УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ФАКТОРИЗУЕМЫХ ГРУППАХ С ХОЛЛОВЫМ ФАКТОРОМ

д-р физ.-мат. наук, проф. Э.М. ПАЛЬЧИК
(Полоцкий государственный университет)

Вопросы факторизации конечных групп имеют давнюю историю. В связи с классификацией конечных простых групп появились новые возможности для исследования строения конечных факторизуемых групп. В этой работе мы предполагаем, что один из факторов группы $X = A\cdot B$ *является холловой подгруппой. В частности, если* $A = X_\pi$, $2\notin\pi$ *или* $3\notin\pi$, *то строение X становится «почти известным». В частности, если X – простая группа, то* $|\pi(A\cap B)|\le 1$. *Если дополнительно известно, что* $B = C(x)$ *для* $1\ne x\in X$, *то имеется «мало» конечных простых групп с такой факторизацией (они исчерпываются группами* $L_2(q)$*). В частности, если* $2\notin\pi$ *и* $B = C(x)$, $x^2\ne 1$, *то X не может быть простой группой. Эта ситуация близка к известной с 1904 года* p^α *-лемме Бернсайда, в которой* $|\pi| = 1$ *без ограничения* $2\notin\pi$.

Обозначения и терминология стандартны [1, 2]. Предполагается, что конечные простые группы известны [2, с. 36].

В работе [3] описаны конечные простые группы $X = A\cdot B$, где A и B – холловы подгруппы в X и $(|A|,|B|) = 1$.

Цель этой работы – исследование факторизации конечной группы с холловым фактором H, где $3\nmid|H|$ или $2\nmid|H|$.

$\pi(X)$ – множество различных простых делителей порядка $|X|$ группы X, π и π' – дополнительные друг к другу множества простых чисел.

pd-группа (p'-группа) – группа, порядок которой делится на p (взаимно прост с простым числом p).

Если X – простая группа лиевского типа с полем определения $GF(q)$, $q = r^n$, где r характеристика поля $GF(q)$, то условимся писать, что $X\in Chev(r)$.

(a, b) – наибольший общий делитель чисел a и b.

X_p – силовская p-подгруппа группы X (кратко: X_p – S_p-подгруппа в X).

Подгруппа H называется p-квазисубнормальной в X, если H пересекается с каждой S_p-подгруппой из X по своей S_p-подгруппе.

I. Основные используемые результаты

ТЕОРЕМА 1.1 ([4], предложение 1.3). Если $X = H\cdot N(X_p)$, где H есть pd-группа, то H есть p-квазисубнормальная подгруппа в X.

ТЕОРЕМА 1.2 ([5], предложение 2.2). Пусть $G\in Chev(r)$. Если $G_r\subseteq K\subset G$, где K – подгруппа в G, то существует максимальная параболическая подгруппа $P\subset G$ такая, что $K\subseteq P$.

ТЕОРЕМА 1.3 ([6, 7]). Пусть r, s – простые числа, $r<s\le n$, где n – натуральное число. Тогда S_n имеет холлову π-подгруппу, $|\pi|>1$, если $r = 2$, $s = 3$, $\pi = \{r, s\}$, $n = 3, 4, 5, 7, 8$, или n – простое число и S_{n-1} – ее холлова подгруппа.

ТЕОРЕМА 1.4 ([11], corollary 4.4). Тогда и только тогда M есть холлова π-подгруппа в группе A_n, когда $M = M_0\cap S_n$ для некоторой холловой π-подгруппы M_0 группы S_n.

ЛЕММА 1.5. Пусть $X\in Chev(r)$, X – простая группа. Пусть H – ее параболическая холлова подгруппа, а K – параболическая подгруппа. Тогда $X\ne HK$.

Доказательство. Предположим, что $X = HK$. $X_r\subseteq H$. $K_r = X_r = H_r$. Тогда $O_r(K) = T\lhd K$ и $T\subseteq H$. Тогда $<T^X>=<T^{KH}>=<T^H>\subseteq H$ и X – непростая группа. Лемма доказана.

2. О факторизуемых группах с холловым 3'-фактором

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть X конечная группа с собственными подгруппами H и B, $X = H\cdot B$, H – хол-лова 3'-подгруппа, $2/|H|$. Предположим, что выполняется одно из следующих условий:

(1) $|\pi(H\cap B)|>1$;

(2) $|\pi(H\cap B)| = 1$, но $\pi(H\cap B)\ne\{2\}$, $|\pi(H)|>1$.

