УДК 512.542.63

О МИНИМАЛЬНЫХ τ-ЗАМКНУТЫХ ω-ЛОКАЛЬНЫХ НЕ p-НИЛЬПОТЕНТНЫХ ФОРМАЦИЯХ

канд. физ.-мат. наук, доц. В.М. СЕЛЬКИН
(Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины)

Θ-формация $\mathfrak{F}$ называется минимальной не H_Θ-формацией, если $F \not\subseteq H$, но в классе групп H содержится всякая собственная Θ-подформация из F. Тогда и только тогда формация F является минимальной τ-замкнутой ω-насыщенной не p-нильпотентной формацией, когда $\mathfrak{F} = \tau^{\omega}\mathrm{form}(G)$, где G – такая $\bar{\tau}$-минимальная не $(\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p)$-группа с нефраттиниевым монолитом $P = G^{\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p}$, что p делит $|P|$, и либо P – неабелева группа, и при $p \in \pi = \pi(P) \cap \omega$, G – $\bar{\tau}$-минимальная не M-группа, причем $P = G^{\mathfrak{N}_p}$, либо $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – абелева p-группа, и при $p \in \omega$ H – такая монолитическая $\bar{\tau}$-минимальная не $(\mathfrak{N}_p)$-группа с монолитом $Q = H^{\mathfrak{N}_p}$, что $Q \not\subseteq \Phi(H)$ и p не делит $|Q|$.

Пусть Θ – некоторая непустая совокупность формаций. Формации, принадлежащие Θ, называются Θ-формациями. Θ-формация $\mathfrak{F}$ называется H_Θ-критической формацией [1], или минимальной не H_Θ-формацией [2], если $F \not\subseteq H$, но в классе групп H содержится всякая собственная Θ-подформация из F. Если Θ-формации F и H такие, что $F \not\subseteq H$, тогда, в большинстве случаев, можно показать, что F содержит, по крайней мере, одну H_Θ-критическую подформацию. Этот факт указывает на важность изучения критических формаций. Общая проблема изучения H_Θ-критических формаций впервые была поставлена Л.А. Шеметковым в работе [2]. В случае, когда $\Theta = l$ является классом всех локальных формаций, данная проблема была решена А.Н. Скибой в [3]. Описание H_Θ-критических формаций в случае, когда Θ является классом наследственных локальных формаций, представлено в [4]. Основные результаты исследований, проводимых в данном направлении, представлены в книгах Л.А. Шеметкова и А.Н. Скибы [5, 6], Венбин Го [7]. Существенный вклад в теорию критических формаций внесли К.П. Шам и Венбин Го [8], где были описаны минимальные тотально локальные ненильпотентные формации. После выхода работы Л.А. Шеметкова и А.Н. Скибы [9] начались изучения минимальных ω-локальных не H-формаций [10 – 12]. Следуя основным результатам работ [3, 4, 10 – 12], мы опишем минимальные τ-замкнутые ω-локальные не p-нильпотентные формации.

В группе G выберем некоторую систему подгрупп $\tau(G)$. Следуя А.Н. Скибы [6], τ называется подгрупповым функтором, если выполняются следующие условия:

1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G;

2) для любого эпиморфизма и любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $H^{\varphi} \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Формация F называется τ-замкнутой, если $\tau(G) \subseteq F$ для любой группы $G \in F$. Для подгрупповых функторов τ_1 и τ_2 полагают $\tau_1 \le \tau_2$, если $\tau_1(G) \subseteq \tau_2(G)$ для любой группы G. Подгрупповой функтор τ называется замкнутым, если всегда из того, что $T \in \tau(H)$, $H \in \tau(G)$, следует, что $T \in \tau(G)$. Символом $\bar{\tau}$ обозначается наименьший замкнутый подгрупповой функтор со свойством $\tau \le \bar{\tau}$.

Пусть ω – произвольное непустое множество простых чисел. Всякая функция вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \mapsto \{\text{ формации групп}\}$$

называется ω-локальным спутником [9]. Если все значения ω-локального спутника *f* являются τ-замкнутыми формациями, то *f* называется τ-замкнутым ω-локальным спутником. Символом $LF_\omega < f >$ обозначим класс групп:

$$(G \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)),$$

для любого произвольного ω-локального спутника *f*. Пусть $\mathfrak{F} = LF_\omega < f >$, то говорим, что *f* – ω-локальный V-спутник формации F. В этом случае мы называем F ω-локальной формацией. Если при этом все значения f лежат в F, то f будем называть внутренним ω-локальным V-спутником формации F.

