Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

ОБЩАЯ ФИЗИКА

Практикум

В двух частях

Часть 1

Г. М. Макаренко
Д. А. Антонович

МЕХАНИКА
МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА
ТЕРМОДИНАМИКА

*Допущено Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов
учреждений высшего образования по техническим специальностям*

Новополоцк
ПГУ
2012

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73
О28

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

кафедра физики Белорусского национального технического университета
(П. Г. КУЖИР – канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф.);
д-р физ.-мат. наук, проф., зав. каф. физики УО «Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого» П. А. ХИЛО

Общая физика. Практикум : учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 1. Механика.
О28 Молекулярная физика. Термодинамика / Г. М. Макаренко, Д. А. Антонович. – Новополоцк : ПГУ, 2012. – 360 с.

ISBN 978-985-531-337-4.

Приведены решения с пояснениями 280 задач, используемых при изучении разделов «Механика», «Молекулярная физика и термодинамика» общей физики. По каждой из рассматриваемых тем дан перечень основных формул.

Предназначен для студентов учреждений высшего образования технических специальностей.

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73

ISBN 978-985-531-337-4 (Ч. 1)
ISBN 978-985-531-339-8

© Макаренко Г. М., Антонович Д. А., 2012
© УО «Полоцкий государственный университет», 2012

ПРЕДИСЛОВИЕ

Практикум разработан в соответствии с программой курса общей физики для студентов вузов, для которых физика не является профилирующей дисциплиной. Призвано помочь студентам технических вузов (особенно обучающимся без отрыва от производства) самостоятельно научиться решать задачи по физике.

Физика является одной из тех наук, знание которой необходимо для успешного изучения общенаучных и специальных дисциплин. При изучении курса физики студенты должны прочно усвоить основные законы и теории, овладеть необходимыми приемами умственной деятельности, важным компонентом которой является умение решать задачи по физике.

Хорошо известно, что единственный способ научиться решать задачи – пытаться решать их самостоятельно. Отсюда вытекает диалектичность процесса обучения – знание теории приобретается одновременно с ее использованием для решения задач. Абстрактные поначалу законы, уравнения, определения понятий и физических величин (эта абстрактность и является главным камнем преткновения при изучении физики) в процессе их практического применения для описания конкретных физических явлений (т.е. при решении физических задач) начинают постепенно наполняться конкретным содержанием, и только тогда приходит понимание теории. Недаром известный итальянский физик Энрико Ферми утверждал, что «знать физику – означает умение решать задачи». Другими словами, уровень подготовки по физике определяется уровнем сложности задач, которые студент может решить.

Основная цель пособия – оказать студентам методическую помощь в выполнении самостоятельных и контрольных работ; ознакомить их с некоторыми методами решения физических задач; привить навыки и культуру решения, обратить внимание на наиболее распространенные ошибки.

В практикуме рассмотрены типовые задачи, подобные тем, которые наиболее часто используются при изучении общей физики в техническом вузе.

Задачи объединены в разделы, разделенные по темам. В начале каждой темы приведены основные законы, уравнения и формулы, используемые для решения задач.

Решения задач в основном выполнены по единой схеме: составлены необходимые уравнения, выполнено их решение их в общем виде, подставлены числовые данные, приведен ответ.

Методические указания к решению задач

При решении задач рекомендуется определенная последовательность:

1. Изучите теоретический материал соответствующего раздела курса, запомните законы и основные формулы, а также единицы измерения величин, входящих в них.
2. Несколько раз внимательно прочитайте условие задачи. Сделайте сокращенную запись данных и искомых физических величин, предварительно представив их в системе СИ.

В условиях и при решении задач часто используются множители и приставки СИ для образования десятичных и дольных единиц.

3. Вникните в смысл задачи. Представьте физическое явление, о котором идет речь; введите упрощающие предположения, которые можно сделать при решении. Для этого необходимо использовать такие модели, как материальная точка, абсолютно твердое тело, точечный заряд, луч света и т.д.
4. Если позволяет условие задачи, выполните схематический чертеж, поясняющий содержание и решение.
5. С помощью физических законов установите количественные связи между заданными и искомыми величинами, т.е. составьте замкнутую систему уравнений, в которой число уравнений равнялось бы числу неизвестных.
6. Найдите решение полученной системы уравнений в виде расчетной формулы, отвечающей на вопрос задачи.
7. Проверьте правильность полученного решения, используя правило размерностей. Размерности правой и левой частей уравнения должны совпадать. Хотя равенство размерностей не является достаточным подтверждением правильности решения задачи, рекомендуемый метод проверки очень полезен.
8. Подставьте в полученную формулу числовые значения физических величин и проведите вычисления. Обратите внимание на точность численного ответа, которая не может быть больше точности исходных величин.
9. Получив численный ответ, оцените его правдоподобность.

Заметим, что при решении задач возможны отступления от вышеизложенной схемы.

В этом пособии не проводится проверка размерностей в некоторых задачах, в которых она очевидна.

Для уменьшения объема текста подстановка численных значений в некоторых заданиях не проводится.

1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

1.1. Кинематика материальной точки

Основные теоретические сведения

Положение *материальной точки* в пространстве в данный момент времени определяется по отношению к какому-либо произвольно выбранному телу, которое называется *телом (точкой) отсчета*. В наиболее часто используемой декартовой системе координат положение материальной точки в данный момент времени по отношению к этой системе характеризуется тремя координатами – x, y, z или *радиус-векором* $\vec{r}$ – направленным отрезком прямой, соединяющим точку отсчета O (рис. 1) и материальную точку (м.т.). При этом проекции радиус-вектора на оси системы отсчета эквивалентны координатам материальной точки. В произвольный момент времени t положение материальной точки может быть определено выражением

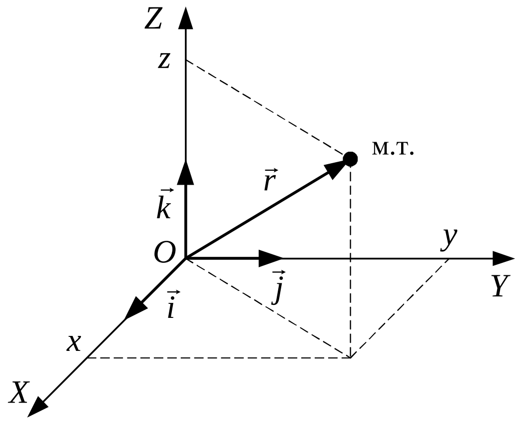


Рис. 1

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – координаты точки в пространстве; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы направлений (орты соответствующих координатных осей); t – время.

Модуль радиус-вектора определяется выражением

$$\left|\vec{r}(t)\right| = \sqrt{\left(x(t)\right)^2 + \left(y(t)\right)^2 + \left(z(t)\right)^2}.$$

При движении материальной точки ее координаты и радиус-вектор изменяются со временем, а сама материальная точка (конец вектора $\vec{r}$) описывает в пространстве линию, которая называется ее *траекторией* (рис. 2). Скалярную величину ΔS, равную длине траектории, описанной точкой за данный промежуток времени, называют *отрезком пути* материальной точки (*путем*). Путь всегда положителен и в процессе движения может только возрастать.

Пусть за время Δt материальная точка переместилась из точки M в точку M', пройдя вдоль траектории отрезок пути ΔS (рис. 2). Вектор $\Delta\vec{r}$, проведенный из начальной точки M в конечную точку M', называется *вектором перемещения* материальной точки за время Δt:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t),$$

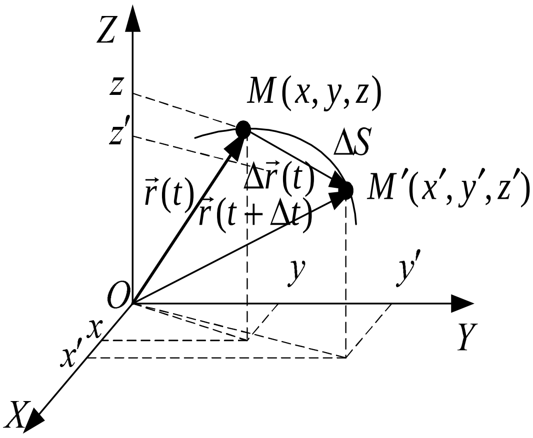


Рис. 2

или $\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$,

где $\Delta x = x' - x$; $\Delta y = y' - y$; $\Delta z = z' - z$.

При прямолинейном движении вектор перемещения совпадает с соответствующим участком траектории и модуль перемещения $|\Delta\vec{r}|$ равен пройденному пути ΔS, если направление движения не изменяется:

$$\Delta S = |\Delta\vec{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2},$$

при криволинейном движении

$$|\Delta\vec{r}| < \Delta S.$$

Вектор средней скорости движения материальной точки

$$\langle\vec{\upsilon}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t},$$

где $\Delta\vec{r}$ – перемещение точки за промежуток времени Δt; $\vec{r}$ – радиус-вектор точки.

Средняя путевая скорость движения

$$\langle\upsilon\rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t},$$

где ΔS – путь, пройденный точкой за промежуток времени Δt.

Мгновенная скорость

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k},$$

где $\upsilon_x = \dfrac{dx}{dt}$; $\upsilon_y = \dfrac{dy}{dt}$; $\upsilon_z = \dfrac{dz}{dt}$ – проекции вектора скорости $\vec{\upsilon}$ на соответствующие оси координат.

Модуль вектора полной скорости

$$\upsilon = |\vec{\upsilon}| = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}.$$

Кинематическое уравнение равномерного движения ($\vec{\upsilon} = \text{const}$, $\vec{a} = 0$) точки вдоль оси OX

$$x = x_0 \pm \upsilon t,$$

где x_0 – начальная координата точки; t – время движения. Знак «плюс» берется при совпадении направления вектора скорости с выбранным положительным направлением оси OX.

Правило сложения скоростей в классической механике:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{\upsilon}_0,$$

где $\vec{\upsilon}$ – скорость материальной точки относительно неподвижной системы отсчета; $\vec{\upsilon}'$ – скорость материальной точки относительно подвижной системы отсчета; $\vec{\upsilon}_0$ – скорость подвижной системы отсчета относительно неподвижной системы отсчета.

Среднее ускорение материальной точки

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t}.$$

Мгновенное ускорение материальной точки

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

где $a_x = \dfrac{d\upsilon_x}{dt} = \dfrac{d^2 x}{dt^2}$; $a_y = \dfrac{d\upsilon_y}{dt} = \dfrac{d^2 y}{dt^2}$; $a_z = \dfrac{d\upsilon_z}{dt} = \dfrac{d^2 z}{dt^2}$ – проекции вектора ускорения $\vec{a}$ на соответствующие оси координат.

Модуль вектора полного ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Полное ускорение при криволинейном движении

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,$$

где $a_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt}$ – тангенциальная (касательная к траектории) составляющая ускорения; $a_n = \dfrac{\upsilon^2}{R}$ – нормальная (центростремительная) составляющая ускорения, R – радиус кривизны траектории в данной точке.

Модуль вектора полного ускорения при криволинейном движении

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Кинематическое уравнение равнопеременного движения ($\vec{a} = \mathrm{const}$) вдоль оси X

$$x = x_0 \pm \upsilon_0 t \pm \frac{at^2}{2}.$$

Скорость точки при равнопеременном движении

$$\upsilon = \upsilon_0 \pm at,$$

где υ_0 – скорость движения в начальный момент времени $t = 0$ (начальная скорость). При равноускоренном движении ускорение a берется со знаком «плюс», при равнозамедленном – со знаком «минус».

Связь между ускорением и перемещением при прямолинейном движении может быть определена выражением

$$\Delta S = \frac{\left|\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right|}{2a}.$$

Для тела, брошенного с земли под углом α к горизонту со скоростью υ_0 (без учета сопротивления воздуха),

время полета

$$t = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g};$$

дальность полета

$$\Delta S = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g};$$

максимальная высота

$$h_{\max} = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

При вращательном движении положение твердого тела определяется углом поворота (угловым перемещением) $d\varphi$ при указанном положении оси вращения.

Угловая скорость тела

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Угловая скорость равномерного вращательного движения

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu,$$

где $\Delta\varphi$ – угол поворота произвольного радиуса от начального положения; Δt – промежуток времени, за который произошел этот поворот; T – период вращения; $\nu = \dfrac{N}{t}$ – частота вращения, N – число оборотов за время t.

Угловое ускорение

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Кинематическое уравнение равномерного вращения ($\vec{\omega} = \mathrm{const}$, $\varepsilon = 0$)

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t,$$

где φ_0 – угол поворота в момент времени $t = 0$ (в начальный момент времени).

Кинематическое уравнение равнопеременного вращательного движения ($\varepsilon = \text{const}$)

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Связь угла поворота с числом оборотов:

$$\varphi = 2\pi N.$$

Угловая скорость тела при равнопеременном вращении

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t,$$

где ω_0 – угловая скорость в начальный момент времени $t = 0$ (начальная угловая скорость). При равноускоренном вращении тела угловое ускорение ε берется со знаком «плюс», при равнозамедленном – со знаком «минус».

Угловое ускорение ε связано с углом поворота за некоторый промежуток времени $\Delta\varphi$ соотношением

$$\Delta\varphi = \frac{\left|\omega_2^2 - \omega_1^2\right|}{2\varepsilon}.$$

Связь между линейными и угловыми величинами при вращательном движении:

$$\Delta S = R\Delta\varphi; \qquad \upsilon = R\omega; \qquad a_\tau = \varepsilon R; \qquad a_n = \omega^2 R.$$

Полное ускорение при вращательном движении

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Примеры решения задач

Задача 1.1

Две трети своего пути мотоциклист проехал со скоростью υ_1 = 54 км/ч, остальную часть пути – со скоростью υ_2 = 72 км/ч. Найти среднюю путевую скорость мотоциклиста.

Дано:

υ_1 = 54 км/ч = 15 м/с

υ_2 = 72 км/ч = 20 м/с

$\langle\upsilon\rangle$ – ?

Решение

Среднюю путевую скорость мотоциклиста можно найти по формуле

$$\langle\upsilon\rangle = \frac{S}{t},$$

где S – путь, пройденный мотоциклистом за время t.

Представим время t в виде суммы: $t = t_1 + t_2$, где t_1 – время, за которое мотоциклист проехал две трети пути, двигаясь со скоростью υ_1, t_2 – время, за которое мотоциклист проехал оставшуюся треть пути, двигаясь со скоростью υ_2. Тогда $t_1 = \frac{2}{3}\frac{S}{\upsilon_1}$, а $t_2 = \frac{1}{3}\frac{S}{\upsilon_2}$.

Средняя путевая скорость

$$\langle\upsilon\rangle = \frac{S}{t_1 + t_2} = \frac{S}{\left(\frac{2S}{3\upsilon_1} + \frac{S}{3\upsilon_2}\right)} = \frac{3\upsilon_1\upsilon_2}{\upsilon_1 + 2\upsilon_2};$$

$$[\langle\upsilon\rangle] = \frac{\frac{\text{м}}{\text{с}}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}}}{\frac{\text{м}}{\text{с}}} = \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\langle\upsilon\rangle = \frac{3\cdot 15\cdot 20}{15 + 2\cdot 20} = 16{,}4 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\langle\upsilon\rangle \approx 16{,}4$ м/с.

Задача 1.2

Два автомобиля, выехав одновременно из одного пункта, движутся прямолинейно в одном направлении. Зависимость пройденного ими пути задается уравнениями $S_1 = At + Bt^2$ и $S_2 = Ct + Dt^2 + Ft^3$. Определить относительную скорость автомобилей через 5 с, если $A = 5$ м/с, $B = 6$ м/с^2, $C = 1$ м/с, $D = 1$ м/с^2, $F = 1$ м/с^3.

Дано:
$S_1 = At + Bt^2$
$A = 5$ м/с; $B = 6$ м/с^2
$S_2 = Ct + Dt^2 + Ft^3$
$C = 1$ м/с; $D = 1$ м/с^2
$F = 1$ м/с^3
$t = 5$ с

$\upsilon' - ?$

Решение

Зная зависимость пройденного пути от времени, можно найти скорости первого и второго автомобиля как первые производные от соответствующих выражений:

$$\upsilon_1 = \frac{dS_1}{dt} = A + 2Bt; \quad \upsilon_2 = \frac{dS_2}{dt} = C + 2Dt + 3Ft^2.$$

Для определения скорости первого автомобиля относительно второго (подвижная система отсчета) воспользуемся правилом сложения скоростей:

$$\vec{\upsilon}' = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2,$$

где $\vec{\upsilon}'$ – вектор скорости первого автомобиля относительно второго.

Это векторное уравнение. Если ось координат направить по ходу движения автомобилей, учитывая, что автомобили движутся в одну сторону, то в проекции на эту ось получим: $\upsilon' = \upsilon_1 - \upsilon_2$. Подставляя найденные выражения для υ_1 и υ_2, υ_1 получим:

$$\upsilon' = A + 2Bt - C - 2Dt - 3Ft^2;$$

$$\upsilon' = (A - C) + 2(B - D)t - 3Ft^2;$$

$$\upsilon' = (5 - 1) + 2(6 - 1)5 - 3 \cdot 1 \cdot 25 = -21 \text{ м/с}.$$

Знак «минус» говорит о том, что первый автомобиль отстает от второго со скоростью 21 м/с.

Ответ: $\upsilon' = -21$ м/с.

Задача 1.3

Движение материальной точки, перемещающейся по прямой, задано уравнением $S = 4t^3 + 2t + 1$. В интервале времени от 1 до 2 с найти мгновенные скорости и ускорения в начале и конце интервала, среднюю скорость движения.

Дано:
$S = 4t^3 + 2t + 1$
$t_1 = 1$ с
$t_2 = 2$ с

υ_1; υ_2; a_1; a_2; $\langle \upsilon \rangle$ – ?