Тогда X не может быть простой неабелевой группой.

Доказательство. Предположим, что X – простая неабелева группа. Рассмотрим отдельно три случая.

I. $X \in Chev(r)$. Предположим, что $r \in \pi(H)$. По теореме 3.1 из [8] $r = 2$ или $2 \notin \pi(H)$ и H содержится в подгруппе Бореля группы X. Из условия теоремы следует, что тогда $H = X_2 \lambda A$, где A – абелева подгруппа подгруппы Картана группы X. Тогда из $X = H \cdot B$ следует $X = N(X_2)B$. Если лиевский ранг X больше 1, то по [9] $X \in \{L_3(2), L_4(2), U_4(2)\}$. Но эти группы не имеют холловой 3'-подгруппы H с $|\pi(H)|>1$. Если лиевский ранг X равен 1, то $X \in \{L_2(q), Sz(q), U_3(q)\}$. Группы $Sz(q)$ и $U_3(q)$ исключаются, так как не имеют факторизации вида $H \cdot B$ ([10, табл. 3, 5, теорема B]). ($U_3(8)$ не имеет в подгруппе Бореля холловой 3'-подгруппы H).

По теореме 3.1 из [8] среди групп $L_2(q)$ следует рассмотреть только группы с $q = 2^n$. Среди групп $L_2(2^n)$ только группы с $n = 2k + 1$ могут иметь холлову 3'-подгруппу $H = N(X_2)$, но они имеют лишь факторизацию вида: $X = H \cdot B$, $B \cong D_{2(2^n+1)}$, $\pi(H \cap B) = \{2\}$.

Пусть теперь $r \notin \pi(H), \tau = \pi(H) - \{2\}$. По теореме 5.2 из [11] H содержит нормальную абелеву холлову τ-подгруппу A. Пусть t – простой делитель числа $|A|$. Так как $2 / |H|$ и $|\pi(H)|>1$, то $t \geq 5$. Поэтому $A_t \lhd H$ и из $X = H \cdot B$ следует $X = N(A_t) \cdot B$. По условию можно считать, что t делит $|B|$. По теореме 1.1 B есть t – квазисубнормальная td-подгруппа в X. По теореме 1.4 в [4] $X \cong U_3(5), B \cong A_7, t = 5$. Но в $U_3(5)$ нет холловой 3'-подгруппы H $|\pi(H)|>1$. Поэтому $X \notin Chev(r)$.

II. $X \in Spor$. По теореме 4.1 в [12] только группа J_1 имеет холлову 3'-подгруппу H порядка $2^3 \cdot 7$. Но J_1 не имеет нужной факторизации ([10, табл. 6]). Поэтому $X \notin Spor$.

Ш. $X \in \{A_n / n \geq 5\}$. Но тогда X не имеет холловых 3'-подгрупп H $|\pi(H)|>1$ по теореме 1.3. Поэтому $X \notin \{A_n / n \geq 5\}$.

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть X – конечная простая группа с собственными подгруппами H и B, где H – холлова 3'-подгруппа четного порядка, $|\pi(H)|>0$. Тогда $\pi(H \cap B) = \{2\}$, $X \cong L_2(2^{2k+1})$, $H = N(X_2)$, $B \cong D_{2(2^{2k+1}+1)}$, либо $\pi(H \cap B) | = \emptyset$ и X – известная группа [3].

Доказательство следствия 2.2 содержится в доказательстве теоремы 3.1.

Аналогично доказывается (с использованием теоремы 1 в [12] вместо теоремы 3.1 в [9]).

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть X – конечная простая группа с собственными подгруппами H и B, где H – холлова 2'-подгруппа, $|\pi(H)|>1$. Тогда $\pi(H \cap B) = \{t\}$, где t – наименьший простой делитель числа $|H|$, либо $|\pi(H \cap B)|<1$ и X – известная группа [3].

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть X – конечная группа с холловой 3'-подгруппой H четного порядка, $B = C(x)$ для $1 \neq x \in X$, $H \subset X$, $B \subset X$, $X = H \cdot B$. Тогда или X – непростая группа, или $X \cong L_2(2^{2k+1})$, $(H, B) = (N(X_2), Z_{2^{2k+1}+1})$. (В частности, если $1 < x > 1$ не делит число $(2^{2k+1}+1)$, $k \geq 1$, то X – непростая группа).

Доказательство. Из теоремы Бернсайда 5.7.2 в [1] следует, что можно считать $|\pi(H)|>1$. Предположим, что X – простая неабелева группа. Рассмотрим отдельно 3 возможности.

