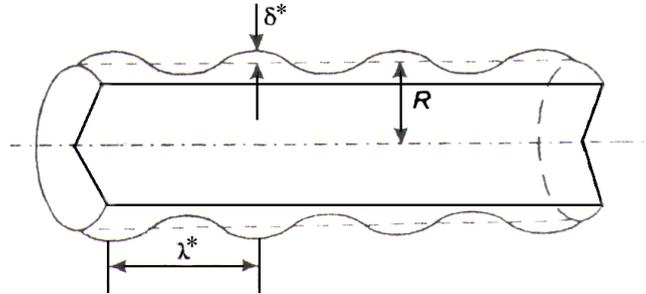


Рис. 1. Гофрированная цилиндрическая панель

Для упрощения задачи введем следующие предположения:

1) панель считаем достаточно длинной ( $L/R \gg 1$ ), так что граничными условиями на ее торцах пренебрегаем;

2) воздействие упругого заполнителя принимаем в качестве дополнительного давления  $q_\alpha^*$ , обусловленного нормальным перемещением  $w^*$  стенок трубы, в рамках модели Фусса – Винклера [3 – 6]:

$$q_\alpha^* = \alpha w^*, \quad (2)$$

где  $\alpha$  – коэффициент постели винклеровского основания;

3) высота  $\delta^*$  и длина волны гофра  $\lambda^*$  – также достаточно малые величины по сравнению с радиусом  $R$ , так что  $\mu, \lambda \ll 1$ .

В качестве исходных используем уравнения равновесия безмоментной теории тонких оболочек [7]:

$$\begin{aligned} A_2 \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial x} T_1 + A_1 \frac{\partial S}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_2}{\partial x} T_2 &= -A_1 A_2 q_1, \\ A_2 \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial x} S + A_1 \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_2}{\partial x} S &= -A_1 A_2 q_2, \\ k_1 T_1 + k_2 T_2 &= q_n, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $A_i$  – параметры Ляме;  $x, \varphi$  – продольная и угловая координаты на поверхности оболочки;  $T_i, S$  – безразмерные тангенциальные усилия в срединной поверхности оболочки;  $k_i/R$  – главные кривизны срединной поверхности;  $q_1, q_2, q_n$  – безразмерные тангенциальные и нормальные составляющие нагрузки, обусловленные действием переменного гидростатического давления, весом самой панели, а также отпором упругого заполнителя и определяемые по формулам [8]:

$$q_1 = q_{1c} \cos \varphi; \quad q_2 = q_{2s} \sin \varphi; \quad q_n = q_{n0} + q_{nc} \cos \varphi + q_{n\alpha} w. \quad (4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} q_{1c} &= \frac{\gamma}{E} \cdot \frac{B_x^{st}}{\sqrt{1 + B_x^{st2}}}, \\ q_{2s} &= \frac{R\gamma}{E}, \quad q_{n0} = -\frac{RP}{Eh} \frac{H_0 + R}{R}, \\ q_{nc} &= \frac{PR^2}{Eh} - \frac{R\gamma}{E\sqrt{1 + B_x^{st2}}}, \quad q_{n\alpha} = -\frac{R^2\alpha}{Eh}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\gamma$ ,  $E$  – удельный вес и модуль Юнга материала панели;  $P$  – удельный вес грунта, в который помещена панель;  $\delta \leq H_0$  – минимальная глубина залегания панели (расстояние от поверхности грунта до кромки опорного цилиндра).

Тангенциальные усилия связаны со своими размерными аналогами отношениями:

$$T_i^* = EhT_i, S^* = EhS. \quad (6)$$

Уравнения физического состояния, связывающие мембранные усилия с безразмерными перемещениями [7]:

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{u_i^*}{R}, w = \frac{w^*}{R}, \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} + k_1 w = T_1 - \nu T_2, \\ \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x} u_1 + k_2 w &= T_2 - \nu T_1, \\ -\frac{A_2}{A_1 A_2} u_2 + \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} &= 2(1 + \nu) S, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $u_1^*$ ,  $u_2^*$  – перемещения в осевом и окружном направлениях соответственно;  $\nu$  – коэффициент Пуассона материала панели.