Решение

Продифференцировав по времени уравнение движения материальной точки, можно найти выражение для скорости материальной точки:

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} = 12t^2 + 2.$$

Мгновенные скорости в начале и конце интервала равны:

$$\upsilon_1 = 12t_1^2 + 2 = 12 \cdot 1^2 + 2 = 14 \text{ (м/с)};$$

$$\upsilon_2 = 12t_2^2 + 2 = 12 \cdot 2^2 + 2 = 50 \text{ (м/с)}.$$

Ускорение – это первая производная от скорости по времени:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = 24t.$$

В начале и конце интервала мгновенные ускорения равны:

$$a_1 = 24t_1 = 24 \text{ (м/с}^2\text{)}; \quad a_2 = 24t_2 = 48 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Средняя скорость $\langle \upsilon \rangle$ движения точки определяется как отношение пути S, пройденного точкой за заданный интервал времени t, к этому интервалу:

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1};$$

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{4t_2^3 + 2t_2 + 1 - 4t_1^3 - 2t_1 - 1}{t_2 - t_1} = \frac{4\left(t_2^3 - t_1^3\right) + 2\,(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1};$$

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{4\left(2^3 - 1\right) + 2(2-1)}{2-1} = 30 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\upsilon_1 = 14$ м/с; $\upsilon_2 = 50$ м/с; $a_1 = 24$ м/с^2; $a_2 = 48$ м/с^2; $\langle \upsilon \rangle = 30$ м/с.

Задача 1.4

Материальная точка движется по прямой. Уравнение ее движения $S = t^4 + 2t^2 + 5$. Определить мгновенную скорость и ускорение точки в конце второй секунды от начала движения, среднюю скорость и путь, пройденный за это время.

Дано:	**Решение**
$S = t^4 + 2t^2 + 5$	Продифференцировав по времени уравнение движения материальной точки, можно найти выражение для скорости материальной точки:
$t = 2$ с	
υ; a; $\langle \upsilon \rangle$; S' – ?	

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} = 4t^3 + 4t.$$

Мгновенная скорость в заданный момент времени

$$\upsilon = 4(2^3 + 2) = 40 \text{ (м/с)}.$$

Аналогично определим мгновенное ускорение как первую производную от скорости по времени:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = 12t^2 + 4 = 12\cdot 2^2 + 4 = 52 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Среднюю скорость точки $\langle \upsilon \rangle$ за время $\Delta t = t - t_0$ определим по формуле

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{dS}{dt} = \frac{S(t) - S(0)}{t - t_0}.$$

Так как $t_0 = 0$, то

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{t^4 + 2t^2 + 5 - 5}{t} = t^3 + 2t = 12 \text{ м/с}.$$

Путь, пройденный точкой за время $t = 2$ с, будет равен

$$S = S(t) - S(0) = t^4 + 2t^2 + 5 - 5 = 2^4 + 2\cdot 2^2 = 24 \text{ м}.$$

Ответ: $\upsilon = 40$ м/с; $a = 52$ м/с^2; $\langle \upsilon \rangle = 12$ м/с; $S = 24$ м.

Задача 1.5

Заданы уравнения движения двух материальных точек: $x_1 = A_1 + B_1t + C_1t^2$, $x_2 = A_2 + B_2t + C_2t^2$, где $A_1 = 18$ м; $A_2 = 2$ м; $B_1 = B_2 = 3$ м/с; $C_1 = -3$ м/с^2; $C_2 = 1$ м/с^2. Найти момент времени, когда скорости движения точек будут одинаковы. Определить скорости υ_1 и υ_2 и ускорения a_1 и a_2 точек в этот момент времени.

Дано:
$x_1 = A_1 + B_1t + C_1t^2$
$x_2 = A_2 + B_2t + C_2t^2$
$A_1 = 18$ м; $A_2 = 2$ м
$B_1 = B_2 = 3$ м/с
$C_1 = -3$ м/с^2; $C_2 = 1$ м/с^2
υ_1; υ_2; a_1; a_2; t – ?

Решение

Заданы кинематические уравнения движения в координатной форме. Уравнение зависимости скорости точки от времени найдем, дифференцируя заданное уравнение движения по времени, т.е.

$$\upsilon_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A_1 + B_1t + C_1t^2\right) = B_1 + 2C_1t;$$

$$\upsilon_2 = \frac{dx_2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A_2 + B_2t + C_2t^2\right) = B_2 + 2C_2t.$$

По условию задачи $\upsilon_1 = \upsilon_2$ в момент времени t, т.е.

$$B_1 + 2C_1t = B_2 + 2C_2t,$$

откуда

$$t = \frac{B_1 - B_2}{2C_2 - 2C_1} \text{ и, т.к. по условию } B_1 = B_2\text{, то } \quad t = 0.$$

Значит, $\upsilon_1 = B_1 = 3$ (м/с); $\upsilon_2 = B_2 = 3$ (м/с).

Ускорение в произвольный момент времени найдем, продифференцировав найденное выражение для зависимости скорости от времени (взяв вторую производную от заданного уравнения движения по времени):

$$a_1 = \frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}\left(B_1 + 2C_1t\right) = 2C_1\text{, т.о. } \quad a_1 = -6 \text{ м/с}^2;$$

$$a_2 = \frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}\left(B_2 + 2C_2t\right) = 2C_2\text{, т.о. } \quad a_2 = 2 \text{ м/с}^2;$$

Ответ: $t = 0$; $\upsilon_1 = \upsilon_2 = 3$ м/с; $a_1 = -6$ м/с^2; $a_2 = 2$ м/с^2.

Задача 1.6

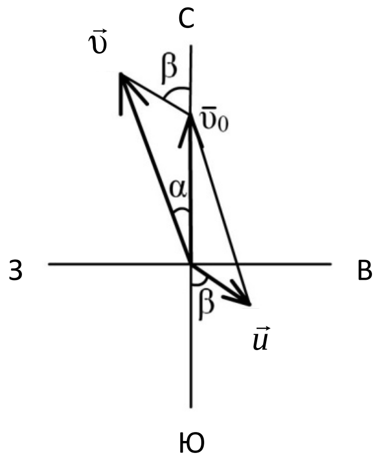
С какой скоростью и по какому курсу должен лететь самолет, чтобы за 2 часа пролететь точно на север 720 км, если во время полета дует постоянный северо-западный ветер под углом 30° к меридиану со скоростью 36 км/ч?

Дано:
$t = 2$ ч
$S = 720$ км
$\beta = 30°$
$u = 36$ км/ч
υ, α – ?

Решение

Скорость будем измерять в км/ч, как это делает летчик, определяя ее по приборам. Чтобы попасть в пункт назначения, самолету необходимо лететь под углом α к меридиану, отклоняясь на запад (см. рисунок). Обозначим искомую относительную скорость как $\vec{\upsilon}$, а результирующую абсолютную скорость, направленную вдоль меридиана, как $\vec{\upsilon}_0$. Ее модуль $\left|\vec{\upsilon}_0\right| = \dfrac{S}{t}$.

Из рисунка видно, что $\vec{\upsilon}_0 = \vec{\upsilon} + \vec{u}$. Модуль вектора скорости $\left|\vec{\upsilon}\right|$ найдем из векторного треугольника скоростей, используя теорему косинусов:



$$\left|\vec{\upsilon}\right| = \sqrt{\upsilon_0^2 + u^2 - 2\upsilon_0 u \cos\left(180° - \beta\right)};$$

$$[\upsilon] = \sqrt{\frac{\text{км}^2}{\text{ч}^2}} = \frac{\text{км}}{\text{ч}}; \quad \upsilon \approx 392 \text{ км/ч}.$$

Таким образом, скорость полета самолета больше υ_0. Угол α можно найти по теореме синусов:

$$\frac{u}{\sin\alpha} = \frac{\upsilon}{\sin(180 - \beta)}, \quad \text{откуда } \alpha = 4{,}5°.$$

Ответ: $\upsilon \approx 392$ км/ч; $\alpha = 4{,}5°$.

Задача 1.7

Стрела пущена из лука вертикально вверх с начальной скоростью $\upsilon_0 = 40$ м/с. Определить: 1) через какое время и с какой скоростью стрела упадет на землю; какой путь будет пройден ею за это время; 2) через какое время она окажется на высоте $h = 35$ м.

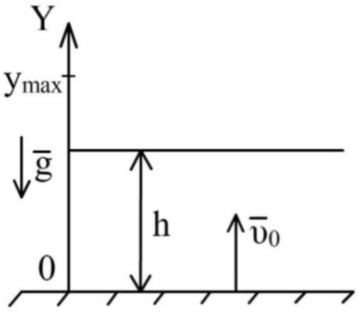
Дано:	**Решение**
$\upsilon_0 = 40$ м/с $h = 35$ м	В системе отсчета, связанной с Землей, ось ординат направим вертикально вверх, начало отсчета совместим с точкой бросания (см. рисунок).
$t_{пол}$; υ; S; t – ?	

Считая, что движение стрелы прямолинейное и равнозамедленное, уравнения движения в проекциях на ось OY будут иметь вид:

$$y = \upsilon_0 t - \frac{gt^2}{2}; \qquad (1)$$

$$\upsilon = \upsilon_0 - gt_0. \qquad (2)$$

1. В момент падения на землю $t = t_{пол}$; $y = 0$. Из уравнения (1) найдем время полета:



$$t_{пол} = \frac{2\upsilon_0}{g}; \quad t_{пол} = \frac{2 \cdot 40}{9{,}8} = 8 \text{ с}.$$

Подставив $t_{пол}$ в уравнение (2), определим скорость падения стрелы:

$$\upsilon = \upsilon_0 - g\frac{2\upsilon_0}{g} = -\upsilon_0.$$

Скорость падения равна по модулю начальной скорости и противоположна ей по направлению.

В верхней точке траектории скорость стрелы равна нулю, тогда из уравнения (2) найдем время подъема:

$$t_{под} = \frac{\upsilon_0}{g}; \quad [t_{под}] = \frac{\text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с} \cdot \text{м}} = \text{с}.$$

Путь, пройденный стрелой за время движения, равен $S = 2y_{\max}$. Значение $y_{\max}$ определим из уравнения (1), подставив в него $t_{под}$ (время подъема):

$$y_{max} = \frac{\upsilon_0^2}{2g}, \text{ тогда } \ S = \frac{\upsilon_0^2}{g}; \ \ [S] = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{м}} = \text{м}; \ \ S = \frac{40^2}{9{,}8} \approx 160 \text{ м}.$$

2. Время подъема на высоту h определим, подставив в уравнение (1) значение $y = h$, тогда $35 = 40t - 5t^2$. Решая квадратное уравнение, получим $t_1 = 1$ с; $t_2 = 7$ с. Два значения для t указывают на то, что стрела на этой высоте побывает дважды: через 1 с (на подъеме) и через 7 с от начала движения (на спуске).

Ответ: $t = 8$ с; $\upsilon = 40$ м/с; $S = 160$ м; $t_1 = 1$ с; $t_2 = 7$ с.

Задача 1.8

Мяч брошен вертикально вверх. На высоте h = 6 м он побывал дважды с интервалом Δt = 3 с. Определить начальную скорость мяча.

Дано:	**Решение**
h = 3 м Δt = 3 с	В системе отсчета, связанной с Землей, ось ординат направим вверх, а начало отсчета совместим с поверхностью Земли в точке бросания (см. рис. к задаче 1.6).
υ_0 – ?	

Запишем уравнения движения мяча для моментов t и $t + \Delta t$:

$$y_1 = h = \upsilon_0 t - \frac{gt^2}{2}; \tag{1}$$

$$y_2 = h = \upsilon_0 (t + \Delta t) - \frac{g(t+\Delta t)^2}{2}. \tag{2}$$

Приравняв правые части уравнений (1) и (2), получим:

$$t = \frac{2\upsilon_0 - g\Delta t}{2g}.$$

Подставив значение t в уравнение (2), найдем:

$$\upsilon_0 = \frac{1}{2}\sqrt{8gh + g^2\Delta t^2};$$

$$[\upsilon_0] = \sqrt{\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\text{м} + \frac{\text{м}^2}{\text{с}^4}\cdot\text{с}^2} = \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\upsilon_0 = \frac{1}{2}\sqrt{8\cdot 9{,}8\cdot 6 + 9{,}8^2\cdot 3^2} = 18 \text{ м/с}.$$

Ответ: υ_0 = 18 м/с.

Задача 1.9

Кинематическое уравнение движения материальной точки по прямой (ось x) имеет вид $x(t) = A + Bt + Ct^2$, где A = 5 м, B = 4 м/с, C = –1 м/с^2.

Необходимо:

1. Построить графики зависимости координаты x и пути S от времени.
2. Определить среднюю скорость $\langle\upsilon_x\rangle$ за интервал времени от t_1 = 1 с до t_2 = 6 с.
3. Найти среднюю путевую скорость $\langle\upsilon\rangle$ за тот же интервал времени.

Дано:
$x(t) = A + Bt + Ct^2$
$A = 5$ м
$B = 4$ м/с
$C = -1$ м/с^2
$t_1 = 1$ с
$t_2 = 6$ с
$X(t)$; $S(t)$; $\langle \upsilon_x \rangle$; $\langle \upsilon \rangle$ – ?

Решение

1. Для построения графика зависимости координаты точки от времени найдем характерные значения координаты – начальное и максимальное, а также моменты времени, соответствующие указанным координатам и координате, равной нулю.

Начальная координата соответствует моменту $t = 0$. Ее значение равно $x_0 = x(0) = A = 5$ м. Координата x сначала увеличивается, а потом уменьшается. Максимального значения координата достигает в тот момент, когда точка начинает двигаться обратно (скорость меняет знак).

Этот момент времени найдем, приравняв нулю первую производную от координаты по времени:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = B + 2Ct = 0,$$

откуда

$$t = -\frac{B}{2C} = 2\ \text{с}.$$

Максимальная координата

$$x_{\text{мах}} = x(2) = 9\ \text{м}.$$

Момент времени t, когда координата $x = 0$, найдем из выражения

$$x = A + Bt + Ct^2 = 0.$$

Решим полученное квадратное уравнение относительно t:

$$t = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}.$$

Подставим значения A, B, C и произведем вычисления: $t = (2 \pm 3)$ с.

Таким образом, получаем два значения времени: $t' = 5$ с и $t'' = -1$ с.

Второе значение времени отбрасываем, так как оно не удовлетворяет условию задачи ($t \geq 0$).

График зависимости координаты точки от времени представляет собой кривую второго порядка. Для его построения необходимо иметь пять точек, так как уравнение кривой второго порядка содержит пять коэффициентов. Поэтому кроме трех вычисленных ранее характерных значений координаты найдем еще два значения координаты, соответствующие моментам $t_1 = 1$ с и $t_2 = 6$ с:

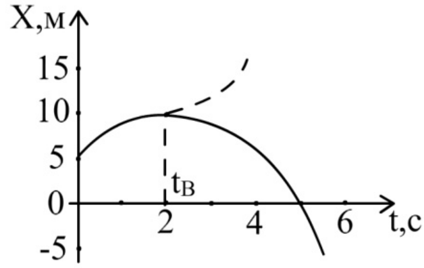
$$x_1 = A + Bt_1 + Ct_1^2 = 8 \text{ м}; \qquad x_2 = A + Bt_2 + Ct_2^2 = -7 \text{ м}.$$

Полученные данные представим в виде таблицы.

Время, с	$t_0 = 0$	$t_1 = 1$	$t_B = 2$	$t' = 5$	$t_2 = 6$
Координата, м	$x_0 = A = 5$	$x_1 = 8$	$x_{max} = 9$	$x = 0$	$x_2 = -7$

Используя данные таблицы, построим график зависимости координаты от времени (см. рисунок).

График пути (штриховая линия) построим, исходя из следующих соображений: 1) путь и координаты до момента изменения знака скорости совпадают; 2) начиная с момента возврата (t_B) точка движется в обратном направлении и, следовательно, координата ее убывает, а путь продолжает возрастать по тому же закону, по которому убывает координата.



Следовательно, график пути до момента времени $t_B = 2$ с совпадает с графиком координаты, а начиная с этого момента является зеркальным отображением графика координаты.

2. Средняя скорость $\langle \upsilon_x \rangle$ за интервал времени $t_2 - t_1$ определяется выражением

$$\langle \upsilon_x \rangle = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

Подставим значения x_1, x_2, t_1, t_2 из таблицы и произведем вычисления:

$$\langle \upsilon_x \rangle = \frac{-7 - 8}{6 - 1}\,\frac{\text{м}}{\text{с}} = -3\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

3. Среднюю путевую скорость $\langle \upsilon \rangle$ находим из выражения

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{S}{t_2 - t_1},$$

где S – путь, пройденный точкой за интервал времени $t_2 - t_1$.

Из графика (см. рис.) видно, что этот путь складывается из двух отрезков пути: $S_1 = x_{max} - x_1$, который точка прошла за интервал времени $t_B - t_1$, и $S_2 = x_{max} + |x_2|$, который она прошла за интервал $t_2 - t_B$. Таким образом, путь $S = S_1 + S_2 = (x_{max} - x_1) + (x_{max} + |x_2|) = 2x_{max} + |x_2| - x_1$.

Подставим в это выражение значения x_1, $|x_2|$, x_{max} и произведем вычисления:

$$\langle S \rangle = 2 \cdot 9 + 7 - 8 = 17 \text{ м}.$$

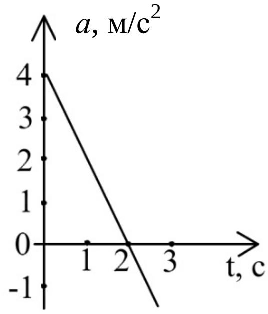
Тогда искомая средняя путевая скорость

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{17}{6-1}\ \frac{\text{м}}{\text{с}} = 3{,}4 \text{ м/с}.$$

Заметим, что средняя путевая скорость всегда положительна.

Ответ: $\langle \upsilon_x \rangle = -3$ м/с; $\langle \upsilon \rangle = 3{,}4$ м/с.