I. $X \in Chev(r)$. Если $r \in \pi(H)$, то, как и в доказательстве теоремы 2.1, показываем, что $X \cong L_2(q)$, $q = 2^{2k+1}$.

Пусть теперь $\{r, 3\} \subseteq \pi(B) - \pi(H)$. По теореме 1.2 $B \subseteq B_0$, где B_0 – максимальная параболическая подгруппа в X. Пусть $O_r(B_0) = R \subseteq B$. По теореме 1.42 в [2] $x \in R$. Как показано в доказательстве теоремы 2.1, H содержит нормальную абелеву холлову 2'-подгруппу A, которая лежит в некотором максимальном торе T группы X (по теореме 5.2 в [11]), если $X \not\cong {}^2G_2(3^{2k+1})$. Если же $X \cong {}^2G_2(3^{2k+1})$, то по теореме B из [10] X не допускает факторизации. Пусть $C = C_X(T)$. Предположим, что $C \cap H_2 = D \neq 1$. По теореме 5.2 в [11] $H \subseteq N(T)$. Поэтому подгруппа HC существует и $C \lhd HC$. Тогда $D \lhd H_2$. Тогда $1 \neq y \in Z(H_2) \cap D$, и $y \in Z(H)$. Тогда $(|X : C(y)|, |X : C(x)|) = 1$. По [13] X не может быть простой группой. Поэтому $C \cap H_2 = 1$ и $C(T) = A = T$ $(C(T) \cap B = Q = 1$, иначе $Q \lhd N(T) \supseteq H$, и

$< Q^X >=< Q^{HB} >=< Q^B >\subseteq B$ и

X – непростая). Если $X \notin \{A_5(2),\ D_4(2),\ C_3(2),\ {}^2A_3(2)\}$, то по лемме 3 из [14] в $\pi(X)$ есть простой делитель t, который не делит порядка ни одной собственной параболической подгруппы из X. Из $B \subseteq B_0$ следует, что t делит $|H|$. Если $(|H|,|B|)=1$, то непростота X следует из теоремы 1.1 в [3], так как все подгруппы H четного порядка являются 3d-группами, исключая группы $X \cong L_2(q)$ с $q = 2^{2k+1}$ (остальные группы $L_2(q)$ не удовлетворяют условию теоремы). Если $(|H|,|B|)\neq 1$, то по следствию 2.2 $\pi(H\cap B)=\{2\}$, т.е. $B_2 \neq 1$. Поэтому t делит $|A|$. Пусть $z \in A_t = X_{t\frac{1}{2}}$ и $z^t = 1,\ C_1 = C_X(z)$. По теореме 4.2.2 в [15] в C_1 есть нормальные подгруппы T_1 и T_1L, где T_1 – абелева r'-группа, L – центральное произведение групп $L_i \in Chev(r),\ i=\overline{0,k}$. Так как $T \subseteq T_1$, то $A_t \subseteq T_1$ и $i = 0$ по выбору t. В противном случае для S_r-подгруппы R из C_1 существовала бы подгруппа $< z > \times R$ и по теореме Бореля – Титса 3.1.3(a) в [15] $N_X(R)$ лежала бы в некоторой собственной параболической подгруппе из X. Поэтому $T_1C_1 = C_1,\ L=1$. По теореме 4.2.2(d) в [15] C_1/T_1 изоморфна элементарной абелевой t-группе. Но $A_t = X_t \subseteq A$. Поэтому $C_1/T_1 = 1,\ C_1 = T_1$. Из $A \subseteq T \subseteq T_1$ и $C \subseteq T_1 \subseteq C(A) = C(T) = C$ следует, что $T_1 = C \lhd HC$. Выше было показано, что $C \cap H_2 = 1$. Поэтому $C_1 \cap H_2 = 1$. Так как $A_t \lhd H$, то $H_2 \cdot A_t$ существует. Выше показано, что $C_{H_2}(z) = 1$ для $z \in \Omega_1(A_t)$. Поэтому $X_2 \cdot \Omega_1(A_t)$ – группа Фробениуса с дополнительным множителем X_2 ([16, теорема 9.10]). По теореме 9.11 в [16] X_2 либо циклическая, либо обобщенная группа кватернионов и X – непростая группа.

Пусть теперь $X \in \{A_5(2),\ D_4(2),\ C_3(2),\ {}^2A_3(2)\}$.

Так как $2 \in \pi(H)$, то $2 \notin \pi(B) - \pi(H)$. Поэтому $r \neq 2$, и эти группы исключаются из рассмотрения.