Параметры Ляме и главные кривизны в принятой системе координат имеют вид:

$$A_1 = \sqrt{1 + \mu F'^2} x, A_2 = 1 + \mu F x, \quad (8)$$

$$k_1 x = -\mu F'' x, k_2 x = \frac{1 + \mu F x}{\sqrt{1 - \mu^2 F'^2} x}. \quad (9)$$

**Метод решения.** Разложим тангенциальные и нормальные составляющие нагрузки (4) в ряд Фурье [9]. Принимая во внимание четность функции  $q_1 \varphi$ , получаем:

$$q_1 \varphi \cong \frac{q_{1c}}{\theta} \sin \theta + \sum_{n=1}^{\infty} -1^n \frac{2\theta q_{1c} \sin \theta}{\theta^2 - \pi n^2} \cdot \cos n\varphi. \quad (10)$$

Здесь  $\theta$  – угол раствора поперечного сечения панели.

Также разложив в ряд Фурье функцию  $q_2 \varphi$  и принимая во внимание ее нечетность, получим:

$$q_2 \varphi \cong \sum_{n=1}^{\infty} -1^n \frac{2\pi n q_{2s} \sin \theta}{\theta^2 - \pi n^2} \cdot \sin n\varphi. \quad (11)$$

Принимая во внимание четность функции  $q_n \varphi$ , получаем:

$$q_n \varphi \cong q_{n0} + q_{n\alpha} w + \frac{q_{nc} \sin \theta}{\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} -1^n \frac{2\theta q_{nc} \sin \theta}{\theta^2 - \pi n^2} \cdot \cos n\varphi. \quad (12)$$

Неизвестные функции в уравнениях (3), (7) представим в виде:

$$\begin{aligned} T_j &= T_j^0 + \sum_{i=1}^{\infty} T_j^c \cos i\varphi, S = S^0 + \sum_{i=1}^{\infty} S_i^s \sin i\varphi, \\ w &= w^0 + \sum_{i=1}^{\infty} w_i^c \cos i\varphi, \\ u_1 &= u_1^0 + \sum_{i=1}^{\infty} u_1^c \cos i\varphi, u_2 = u_2^0 + \sum_{i=1}^{\infty} u_2^s \sin i\varphi. \end{aligned} \quad (13)$$

Подстановка (13), (8) и (9) в уравнения (3) и (7) порождает две новые системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 A_2 \frac{\partial T_1^0}{\partial x} + A_2' T_1^0 - T_2^0 &= -A_1 A_2 \frac{q_{1c}}{\theta} \sin \theta, \\
 A_2 \frac{\partial S^0}{\partial x} + 2A_2' S^0 &= 0, \\
 k_1 T_1^0 + k_2 T_2^0 &= q_{n_0} + q_{n_\alpha} w + \frac{q_{n_c} \sin \theta}{\theta}, \\
 \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1^0}{\partial x} + k_1 w^0 &= T_1^0 - \nu T_2^0, \\
 \frac{A_2'}{A_1 A_2} u_1^0 + k_2 w^0 &= T_1^0 - \nu T_2^0, \\
 -\frac{A_2'}{A_1 A_2} u_2^0 + \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2^0}{\partial x} &= 2(1 + \nu) S^0;
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
 A_2 \frac{\partial T_{1i}^c}{\partial x} + A_2' T_{1i}^c - T_{2i}^c + A_1 i S_i^s &= -A_1 A_2 \sum_{i=1}^{\infty} -1 i \frac{2\theta q_{1c} \sin \theta}{\theta^2 - \pi i^2}, \\
 A_2 \frac{\partial S_i^s}{\partial x} + 2A_2' S_i^s - A_1 i T_{2i}^c &= -A_1 A_2 \sum_{i=1}^{\infty} -1 i \frac{2\pi \cdot i q_{2s} \sin \theta}{\theta^2 - \pi i^2}, \\
 k_1 T_{1i}^c + k_2 T_{2i}^c &= -1 i \frac{2\theta q_{n_c} \sin \theta}{\theta^2 - \pi i^2}, \\
 \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_{1i}^c}{\partial x} + k_1 w_i^c &= T_{1i}^0 - \nu T_{2i}^0, \\
 \frac{1}{A_2} u_{2i}^s i + \frac{A_2'}{A_1 A_2} u_{1i}^c + k_2 w_i^c &= T_{1i}^0 - \nu T_{2i}^0, \\
 -\frac{A_2'}{A_1 A_2} u_{2i}^s + \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_{2i}^s}{\partial x} - i \frac{1}{A_2} u_{1i}^c &= 2(1 + \nu) S_i^s.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Системы (14) и (15) описывают соответственно осесимметричное и неосесимметричное **напряженно-деформированное состояние (НДС)** панели. Таким образом, задача об оценке усилий основного НДС тонкостенной гофрированной цилиндрической панели, лежащей на упругом основании, сводится к нахождению решения систем дифференциальных уравнений (14) и (15). Системы, описывающие осесимметричное и неосесимметричное НДС панели, будем решать методом многих масштабов [10]. Считаем далее, что  $k = \mu^{1/2} 2\pi/\lambda \sim 1$ , тогда