Задача 1.10



На рисунке представлена зависимость ускорения a от времени t для материальной точки, движущейся прямолинейно. Определить скорость υ и координату x точки через $t = 3$ с после начала движения. В какой момент времени t_1 точка изменит направление движения?

Дано:
$t = 3$ с
υ; x; t_1 – ?

Решение

Из графика следует, что зависимость ускорения от времени можно представить в виде

$$a(t) = A - Bt, \tag{1}$$

где $A = 4$ м/с^2; $B = 2$ м/с^3.

В случае прямолинейного движения скорость материальной точки при $\upsilon_0 = 0$ (условие задачи)

$$\upsilon = \int_0^t a\,dt. \tag{2}$$

Подставив в формулу (2) выражение (1) и проинтегрировав, получим искомую скорость:

$$\upsilon = At - \frac{Bt^2}{2};$$

$$[\upsilon] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\text{с} - \frac{\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}^3} = \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\upsilon = 4\cdot 3 - \frac{2\cdot 9}{2} = 12 - 9 = 3 \text{ м/с}.$$

Искомая координата

$$x = \int_0^t \upsilon\,dt = \int_0^t \left(At - \frac{Bt^2}{2}\right)dt = \frac{At^2}{2} - \frac{Bt^3}{6};$$

$$[x] = \frac{\text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2} - \frac{\text{м} \cdot \text{с}^3}{\text{с}^3} = \text{м};$$

$$x = \frac{4 \cdot 9}{2} - \frac{2 \cdot 27}{6} = 18 - 9 = 9 \text{ м}.$$

Точка изменяет направление движения в момент, когда скорость $\upsilon = 0$, т.е.

$$At - \frac{Bt^2}{2} = 0,$$

откуда

$$t = \frac{2A}{B};$$

$$[t] = \frac{\text{м} \cdot \text{с}^3}{\text{с}^2 \cdot \text{м}} = \text{с};$$

$$t_1 = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4 \text{ с}.$$

Ответ: $\upsilon = 3$ м/с; $x = 9$ м; $t_1 = 4$ с.

Задача 1.11

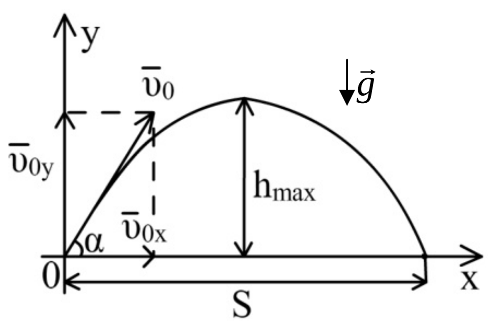
Тело брошено под углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить этот угол, если максимальная высота подъема h_{max} меньше дальности полета S в $n = 2{,}4$ раза.

Дано:
$h_{max} = S/n$
$n = 2{,}4$

α – ?

Решение

Будем рассматривать движение тела как одновременное равномерное вдоль оси OX и равнопеременное с ускорением, равным ускорению свободного падения ($\vec{g}$), вдоль оси OY.



Направив оси координат (см. рис., где υ_0 – начальная скорость тела, υ_{OX} – ее проекция на ось OX; υ_{OY} – проекция на ось OY) из точки начала движения ($\vec{r}_0 = 0$), получим уравнения движения в проекциях на оси X и Y:

$$x = \upsilon_{0x} t; \quad \upsilon_x = \upsilon_{0x}; \quad a_x = 0; \tag{1}$$

$$y = \upsilon_{0y} t - \frac{gt^2}{2}; \quad \upsilon_y = \upsilon_{0y} - gt; \quad a_y = g. \tag{2}$$

Из рисунка следует, что

$$\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha; \quad \upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha. \tag{3}$$

Поскольку при $y = h_{\max}$ (в высшей точке траектории) $\upsilon_y = 0$, из второго соотношения (2) время подъема

$$t_1 = \frac{\upsilon_{0y}}{g}. \tag{4}$$

Подставив формулу (4) в первое соотношение (2), найдем максимальную высоту подъема:

$$h_{\max} = \frac{\upsilon_{0y}^2}{2g}. \tag{5}$$

В момент падения тела $y(t) = 0$, поэтому общее время движения из первого соотношения (2)

$$t = \frac{2\upsilon_{0y}}{g}.$$

Из первого соотношения (1), используя формулу (4), дальность полета

$$S = \frac{2\upsilon_{0y}\upsilon_{0x}}{g}. \tag{6}$$

Разделив (5) на (6) и учитывая (3), найдем:

$$\frac{h_{\max}}{S} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{4}. \tag{7}$$

Согласно условию задачи $h_{\max} = \dfrac{S}{n}$, поэтому из выражения (7)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{n} = \frac{4}{2{,}4} = 1{,}66,$$

откуда искомый угол

$$\alpha = \operatorname{arctg} 1{,}66; \quad \alpha = 59^\circ.$$

Ответ: $\alpha = 59^\circ$.

Задача 1.12

С башни горизонтально брошено тело со скоростью υ_0 = 25 м/с. Найти скорость тела υ, тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения тела в конце третьей секунды, а также радиус кривизны траектории R в точке, соответствующей этому времени. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Дано:
υ_0 = 25 м/с
t = 3 с

a; a_τ; a_n; υ; R – ?

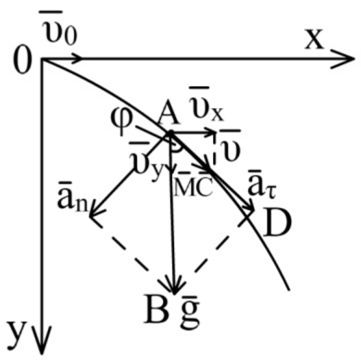
Решение

Тело, брошенное с башни горизонтально, будет двигаться по параболе. Пусть за 3 секунды движения тело оказалось в точке A (см. рисунок). Построим параллелограмм скоростей и ускорений для данной точки. Скорость $\vec{\upsilon}$ направлена по касательной к траектории, ее проекции: $\vec{\upsilon}_x$ направлена по горизонтали, а $\vec{\upsilon}_y$ – по вертикали. Ускорение $\vec{a}_\tau$ направлено по касательной к траектории, а $\vec{a}_n$ – перпендикулярно к $\vec{a}_\tau$.

Полное ускорение

$$\vec{a}_n + \vec{a}_\tau = \vec{g}\,.$$

Треугольники AMC и ABD подобны, так как все углы одного треугольника равны углам второго. Из подобия треугольников запишем отношения сторон:



$$\cos\varphi = \frac{\upsilon_y}{\upsilon} = \frac{a_\tau}{g}; \qquad a_\tau = \frac{\upsilon_y g}{\upsilon}; \qquad (1)$$

$$\sin\varphi = \frac{\upsilon_x}{\upsilon} = \frac{a_n}{g}; \qquad a_n = \frac{\upsilon_x g}{\upsilon}. \qquad (2)$$

Поскольку $\upsilon_x = \upsilon_0$, а $\upsilon_y = gt$, то

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\upsilon_0^2 + g^2 t^2}; \qquad (3).$$

Проверим размерность: $[\upsilon] = \sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} + \frac{\text{м}^2}{\text{с}^4}\cdot \text{с}^2} =$ м/с;

$$\upsilon = \sqrt{25^2 + 9{,}8^2 \cdot 3^2} = 39 \text{ м/с}.$$

Подставив уравнение (3) в (1) и (2), получим:

$$a_\tau = \frac{g^2 t}{\sqrt{\upsilon_0^2 + g^2 t^2}}; \quad a_n = \frac{\upsilon_0 g}{\sqrt{\upsilon_0^2 + g^2 t^2}}; \quad a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}\,.$$

Так как $a_n = \dfrac{\upsilon^2}{R}$, то радиус кривизны траектории в точке A равен:

$$R = \frac{\upsilon^2}{a_n}.$$

Проверим размерности:

$$[a_\tau] = \frac{\text{с} \cdot \dfrac{\text{м}^2}{\text{с}^4}}{\sqrt{\dfrac{\text{м}^2}{\text{с}^2} + \dfrac{\text{м}^2}{\text{с}^4} \cdot \text{с}^2}} = \frac{\text{с} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}}{\text{с}^4 \cdot \text{м}} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; \quad [a_n] = \frac{\dfrac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}}{\sqrt{\dfrac{\text{м}^2}{\text{с}^2} + \dfrac{\text{м}^2}{\text{с}^4} \cdot \text{с}^2}} = \frac{\text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{с} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м}} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$[a] = \sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^4} + \frac{\text{м}^2}{\text{с}^4}} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; \qquad [R] = \frac{\dfrac{\text{м}^2}{\text{с}^2}}{\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}} = \text{м}.$$

Производя вычисления, получим: $a_\tau = 7{,}7$ м/с^2; $a_n = 6{,}4$ м/с^2 ; a = 10 м/с; R = 238 м.

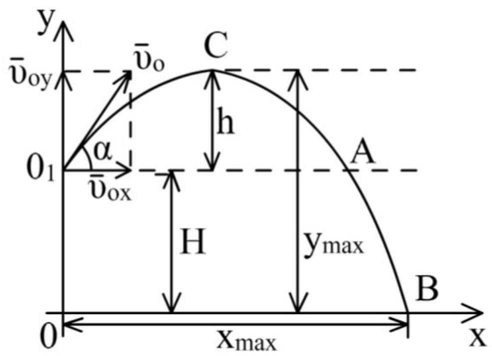
Ответ: υ = 39 м/с; a_τ = 7,7 м/с^2; a_n = 6,4 м/с^2; a = 10 м/с; R = 238 м.

Задача 1.13

Тело брошено вверх с высоты 12 м под углом 30° к горизонту с начальной скоростью 12 м/с. Определить продолжительность полета тела до точки A и до точки B (см. рисунок); максимальную высоту, которой достигает тело, дальность полета тела. Сопротивление воздуха не учитывать.

Дано:	**Решение**
H = 12 м υ_0 = 12 м/с α = 30°	В обозначенной на рисунке системе координат составляющие скорости $\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\alpha;$ (1)
t_A; t_B; $H_{\max}$; $x_{\max}$ – ?	$\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha - gt.$ (2)

Координаты тела с течением времени меняются в соответствии с уравнением равнопеременного движения:



$$y = H + \upsilon_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}; \qquad (3)$$

$$x = \upsilon_0 t \cos\alpha. \qquad (4)$$

Время подъема тела найдем из условия, что в наивысшей точке подъема тела скорость $\upsilon_y = 0$.

Тогда из уравнения (2)

$$t_{подъема} = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g}. \qquad (5)$$

Время спуска тела от точки C до точки A равно времени подъема, поэтому продолжительность полета из точки O_1 до точки A равна:

$$t_A = 2t_{подъема} = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}. \qquad (6)$$

Максимальную высоту подъема найдем из уравнения (3), подставив в него время подъема из уравнения (5):

$$y_{\max} = H_{\max} = H + \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g}. \qquad (7)$$

Время полета до точки B найдем из уравнения (3), приравняв координату y к нулю ($y = 0$):

$$t_B = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{2H}{g}}. \qquad (8)$$

Дальность полета найдем из уравнения (4), подставив в него время движения из уравнения (8):

$$x_{\max} = \upsilon_0 t_B \cos\alpha. \qquad (9)$$

Проведем вычисления по формуле (6):

$$t_A = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g};$$

$$t_A = \frac{2 \cdot 12 \cdot 0,5}{9,81} = 1,22 \text{ с};$$

$$[t_A] = \frac{\text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с} \cdot \text{м}} = \text{с};$$

по формуле (8):

$$t_B = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{2H}{g}};$$

$$t_B = \frac{12 \cdot 0,5}{9,81} + \sqrt{\left(\frac{12 \cdot 0,5}{9,81}\right)^2 + \frac{2 \cdot 12}{9,81}} \approx 2,29\ \text{с};$$

$$[t_B] = \frac{\text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с} \cdot \text{м}} + \sqrt{\left(\frac{\text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с} \cdot \text{м}}\right)^2 + \frac{\text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{м}}} = \text{с} + \text{с} = \text{с};$$

по формуле (7):

$$H_{\max} = H + \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = 12 + \frac{12^2 \cdot 0,5^2}{2 \cdot 9,81} \approx 12 + 1,83 = 13,83\ \text{м};$$

$$[H_{\max}] = \text{м} + \frac{\text{м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{м}} = \text{м} + \text{м} = \text{м};$$

по формуле (9):

$$x_{\max} = \upsilon_0 t_B \cos\alpha;$$

$$x_{\max} = 12 \cdot 0,866 \cdot 2,29 = 23,8\ \text{м};$$

$$[x_{\max}] = \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \text{с} = \text{м}.$$

Ответ: t_A = 1,22 с; t_B = 2,29 с ; $H_{\max}$ = 13,83 м ; $x_{\max}$ = 23,8 м.

Задача 1.14

По условию задачи 1.12 найти в момент приземления тела следующие величины: скорость тела и ее угол к горизонту, тангенциальное и нормальное ускорения тела, а также радиус кривизны траектории.

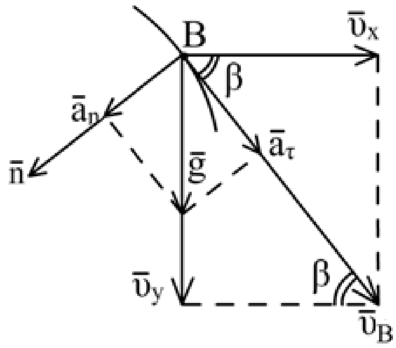
Дано:
H = 12 м
α = 30°
υ_0 = 12 м/с

υ_B; β; a_τ; a_n; R – ?

Решение

Результирующая или мгновенная скорость в точке B (см. рисунок) находится как векторная сумма составляющих $\vec{\upsilon}_x$ и $\vec{\upsilon}_y$:

$$\vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon}_x + \vec{\upsilon}_y \quad \text{или} \quad \upsilon_B = \sqrt{\upsilon_0^2 \cos^2\alpha + \upsilon_y^2}\ .$$



Составляющую υ_y в точке B найдем из уравнения (2) предыдущей задачи, подставив в него время движения t_B из уравнения (8):

$$\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha - g t_B = \sqrt{(\upsilon_0 \sin\alpha)^2 + 2gH}.$$

Тогда скорость в точке B:

$$\upsilon_B = \sqrt{(\upsilon_0 \cos\alpha)^2 + (\upsilon_0 \sin\alpha)^2 + 2gH} = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gH};$$

$$\upsilon_B = \sqrt{12^2 + 2 \cdot 9{,}81 \cdot 12} \approx 19{,}48 \text{ м/с};$$

$$[\upsilon_B] = \sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} + \frac{\text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}} = \frac{\text{м}}{\text{с}} + \frac{\text{м}}{\text{с}} = \text{ м/с}.$$

Для определения угла β, который составляет вектор скорости $\vec{\upsilon}_B$ с горизонтальной осью X, воспользуемся треугольником скоростей (см. рис.)

$$\sin\beta = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_B} = \frac{\sqrt{(\upsilon_0 \sin\alpha)^2 + 2gH}}{\sqrt{\upsilon_0^2 + 2gH}};$$

$$\sin\beta = \frac{16{,}48}{19{,}48} = 0{,}846;$$

$$\beta = \arcsin 0{,}846 = 57°46'.$$

Построим в точке B треугольник ускорений. Тангенциальная составляющая ускорения $\vec{a}_\tau$ направлена вдоль вектора мгновенной скорости в данной точке, т.е. по касательной к траектории. Нормальная составляющая ускорения $\vec{a}_n$ направлена перпендикулярно к вектору мгновенной скорости $\vec{\upsilon}_B$.

Их векторная сумма

$$\vec{a}_n + \vec{a}_\tau = \vec{g}.$$

Тогда из рисунка находим:

$$a_\tau = g \sin\beta = g \frac{\upsilon_y}{\upsilon_B}; \quad a_\tau = g \sin\beta = 9{,}81 \cdot 0{,}846 = 8{,}3 \text{ м/с}^2.$$

$$[a_\tau] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \frac{\frac{\text{м}}{\text{с}}}{\frac{\text{м}}{\text{с}}} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a_n = g\cos\beta = g\frac{\upsilon_x}{\upsilon_B}; \quad a_n = g\cos\beta = 9{,}81\cdot 0{,}533 = 5{,}23 \text{ м/с}^2;$$

$$[a_n] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\frac{\frac{\text{м}}{\text{с}}}{\frac{\text{м}}{\text{с}}} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Радиус кривизны траектории в точке приземления определяем из уравнения

$$a_n = \frac{\upsilon_B^2}{R},$$

откуда

$$R = \frac{\upsilon_B^2}{a_n} = \frac{19{,}48^2}{5{,}23} = 72{,}56 \text{ м};$$

$$R = \frac{\text{м}^2\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{м}} = \text{ м}.$$

Ответ: υ_B = 19,48 м/с; β = 57°46′; a_τ = 8,3 м/с^2; a_n = 5,23 м/с^2; R = 72,56 м.

Задача 1.15

Материальная точка движется по закону $\vec{r}(t) = A\sin(5t)\vec{i} + B\cos^2(5t)\vec{j}$, где A = 2 м, B = 3 м. Определить вектор скорости, вектор ускорения и траекторию движения точки.

Дано:
A = 2 м; B = 3 м
$\vec{\upsilon}(t)$; $\vec{a}(t)$; $y(x)$ – ?