II. $X \in Spor \cup \{A_n / n \geq 5\}$. Эти случаи исключаются, как и в доказательстве теоремы 2.1.

Теорема доказана.

Аналогично доказывается

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть X – конечная группа с холловой 2'-подгруппой H, $B = C(x)$ для $1 \neq x \in X$, $X = H \cdot B$. Тогда или X – непростая группа, или $X \cong L_2(q),\ q \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$, q – нечетное число, $B \cong D_{q+1}$. (В частности, если $x^2 \neq 1$, то X – непростая группа).

3. Факторизация простых групп двумя холловыми подгруппами

ЛЕММА 3.1. Пусть X конечная простая группа, H и B – ее собственные холловы подгруппы, $X = H \cdot B$, причем $6/(|H|,|B|)$. Тогда $X = H \cdot B_0$, где $(|H|,|B_0|)=1$.

Доказательство. Рассмотрим отдельно 3 случая.

I. $X \in Chev(r)$. Предположим, что $r \in \pi(H)$. По теоремам 1.2 и 3.3 в [17] H либо лежит в подгруппе Бореля, либо является параболической подгруппой, причем $r = 2$, кроме двух случаев, когда $X \cong L_n(q)$, n – нечетное простое число $(n,\ q-1)=1$, либо $X \cong L_7(q),\ (3,\ q+1)=1,\ (5\cdot 7,\ q-1)=1$ ([17, теорема 10.2]). В любом случае $r \nmid |B|$ по лемме 1.5. В частности, если $r = 2$, то подгруппа B должна быть подгруппой нечетного порядка. Поэтому впредь можно считать, что $r > 2$. Если $X \cong L_n(q),\ (n,\ q-1)=1,\ n$ – нечетное простое число, то в X существует подгруппа B_0 нечетного порядка $(q^n-1)/(q-1)$ такая, что $X = H \cdot B_0$, $(H, B_0)=1$ ([3, теорема 1.1]). Итак, если $r \in \pi(H)$, то в X существует подгруппа B_0 такая, что $X = HB_0$, $(|H|,\ |B_0|)=1$.

Пусть теперь $r \in \pi(B)$. Но этот случай симметричен предыдущему, и мы можем в предыдущих рассуждениях H заменить на B. Этим случай I исключается из дальнейшего рассмотрения.

II. $X \in Spor$. По теореме 4.1 из [18] холловы подгруппы H с условием $6/|H|$ имеют группы $M_{11}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, J_1, J_4$. Но ни одна из этих групп не допускает факторизации своими холловыми подгруппами [10, табл. 6]. Поэтому $X \notin Spor$.

III. $X \in \{A_n / n \geq 5\}$. Из теорем 1.4 и 1.3 следует, что группы A_n с $n \geq 5$ не допускают факторизации своими холловыми подгруппами. Поэтому $X \notin \{A_n / n \geq 5\}$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. Пусть X – конечная простая группа, H и B – ее собственные холловы подгруппы, $X = H \cdot B$, $6 / |H|$. Тогда в X есть подгруппа B_0 такая, что $X' = H \cdot B_0$, $(|H|, |B_0|) = 1$.

Доказательство. Опять рассмотрим отдельно 3 случая.

I. $X \in Chev(r)$. Случай с $r \in \pi(H)$ исключается так, как и в доказательстве леммы 3.1.

Пусть $r \in \pi(B)$. Можно считать, что $2 / |B|$, $3 \nmid |B|$. По следствию 2.2 $X \cong L_2(2^{2k+1})$, $B \cong N(X_2)$, $H \cong D_{2(2^{2k+1}+1)}$, либо $X = H_0 \cdot B$, где $(|H_0|, |B|) = 1$. Но если $r = 2 \in \pi(B)$, то по лемме 1.5 $2 \nmid |H|$. Противоречие с условием показывает, что $X \in Chev(r)$.

II. $X \in Spor$. По теореме 4.1 в [18] только группа J_1 содержит холлову 3'-подгруппу $B \cong E_8 \lambda Z_7$, но она не допускает факторизации своими холловыми подгруппами [10], таблица 6. Поэтому $X \notin Spor$.

III. $X \in \{A_n / n \geq 5\}$ Но из теорем 1.3 и 1.4 следует, что в A_n нет холловых 3'-подгрупп. Поэтому $X \notin \{A_n / n \geq 5\}$.