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 1 + \frac{1}{2} \mu k^2 \cos^2 \mu^{-1/2} kx + O \mu^2, \\
 A_2 &= 1 + \mu \sin \mu^{-1/2} kx, \quad k_1 = k^2 \sin \mu^{-1/2} kx + O \mu, \\
 k_2 &= 1 - \mu \left[ \sin \mu^{-1/2} kx + \frac{1}{2} k^2 \cos^2 \mu^{-1/2} kx \right] + O \mu^2, \\
 q_{1c} &= -\mu^{1/2} R \gamma E^{-1} k \cos \mu^{-1/2} kx [1 + O \mu], \\
 q_{n_c} &= R E^{-1} P R h^{-1} - \gamma [1 + O \mu],
 \end{aligned} \tag{16}$$

где  $O \mu^\alpha$  – слагаемое порядка  $\mu^\alpha$ , опущенное в разложении соответствующих функций по степеням малого параметра  $\mu$ .

Для нахождения решений систем уравнений (14), (15) по методу многих масштабов введем новые переменные:

$$x_{-1} = \mu^{-1/2}x, \quad x_0 = x, \quad x_1 = \mu^{1/2}x, \dots, \quad x_m = \mu^{m/2}x. \quad (17)$$

Поставим задачу об отыскании ограниченных на множестве  $-\infty < x < +\infty$  решений полученных систем. Решение уравнений (14), (15) будем искать в виде рядов:

$$\begin{aligned} T_l^0 &= \sum_{j=0}^{\infty} \mu^{j/2} T_{lj}^0, \quad T_l^c = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^{j/2} T_{lj}^c, \quad (l=1, 2), \\ S^0 &= \sum_{j=0}^{\infty} \mu^{j/2} S_j^0, \quad S^s = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^{j/2} S_j^s, \\ u_1^0 &= \sum_{j=0}^{\infty} \mu^{j/2} u_{1j}^0, \quad u_2^0 = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^{j/2} u_{2j}^0, \\ u_1^c &= \sum_{j=0}^{\infty} \mu^{j/2} u_{1j}^c, \quad u_2^s = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^{j/2} u_{2j}^s, \\ w^0 &= \sum_{j=0}^{\infty} \mu^{j/2} w_j^0, \quad w^c = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^{j/2} w_j^c. \end{aligned} \quad (18)$$

Будем строить равномерно-пригодные по  $x_m$  ( $m = -1, 0, 1, \dots$ ) разложения (18) для решения данной системы.