Решение

По условию задачи движение материальной точки задается изменением радиус-вектора с течением времени:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \quad (1)$$

Сравнивая уравнение (1) с заданным, запишем движение точки координатным способом:

$$\begin{cases} x(t) = A\sin(5t); \\ y(t) = B\cos^2(5t); \\ z(t) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Определим проекции вектора скорости на оси координат:

$$\begin{cases} \upsilon_x = \dfrac{dx}{dt} = 5A\cos(5t); \\ \upsilon_y = \dfrac{dy}{dt} = -5B \cdot 2\cos(5t)\sin(5t) = -5B\sin(10t); \\ \upsilon_z = \dfrac{dz}{dt} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Согласно выражению для мгновенной скорости

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \upsilon_x \vec{i} + \upsilon_y \vec{j} + \upsilon_z \vec{k}$$

выражение для вектора скорости будет иметь вид:

$$\vec{\upsilon}(t) = 5A\cos(5t)\vec{i} + \left(-5B\sin(10t)\right)\vec{j}. \tag{4}$$

Определим проекции вектора ускорения на координатные оси:

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{d\upsilon_x}{dt} = -25A\sin(5t); \\ a_y = \dfrac{d\upsilon_y}{dt} = -50\cos(10t); \\ a_z = \dfrac{d\upsilon_z}{dt} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Согласно выражению для мгновенного ускорения

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

запишем выражение для вектора ускорения:

$$\vec{a}(t) = -25A\sin(5t)\vec{i} - 50B\cos(10t)\vec{j}. \tag{6}$$

Для определения траектории движения точки исключим из системы уравнений (2) время.

Для этого представим систему в виде

$$\begin{cases} \sin(5t) = \dfrac{x}{A}; \\ \cos^2(5t) = \dfrac{y}{B}. \end{cases} \tag{7}$$

Возведя в квадрат левую и правую части первого уравнения в системе (7) и просуммировав уравнения, получим:

$$\sin^2(5t) + \cos^2(5t) = \frac{x^2}{A^2} + \frac{y}{B}. \tag{8}$$

Левая часть уравнения (8) равна 1, тогда

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y}{B} = 1. \tag{9}$$

Выражение (9) является уравнением параболы:

$$y = \frac{A^2B - Bx^2}{A^2}. \tag{10}$$

Подставив в (10) данные из условия задачи, найдем траекторию движения точки:

$$y = 3 - \frac{3}{4}x^2.$$

Из полученного уравнения следует, что при $y \geq 0$ траектория имеет вид параболы, расположенной выше оси x, по которой точка совершает колебательное движение.

Ответ: $\vec{\upsilon}(t) = 10\cos(5t)\vec{i} - 15\sin(10t)\vec{j}$; $\vec{a}(t) = -50\sin(5t)\vec{i} - 150\cos(10t)\vec{j}$; $y = 3 - \frac{3}{4}x^2$.

Задача 1.16

Найти модули скорости и ускорения точки в момент времени t = 2 с, если точка движется по закону $\vec{r}(t) = (A + Bt)\vec{i} + (Ct + Dt^2)\vec{j}$, где A = –9 м, B = 3 м/с, C = 4 м/с, D = –1 м/с^2.

Дано:
t = 2 с
$\vec{r}(t) = (A + Bt)\vec{i} + (Ct + Dt^2)\vec{j}$
A = –9 м; B = 3 м/с
C = 4 м/с; D = –1 м/с^2

υ; a – ?

Решение

В условии задачи движение материальной точки описывается векторным способом. Используя прямоугольную систему координат, заданное уравнение представим в виде

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}. \tag{1}$$

Движение точки происходит в плоскости *XOY*.

Сравнивая (1) с законом движения, данным в условии задачи, можно описать движение точки координатным способом:

$$\begin{cases} x(t) = A + Bt; \\ y(t) = Ct + Dt^2. \end{cases} \qquad (2)$$

Проекции вектора скорости $\vec{\upsilon}$ на координатные оси *OX* и *OУ* определяются соотношениями

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}; \quad \upsilon_y = \frac{dy}{dt}.$$

Дифференцируя по времени уравнения (2), найдем эти проекции:

$$\upsilon_x = B; \quad \upsilon_y = C + 2Dt. \qquad (3)$$

Модуль вектора скорости равен:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{B^2 + (C + 2Dt)^2};$$

$$\upsilon = \sqrt{3^2 + \left(4 + 2\cdot(-1)\cdot 2\right)^2} = 9\ \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$[\upsilon] = \sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} + \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Проекции вектора ускорения $\vec{a}$ на координатные оси определяются соотношениями

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\upsilon_x}{dt}; \qquad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d\upsilon_y}{dt}. \qquad (4)$$

Используя выражения (3) и (4), получим: $a_x = 0,\ a_y = 2D$.

Модуль вектора ускорения равен:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2D;$$

$$[a] = \sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^4} + \frac{\text{м}^2}{\text{с}^4}} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a = -2\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Ответ: $\upsilon = 9\ \frac{\text{м}}{\text{с}};\ a = -2\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Задача 1.17

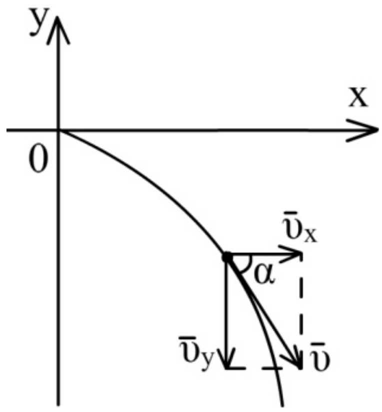
Радиус-вектор материальной точки, движущейся в поле тяготения Земли, описывается уравнением $\vec{r} = \upsilon_0 t\vec{i} - \frac{gt^2}{2}\vec{j}$, где υ_0 = 76 м/с; g – ускорение свободного падения; $\vec{i}$, $\vec{j}$ – единичные векторы направлений координатных осей X и Y. Определить момент времени t_1 после начала движения, когда вектор скорости $\vec{\upsilon}$ точки направлен под углом α = 35° к горизонту. Чему равна скорость υ в этот момент времени?

Дано:	**Решение**
$\vec{r} = \upsilon_0 t\vec{i} - \frac{gt^2}{2}\vec{j}$ υ_0 = 76 м/с α = 35°	Согласно условию задачи
t_1, υ – ?	

$$\vec{r} = \upsilon_0 t\vec{i} - \frac{gt^2}{2}\vec{j}, \qquad (1)$$

откуда следует, что в начальный момент времени радиус-вектор $\vec{r}_0 = 0$.

Запишем, согласно уравнению (1), координаты точки (проекции радиус-вектора):



$$r_x = \upsilon_0 t; \qquad r_y = -\frac{gt^2}{2}.$$

При этом ось Y направлена вертикально вверх.

Учитывая, что $\upsilon_x = \frac{dr_x}{dt}$, $\upsilon_y = \frac{dr_y}{dt}$, получаем:

$$\upsilon_x = \upsilon_0; \qquad \upsilon_y = -gt, \qquad (2)$$

откуда следует, что здесь мы имеем дело с движением тела, брошенного горизонтально (см. рисунок).

Из рисунка следует, что

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{|\upsilon_y|}{|\upsilon_x|}.$$

С учетом формул (2) $\mathrm{tg}\alpha = \frac{gt_1}{\upsilon_0}$, откуда искомый момент времени

$$t_1 = \frac{\upsilon_0 \mathrm{tg}\alpha}{g};$$

$$[t_1] = \frac{\text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с} \cdot \text{м}} = \text{с};$$

$$t_1 = \frac{76 \cdot 0{,}7}{9{,}8} = 5{,}4 \ \text{с}.$$

Искомая скорость

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \upsilon_0 \sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha};$$

$$\upsilon = 76\sqrt{1 + (0{,}7)^2} = 92{,}8 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $t_1 = 5{,}4$ с; $\upsilon = 92{,}8$ м/с.

Задача 1.18

Точка начала двигаться по окружности радиусом 0,6 м с тангенциальным ускорением 0,1 м/с^2. Чему равно нормальное и полное ускорение в конце третьей секунды после начала движения? Чему равен угол между векторами полного и нормального ускорения в этот момент?

Дано:
r = 0,6 м
a_τ = 0,1 м/с^2
t = 3 с

a_n; a; α – ?

Решение

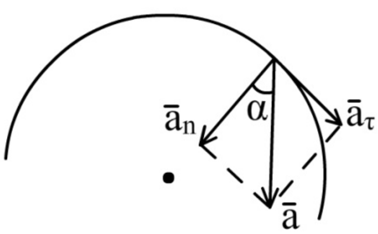
К моменту времени t точка, двигаясь равноускоренно с ускорением a_τ, приобретает скорость υ, определяемую по формуле $\upsilon = a_\tau t$.

Нормальное ускорение a_n точки при этом

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{r} = \frac{a_\tau^2 t^2}{r};$$

$$[a_n] = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{с}^4 \cdot \text{м}} = \text{м/с}^2; \quad a_n = \frac{1 \cdot 10^{-2} \cdot 9}{0{,}6} = 0{,}15 \ \text{м/с}^2.$$

Полное ускорение $\vec{a}$ равно геометрической сумме тангенциального и нормального ускорения: $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$.



Угол между векторами $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ всегда равен π/2, поэтому

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2};$$

$$a = \sqrt{0{,}1^2 + 0{,}15^2} \approx 0{,}18 \ \text{м/с}^2.$$

Из рисунка видно, что $\sin\alpha$ угла между векторами $\vec{a}_n$ и $\vec{a}$ будет равен:

$$\sin\alpha = \frac{a_\tau}{a} = \frac{0{,}1}{0{,}18} = 0{,}556,$$ тогда угол $\alpha = \arcsin 0{,}556 \approx 33°25'$.

Ответ: $a_n = 0{,}15$ м/с^2; $a = 0{,}18$ м/с^2; $\alpha = 33°25'$.

Задача 1.19

Диск радиусом 10 см вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота диска от времени задается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $B = 1$ рад/с, $C = 1$ рад/с^2, $D = 0{,}5$ рад/с^3. Определить для точек на ободе диска к концу второй секунды после начала движения: 1) угловую скорость; 2) угловое ускорение; 3) среднюю угловую скорость за этот промежуток времени; 4) среднее угловое ускорение за этот промежуток времени; 5) тангенциальное ускорение a_τ; 6) нормальное ускорение a_n; 7) полное ускорение a.

Дано:
$\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$
$B = 1$ рад/с
$C = 1$ рад/с^2
$D = 0{,}5$ рад/с^3
$t = 2$ с
$R = 0{,}1$ м

ω; ε; $\langle\omega\rangle$; $\langle\varepsilon\rangle$; a_n; a_τ; a – ?

Решение

1. Уравнение, описывающее зависимость угловой скорости от времени, найдем, продифференцировав по времени уравнение, описывающее зависимость от времени угла поворота диска:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct + 3Dt^2.$$

Для искомого момента времени

$$\omega = 1 + 2\cdot 1\cdot 2 + 3\cdot 0{,}5\cdot 2^2 = 11 \text{ рад/с}.$$

2. Уравнение, описывающее зависимость углового ускорения от времени, можно найти, продифференцировав найденное уравнение зависимости угловой скорости от времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2C + 6Dt.$$

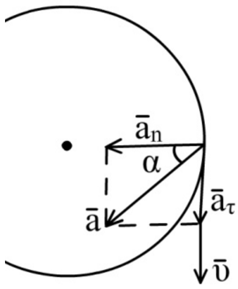
Для искомого момента времени

$$\varepsilon = 2\cdot 1 + 6\cdot 0{,}5\cdot 2 = 8 \text{ рад/с}^2.$$

3. Средняя угловая скорость

$$\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$

где $\Delta\varphi$ – угол, на который поворачивается радиус за время от $t_0 = 0$ до $t = 2$ с;



$$\langle\omega\rangle = \frac{A + Bt + Ct^2 + Dt^3 - A}{t} = BtCt + Dt^2;$$

$$\langle\omega\rangle = 1 + 1 \cdot 2 + 0{,}5 \cdot 2^2 = 5 \text{ рад/с}.$$

4. Среднее угловое ускорение

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{\Delta\omega}{\Delta \mathrm{t}},$$

где $\Delta\omega$ – измерение скорости за время от $t_0 = 0$ до $t = 2$ с.

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{B + 2Ct + 3Dt^2 - B}{t} = 2C + 3Dt;$$

$$\langle\varepsilon\rangle = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0{,}5 \cdot 2 = 5 \text{ рад/с}^2.$$

На рисунке показан вектор линейной скорости в момент времени $t = 2$ с. Направление тангенциального ускорения $\vec{a}_\tau$ совпадает с вектором скорости $\bar{\upsilon}$, а вектор $\vec{a}_n$ направлен по радиусу к центру диска.

5. Тангенциальное ускорение выражает изменение линейной скорости по модулю, $a_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt}$ и может быть найдено как

$$a_\tau = \varepsilon R = 8 \cdot 0{,}1 = 0{,}8 \text{ м/с}^2.$$

6. Нормальное ускорение показывает изменение скорости по направлению,

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R;$$

$$a_n = 11^2 \cdot 0{,}1 = 12{,}1 \text{ м/с}^2.$$

7. Полное ускорение

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2};$$

$$a = \sqrt{12{,}1^2 + 0{,}8^2} = 12{,}13 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $\omega = 11$ рад/с; $\varepsilon = 8$ рад/с^2; $\langle\omega\rangle = 5$ рад/с; $\langle\varepsilon\rangle = 5$ рад/с^2; $a_\tau = 0{,}8$ м/с^2; $a_n = 12{,}1$ м/с^2; $a = 12{,}1$ м/с^2.

Задача 1.20

Маховик, вращавшийся с постоянной частотой $n_0 = 10$ об/с, при торможении начал вращаться равнозамедленно. Когда торможение прекратилось, вращение маховика снова сделалось равномерным, но уже с частотой $n = 6$ об/с. Определить угловое ускорение ε маховика и время торможения t, если за время торможения маховик сделал $N = 50$ оборотов.

Дано:	**Решение**
n_0 = 10 об/с	Воспользуемся соотношением углового ускорения ε с начальной ω_0 и конечной ω скоростью:
n = 6 об/с	$$\omega^2 - \omega_0{}^2 = 2\varepsilon\varphi.$$
N = 50	
ε, t – ?	

Так как $\omega = 2\pi n$; $\varphi = 2\pi N$, получим:

$$\varepsilon = \frac{4\pi^2(n^2 - n_0^2)}{2\cdot 2\pi N} = \frac{\pi(n^2 - n_0^2)}{N}; \quad [\varepsilon] = \frac{1}{\text{c}^2};$$

$$\varepsilon = \frac{3{,}14(36-100)}{50} = -4{,}02 \text{ рад/с}^2.$$

Знак «минус» для углового ускорения говорит о том, что движение равнозамедленное.

Для нахождения времени торможения воспользуемся уравнением угловой скорости для вращательного движения:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t;$$

$$2\pi n = 2\pi n_0 + \varepsilon t;$$

$$t = \frac{2\pi\,(n - n_0)}{\varepsilon}; \quad t = \frac{2\cdot 3{,}14(6-10)}{-4{,}02} = 6{,}25 \text{ с}.$$

Ответ: $\varepsilon = -4{,}02$ рад/с^2; $t = 6{,}25$ с.

Задача 1.21

Точка вращающегося тела, двигаясь по окружности радиусом R = 20 см с постоянным тангенциальным ускорением, к концу третьего оборота после начала движения приобрела линейную скорость υ = 20 см/с. Найти нормальное ускорение точки за t = 10 с вращения.

Дано:	**Решение**
R = 0,2 м	При вращении тела линейная скорость υ точки с a_τ = const изменяется по закону $\upsilon = a_\tau t$. Угловое ускорение точки ε связано с ее тангенциальным ускорением соотношением $\varepsilon = a_\tau/R$, поэтому
υ = 0,2 м/с	
t = 10 с	
N = 3	
a_τ = const	
a_n – ?	$$\upsilon = a_\tau t = \varepsilon R t. \qquad (1)$$

Угол поворота тела при равноускоренном вращении из состояния покоя

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}. \qquad (2)$$

Число оборотов, которое совершает точка за время t,

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\varepsilon t^2}{4\pi}. \qquad (3)$$

Из уравнений (1), (2), исключив время t, выразим угловое ускорение:

$$\varepsilon = \frac{\upsilon^2}{4\pi N R^2}. \qquad (4)$$

Нормальное ускорение $a_n = \omega^2 R$, где $\omega = \varepsilon t$, отсюда

$$a_n = \varepsilon^2 t^2 R. \qquad (5)$$

Подставив уравнение (4) в (5), получим:

$$a_n = \frac{\upsilon^4 t^2}{16\pi^2 N^2 R^3};$$

$$[a_n] = \frac{\text{м}^4}{\text{с}^4} \cdot \text{с}^2 \cdot \frac{1}{\text{м}^3} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; \quad a_n = \frac{0{,}2^4 \cdot 10^2}{16 \cdot 3{,}14^2 \cdot 3^2 \cdot 0{,}2^3} = 0{,}03 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a_n = 0{,}03$ м/с^2.

Задача 1.22

Раскручиваясь в течение t = 2 мин, маховик набирает частоту n = 900 об/мин. Найти угловое ускорение ε маховика и число оборотов N, которое он совершил за это время.

Дано:
t = 120 с
n = 15 с$^{-1}$
ε; N – ?

Решение

Запишем угловую скорость вращения маховика через угловое ускорение

$$\omega = \varepsilon t \qquad (1)$$

и частоту вращения n:

$$\omega = 2\pi n. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) находим угловое ускорение:

$$\varepsilon = \frac{2\pi n}{t}; \qquad (3)$$

$$[\varepsilon] = \frac{рад}{с \cdot с} = \text{рад/с}^2; \quad \varepsilon = 0{,}78 \text{ рад/с}^2.$$

Угол поворота маховика

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}; \tag{4}$$

$$\varphi = 2\pi N. \tag{5}$$

Из уравнений (3) – (5) определяем число оборотов N:

$$2\pi N = \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{2\pi n}{2t} t^2 = \pi n t;$$

$$N = \frac{nt}{2};$$

$$[N] = \frac{1}{\text{с}} \cdot \text{с}; \qquad N = \frac{15 \cdot 120}{2} = 900.$$

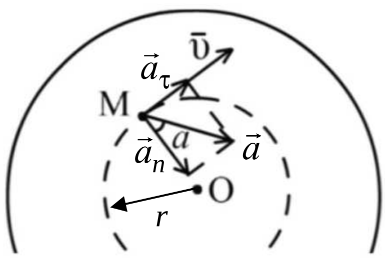
Ответ: $\varepsilon = 0{,}78$ рад/с^2; $N = 900$.