Пусть X – произвольная совокупность групп, p – простое число. Тогда полагают

$$X(F_p) = \begin{cases} \mathrm{form}(G/F_p(G) \mid G \in \mathsf{X}), & \text{для всех } p \in \pi(\mathsf{X}), \\ \varnothing, & \text{если } p \in \pi(\mathsf{X}). \end{cases}$$

Если формация F такая, что $\mathsf{F} = LF_\omega < f >$, где $F(\omega') = \mathsf{F}$ и $F(p) = \mathsf{N}_p\mathsf{F}(F_p)$ для всех $p \in \omega$, тогда спутник F называется каноническим ω-локальным V-спутником формации F. Символом $\tau^\omega\mathrm{form}(\mathsf{X})$ обозначаем пересечение всех τ-замкнутых ω-локальных формаций, содержащих непустое множество групп X. V-спутник формации F называется минимальным τ-значным ω-локальным V-спутником формации F, если $f(\omega') = \mathrm{form}(G/O_\omega(G) \mid G \in \mathsf{F})$ и $f(p) = \mathrm{form}(\mathsf{F}(F_p))$ для всех простых $p \in \omega$. Формация всех p-нильпотентных групп может быть представлена в виде $\mathsf{G}_{p'}\mathsf{N}_p$.

ТЕОРЕМА. Тогда и только тогда формация F является минимальной τ-замкнутой ω-насыщенной не p-нильпотентной формацией, когда $\mathsf{F} = \tau^\omega\mathrm{form}(G)$, где G – такая $\bar{\tau}$-минимальная не $(\mathsf{G}_{p'}\mathsf{N}_p)$-группа с нефраттиниевым монолитом $P = G^{\mathsf{G}_{p'}\mathsf{N}_p}$, что p делит $|P|$ и либо P – неабелева группа, и при $p \in \pi = \pi(P) \cap \omega$, G – $\bar{\tau}$-минимальная не M-группа, причем $P = G^{\mathsf{N}_p}$, либо $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – абелева p-группа, и при $p \in \omega$ H – такая монолитическая $\bar{\tau}$-минимальная не (N_p)-группа с монолитом $Q = H^{\mathsf{N}_p}$, что $Q \not\subseteq \Phi(H)$ и p не делит $|Q|$.

Доказательство. Ввиду теоремы 1 из [9] канонический V-спутник H формации $\mathsf{G}_{p'}\mathsf{N}_p$ имеет вид $H(p) = \mathsf{N}_p$, если $p \in \omega$, и $H(a) = \mathsf{G}_{p'}\mathsf{N}_p$, если $a \in (\omega \setminus p) \cup \omega'$. Пусть f – минимальный τ-замкнутый ω-локальный V-спутник формации F.

Необходимость. Так как F – минимальная τ-замкнутая ω-насыщенная не p-нильпотентная формация, то ввиду теоремы из [4] $\mathsf{F} = \tau^\omega\mathrm{form}(G)$, где G – такая монолитическая $\bar{\tau}$-минимальная не $(\mathsf{G}_{p'}\mathsf{N}_p)$-группа с нефраттиниевым монолитом $P = G^{\mathsf{G}_{p'}\mathsf{N}_p}$, что либо $P \subseteq O_\omega(G)$ и $f(p)$ – $(H(p))_\tau$-критическая формация для всех $p \in \pi(P)$, либо $O_\omega(G) = 1$ и $f(\omega')$ – $(\mathsf{G}_{p'}\mathsf{N}_p)_\tau$-критическая формация, $f(p)$ – $(H(p))_\tau$-критическая формация для всех $p \in \pi(P) \cap \omega$. Поскольку $P = G^{\mathsf{G}_{p'}\mathsf{N}_p}$, то p делит $|P|$.

Обозначим через M максимальную τ-замкнутую ω-локальную подформацию формации F.