Подставим (16) – (18) в уравнения системы (14) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $\mu^{j/2}$ . В нулевом приближении получаем систему уравнений:

$$\frac{\partial T_{10}^0}{\partial x_{-1}} = 0, \quad \frac{\partial S_0^0}{\partial x_{-1}} = 0, \quad \frac{\partial u_{10}^0}{\partial x_{-1}} = 0, \quad \frac{\partial u_{20}^0}{\partial x_{-1}} = 0, \quad (19)$$

$$k^2 \sin \mu^{-1/2} kx \, T_{10}^0 + T_{20}^0 = q_{n_0} + q_{n_c} w_0^0 + \frac{q_{n_c} \sin \theta}{\theta}, \quad (20)$$

$$w_0^0 = T_{20}^0 - v T_{10}^0. \quad (21)$$

Из уравнений (19) – (21) следует, что

$$T_{10}^0 = T_{10}^0(x_0, x_1, \dots), \quad S_0^0 = S_0^0(x_0, x_1, \dots), \quad u_{l0}^0 = u_{l0}^0(x_0, x_1, \dots), \quad \ell = 1, 2, \quad (22)$$

$$w_0^0 = \frac{q_{n_0} + q_{n_c} \cdot \frac{\sin \theta}{\theta}}{1 - q_{n_c}} - \frac{v + k^2 \sin \mu^{-1/2} kx}{1 - q_{n_c}} T_{10}^0(x_0, \dots), \quad (23)$$

$$T_{20}^0 = \frac{q_{n_0} + q_{n_c} \cdot \frac{\sin \theta}{\theta}}{1 - q_{n_c}} - \frac{v q_{n_c} + k^2 \sin \mu^{-1/2} kx}{1 - q_{n_c}} T_{10}^0(x_0, \dots). \quad (24)$$

В первом приближении  $j = 1$  имеем систему уравнений:

$$\frac{\partial T_{11}^0}{\partial x_{-1}} + \frac{\partial T_{10}^0}{\partial x_0} = 0, \quad \frac{\partial S_1^0}{\partial x_{-1}} + \frac{\partial S_0^0}{\partial x_0} = 0, \quad (25)$$

$$k^2 \sin \mu^{-1/2} kx \, T_{11}^0 + T_{21}^0 = q_{n_c} w_1^0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial u_{11}^0}{\partial x_{-1}} + \frac{\partial u_{10}^0}{\partial x_0} + k^2 \sin \mu^{-1/2} kx \, w_0^0 = T_{10}^0 - v T_{20}^0, \quad (27)$$

$$k^2 \cos \mu^{-1/2} kx u_{10}^0 + w_1^0 = T_{21}^0 - vT_{11}^0, \quad (28)$$

$$\frac{\partial u_{21}^0}{\partial x_{-1}} + \frac{\partial u_{20}^0}{\partial x_0} = 2(1+v) S_0^0. \quad (29)$$

Из условия отсутствия секулярных решений в (25) – (29), получаем:

$$T_{10}^0 = T_{10}^0(x_1, \dots), \quad S_0^0 = S_0^0(x_1, \dots), \quad T_{11}^0 = T_{11}^0(x_0, x_1, \dots), \quad (30)$$

$$S_1^0 = S_1^0(x_0, x_1, \dots), \quad S_0^0 = 0, \quad u_{20}^0 = u_{20}^0(x_1, \dots), \quad u_{21}^0 = u_{21}^0(x_0, x_1, \dots). \quad (31)$$

В уравнении (27) часть слагаемых с учетом (30), (31) также порождает секулярные решения. Запишем условия их отсутствия, принимая во внимание (26) и (28):

$$-\frac{\partial u_{10}^0}{\partial x_0} + \frac{k^4}{2(1-q_{n_\alpha})} T_{10}^0(x_1, \dots) + T_{10}^0(x_1, \dots) + \frac{v^2}{1-q_{n_\alpha}} T_{10}^0(x_1, \dots) = 0. \quad (32)$$

Поскольку  $T_{10}^0$  не зависит от  $x_0$ , то для устранения секулярных решений относительно этой координаты следует положить

$$T_{10}^0 = \frac{2v \left( q_{n_0} + q_{n_c} \cdot \frac{\sin \theta}{\theta} \right)}{k^2 + 2 - 2(1-v^2) q_{n_\alpha}}. \quad (33)$$

Тогда

$$T_{20}^0 = \frac{q_{n_0} + q_{n_c} \cdot \frac{\sin \theta}{\theta}}{1 - q_{n_\alpha}} \left[ 1 - \frac{2v^2 q_{n_\alpha} + 2vk^2 \sin \mu^{-1/2} kx}{k^4 + 2 - 2(1-v^2) q_{n_\alpha}} \right]. \quad (34)$$

Последующие приближения в разложении (18) строятся аналогично.