Задача 1.23

Маховик вращается равноускоренно. Найти угол α, который составляет вектор полного ускорения $\vec{a}$ любой точки маховика с радиусом в момент, когда маховик совершит первые два оборота.

Дано:	**Решение**
$\varepsilon = \text{const}$ $t_0 = 0$ $N = 2$	
α – ?	

Возьмем произвольную точку M (см. рисунок) на маховике. Вектор тангенциального ускорения $\vec{a}_\tau$ совпадает по направлению с вектором линейной скорости в этой точке, вектор нормального ускорения $\vec{a}_n$ направлен по радиусу к центру вращения, полное ускорение, равное векторной сумме векторов тангенциального и нормального ускорений ($\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$), составляет угол α с радиусом:



$$\text{tg}\alpha = \frac{a_\tau}{a_n};$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\varepsilon r}{\omega^2 r} = \frac{\varepsilon}{\omega^2},$$

где ε – угловое ускорение ($\varepsilon = \text{const}$, т. к. вращение равноускоренное); ω – угловая скорость маховика после двух оборотов (начальная угловая скорость согласно условию равна нулю); r – радиус окружности, по которой вращается точка M.

Воспользуемся связью между ω, ε и углом поворота φ:

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi;$$

$$\varphi = 2\pi N;$$

$$\omega^2 = 2\varepsilon 2\pi N.$$

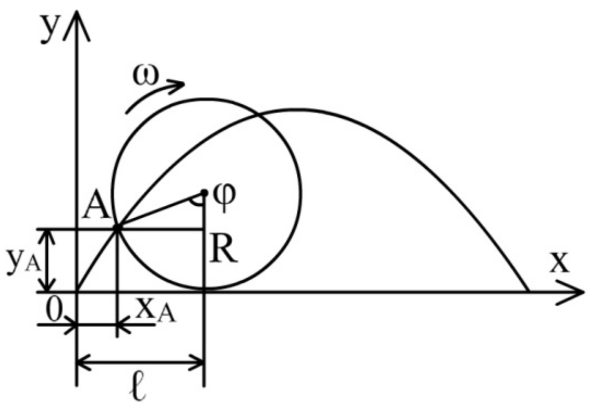
Тогда

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\varepsilon}{4\varepsilon\pi N} = \frac{1}{4\pi N} = 0{,}04; \quad \alpha = 2°17'.$$

Угол α для всех точек не зависит от времени, а зависит только от угла поворота. В начальный момент времени $N = 0$, $\mathrm{tg}\alpha \to \infty$, $\alpha \to \pi/2$, при возрастании N угол $\alpha \to 0$.

Ответ: $\alpha = 2°17'$.

Задача 1.24



По горизонтальной поверхности катится колесо радиусом R с угловой скоростью ω. Найти траекторию, описываемую точкой A, лежащей на ободе колеса (см. рисунок). Начальные условия: при $t = 0$ $x_A = 0$, $y_A = 0$, φ = 0.

Дано:
R; ω; x; y
$x(y)$ – ?

Решение

Считая, что колесо катится без скольжения, из рисунка находим:

$$x_A = l - R\sin\varphi; \tag{1}$$

$$x_y = R - R\cos\varphi. \tag{2}$$

Поскольку $l = \upsilon t$, где $\upsilon = \omega R$ – линейная скорость центра колеса, то уравнения (1), (2) примут вид:

$$x_A = R(\omega t - \sin\omega t); \tag{3}$$

$$y_A = R(1 - \cos\omega t), \tag{4}$$

где t – время движения колеса.

Исключив из выражения (3) и (4) время, получим уравнения траектории.

Для этого из (4) найдем:

$$\cos\omega t = \frac{R-y}{R},$$

откуда

$$\omega t = \arccos\frac{R-y}{R}. \qquad (5)$$

Выполним преобразования:

$$\sin\omega t = \sqrt{1-\cos^2\omega t} = \sqrt{1-\left(\frac{R-y}{R}\right)^2} = \sqrt{\frac{y(2R-y)}{R}}. \qquad (6)$$

Выражения (5) и (6) подставляем в (3):

$$x + \sqrt{y(2R-y)} = R\arccos\frac{R-y}{R}.$$

Полученное уравнение является уравнением циклоиды.

Ответ: траекторией точки A является циклоида.

Задача 1.25

Зависимость пути S от времени t для вращающейся по окружности радиусом R = 6 м точки M дается в виде уравнения $S = At^3$, где A = 0,2 м/с^3. Определить тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорение для момента времени, когда линейная скорость точки υ = 0,6 м/с, а также угол φ между векторами $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}$.

Дано:
$S = At^3$
A = 0,2 м/с^3
R = 6 м
υ = 0,6 м/с

a_n; a_τ; a; α – ?

Решение

Найдем выражение, определяющее зависимость от времени линейной скорости точки, как первую производную от заданного выражения пути от времени:

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} = 3At^2.$$

Найдем момент времени t, когда линейная скорость υ = 0,6 м/с:

$$t = \sqrt{\frac{\upsilon}{3A}};$$

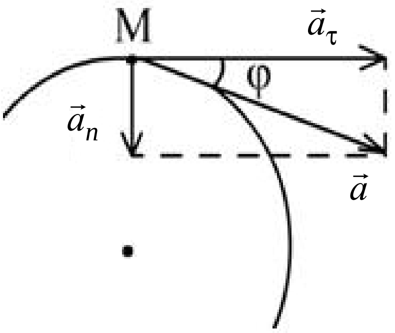
$$[t] = \sqrt{\frac{\text{м}\cdot\text{с}^3}{\text{с}\cdot\text{м}}} = \text{с}, \quad t = 1\ \text{с}.$$

Тангенциальное ускорение точки

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = 6At \qquad [a_\tau] = \frac{\text{м}}{\text{с}^3}\cdot\text{с} = \text{ м/с}^2; \qquad a_\tau = 1{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Нормальное ускорение

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}; \qquad [a_n] = \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2\cdot\text{м}} = \text{ м/с}^2; \qquad a_n = 0{,}06 \text{ м/с}^2.$$



Полное ускорение $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$;

$$[a] = \sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^4}} = \text{м/с}^2; \qquad a = 1{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$ направлено по касательной к окружности, а нормальное ускорение $\vec{a}_n$ – перпендикулярно к $\vec{a}_\tau$ (см. рисунок).

Из рисунка $\text{tg}\varphi = \dfrac{a_n}{a_\tau}$, тогда $\varphi = \text{arctg}\dfrac{a_n}{a_\tau}$. Получим φ = 3°.

Ответ: $a_\tau = 1{,}2$ м/с^2; $a_n = 0{,}06$ м/с^2; $a = 1{,}2$ м/с^2; φ = 3°.

Задача 1.26

Тело вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость зависит от угла поворота φ по закону $\omega = \omega_0 - \alpha\varphi$, где $\omega_0 = 3$ рад/с, $\alpha = 0{,}1$ с$^{-1}$. В момент времени $t_0 = 0$ угол $\varphi_0 = 0$. Найти угловую скорость вращения тела для момента времени $t = 2$ с.

Дано:
$\omega = \omega_0 - \alpha\varphi$
$\omega_0 = 3$ рад/с
$t = 2$ с
$\alpha = 0{,}1$ с$^{-1}$
$t_0 = 0$; $\varphi_0 = 0$

ω – ?

Решение

Согласно определению угловая скорость

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Тогда по условию задачи

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 - \alpha\varphi. \qquad (1)$$

Разделим переменные в уравнении (1) и проинтегрируем обе части полученного выражения (пределы интегрирования берутся из условия задачи):

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\omega_0 - \alpha\varphi} = \int_0^t dt. \qquad (2)$$

$$-\frac{1}{\alpha}\int_0^{\varphi}\frac{d\ (\omega_0-\alpha\varphi)}{\omega_0-\alpha\varphi}=\int_0^t dt;$$

$$-\frac{1}{\alpha}\ln\left(\omega_0-\alpha t\right)\Big|_0^{\varphi}=t;$$

$$\ln(\omega_0-\ \alpha\varphi)\Big|_0^{\varphi}=-\alpha t;$$

$$\ln\frac{\omega_0-\alpha\varphi}{\omega_0}=-\alpha t. \qquad (3)$$

Потенцируем уравнение (3):

$$\frac{\omega_0-\alpha\varphi}{\omega_0}=e^{-\alpha t}. \qquad (4)$$

Из (4) находим выражение для угла поворота:

$$\varphi=\frac{\omega_0}{\alpha}(1-e^{-\alpha t}). \qquad (5)$$

Подставив (5) в заданный закон изменения угловой скорости, получим:

$$\omega=\omega_0 e^{-\alpha t};$$

$$[\omega] = \text{рад/с}; \quad \omega = 2{,}46 \text{ рад/с}.$$

Ответ: ω = 2,46 рад/с.

Задача 1.27

Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\varepsilon = \alpha t$, где α = 0,02 рад/с^3. Через какое время после начала вращения вектор полного ускорения произвольной точки тела будет составлять угол φ = 60° с ее вектором скорости?

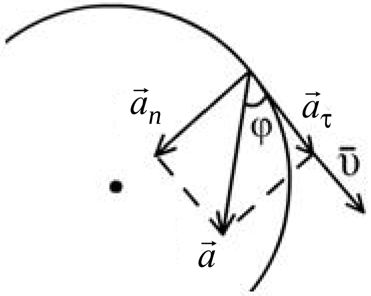
Дано:
$\varepsilon = \alpha t$
α = 0,02 рад/с^3
φ = 60°

t – ?

Решение

Разложим вектор полного ускорения $\vec{a}$ (см. рисунок) на составляющие $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$. Тогда

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{|\vec{a}_n|}{|\vec{a}_\tau|}. \qquad (1)$$



Используя уравнение $a_\tau = \varepsilon R$, запишем:

$$a_\tau = \varepsilon R = \alpha t R. \qquad (2)$$

С другой стороны, по определению

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}. \qquad (3)$$

Из уравнений (2) и (3) найдем:

$$\alpha t R = \frac{d\upsilon}{dt}. \qquad (4)$$

Разделим переменные в уравнении (4) и проинтегрируем обе его части:

$$\alpha t R dt = d\upsilon; \qquad \int_0^t \alpha t R dt = \int_0^\upsilon d\upsilon;$$

$$\upsilon = \alpha R \frac{t^2}{2}. \qquad (5)$$

Нормальное ускорение с учетом выражения (5) запишется в виде

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{\alpha^2 R t^4}{4}. \qquad (6)$$

Подставим в формулу (1) уравнения (2) и (6):

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\alpha t^3}{4} \qquad (7)$$

Из уравнения (7) найдем искомое время вращения тела:

$$t = \sqrt[3]{\frac{4\mathrm{tg}\varphi}{\alpha}}; \qquad [t] = \sqrt[3]{\text{c}^3} = \text{c};$$

$$t = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 1{,}732}{0{,}02}} = 7 \text{ c}.$$

Ответ: t = 7 с.

1.2. Динамика. Законы сохранения. Элементы теории поля

Основные теоретические сведения

Векторная величина, численно равная произведению массы материальной точки на ее скорость и имеющая направление скорости, называется импульсом этой материальной точки $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$. Импульс механической системы равен векторной сумме импульсов всех n материальных точек системы или произведению массы всей системы m на скорость ее центра масс $\vec{\upsilon}_c$:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i = m\vec{\upsilon}_c .$$

Скорость центра масс системы материальных точек

$$\vec{\upsilon}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i}{m},$$

где m_i и $\vec{r}_i$ – соответственно масса и радиус-вектор i-й материальной точки; n – число материальных точек в системе, m – масса всей системы.

Координаты центра масс системы материальных точек:

радиус-вектор

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m};$$

в координатной форме

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m}; \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m}; \qquad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{m},$$

где m_i, $\vec{r}_i$, x_i, y_i, z_i – соответственно масса, радиус-вектор и координата i-й материальной точки; n – число материальных точек в системе, m – масса всей системы.

Закон сохранения импульса для замкнутой системы:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i = \text{const} .$$

Первый закон Ньютона (первый закон динамики): существуют системы отсчета, в которых всякая материальная точка (тело) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока при воздействии со стороны других тел это состояние не изменяется.

Стремление тела сохранить состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется инертностью. При решении задач формулировка *первого закона Ньютона* полезна в следующей форме: если результирующая всех сил, действующих на материальную точку (тело), равна нулю, то тело покоится или совершает равномерное и прямолинейное движение.

Второй закон Ньютона устанавливает взаимосвязь между динамическими и кинематическими величинами и является основным законом динамики. Ускорение, которое материальная точка приобретает в инерциальной системе отсчета, пропорционально векторной сумме сил, действующих на точку, обратно пропорционально массе материальной точки и совпадает по направлению с равнодействующей действующих сил:

$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \vec{F}_i}{m},$$

где $\sum_{i=1}^{k} \vec{F}_i$ – векторная сумма сил, действующих на тело массой m; k – число действующих сил.

При решении ряда задач формулировка второго закона Ньютона удобна в следующей форме:

$$\sum_{i=1}^{k} \vec{F}_i = m\vec{a} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\left(m\vec{\upsilon}\right)}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

В проекциях на касательную и нормаль к траектории точки это же уравнение будет иметь вид

$$F_\tau = ma_\tau = m\frac{d\upsilon}{dt}; \qquad F_n = ma_n = \frac{m\upsilon^2}{R} = m\omega^2 R.$$

Взаимодействие между материальными точками (телами) определяется *третьим законом Ньютона*: всякое действие материальных точек (тел) друг на друга носит характер взаимодействия: силы, с которыми материальные точки (тела) действуют друг на друга, всегда равны по модулю, противоположны по направлению, действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки, и приложены к разным телам:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Здесь $\vec{F}_{12}$ – сила, действующая на первую материальную точку со стороны второй; $\vec{F}_{21}$ – сила, действующая на вторую материальную точку со стороны первой. Силы взаимодействия возникают одновременно, попарно, они всегда одной природы. Так как они приложены к разным телам, то не могут уравновешивать друг друга. Третий закон Ньютона справедлив независимо от того, покоятся взаимодействующие тела или находятся в движении; находятся они в непосредственном контакте друг с другом или разделены пространством.

Основные силы, рассматриваемые в механике

сила тяжести

$$\vec{F}_m = m\vec{g},$$

где g – ускорение свободного падения;

силы упругой деформации при растяжении (сжатии)

$$\vec{F} = -k\vec{x} \quad \text{либо} \quad \sigma = E\frac{\Delta l}{l_0},$$

где $k = \dfrac{ES}{l_0}$ – коэффициент упругости (жесткости); $\sigma = F/S$ – механическое напряжение; E – модуль Юнга; $\Delta l = |\vec{x}|$ – абсолютное удлинение (сокращение) тела при деформации;

сила трения скольжения

$$F_{тр} = \mu N,$$

где μ – коэффициент трения скольжения; N – сила реакции опоры (сила нормального давления на опору). Сила трения покоя меняет свое значение от нуля до величины силы трения скольжения $\vec{F}_{тр}$;

сила трения качения

$$\vec{F} = \frac{\mu_k \vec{N}}{r},$$

где μ_k – коэффициент трения качения; r – радиус катящегося тела;

сила гравитационного притяжения

$$\vec{F}_T = G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r},$$

где G = 6,67·10^{-11} м^3/кг·с^2 – гравитационная постоянная, m_1 и m_2 – массы взаимодействующих объектов, $\vec{r}$ – радиус-вектор, соединяющий объекты; r – модуль радиус-вектора $\vec{r}$ (расстояние между объектами);

сила Архимеда

$$\vec{F}_A = \rho\vec{g}V,$$

где ρ – плотность жидкости или газа, V – объем погруженной в жидкость или газ части тела.

Уравнение движения тела переменной массы (уравнение Мещерского)

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_p,$$

где $\vec{F}_p = -\vec{u}\dfrac{dm}{dt}$ – реактивная сила ($\vec{u}$ – скорость истечения газов из ракеты).

Работа постоянной силы на прямолинейном участке пути

$$\Delta A = \vec{F}\Delta\vec{r} = F\Delta S\cos(\alpha),$$

где α – угол между векторами силы $\vec{F}$ и перемещения $\Delta\vec{r}$; $\Delta S = |\Delta\vec{r}|$ – элементарный путь.

Работа, совершаемая переменной силой на пути *s*,

$$A = \int_S \vec{F}d\vec{r} = \int_S F_s ds = \int_S F\cos\alpha ds,$$

где F_S – проекция вектора силы на вектор перемещения $d\vec{r}$; $dS = |d\vec{r}|$ – модуль вектора перемещения.

Средняя мощность за промежуток времени Δt

$$\langle N\rangle = \frac{A}{\Delta t}.$$

Мгновенная мощность

$$N = \frac{dA}{dt} \quad \text{или} \quad N = \vec{F}\vec{\upsilon} = F_s\upsilon = F\upsilon\cos\alpha.$$

Механическая энергия. Пусть в пространстве существует стационарное силовое поле, например, поле тяготения, создаваемое некоторым телом. Будем считать, что тело, создающее силовое поле, «точечное» и является телом отсчета. Тогда векторы сил будут направлены вдоль радиальных линий, пересекающихся в начале системы отсчета. Если в некоторую точку *M* такого центрального поля сил поместить другое тело (материальную точку), то оно испытывает силу, которая зависит только от расстояния *r* до источника, т.е. $F = F(r)$. Работа, совершаемая в стационарном силовом поле при перемещении тела из некоторой точки M_1 в точку M_2,

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}d\vec{r}.$$

В этом случае работа зависит не от формы и длины пути от M_1 до M_2, а от координат этих точек. Работа в таком поле, совершаемая при перемещении по замкнутой траектории, равна нулю. Такое поле сил называется *потенциальным*, а силы, действующие в таком поле, – *консервативными*. Все центральные силы консервативны.