Пусть P – ω'-группа. Тогда по теореме 1 из [3] формация M имеет такой внутренний τ-замкнутый ω-локальный V-спутник, что

$$m(a) = \begin{cases} \tau\mathrm{form}(G/F_q(G)), & \text{если } a = q \in (\omega \cap \pi(G)), \\ \varnothing, & \text{если } a = q \in \omega \setminus \pi(G), \\ \tau\mathrm{form}(\mathsf{X} \cup \{G/P\}), & \text{если } a = \omega', \end{cases}$$

где X – множество всех собственных τ-подгрупп группы G. Согласно условию $\mathsf{M} \subseteq \mathsf{G}_{p'}\mathsf{N}_p$. Следовательно, ввиду леммы 7 из [9] имеет место $m \leq H$. Значит,

$$\tau\mathrm{form}(\mathsf{X} \cup \{G/P\}) \subseteq H(\omega') = \mathsf{G}_{p'}\mathsf{N}_p.$$

По условию $G \notin \mathsf{G}_{p'}\mathsf{N}_p$. Таким образом, $G^{\mathsf{G}_{p'}\mathsf{N}_p} = P$ и G – $\bar{\tau}$-минимальная не ($\mathsf{G}_{p'}\mathsf{N}_p$)-группа.

Пусть P – неабелева группа и $\pi = \pi(P) \cap \omega \neq \varnothing$, $\pi(P) \not\subseteq \omega$. Тогда ввиду теоремы 2 из [13] формация M имеет такой внутренний τ-замкнутый ω-локальный V-спутник m, что

$$m(a) = \begin{cases} \tau\mathrm{form}(\mathsf{X} \cup \{G/P\}), & \text{если } a = q \in \pi = \omega \cap \pi(P), \\ \tau\mathrm{form}(G/F_q(G)), & \text{если } a = q \in \omega \cap (\pi(G) \setminus \pi(P)), \\ \varnothing, & \text{если } a = q \in \omega \setminus \pi(G), \\ \tau\mathrm{form}(\mathsf{X} \cup \{G/P\}), & \text{если } a = \omega', \end{cases}$$

где X – множество всех собственных τ-подгрупп группы G. Ввиду леммы 7 из [9] имеет место $m \leq H$.

Таким образом, для всех $q \in \pi$ справедливо включение $m(q) \subseteq H(q)$, т.е. $(\mathsf{X} \cup \{G/P\}) \subseteq H(q)$.

Предположим, что существует некоторое простое число $q \in \pi$, что $G \in H(q)$. Тогда

$$\mathsf{F} = \tau^\omega\mathrm{form}(G) \subseteq H(q) \subseteq \mathsf{G}_{p'}\mathsf{N}_p.$$

Противоречие. Таким образом, $G^{H(q)} = P$ и $\bar{\tau}$-минимальная не $(H(q))$-группа, для всякого простого $q \in \pi$. Так как H – внутренний V-спутник формации $\mathsf{G}_{p'}\mathsf{N}_p$ и $P = G^{\mathsf{G}_{p'}\mathsf{N}_p}$, то G – $\bar{\tau}$-минимальная не ($\mathsf{G}_{p'}\mathsf{N}_p$)-группа. Если $p \in \omega$, то $(\mathsf{X} \cup \{G/P\}) \subseteq H(p) = \mathsf{N}_p$. Очевидно, что $G \notin \mathsf{N}_p$. Значит, G – $\bar{\tau}$-минимальная не (N_p)-группа, причем $P = G^{\mathsf{N}_p}$. Таким образом, группа G удовлетворяет условию теоремы.

Пусть P – неабелева группа и $\pi(P) \subseteq \omega$. По лемме 2 из [12] формация M имеет такой внутренний τ-замкнутый ω-локальный V-спутник m, что

$$m(a) = \begin{cases} \tau\mathrm{form}(\mathsf{X} \cup \{G/P\}), & \text{если } a = q \in \pi(P), \\ \tau\mathrm{form}(G/F_q(G)), & \text{если } a = q \in \omega \cap (\pi(G) \setminus \pi(P)), \\ \varnothing, & \text{если } a = q \in \omega \setminus \pi(G), \\ \tau\mathrm{form}(G/O_\omega(G)), & \text{если } a = \omega', \end{cases}$$

где X – множество всех собственных τ-подгрупп группы G. Согласно условию, $\mathsf{M} \subseteq \mathsf{G}_{p'}\mathsf{N}_p$. Значит, ввиду леммы 7 из [9] имеет место $m \le H$. Следовательно,

$$\tau\mathrm{form}(\mathsf{X} \cup \{G/P\}) \subseteq H(p) = \mathsf{N}_p.$$

Очевидно, $G \notin \mathsf{N}_p$. Значит, G – $\bar{\tau}$-минимальная не (N_p)-группа, причем $P = G^{\mathsf{N}_p}$. Таким образом, группа G удовлетворяет условию теоремы.