Подставив (16) – (18) в (15), в нулевом приближении получим систему уравнений:

$$\frac{\partial T_{10_i}^c}{\partial x_{-1}} = 0, \quad \frac{\partial S_{0_i}^c}{\partial x_{-1}} = 0, \quad \frac{\partial u_{10_i}^c}{\partial x_{-1}} = 0, \quad \frac{\partial u_{20_i}^s}{\partial x_{-1}} = 0, \quad (35)$$

$$k^2 \sin \mu^{-1/2} kx T_{10_i}^c + T_{20_i}^0 = -1^i \cdot \frac{2\theta q_{n_c} \sin \theta}{\theta^2 - \pi i} + q_{n_\alpha} w_{0_i}^c, \quad (36)$$

$$u_{20_i}^s + w_{0_i}^c = T_{20_i}^c - vT_{10_i}^c, \quad (37)$$

из которых следует:

$$T_{10_i}^c = T_{10_i}^c(x_0, x_1, \dots), \quad S_{0_i}^s = S_{0_i}^s(x_0, x_1, \dots), \quad (38)$$

$$u_{10_i}^c = u_{10_i}^c(x_0, x_1, \dots), \quad u_{20_i}^s = u_{20_i}^s(x_0, x_1, \dots), \quad (39)$$

$$T_{20_i}^c = -1^i \frac{\frac{2\theta q_{n_c} \sin \theta}{\theta^2 - \pi i} - q_{n_\alpha} u_{20_i}^s}{1 - q_{n_\alpha}} - \frac{k^2 \sin \mu^{-1/2} kx + vq_{n_\alpha}}{1 - q_{n_\alpha}} T_{10_i}^c. \quad (40)$$

В первом приближении получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial T_{11_i}^c}{\partial x_{-1}} + \frac{\partial T_{10_i}^c}{\partial x_0} + iS_{0_i}^s = 0, \quad (41)$$

$$\frac{\partial S_{1_i}^s}{\partial x_{-1}} + \frac{\partial S_{0_i}^s}{\partial x_0} - iT_{20_i}^c = -1^{i+1} \frac{2\pi \cdot i q_{2_i} \sin \theta}{\theta^2 - \pi i^2}, \quad (42)$$

$$k^2 \sin \mu^{-1/2} kx T_{11_i}^c + T_{21_i}^c = -1^i \frac{2\theta q_{n_c} w_{1_i}^c}{\theta^2 - \pi i^2}, \quad (43)$$

$$\frac{\partial u_{11_i}^c}{\partial x_{-1}} + \frac{\partial u_{10_i}^c}{\partial x_0} + k^2 \sin \mu^{-1/2} kx w_{0_i}^c = T_{10_i}^c - v T_{20_i}^c, \quad (44)$$

$$k^2 \cos \mu^{-1/2} kx u_{10_i}^c + w_{1_i}^c + u_{21_i}^s = T_{21_i}^c - v T_{11_i}^c, \quad (45)$$

$$\frac{\partial u_{21_i}^s}{\partial x_{-1}} + \frac{\partial u_{20_i}^s}{\partial x_0} - u_{10_i}^c = 2(1+v) S_{0_i}^s. \quad (46)$$