Если $2 \nmid |B|$, то B есть разрешимая группа и в ней существует подгруппа B_0 такая, что $X = H \cdot B_0$, $(|H|, |B_0|) = 1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.3. Пусть X – конечная простая группа с холловыми собственными подгруппами H и B, где $X = H \cdot B$, $3 \nmid |H|$, $2 / |H|$. Тогда $X = H \cdot B_0$, где $(|H|, |B_0|) = 1$.

Доказательство. По следствию 2.2 $X \cong L_2(2^{2k+1})$, $H = N(X_2)$, $B \cong D_{2(2^{2k+1}+1)}$, $B_0 \subset B$, $B_0 \cong Z_{2^{2k+1}+1}$ и $X = H \cdot B_0$.

Лемма доказана.

Из лемм 3.1, 3.2 и 3.3 вытекает

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть X – конечная простая группа, H и B ее собственные холловы подгруппы и $X = H \cdot B$. Тогда $X = H \cdot B_0$, где $(|H|, |B_0|) = 1$ и X, H, B_0 известны ([3, теорема 1.1]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Huppert, B. Endliche Gruppen, I. / B. Huppert. – Berlin: Springer – Verlag, 1967. – 793 S.
2. Горенстейн, Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенстейн. – М.: Мир. – 1985. – 352 с.
3. Arad, Z. On finite factorizable groups / Z. Arad, E. Fisman // J. Algebra. – 1984. – Vol. 86, № 2. – P. 522 – 548.
4. Guralnik, R. Sylow *p*-subgroups and subnormal subgroups of finite groups / R. Guralnik, P. Kleidman, R. Lyons // Proc. London Math. Soc. – 1993. – Vol. 66, № 3. – P. 129 – 151.
5. Curtis, C. The 2-transitive permutation representation of the finite Chevalley groups / C. Curtis, W. Kantor, G. Seitz // Trans.Amer. Math.Soc. – 1976. – Vol. 218. – P. 1 – 59.
6. Hall, Ph. Theorems like Sylow's / Ph. Hall // Proc. London Math. Soc. – 1956. – Vol. 6, № 3. – P. 286 – 304.
7. Thompson, J. Hall sulgroups of the symmetric groups / J. Thompson // J. Comb. Theory. – 1966. – Vol. 1. – P. 271 – 279.
8. Gross, F. Hall subqroups of order not divisible by 3 / F. Gross // Rocky Mountain J. Math. – 1993. – Vol. 23, № 2. – P. 569 – 591.
9. Seitz, G. Flag – transitive subgroups of chevalley groups / G. Seitz // Ann. Math. – 1973. – № 97. – P. 27 – 57.
10. Liebeck, M. The maximal factorizations of the finite simple groups and their automorphism groups / M. Liebeck, C. Praeger, J. Saxl // Memoirs AMS. – 1990. – Vol. 86, № 432. – P. 1 – 151.
11. Vdovin, E.P. Hall subgroups of finite groups / E.P. Vdovin, D.O. Revin // Ин-т матем., сиб. отдел. РАН. – 2004. – 1 – 40 с. – (Препринт. – № 134).
12. Ревин, Д.О. Холловы подгруппы нечетного порядка в конечных группах / Д.О. Ревин // Алгебра и логика. – 2002. – Т. 41, № 2. – С. 15 – 56.
13. Казарин, Л.С. О проблеме С.А. Чунихина. / Л.С. Казарин // Исследования по теории групп. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984. – С. 81 – 99.
14. Тютянов, В.Н. Тройные факторизации в конечных группах / В.Н. Тютянов, Л.А. Шеметков // Докл. НАН Беларуси. – 2002. – Т. 46, № 4. – С. 52 – 55.
15. Gorenstein, D. The classification of the finite simple groups / D. Gorenstein, R. Lyons, R. Solomon // Amer. Math. Soc., Math. Surveys and monographs. – 1998. – Vol. 40, № 3. – 419 p.

16. Gorenstein, D. The classification of the finite simple groups / D. Gorenstein, R. Lyons, R. Solomon // Amer. Math. Soc., Math. Surveys and monographs. – 1995. – Vol. 40, № 2. – P. 1 – 165.
17. Ревин, Д.О. Холловы π-подгруппы конечных групп Шевалле, характеристика которых принадлежит π / Д. Ревин // Математические труды. – 1999. – Т. 2, № 1. – С. 160 – 208.
18. Ревин, Д.О. Свойство D_π в одном классе конечных групп / Д.О. Ревин // Алгебра и логика. – 2002. – Т. 41, № 3. – С. 335 – 370.

Поступила 20.05.2009