Пусть теперь P – абелева группа и $p \in \omega$. Тогда $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – минимальная нормальная p-подгруппа группы G, а H – монолитическая группа с нефраттиниевым монолитом Q, причем $(|P|, |Q|) = 1$. По теореме 3 из [13] формация M имеет такой внутренний τ-замкнутый ω-локальный V-спутник m, что

$$m(a) = \begin{cases} \tau\mathrm{form}(\mathsf{X} \cup \{H/Q\}), & \text{если } a = p, \\ \tau\mathrm{form}(G/F_q(G)), & \text{если } a = q \in \omega \cap (\pi(G) \setminus \{p\}), \\ \varnothing, & \text{если } a = q \in \omega \setminus \pi(G), \\ \tau\mathrm{form}(G/O_\omega(G)), & \text{если } a = \omega', \end{cases}$$

где X – множество всех собственных τ-подгрупп группы H. Так как $\mathsf{M} \subseteq \mathsf{G}_{p'}\mathsf{N}_p$, то $m \le H$. Следовательно, $(\mathsf{X} \cup \{H/Q\}) \subseteq H(p) = \mathsf{N}_p$. Предположим, что $H \in \mathsf{N}_p$. Тогда

$$G \in \mathsf{N}_p H(p) = H(p) \subseteq \mathsf{G}_{p'}\mathsf{N}_p.$$

Противоречие. Значит, H – $\bar{\tau}$-минимальная не (N_p)-группа с монолитом $Q = H^{\mathsf{N}_p}$. Таким образом, группа G удовлетворяет условию теоремы.

Достаточность. Для доказательства достаточности достаточно лишь установить, что либо $P \subseteq O_\omega(G)$, $\Phi(G) = 1$ и $f(q)$ – $(H(q))_\tau$-критическая формация для всех $q \in \pi(P)$, либо $O_\omega(G) = 1$ и $f(\omega')$ – $(\mathsf{G}_{p'}\mathsf{N}_p)_\tau$-критическая формация, $f(q)$ – $(H(q))_\tau$-критическая формация для всех $q \in \pi(P) \cap \omega$.

Пусть P – ω'-группа. Тогда $O_\omega(G) = 1$. Следовательно, $f(\omega') = \tau\mathrm{form}(G)$. Ввиду леммы 2.1.5 из [6] формация $\tau\mathrm{form}(\mathsf{X} \cup \{G/P\})$ является единственной максимальной τ-замкнутой подформацией формации $\tau\mathrm{form}G$. Но по условию G – $\bar{\tau}$-минимальная не $\mathsf{G}_{p'}\mathsf{N}_p$-группа и $G^{\mathsf{G}_{p'}\mathsf{N}_p} = P$, причем $H(\omega') = \mathsf{G}_{p'}\mathsf{N}_p$. Таким образом, $f(\omega')$ – $(H(\omega'))_\tau$-критическая формация.

Пусть P – неабелева группа и $\pi(P) \subseteq \omega$. Тогда ввиду леммы 5 из [9] $f(q) = \tau\mathrm{form}(G/F_q(G)) = \tau\mathrm{form}(G)$ для любого простого $q \in \pi(P)$. Но по лемме 2.1.5 из [6] $\tau\mathrm{form}(\mathsf{X} \cup \{G/P\})$ – единственная максимальная τ-замкнутая подформация формации $\tau\mathrm{form}G$. Значит, $f(q)$ – минимальная τ-замкнутая не $(H(q))$-формация, для любого простого $q \in \pi(P)$.