Условия отсутствия секулярных решений системы (41) – (46) порождают уравнения

$$\frac{\partial T_{10_i}^c}{\partial x_0} + i S_{0_i}^s = 0, \quad (47)$$

$$\frac{\partial u_{20_i}^s}{\partial x_0} - u_{10_i}^c = 2(1+v) S_{0_i}^s, \quad (48)$$

$$-\frac{\partial u_{10_i}^c}{\partial x_0} + \frac{k^4}{2(1-q_{n_\alpha})} T_{10_i}^c + T_{10_i}^c - \frac{v}{1-q_{n_\alpha}} \left[ \frac{-1^{i+1} 2\theta q_{n_\alpha} \sin \theta}{\theta^2 - \pi i^2} - q_{n_\alpha} u_{20_i}^s - v q_{n_\alpha} T_{10_i}^c \right] = 0, \quad (49)$$

$$\frac{\partial^2 T_{10_i}^c}{\partial x_0^2} + -1^{i+1} \frac{2\pi i^2 q_{2_s} \sin \theta}{\theta^2 - \pi i^2} + i^2 \left[ \frac{-1^{i+1} 2\theta q_{n_\alpha} \sin \theta}{\theta^2 - \pi i^2} - q_{n_\alpha} u_{20_i}^s - v q_{n_\alpha} T_{10_i}^c \right] = 0. \quad (50)$$

Исключив из уравнений (35) – (50) функции  $S_{0_i}^s, u_{10_i}^c, u_{20_i}^s$ , получим уравнение:

$$\frac{\partial^4 T_{10_i}^c}{\partial x_0^4} - \frac{v q_{n_\alpha}}{i^2} \frac{\partial^2 T_{10_i}^c}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 T_{10_i}^c}{\partial x_0^2} - \frac{[k^4 + 2(1-q_{n_\alpha})q_{n_\alpha}i^2]}{2(1-q_{n_\alpha})} T_{10_i}^c = \frac{-1^{i+1} v q_{n_\alpha} 2\pi i^2 q_{2_s} \sin \theta}{1-q_{n_\alpha} [\theta^2 - \pi i^2]}. \quad (51)$$

Уравнение (51) представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение четвертого порядка. Его решение складывается из частного решения данного уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Частное решение уравнения (51) находим методом неопределенных коэффициентов:

$$T_{10_i}^c = - \frac{-1^{i+1} v 4\pi q_{2_s} (1-q_{n_\alpha}) \sin \theta}{[k^4 + 2(1-q_{n_\alpha})q_{n_\alpha}i^2] \cdot [\theta^2 - \pi i^2]}. \quad (52)$$

Оно удовлетворяет условию ограниченности на множестве  $-\infty < x < +\infty$ .

Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения, соответствующего уравнению (51).

Предварительно введем следующие обозначения:

$$y = T_{10_i}^c, \quad a^2 = \frac{-v q_{n_\alpha} (l^2 + 1)}{l^2}, \quad b = - \frac{[k^4 + 2(1-q_{n_\alpha})q_{n_\alpha}l^2]}{2(1-q_{n_\alpha})}.$$

Тогда в зависимости от соотношения между величинами  $a$  и  $b$  получим следующие решения:

- если  $a^4 - 4b = 0$ , тогда

$$y = c_{11} \cos\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}x\right) + c_{12} \sin\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}x\right) + c_{21}x \cos\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}x\right) + c_{22}x \sin\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}x\right);$$

- если  $a^4 - 4b < 0$ . Получим, что

$$y_{11} = e^{-\sqrt[4]{b}x \sin\left(\frac{\sigma+2\pi k}{2}\right)} \cos\left[\sqrt[4]{b}x \cos\left(\frac{\sigma+2\pi k}{2}\right)\right], \quad y_{12} = e^{-\sqrt[4]{b}x \sin\left(\frac{\sigma+2\pi k}{2}\right)} \sin\left[\sqrt[4]{b}x \cos\left(\frac{\sigma+2\pi k}{2}\right)\right],$$

$$y_{21} = e^{-\sqrt[4]{b}x \sin\left(\frac{-\sigma+2\pi k}{2}\right)} \cos\left[\sqrt[4]{b}x \cos\left(\frac{-\sigma+2\pi k}{2}\right)\right], \quad y_{22} = e^{-\sqrt[4]{b}x \sin\left(\frac{-\sigma+2\pi k}{2}\right)} \sin\left[\sqrt[4]{b}x \cos\left(\frac{-\sigma+2\pi k}{2}\right)\right],$$

$$y = c_{11}y_{11} + c_{12}y_{12} + c_{21}y_{21} + c_{22}y_{22},$$

где  $\sigma = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{4b-a^4}}{a^2}\right)$ ;