Потенциальная энергия

упругих сил

$$E_П = \frac{kx^2}{2},$$

где k – коэффициент упругости, x – абсолютная деформация;

тéла, находящегося в однородном гравитационном поле,

$$E_П = mgh,$$

где h – высота над уровнем, принимаемым за нулевой (для консервативной системы).

Связь между силой, действующей на тело в данной точке поля, и потенциальной энергией тела

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}E_П = -\left(\frac{\partial E_П}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_П}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_П}{\partial z}\vec{k}\right),$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы координатных осей.

Кинетическая энергия тела, движущегося поступательно,

$$E_K = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{p^2}{2m}.$$

Если в замкнутой системе действуют только консервативные силы, то механическая энергия сохраняется:

$$E = E_K + E_П = \mathrm{const}.$$

Если кроме консервативных сил действуют неконсервативные, то изменение полной механической энергии равно работе неконсервативных сил:

$$E_2 - E_1 = A.$$

Скорость движения тел массами m_1 и m_2, движущихся до удара со скоростями $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ соответственно, после абсолютно упругого центрального удара

$$\vec{\upsilon}_1 = \frac{(m_1 - m_2)\vec{\upsilon}_1 + 2m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}; \qquad \vec{\upsilon}_2 = \frac{(m_2 - m_1)\vec{\upsilon}_2 + 2m_1\vec{\upsilon}_1}{m_1 + m_2}.$$

Скорость движения тел массами m_1 и m_2, движущихся соответственно со скоростями $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$, после абсолютно неупругого центрального удара

$$\upsilon = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}.$$

Закон всемирного тяготения в скалярной форме

$$F_T = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где F_T – сила всемирного тяготения (гравитационная сила) двух тел массами m_1 и m_2; r – расстояние между центрами взаимодействующих тел; коэффициент пропорциональности G называется гравитационной постоянной.

Напряженность поля тяготения

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m},$$

где $\vec{F}$ – сила тяготения, действующая на тело массой m, помещенное в данную точку поля.

Работа в поле тяготения, создаваемого объектом массой M по перемещению тела массой m,

$$A = GmM\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right).$$

Потенциальная энергия тела массой m_1 в поле тела массой m_2, находящегося на расстоянии r от него,

$$E_П = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Потенциал поля тяготения

$$\varphi = \frac{E_П}{m},$$

где $E_П$ – потенциальная энергия материальной точки массой m, помещенной в данную точку поля.

Потенциал поля тяготения, создаваемый телом массой M,

$$\varphi_П = -\frac{GM}{R},$$

где R – расстояние от центра тела до рассматриваемой точки.

Связь между потенциалом поля тяготения и его напряженностью:

$$\vec{g} = -\mathrm{grad}\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi_П}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi_П}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi_П}{\partial z}\vec{k}\right).$$

Знак «минус» в формуле показывает, что вектор напряженности $\vec{g}$ направлен в сторону убывания потенциала.

Первая космическая скорость

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{GM_З}{r}} = \sqrt{gR_З} = 7{,}9 \cdot 10^3 \text{ м/с},$$

где $M_З$, $R_З$ – соответственно масса и радиус Земли, r – радиус круговой орбиты, G – гравитационная постоянная.

Вторая космическая скорость

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2GM_З}{r}} = \sqrt{2gR_з} = 11{,}2 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Основной закон динамики для неинерциальных систем отсчета:

$$m\vec{a}' = m\vec{a} + \vec{F}_{ин},$$

где $\vec{a}$ и $\vec{a}'$ – соответственно ускорения тела в инерциальной и неинерциальной системах отсчета; $\vec{F}_{ин}$ – силы инерции.

Силы инерции

$$\vec{F}_{ин} = \vec{F}_и + \vec{F}_ц + \vec{F}_к,$$

где $\vec{F}_и$ – силы инерции, проявляющиеся при поступательном движении системы отсчета с ускорением $\vec{a}_0$,

$$\vec{F}_и = -m\vec{a}_0;$$

$F_ц$ – центробежные силы инерции (силы инерции, действующие во вращающейся системе отсчета на тела, удаленные от оси вращения на конечное расстояние R),

$$F_ц = -m\omega^2 R;$$

$\vec{F}_к$ – сила Кориолиса (сила инерции, действующая на тело, движущееся со скоростью υ' во вращающейся системе отсчета),

$$\vec{F}_к = 2m\left[\vec{\upsilon}', \vec{\omega}\right].$$

Примеры решения задач

Задача 1.28

Движение материальной точки массой m = 0,25 кг описывается уравнением $\vec{r} = A\sin\omega t\vec{i} + A\cos\omega t\vec{j}$, где A = 2 м; ω = 0,7 $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – единичные векторы координатных осей x и y. Определить путь S, пройденный точкой за время t_1 = 8 с, и силу F, действующую на точку в конце указанного промежутка времени.

Дано:
m = 0,25 кг
$\vec{r} = A\sin\omega t\vec{i} + A\cos\omega t\vec{j}$
A = 2 м; ω = 0,7 рад/с
t_1 = 8 с
S; F – ?

Решение

Выбрав прямоугольную систему координат с началом в точке t = 0 и учитывая условие задачи, можем записать:

$$x = A\sin\omega t; \quad y = A\cos\omega t.$$

Согласно этим уравнениям траекторией тела является окружность радиусом A с центром в начале координат.

Учитывая, что линейная скорость тела $\upsilon = \omega A$ (A – радиус окружности), искомый путь (длина пути), пройденный телом за время t_1,

$$S = \upsilon t_1 = \omega A t_1; \quad [S] = \frac{\text{м}\cdot\text{с}}{\text{с}} = \text{ м};$$

$$S = 0{,}7\cdot 2\cdot 8 = 11{,}2 \text{ м}.$$

Векторы скорости и ускорения материальной точки:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = A\omega\cos\omega t\vec{i} - A\omega\sin\omega t\vec{j};$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -A\omega^2\sin\omega t\vec{i} - A\omega^2\cos\omega t\vec{j}.$$

Поскольку $\vec{F} = m\vec{a}$, с учетом предыдущего выражения получаем:

$$\vec{F} = -mA\omega^2\left(\sin\omega t\vec{i} + \cos\omega t\vec{j}\right),$$

откуда модуль силы $F = mA\omega^2$; $[F] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}$; видно, что эта величина постоянна и не зависит от времени:

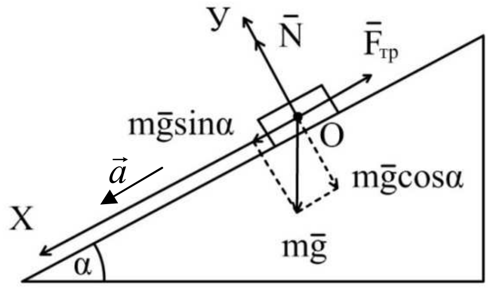
$$F = 0{,}25\cdot 2\cdot 0{,}49 = 0{,}245 \text{ Н}.$$

Ответ: S = 11,2 м ; F = 0,245 Н.

Задача 1.29

Тело движется вниз равноускоренно по наклонной плоскости, и зависимость пройденного пути от времени задается уравнением $S = 2t + 1{,}6t^2$.

Найти коэффициент трения μ тела о плоскость, если угол наклона плоскости к горизонту равен 30°.



Дано:

$S = 2t + 1{,}6t^2$

$\alpha = 30°$

$\mu - ?$

Решение

Для нахождения коэффициента трения μ рассмотрим, под действием каких сил находится тело. В данном случае на тело действуют следующие силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $F_{тр} = \mu N$. Выберем систему координат так, чтобы ось OX была параллельна наклонной плоскости (см. рисунок). Тогда, согласно второму закону Ньютона, запишем проекции сил на оси:

на OY:

$$mg\cos\alpha = N;$$

на OX:

$$ma = mg\sin\alpha - mg\mu\cos\alpha.$$

Преобразовывая эти выражения, можно найти коэффициент трения:

$$\mu = \frac{g\sin\alpha - a}{g\cos\alpha}.$$

Определим величину ускорения a:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}; \quad a = 2\cdot 1{,}6 = 3{,}2\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right).$$

Подставив в формулу для μ численные значения входящих в нее величин, получим коэффициент трения:

$$\mu = \frac{9{,}81\cdot 0{,}5 - 3{,}2}{9{,}81\cdot 0{,}866} = 0{,}2; \quad [\mu] = \frac{\frac{\text{м}}{\text{с}^2} - \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{\frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = \frac{\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{\frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = 1,$$ т.е. получили безразмерную величину.

Ответ: μ = 0,2.

Задача 1.30

На вершине двух наклонных плоскостей, образующих с горизонтом углы α = 30° и β = 45°, укреплен блок. Грузы $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг соединены нитью, перекинутой через блок. Определить ускорение a, с которым начнут двигаться грузы вдоль наклонной плоскости, и силу натяжения нити T. Коэффициенты трения грузов о плоскости равны между собой: $\mu_1 = \mu_2 = \mu = 0{,}1$. Блок и нить невесомы.

Дано:
α = 30°
β = 45°
$m_1 = 1$ кг
$m_2 = 2$ кг
$\mu = 0{,}1$
g = 9,8м м/с^2
a; T – ?

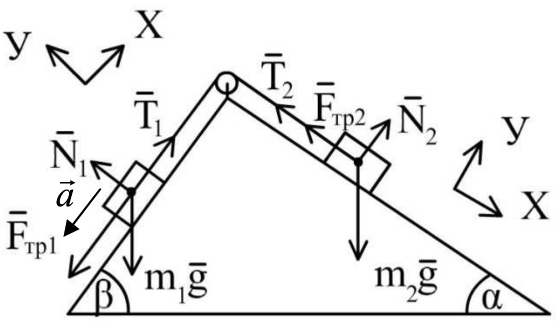
Решение

На каждый из грузов действуют четыре силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$, сила натяжения $\vec{T}$ и сила трения скольжения $\vec{F}_{тр}$ (см. рисунок). Мы не знаем направления силы трения. Сила трения скольжения направлена всегда в сторону, противоположную скорости движущегося тела, и не может изменить направления движения. При отсутствии силы трения ускорение грузов определяется разностью составляющих сил тяжести, направленных вдоль наклонных плоскостей.

Так как $m_1 g \sin\beta < m_2 g \sin\alpha$ (1·9,8·0,71< 2·9,8·0,5), то груз m_1 будет двигаться вверх по наклонной плоскости, а груз m_2 − вниз.

Так как блок невесомый, то сила натяжения нити

$$T_1 = T_2 = T.$$



Запишем основное уравнение динамики для поступательного движения в векторной форме:

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T} + \vec{F}_{тр1} = m_1\vec{a}; \\ m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{T} + \vec{F}_{тр2} = m_2\vec{a}. \end{cases}$$

Запишем для грузов уравнения в проекциях на выбранные оси координат. Оси выберем так, чтобы ось X совпадала с ускорением. Так как нить нерастяжима, то ускорения тел одинаковы: $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = |\vec{a}|$;

$$\begin{cases} -m_1 g \sin\beta - F_{тр1} + T = m_1 a; \\ N_1 - m_1 g \cos\beta = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} m_2 g \sin\alpha - F_{тр2} - T = m_2 a; \\ N_2 - m_2 g \cos\alpha = 0. \end{cases}$$

Сила трения $F_{тр} = \mu N$, тогда

$$\begin{cases} -m_1 g\sin\beta - \mu m_1 g\cos\beta + T = m_1 a; \\ m_2 g\sin\alpha - \mu m_2 g\cos\alpha - T = m_2 a. \end{cases}$$

Складывая уравнения, получим:

$$a = \frac{m_2 g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right) - m_1 g\left(\sin\beta + \mu\cos\beta\right)}{m_1 + m_2}; \quad [a] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{кг}\cdot\text{с}^2} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a = \frac{2\cdot 9{,}8(0{,}5 - 0{,}1\cdot 0{,}86) - 1\cdot 9{,}8(0{,}71 + 0{,}1\cdot 0{,}71)}{3} = 0{,}15\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

$$T = m_2\left(g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right) - a\right);$$

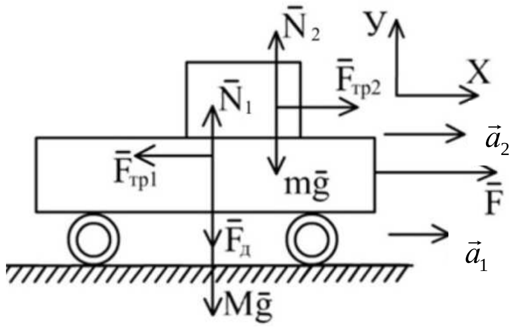
$$T = 2(9{,}8(0{,}5 - 0{,}1\cdot 0{,}87) - 0{,}15) = 7{,}8\ \text{Н};$$

$$[T] = \text{кг}\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} - \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right) = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}.$$

Ответ: $a = 0{,}15\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $T = 7{,}8$ Н.

Задача 1.31

Тело массой M = 20 кг может скользить по горизонтальной поверхности без трения. На теле лежит груз массой m = 10 кг. Тело массой M тянут с силой F, направленной горизонтально. Коэффициент трения между грузом и тележкой μ = 0,1 (см. рисунок).



Найти ускорение тела a_1 и груза a_2, а также силу трения между грузом и телом, если: 1) $F_1 = 20$ Н; 2) $F_2 = 60$ Н.

Дано:
M = 20 кг
m = 10 кг
μ = 0,1
$F_1 = 20$ Н
$F_2 = 60$ Н
a_1; a_2; $F_{тр}$ – ?

Решение

Для тела массой m основное уравнение динамики поступательного движения:

$$\vec{N}_2 + \vec{F}_{тр2} + m\vec{g} = m\vec{a}_2.$$

Сила трения $\vec{F}_{тр2}$ направлена в сторону действия силы $\vec{F}$. Груз m давит на тело массой M с силой $\vec{F}_Д$, которая по третьему закону Ньютона равна реакции опоры $\vec{N}_2$.

В проекции на выбранные оси

$$\begin{cases} F_{тр2} = ma_2; \\ N_2 - mg = 0. \end{cases}$$

Для тела массой M основное уравнение динамики поступательного движения:

$$\vec{F} + \vec{N}_1 + M\vec{g} + \vec{F}_{тр2} + \vec{F}_{тр1} = M\vec{a}_1.$$

Сила $\vec{F}_{тр1}$ направлена в сторону, противоположную движению тела, и по третьему закону Ньютона

$$\left|\vec{F}_{тр2}\right| = \left|\vec{F}_{тр1}\right| = \left|\vec{F}_{тр}\right|.$$

Проецируя силы на выбранные оси, получим:

$$\begin{cases} F - F_{тр} = Ma_1; \\ N_1 - F_Д - Mg = 0. \end{cases}$$

Если тело выскальзывает из-под груза, то между ними действует сила трения скольжения $\left(F_{тр} = \mu N_2\right)$. Так как $N_2 = mg$, то

$$F_{тр} = \mu mg;\ F_{тр} = \frac{кг \cdot м}{с^2} = Н;\ F_{тр} = 0{,}1 \cdot 10 \cdot 9{,}8 = 9{,}8\ Н.$$

Если же тело и груз двигаются как одно целое, то между ними действует сила трения покоя $F_{пок}$, и в этом случае ускорения равны: $a_1 = a_2 = a$, тогда

$$\begin{cases} F - F_{пок} = Ma; \\ F_{пок} = ma. \end{cases} \quad a = \frac{F}{M+m}; \quad F_{пок} = \frac{Fm}{M+m}.$$

Сила трения покоя $F_{пок}$ не должна превышать силу трения скольжения $F_{тр}$:

$$F_{пок} < F_{тр}.$$

1. При $F_1 = 20$ Н

$$F_{пок} = \frac{20 \cdot 10}{30} = 6{,}7\ Н.$$

Следовательно, между телами действует сила трения покоя и тела движутся как одно целое с ускорением

$$a = \frac{20}{30} = 0{,}67\ \frac{м}{с^2}.$$

2. При $F_2 = 60$ Н

$$F_{пок} = \frac{60 \cdot 10}{30} = 20\ \text{Н}, \text{ что невозможно.}$$

Значит, в этом случае между телами действует сила трения скольжения, равная $F_{тр} = 9{,}8$ Н;

$$a_1 = \frac{F - F_{тр}}{M};\ a_1 = \frac{60 - 9{,}8}{20} = 2{,}51\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a_2 = \frac{F_{тр}}{m};\ a_2 = \frac{9{,}8}{10} = 0{,}98\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Ответ: 1) $a = 0{,}67\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $F_{пок} = 6{,}7$ Н; 2) $a_1 = 2{,}51\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $a_2 = 0{,}98\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $F_{тр} = 9{,}8$ Н.

Задача 1.32

Шар массой m = 500 кг, падая с высоты h = 1 м, ударяется о металлическую плиту. Определить среднее значение силы удара $\langle F \rangle$, если его длительность t = 0,01 с. Удар считать абсолютно неупругим.

Дано:
m = 500 кг
h = 1 м
t = 0,01 с

$\langle F \rangle$ – ?

Решение

Средняя сила удара

$$\langle F \rangle = \frac{|\vec{p}_2 - \vec{p}_1|}{t},$$

где $p_1 = m\upsilon_1$ – импульс шара до удара; υ_1 – скорость шара до удара; $p_2 = m\upsilon_2$ – импульс шара после удара.

Поскольку удар абсолютно неупругий, то $\upsilon_2 = 0$, тогда $\langle F \rangle = \frac{p_1}{t} = \frac{m\upsilon_1}{t}$.