Пусть теперь $q \in \pi \ne \varnothing$ и $\pi(P) \not\subseteq \omega$. Тогда

$$f(q) = \tau\mathrm{form}(G/F_q(G)) = \tau\mathrm{form}(G).$$

Пусть X – множество всех собственных τ-подгрупп группы G. Тогда по условию $(\mathfrak{X}\cup\{G/P\})\subseteq H(q)$. Но по лемме 2.1.5 из [6] $\tau\mathrm{form}(\mathfrak{X}\cup\{G/P\})$ – единственная максимальная τ-замкнутая подформация формации $\tau\mathrm{form}G$. Предположим, что существует некоторое число $r\in\pi$, что $G\in H(r)$. Так как H – внутренний спутник, то $G\in H$. Противоречие. Таким образом, $f(q)$ – минимальная τ-замкнутая не $(H(q))$-формация. Аналогично можно показать, что $f(\omega')$ – $(\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p)_\tau$-критическая формация.

Если P – абелева группа и $p\notin\omega$, то $O_\omega(G)=1$ и $f(p)=\tau\mathrm{form}(G)$. Значит, этот случай рассматривается аналогично неабелевому случаю.

Пусть P – абелева группа и $p\in\omega$. Тогда

$$f(p)=\tau\mathrm{form}(G/F_p(G))=\tau\mathrm{form}(H).$$

И пусть X – множество всех собственных τ-подгрупп группы H. Так как по условию $\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{N}_p=H(p)$, то $\tau\mathrm{form}(\mathfrak{X}\cup\{H/Q\})\subseteq H(p)$. Но $\Phi(H)=1$. Тогда ввиду леммы 2.1.5 из [6] $\tau\mathrm{form}(\mathfrak{X}\cup\{H/Q\})$ – единственная максимальная τ-замкнутая подформация формации $f(p)=\tau\mathrm{form}H$. Следовательно, всякая собственная τ-замкнутая подформация формации $f(p)$ входит в $H(p)$. Если $f(p)\subseteq H(p)$, то $G/P\in H(p)$. Значит,

$$G\in\mathfrak{N}_pH(p)=H(p)\subseteq\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p.$$

Противоречие. Итак, $f(p)\not\subseteq H(p)$. Таким образом, $f(p)$ – $(H(p))_\tau$-критическая формация. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скиба, А.Н. О критических формациях / А.Н. Скиба // Докл. АН БССР. – 1983. – Т. 27, № 9. – С. 780 – 782.
2. Шеметков, Л. А. Экраны ступенчатых формаций / Л.А. Шеметков // Труды VI Всесоюз. симпоз. по теории групп. – Киев, 1980. – С. 37 – 50.
3. Скиба, А.Н. О критических формациях / А.Н. Скиба // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев, 1993. – С. 258 – 268.
4. Селькин, В.М. О наследственных критических формациях / В.М. Селькин, А.Н. Скиба // Сибирский мат. журнал. – 1996. – Т. 37, № 5. – С. 1145 – 1153.
5. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 253 с.
6. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларус. навука, 1997. – 240 с.
7. Wenbin Guo, The Theory of Classes of Groups / Wenbin Guo. – Beijing-New York-Dordrecht-Boston-London: Science Press-Kluwer Academic Publishers, 2000. – 275 p.
8. Wenbin Guo, On totally local formations of groups / Wenbin Guo, K.P. Shum // Comm. Algebra. – 2002. – № 5. – P. 2117 – 2131.
9. Shemetkov, L.A. Multiply ω-local formations and Fitting classes of finete groups / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba // Matem. Trudy. – 1999. – № 2. – P. 114 – 147.
10. Сафонова, И.Н. О минимальных ω-локальных не-L-формациях / И.Н. Сафонова // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1999. – № 2. – С. 23 – 27.
11. Селькин, В.М. Минимальные наследственные ω-локальные формации / В.М. Селькин // Укр. мат. журнал. – 2002. – № 3. – С. 460 – 469.
12. Селькин, В.М. Об одной проблеме теории ω-локальных формаций / В.М. Селькин // Докл. НАН Беларусі. – 2001. – № 5. – С. 9 – 11.
13. Селькин, В.М. Формации с единственной максимальной τ-замкнутой ω-локальной подформацией / В.М. Селькин // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2002. – № 1. – С. 25 – 29.

Поступила 17.06.2009