- если  $a^4 - 4b > 0$ , то

$$y_{11} = \cos\left(x\sqrt{\frac{a^2 + \sqrt{a^4 - 4b}}{2}}\right), \quad y_{12} = \sin\left(x\sqrt{\frac{a^2 + \sqrt{a^4 - 4b}}{2}}\right),$$

$$y_{21} = \cos\left(x\sqrt{\frac{a^2 - \sqrt{a^4 - 4b}}{2}}\right), \quad y_{22} = \sin\left(x\sqrt{\frac{a^2 - \sqrt{a^4 - 4b}}{2}}\right),$$

$$y = c_{11}y_{11} + c_{12}y_{12} + c_{21}y_{21} + c_{22}y_{22}.$$

Заметим, что для случая, когда  $a^4 - 4b < 0$ , построенные частные решения не удовлетворяют условию ограниченности на множестве  $-\infty < x < +\infty$ . Поэтому в данном случае следует принять  $c_{ij} = 0$ .

Тогда, подставив в выражение (40) найденное значение  $T_{10}^c$ , получаем в явном виде формулу для расчета  $T_{20}^c$ .

**Результаты и их обсуждение.** На рисунке 2 показана зависимость составляющих максимального тангенциального усилия, соответствующих весу панели (нижняя кривая) и гидростатическому давлению (верхняя кривая), от длины волны гофра  $\lambda^*$  (м). Расчеты выполнены в математическом пакете Mathcad [11] для  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\nu = 0,25$ ,  $P = 10^4$  Н/м<sup>3</sup>,  $\gamma = 7,8 \cdot 10^4$  Н/м<sup>3</sup>,  $\alpha = 3 \cdot 10^7$  Н/м<sup>2</sup>,  $R = 1,5$  м,  $H_0 = 7$  м,  $\delta^* = 0,057$  м,  $h = 0,004$  м,  $\theta = 2\pi$ .

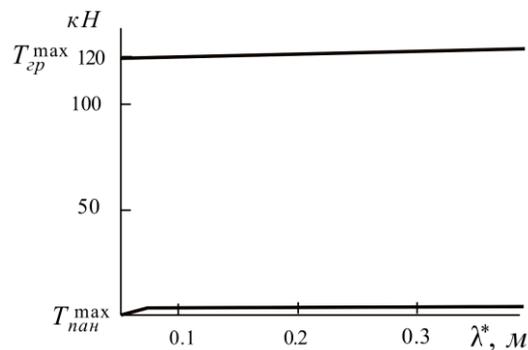


Рис. 2. Зависимость составляющих максимального тангенциального усилия, соответствующих весу панели и гидростатическому давлению, от длины волны гофра

Как видно, поправка, вносимая весом панели в величину тангенциального усилия, незначительна.

На рисунке 3 приведен график усилия  $T_2^{\max}$  как функции толщины панели. Здесь расчеты выполнены для  $\lambda^* = 0,16$  м при прежних значениях остальных параметров.

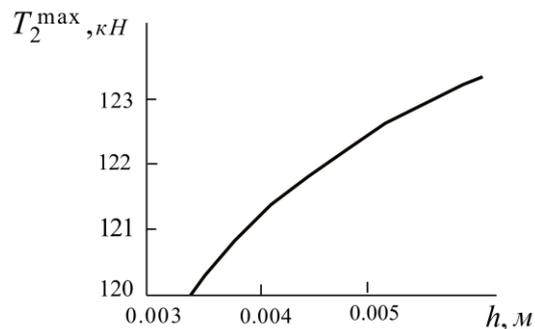


Рис. 3. Зависимость максимального тангенциального усилия от толщины панели

На рисунке 4 изображен график усилия  $T_2^{\max}$  как функции угла раствора панели  $\theta$ .