Используя закон сохранения энергии в механике, найдем υ_1:

$$mgh = \frac{m\upsilon_1^2}{2}; \qquad \upsilon_1 = \sqrt{2gh}.$$

Тогда

$$F = \frac{m\sqrt{2gh}}{t}; \quad [F] = \frac{\text{кг}\sqrt{\frac{\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}}}{\text{с}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н};$$

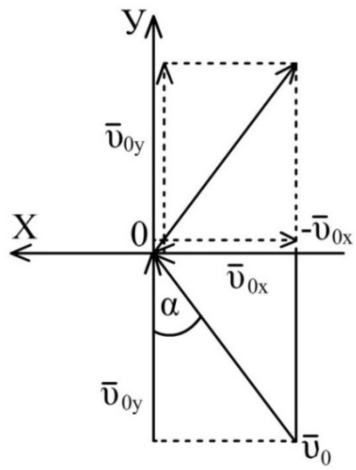
$$F = \frac{500\sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 1}}{0{,}01} = 221\cdot 10^3\ \text{Н} = 221\ \text{кН}.$$

Ответ: $\langle F \rangle = 221$ кН.

Задача 1.33

Найти импульс ΔP, полученный плоской поверхностью в результате абсолютно упругого удара о нее шара массой m = 0,5 кг, если перед ударом шар имел скорость $\upsilon_0 = 5\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, направленную под углом α = 30° к поверхности.

Дано:
m = 0,5 кг
$\upsilon_0 = 5$ м/с
α = 30°
ΔP – ?



Решение

При ударе о плоскость (см. рисунок) шар сообщает ей импульс, численно равный изменению импульса шара при ударе. При абсолютно упругом ударе проекция импульса шара на ось OY не изменяется, а проекция импульса шара на ось OX изменяет свое направление на противоположное, не изменяясь по абсолютной величине. Поэтому изменение импульса шара при ударе равно

$$\Delta P_ш = m\Delta\upsilon_x = -m\upsilon_0 \sin\alpha - m\upsilon_0 \sin\alpha = -2m\upsilon_0 \sin\alpha.$$

Импульс, получаемый стенкой,

$$\Delta P = -\Delta P_ш = 2m\upsilon_0 \sin\alpha; \quad [\Delta P] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}};$$

$$\Delta P = 2\cdot 0{,}5\cdot 5\cdot 0{,}5 = 2{,}5\,\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\Delta P = 2{,}5\,\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 1.34

Тело массой m = 1 кг, двигаясь равномерно, описывает три четверти окружности радиусом R = 2 м за время t = 6 с. Найти изменение модуля импульса ΔP.

Дано:
m = 1 кг
R = 2 м
t = 6 с
ΔP – ?

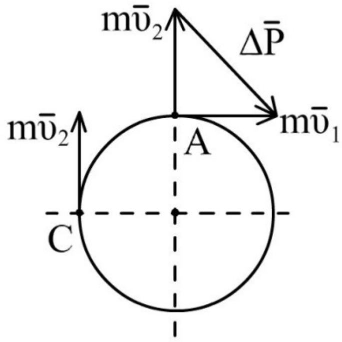
Решение

Пусть тело переместилось из точки A в точку C (см. рисунок). Скорость тела $\vec{\upsilon}$ по модулю не изменилась, но изменилось направление скорости, следовательно, изменился и импульс.

Перенесем вектор импульса $\vec{P}_2 = m\vec{\upsilon}_2$ из точки C в точку A и по теореме Пифагора найдем модуль изменения импульса ΔP.

По условию задачи вращение тела равномерное, поэтому линейную скорость найдем, разделив длину окружности на время одного оборота (период):

$$\upsilon = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi R}{\frac{4}{3}t}.$$



Импульс тела $P = m\upsilon = \frac{3\pi R m}{2t}$.

Изменение модуля импульса

$$\Delta P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} = \sqrt{2P^2} = P\sqrt{2} = \frac{3\pi R m}{\sqrt{2}t};$$

$$[\Delta P] = \frac{\text{м} \cdot \text{кг}}{\text{с}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}; \quad \Delta P = \frac{3 \cdot 3{,}14 \cdot 2 \cdot 1}{\sqrt{2} \cdot 6} = 1{,}57 \ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\Delta P = 1{,}57 \ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$.

Задача 1.35

Снаряд массой m = 100 кг вылетел из орудия под углом α = 30° к горизонту с начальной скоростью $\upsilon_0 = 600$ м/с.

Найти: 1) импульс силы, действующей на снаряд во время полета; 2) изменение модуля импульса снаряда ΔP за время его полета.

Дано:
m = 100 кг
α = 30°
$\upsilon_0 = 600$ м/с
$F \cdot t$; ΔP – ?

Решение

Если пренебречь сопротивлением воздуха, то траекторией движения снаряда является парабола (см. рисунок).

Снаряд движется с ускорением $\vec{g}$.

1. Проекции вектора скорости в момент времени t определяются выражениями

$$\begin{cases} \upsilon_x = \upsilon_0 \cos\alpha; \\ \upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha - gt. \end{cases} \qquad (1)$$

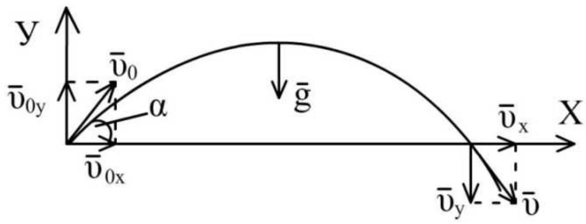
Движение снаряда вдоль оси OY описывается уравнением

$$y = \upsilon_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \qquad (2)$$

В момент падения снаряда на землю координата y = 0. С учетом этого из уравнения (2) определим время полета:

$$t = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}. \qquad (3)$$

При полете на снаряд действует сила тяжести. Найдем импульс силы тяжести за время полета (в проекции на OY):



$$Ft = -mg\frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g} = -2m\upsilon_0 \sin\alpha;$$

$$Ft = -2\cdot 100\cdot 600\cdot 0{,}5 = -6\cdot 10^4\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}.$$

2. Проекция скорости υ_y в момент времени падения снаряда на землю определяется при подстановке выражения (3) в (1):

$$\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha - gt = -\upsilon_0 \sin\alpha.$$

Заметим, что $\upsilon_x = \upsilon_{0x}$, т.е. остается постоянной. Тогда изменение модуля импульса снаряда за время его полета

$$\Delta P = m\left(\upsilon_y - \upsilon_{0y}\right) = m\left(-\upsilon_0 \sin\alpha - \upsilon_0 \sin\alpha\right) = -2m\upsilon_0 \sin\alpha = Ft;$$

$$[\Delta P] = \text{Н}\cdot\text{с} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}}{\text{с}^2} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}; \quad \Delta\text{P} = -6\cdot 10^4\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\Delta P = Ft = -6\cdot 10^4\,\dfrac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}.$

Задача 1.36

На рисунке показан блок пренебрежимо малой массы, подвешенный к пружинным весам. К концам нити, переброшенной через блок, прикреплены грузы M_1 = 1 кг и M_2 = 5 кг. Грузы движутся с ускорением под действием силы тяжести. Трение в блоке отсутствует. Что покажут весы?

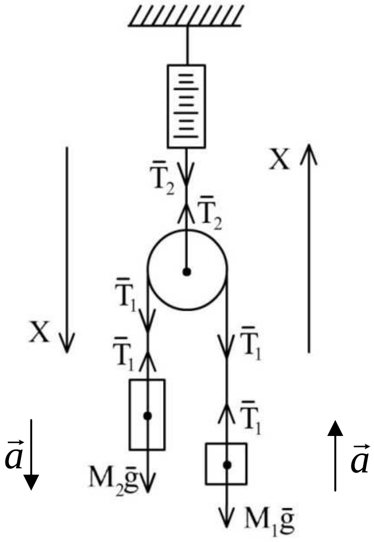
Дано:
M_1 = 1 кг
M_2 = 5 кг
T_2. – ?

Решение

Рассмотрим все силы, приложенные к телам M_1 и M_2, блоку и пружинным весам. Условие отсутствия трения в блоке позволяет считать равными силы натяжения нити в любом ее сечении.

Выберем направление координатной оси X и запишем уравнения движения каждого из тел:

$$\begin{cases} M_2 g - T_1 = M_2 a; \\ T_1 - M_1 g = M_1 a; \\ 2T_1 - T_2 = 0. \end{cases}$$



Весом тела называют силу, которая в положении равновесия растягивает пружину, если к ней подвесить тело. В нашем случае эта величина, равная T_2.

Из системы уравнений находим:

$$a = \frac{M_2 - M_1}{M_1 + M_2} g; \quad T_1 = M_1 g + M_1 \frac{M_2 - M_1}{M_1 + M_2} g;$$

$$[T_1] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} + \frac{\text{кг} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{с}^2} = \text{Н};$$

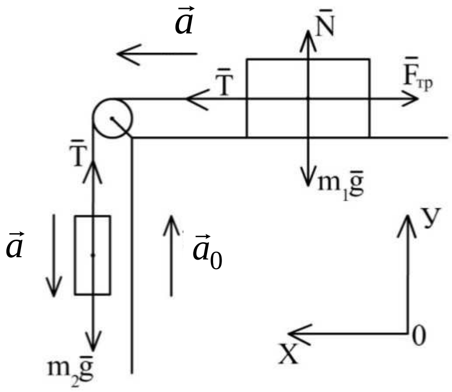
$$T_1 = 1 \cdot 9{,}8 + 1\frac{5-1}{1+5} 9{,}8 \approx 16 \text{ Н}; \quad \text{T}_2 = 2\text{T}_1 = 32 \text{ Н}.$$

Такая сила соответствует массе тела m = 3,2 кг. Таким образом, пружинные весы показывают 3,2 кг, т.е. меньше, чем сумма масс обоих тел, равная 6 кг.

Ответ: $T_2 = 32$ Н.

Задача 1.37

Система грузов $m_1 = 0{,}5$ кг и $m_2 = 0{,}6$ кг находится в лифте, движущемся вверх с ускорением $a_0 = 4{,}9$ м/с^2 (см. рисунок). Определить силу натяжения нити, если коэффициент трения между грузом m_1 и опорой μ = 0,1, и ускорение груза m_2 относительно неподвижной системы отсчета.



Дано:

$m_1 = 0{,}5$ кг

$m_2 = 0{,}6$ кг

$a_0 = 4{,}9$ м/с^2

$\mu = 0{,}1$

$T,\ a' - ?$

Решение

Блок, через который перекинута нить, невесомый, следовательно, сила натяжения нити со стороны грузов m_1 и m_2 будет одинакова и равна T. Нить нерастяжима, поэтому ускорения грузов m_1 и m_2 будут одинаковы относительно лифта:

$$|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = |\vec{a}|.$$

Относительно неподвижной системы отсчета уравнения для грузов m_1 и m_2 запишутся в векторной форме так:

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = m_1\left(\vec{a}_0 + \vec{a}\right); \\ m_2\vec{g} + \vec{T} = m_2\left(\vec{a}_0 + \vec{a}\right). \end{cases}$$

В проекции на оси координат

$$\begin{cases} N - m_1 g = m_1 a_0; \\ T - m_2 g = m_2\left(a_0 - a\right); \\ T - F_{тр} = m_1 a, \end{cases}$$

где $F_{тр} = \mu N$; $N = m_1\left(g - a_0\right)$; $F_{тр} = \mu m_1\left(g - a_0\right)$.

Решаем совместно уравнения

$$\left.\begin{cases} T - m_2 g = m_2 a_0 - m_2 a; \\ T - F_{тр} = m_1 a; \end{cases}\right| \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix}; \qquad T m_1 - m_1 m_2 g + T\, m_2 - F_{тр} m_2 = m_1 m_2 a_0;$$

$$T = \frac{m_1 m_2 g + \mu m_1 m_2\left(g - a_0\right) + m_1 m_2 a_0}{m_1 + m_2};$$

$$T = \frac{m_1 m_2\left(g + \mu\left(g - a_0\right) + a_0\right)}{m_1 + m_2}; \quad [T] = \frac{кг \cdot кг \cdot \frac{м}{с^2}}{кг} = \frac{кг \cdot м}{с^2} = Н;$$

$$T = \frac{0,5 \cdot 0,6 \cdot (9,8 + 0,1(9,8 - 4,9) + 4,9}{0,5 + 0,6} = 4,14\,Н.$$

Ускорение груза m_2 относительно лифта найдем из уравнения

$$T - m_2 g = m_2 a_0 - m_2 a;$$

$$a = \frac{m_2\left(a_0 + g\right) - T}{m_2}; \quad [a] = \frac{кг \cdot \frac{м}{с^2} - \frac{кг \cdot м}{с^2}}{кг} = \frac{\frac{кг \cdot м}{с^2}}{кг} = \frac{м}{с^2};.$$

$$a = \frac{0,6\left(4,9 + 9,8\right) - 4,14}{0,6} = 6,13\ \frac{м}{с^2}.$$

Относительно неподвижной системы отсчета оно будет равно

$$\vec{a}' = \vec{a}_0 + \vec{a};$$

$$a' = a_0 - a;$$

$$a' = 4,9 - 6,13 = -1,23\ \frac{м}{с^2} \text{ и направлено вниз.}$$

Ответ: $T = 4,14\,Н$; $a' = -1,23\ \frac{м}{с^2}$.

Задача 1.38

Парашютист массой m = 90 кг делает затяжной прыжок. Найти скорость парашютиста в момент раскрытия парашюта, если сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости движения: $\vec{F}_c = -r\vec{\upsilon}$, где r = 15 кг/с. Начальную скорость υ_0 принять равной нулю. Раскрытие парашюта произошло через 9 с свободного полета.

Дано:
m = 90 кг
$\vec{F}_c = -r\vec{\upsilon}$
r = 15 кг/с
$\upsilon_0 = 0$
t = 9 с

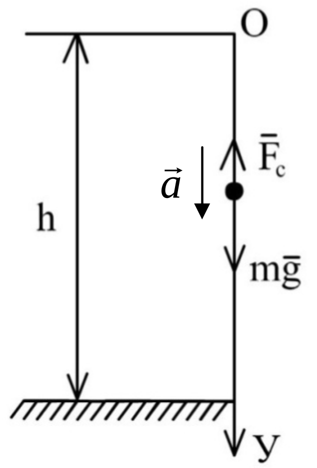
υ – ?

Решение

Рассмотрим движение в системе отсчета, связанной с Землей. Начало координат совместим с точкой, из которой начинается движение (точка O на рисунке), ось OY направим по вертикали к Земле. Считая высоту h малой по сравнению с радиусом Земли, примем ускорение свободного падения g = 9,8 м/с^2. На парашютиста действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила сопротивления воздуха $\vec{F}_c = -r\vec{\upsilon}$.

По второму закону Ньютона запишем:

$$ma = mg - F_c \quad \text{или} \quad m\frac{d\upsilon}{dt} = mg - r\upsilon. \qquad (1)$$



Разделим переменные в уравнении (1):

$$\frac{d\upsilon}{g - \frac{r}{m}\upsilon} = dt. \qquad (2)$$

Проинтегрируем обе части выражения (2). Пределы интегрирования определяются условием задачи: при $t_0 = 0$ скорость $\upsilon_0 = 0$, в момент времени t скорость равна υ:

$$-\frac{m}{r}\int_0^{\upsilon}\frac{d\left(g - \frac{r}{m}\upsilon\right)}{g - \frac{r}{m}\upsilon} = \int_0^t dt; \quad \ln\left[\frac{g - \frac{r}{m}\upsilon}{g}\right] = -\frac{r}{m}t;$$

$$\upsilon = \frac{m}{r}g\left(1 - e^{-\frac{r}{m}t}\right); \quad \left[\frac{r}{m}t\right] = \frac{\text{кг}\cdot\text{с}}{\text{с}\cdot\text{кг}} = 1;$$

$$[\upsilon]=\frac{\text{кг}\cdot\text{с}\cdot\text{м}}{\text{кг}\cdot\text{с}^2}=\frac{\text{м}}{\text{с}};\quad \upsilon=45{,}7\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\upsilon=45{,}7\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}.$

Задача 1.39

Ракета начальной массой m_0 = 500 г выбрасывает непрерывную струю газа с постоянной относительно нее скоростью υ_0 = 400 м/с. Расход газа q = 150 г/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха и внешним силовым полем, определить, какую скорость относительно Земли приобретает ракета через время t = 2 с после начала движения.

Дано:
m_0 = 0,5 кг
υ_0 = 400 м/с
q = 0,15 кг/с
t = 2 с
υ – ?

Решение

На основании закона сохранения импульса для системы «ракета – струя» запишем:

$$d\vec{P}_1+d\vec{P}_2=0, \tag{1}$$

где $d\vec{P}_1$ − изменение импульса ракеты за промежуток времени dt; $d\vec{P}_2$ − изменение импульса порции газа, истекающей из ракеты за промежуток времени dt,

$$d\vec{P}_1=\left(m_0-qt\right)d\vec{\upsilon}, \tag{2}$$

где $\left(m_0-qt\right)$ − масса ракеты в момент времени t, когда скорость ракеты $\vec{\upsilon}$; $d\vec{\upsilon}$ − изменение скорости за время dt (за счет реактивного действия выбрасываемой струи газа).

Порция газа qdt, двигаясь вместе с ракетой, обладает скоростью $\vec{\upsilon}$. Покинув ракету, эта же масса газа за время dt приобретает относительно Земли скорость $\vec{\upsilon}+\vec{\upsilon}_0$. Таким образом, импульс порции газа, выброшенной из ракеты, изменится на величину

$$d\vec{P}_2=q\left(\vec{\upsilon}+\vec{\upsilon}_0\right)dt-q\vec{\upsilon}dt=q\vec{\upsilon}_0dt;$$

$$d\vec{P}_2=q\vec{\upsilon}_0dt, \tag{3}$$

где qdt – масса выбрасываемой порции газа.

Подставив формулы (2) и (3) в выражение (1), получим:

$$\left(m_0-qt\right)d\vec{\upsilon}+q\vec{\upsilon}_0dt=0. \tag{4}$$

Выбрав ось X по направлению скорости ракеты $\vec{\upsilon}$, в проекции на эту ось уравнение (4) запишем в виде:

$$(m_0 - qt)d\upsilon - q\upsilon_0 dt = 0$$

(учли, что $\upsilon_x = -\upsilon_0$).