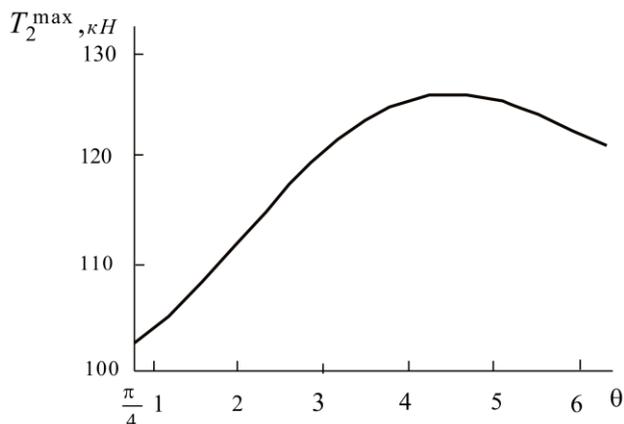


Рис. 4. Зависимость максимального тангенциального усилия от величины угла раствора панели

Полученные результаты согласуются с ранее полученными расчетами для тонкостенной гофрированной трубы с упругим наполнителем [8].

**Выводы.** В представленной статье рассмотрена цилиндрическая гофрированная панель, находящаяся под действием переменного гидростатического давления. Составлена математическая модель гофрированной панели для расчета ее напряженно-деформированного состояния. На основе данной модели получены системы дифференциальных уравнений для оценки усилий гофрированной цилиндрической панели.

Найдено решение указанных систем с использованием метода многих масштабов. В результате решения систем уравнений, описывающих осесимметричное и неосесимметричное НДС панели, получено в явном виде выражение для тангенциального усилия рассмотренной конструкции.

Результаты могут быть использованы при проектировании сооружений на базе гофрированных конструкций, которые используются при возведении водопропускных сооружений на железных дорогах, при конструировании малых мостов, автомобильных дорог, а также веток метрополитена. Полученные результаты могут быть востребованы в исследованиях более сложных составных гофрированных конструкций, состоящих из нескольких панелей, для расчета оценки усилий таких конструкций.

Построено основное напряженно-деформированное состояние тонкостенной гофрированной цилиндрической панели, лежащей на упругом основании. Следующий этап решения рассмотренной задачи – это построение интегралов краевого эффекта и удовлетворение граничным условиям.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Фрезе, М.В. Взаимодействие металлических гофрированных конструкций с грунтовой средой: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.02 / М.В. Фрезе. – СПб., 2006. – 162 с.
2. Гольденвейзер, А.Л. Теория упругих тонких оболочек / А.Л. Гольденвейзер. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
3. Баженов, В.А. Напряженное состояние цилиндрических оболочек типа труб, уложенных в упругой среде / В.А. Баженов // Межвед. респ. науч. сб. – 1970. – Вып. 10. Сопротивление материалов и теория сооружений. – С. 23 – 30.
4. Проблемы обеспечения безопасности и сейсмостойкости металлических гофрированных конструкций в капитальном транспортном строительстве / В.В. Кондратов [и др.] // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. – 2003. – № 2. – С. 52 – 55.
5. Корнев, Б.Г. Вопросы расчета балок и плиты на упругом основании / Б.Г. Корнев. – М.: Госстройиздат, 1954.
6. Крылов, А.Н. О расчете балок, лежащих на упругом основании / А.Н. Крылов. – М.: АН СССР, 1930.
7. Новожилов, В.В. Теория тонких оболочек / В.В. Новожилов. – Л.: Судпромгиз, 1962. – 431 с.
8. Михасев, Г.И. Оценка усилий в тонкостенной гофрированной трубе с упругим наполнителем под действием переменного давления / Г.И. Михасев, Т.В. Никонова // Весці Нац. акад. навук Беларусі. – 2005. – № 4. – С. 55 – 60.
9. Ланина, Е.Г. Ряды Фурье / Е.Г. Ланина, В.В. Подъяпольский. – М., 2001. – 373 с.
10. Найфе, Х. Введение в методы возмущений / Х. Найфе. – М.: Мир, 1984. – 535 с.
11. Маркова, Л. В. MathCad 2000: практика использования / Л.В. Маркова, В.А. Свириденко: ВГУ. – Витебск, 2002. – 59 с.

Поступила 08.05.2009