Тогда

$$d\upsilon = \frac{q\upsilon_0}{m_0 - qt}dt. \qquad (5)$$

Скорость υ как функцию времени найдем, интегрируя выражение (5) в пределах от 0 до t. При $t = 0$ $\upsilon = 0$, следовательно,

$$\int_0^{\upsilon} d\upsilon = \upsilon_0 \int_0^t \frac{qdt}{m_0 - qt},$$

откуда

$$\upsilon = \upsilon_0 \ln\frac{m_0}{m_0 - qt}; \quad [\upsilon] = \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad \upsilon = 365\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\upsilon = 365\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 1.40

Моторная лодка массой m = 400 кг, двигаясь по озеру, за t = 10 с достигает скорости υ = 36 км/ч. Найти силу тяги мотора F_m, считая ее постоянной, если сила сопротивления движению $\vec{F}_c = k\vec{\upsilon}$, где k = 120 кг/с. В начальный момент считать скорость лодки равной нулю.

Дано:
m = 400 кг
t = 10 с
υ = 10 м/с
k = 120 кг/с

F_m – ?

Решение

Из условия задачи следует, что сила сопротивления

$$\vec{F}_c = k\vec{\upsilon}.$$

По второму закону Ньютона

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F_m - F_c}{m} = \frac{F_m - k\upsilon}{m}. \qquad (1)$$

С другой стороны, по определению ускорение $a=\frac{d\upsilon}{dt}$, тогда уравнение (1) перепишем в виде

$$\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{F_m-k\upsilon}{m}$$

После разделения переменных получим:

$$d\upsilon=\frac{F_m-k\upsilon}{m}dt \quad \text{или} \quad \frac{d\upsilon}{\upsilon-\frac{F_m}{k}}=-\frac{k}{m}dt. \tag{2}$$

Интегрируем уравнение (2):

$$\ln\left|\upsilon-\frac{F_m}{k}\right|=-\frac{k}{m}t+C\,, \tag{3}$$

где C – постоянная интегрирования.

Для определения скорости υ потенцируем выражение (3):

$$\upsilon-\frac{F_m}{k}=e^{-\frac{k}{m}t}\cdot e^{C} \quad \text{или} \quad \upsilon=\frac{F_m}{k}+e^{-\frac{k}{m}t}\cdot e^{C}. \tag{4}$$

Из начальных условий известно, что при t = 0 скорость υ = 0, отсюда находится постоянная интегрирования C:

$$0=\frac{F_m}{k}+e^{-\frac{k}{m}0}\cdot e^{C},$$

откуда

$$e^{C}=-\frac{F_m}{k}.$$

Тогда уравнение (4) примет вид:

$$\upsilon=\frac{F_m}{k}-e^{-\frac{k}{m}t}\cdot\frac{F_m}{k}=\frac{F_m}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right). \tag{5}$$

Из уравнения (5) найдем силу тяги мотора:

$$F_m=\frac{k\upsilon}{1-e^{-\frac{k}{m}t}}; \quad [F_m]=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}\cdot\text{с}}=\text{Н}; \quad F_m=1260\ \text{Н}.$$

Ответ: $F_m=1260$ Н.

Задача 1.41

Скорость пули массой m = 9 г при движении в воздухе за t = 1 с уменьшилась с $\upsilon_0 = 900$ м / с до $\upsilon = 200$ м / с. Найти коэффициент сопротивления k, считая силу сопротивления воздуха пропорциональной квадрату скорости: $F_c = k\upsilon^2$.

Дано:
m = $9 \cdot 10^{-3}$ кг
t = 1 с
$\upsilon_0 = 900$ м / с
υ = 200 м / с
$F_c = k\upsilon^2$

k – ?

Решение

По второму закону Ньютона

$$F = ma = m\frac{d\upsilon}{dt}. \tag{1}$$

Из условия задачи сила сопротивления

$$F_c = -k\upsilon^2. \tag{2}$$

Знак «минус» в уравнении (2) берется потому, что сила сопротивления направлена противоположно скорости пули.

Из уравнений (1) и (2) запишем дифференциальное уравнение полета пули, из которого определим коэффициент сопротивления:

$$k\upsilon^2 = -m\frac{d\upsilon}{dt}.$$

Разделив переменные, получим:

$$\frac{d\upsilon}{\upsilon^2} = -\frac{k}{m}dt. \tag{3}$$

Интегрируем выражение (3):

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon^2} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt; \quad \frac{1}{\upsilon} - \frac{1}{\upsilon_0} = \frac{kt}{m},$$

откуда

$$k = \frac{m(\upsilon - \upsilon_0)}{\upsilon\upsilon_0 t};$$

$$[k] = \frac{\text{кг}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}}}{\frac{\text{м}}{\text{с}}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}}\cdot\text{с}} = \frac{\text{кг}}{\text{м}}; \quad k = \frac{9\cdot 10^{-3}(900-200)}{200\cdot 900\cdot 1} = 3{,}5\cdot 10^{-5}\ \frac{\text{кг}}{\text{м}}.$$

Ответ: $k = 3{,}5\cdot 10^{-5}\ \frac{\text{кг}}{\text{м}}$.

Задача 1.42

Однородная цепочка длиной l = 1,5 м и массой m = 3 кг лежит на столе. Если часть цепочки длиной $l_0 = 0,2$ м спустить со стола, то она начнет скользить вниз. Коэффициент трения цепочки о стол μ = 0,1. Найти работу, совершаемую против силы трения при соскальзывании всей цепочки.

Дано:
l = 1,5 м
$l_0 = 0,2$ м
m = 3 кг
μ = 0,1

A – ?

Решение

На часть цепочки длиной x, лежащей на столе, действует сила трения

$$F_{тр} = \mu \frac{mg}{l} x, \qquad (1)$$

где $\frac{m}{l}$ – масса единицы длины цепочки.

Сила трения зависит от длины цепочки, находящейся на столе. При скольжении цепочки сила трения уменьшается, т.е. в задаче требуется определить работу переменной силы.

Для бесконечно малого перемещения dx силу трения можно считать постоянной. Тогда элементарная работа, совершаемая при этом против силы трения, равна

$$dA = -F_{тр} dx,$$

или с учетом (1)

$$dA = -\mu \frac{mg}{l} x dx. \qquad (2)$$

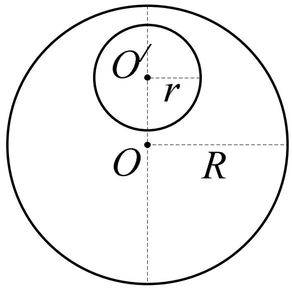
По условию задачи скольжение цепочки начинается, когда ее часть длиной l_0 свесится со стола. Следовательно, работа совершается при изменении длины части цепочки, находящейся на столе, от $(l - l_0)$ до 0. Учитывая эти граничные условия и выражение (2), на основании формулы работы переменной силы запишем:

$$A = -\int_{l-l_0}^{0} \mu \frac{mg}{l} x dx = \mu \frac{mg}{2l} (l - l_0)^2; \ [A] = \frac{кг \cdot м}{с^2 \cdot м} \cdot м^2 = Н \cdot м = Дж;$$

$$A = 0,1 \frac{3 \cdot 9,8}{2 \cdot 1,5} (1,5 - 0,2)^2 = 1,69 \text{ Дж}.$$

Ответ: $A = 1,69$ Дж.

Задача 1.43



Однородная тонкая пластинка имеет форму круга (радиус R = 60 см), в котором вырезано круглое отверстие (радиус r = 25 см), с центром, лежащим на середине вертикального радиуса пластинки (см. рисунок). Определить положение центра масс этой фигуры.

Дано:
R = 0,6 м
r = 0,25 м
OO' = R/2
x_c – ?

Решение

Представим, что круглое отверстие заполнено тем же материалом, из которого сделана круглая пластинка. Тогда центр масс, к которому приложена сила тяжести $M\vec{g}$, будет находиться в центре круга (точка O на рисунке). Чтобы скомпенсировать эффект заполнения отверстия, приложена сила $m\vec{g}$, направленная вертикально вверх.

Из соображений симметрии очевидно, что центр масс фигуры находится на вертикальной оси, проходящей через точки O и O'. Помещая начало вертикальной оси X в точку O, запишем выражение для центра масс:

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i},$$

где m_i − масса i-го тела; x_i − координата центра масс i-го тела.

Учитывая условие задачи и данные рассуждения, можем записать:

$$x_c = \frac{-m\dfrac{R}{2}}{M - m}. \qquad (1)$$

Если плотность пластинки ρ, толщина h, то M = $\rho\pi R^2 h$, m = $\rho\pi r^2 h$. Подставляя эти выражения в формулу (1), найдем искомое положение центра масс:

$$x_c = -\frac{r^2 R}{2\left(R^2 - r^2\right)}; \qquad [x_c] = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{м}}{\text{м}^2} = \text{м};$$

$$x_c = -\frac{0{,}25^2 \cdot 0{,}6}{2\left(0{,}6^2 - 0{,}25^2\right)} = -6{,}3 \text{ см}.$$

Знак «минус» означает, что центр масс находится ниже центра пластинки O.

Ответ: $x_c = -6{,}3$ см.

Задача 1.44

Определить положение центра масс (радиус-вектор центра масс $\vec{r}_c$ и его модуль $|\vec{r}_c|$) системы, состоящей из трех материальных точек массами $m_1 = 1,4$ кг, $m_2 = 1,2$ *кг* и $m_3 = 1,8$ кг, находящихся в вершинах равностороннего треугольника со стороной a = 0,6 м. Определить также угол между основанием треугольника и направлением радиус-вектора центра масс.

Дано:
$m_1 = 1,4$ кг
$m_2 = 1,2$ кг
$m_3 = 1,8$ кг
a = 0,6 м

$\vec{r}_c$, r_c, α – ?

Решение

Начало координат поместим в точку расположения массы m_1, а ось X направим вдоль прямой, соединяющей материальные точки массами m_1 и m_3 (см. рисунок).

Тогда координаты соответствующих материальных точек массами m_1, m_2 и m_3:

$$x_1 = 0;\ y_1 = 0;$$

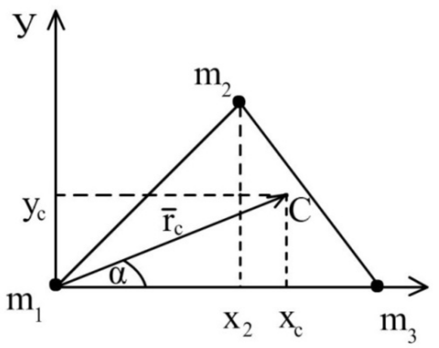
$$x_2 = a\sin\pi/6;\ y_2 = a\cos\pi/6;$$

$$x_3 = a;\ y_3 = 0.$$

Учитывая выражение для координат центра масс системы материальных точек,

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i};\qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},$$

где x_i, y_i − координаты i-й точки; m_i − масса i-й точки; n – число материальных точек системы.



Для нашей задачи можем записать:

$$x_c = \frac{m_2 a \sin\frac{\pi}{6} + m_3 a}{m_1 + m_2 + m_3};$$

$$y_c = \frac{m_2 a \cos\frac{\pi}{6}}{m_1 + m_2 + m_3}. \qquad (1)$$

Искомый радиус-вектор центра масс системы материальных точек

$$\vec{r}_c = x_c\vec{i} + y_c\vec{j} = \frac{m_2 a\sin\frac{\pi}{6} + m_3 a}{m_1+m_2+m_3}\vec{i} + \frac{m_2 a\cos\frac{\pi}{6}}{m_1+m_2+m_3}\vec{j}; \quad \left[\vec{r}_c\right] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{кг}} = \text{м};$$

$$\vec{r}_c = \left(32{,}7\vec{i} + 14\vec{j}\right)\text{ см}.$$

Модуль радиус-вектора центра масс системы материальных точек

$$|\vec{r}_c| = \sqrt{x_c^{\,2} + y_c^{\,2}} = \frac{a\sqrt{\left(m_2\sin\frac{\pi}{6} + m_3\right)^2 + \left(m_2\cos\frac{\pi}{6}\right)^2}}{m_1+m_2+m_3};$$

$$[r_c] = \frac{\text{м}\sqrt{\text{кг}^2}}{\text{кг}} = \text{м}; \quad r_c = 35{,}7\text{ см}.$$

Искомый угол (см. рисунок)

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{m_2\cos\frac{\pi}{6}}{m_2\sin\frac{\pi}{6} + m_3}; \quad \alpha = \frac{\text{кг}}{\text{кг}} = 1; \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{1{,}2\cdot 0{,}866}{1{,}2\cdot 0{,}5 + 1{,}8} = 23°25'.$$

Ответ: $\vec{r}_c = \left(32{,}7\vec{i} + 14\vec{j}\right)$ см; $r_c = 35{,}7$ см; $\alpha = 23°25'$.

Задача 1.45

На железнодорожной платформе, движущейся со скоростью $\upsilon_0 = 3{,}6$ км/ч, укреплено орудие. Масса платформы с орудием M = 1 т. Ствол орудия направлен в сторону движения платформы и приподнят над горизонтом на угол $\alpha = 60°$. Найти скорость снаряда υ' (m = 10 кг) относительно платформы, если после выстрела скорость платформы уменьшилась в n = 2 раза.

Дано:
$\upsilon_0 = 1$ м/с
$M = 10^3$ кг
$\alpha = 60°$
$m = 10$ кг

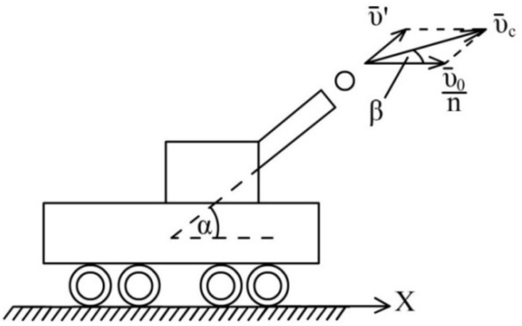
υ' – ?

Решение

Система состоит из двух тел – платформы и снаряда. Силы, действующие на систему ($m\vec{g}$ и $\vec{N}$), направлены по вертикали. По оси X векторная сумма сил равна нулю: $\sum\vec{F} = 0$, следовательно, изменение импульса вдоль оси X равно нулю: $\Delta\sum m\upsilon_x = 0$, т.е. импульс по оси X сохраняется до и после выстрела. Относительно неподвижной системы отсчета, связанной с Землей, можно записать:

$$(M+m)\upsilon_0 = M\frac{\upsilon_0}{n} + m\upsilon_c\cos\beta,$$

где $\vec{\upsilon}_c = \vec{\upsilon}' + \dfrac{\vec{\upsilon}_0}{n}$. − скорость снаряда относительно Земли.



Спроектируем на ось X:

$$\upsilon_c\cos\beta = \upsilon'\cos\alpha + \frac{\upsilon_0}{n};$$

$$(M+m)\upsilon_0 = M\frac{\upsilon_0}{n} + m\left(\upsilon'\cos\alpha + \frac{\upsilon_0}{n}\right);$$

$$(M+m)\upsilon_0 = M\frac{\upsilon_0}{n} + m\upsilon'\cos\alpha + \frac{m\upsilon_0}{n};$$

$$\upsilon' = \frac{\upsilon_0\left(M+m-\dfrac{M}{n}-\dfrac{m}{n}\right)}{m\cos\alpha} = \frac{\upsilon_0(n-1)(M+m)}{nm\cos\alpha};$$

$$[\upsilon'] = \frac{\text{м}\cdot\text{кг}}{\text{с}\cdot\text{кг}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad \upsilon' = \frac{1\cdot1\cdot(10^3+10)}{2\cdot10\cdot0{,}5} = 101\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\upsilon' = 101\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 1.46

Снаряд, летящий на высоте H = 40 м горизонтально со скоростью υ = 100 м/с, разрывается на две равные части. Одна часть снаряда спустя время t = 1 с падает на землю точно под местом взрыва. Определить скорость другой части снаряда сразу после взрыва.

Дано:
H = 40 м
υ = 100 м/с
g = 10 м/с^2
t = 1 с

υ_2 − ?

Решение

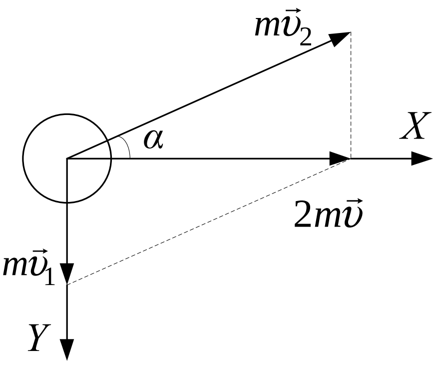
Пусть вектор $\vec{\upsilon}$ лежит в плоскости XY и направлен по оси X. На снаряд действует внешняя сила тяжести, направленная по оси Y. Поэтому при выбранном направлении $\vec{\upsilon}$ сохраняется проекция импульса по оси X (см. рисунок),

$$2m\upsilon = m\upsilon_2\cos\alpha. \qquad (1)$$

Из треугольника

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\upsilon_1}{2\upsilon}. \qquad (2)$$

Скорость υ_1 определяется из условия



$$H = \upsilon_1 t + \frac{gt^2}{2},$$

получим:

$$\upsilon_1 = \frac{H}{t} - \frac{gt}{2};$$

$$[\upsilon_1] = \frac{\text{м}}{\text{с}} - \frac{\text{м} \cdot \text{с}}{\text{с}^2} = \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad \upsilon_1 = 35 \text{ м/с}.$$

Из (1) находим $\upsilon_2 = \dfrac{2\upsilon}{\cos\alpha}$, поскольку $\dfrac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}$, то с учетом (2) полчим:

$$\upsilon_2 = 2\upsilon\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha} = 2\upsilon\sqrt{1 + \frac{\upsilon_1^2}{4\upsilon^2}} = \sqrt{4\upsilon^2 + \upsilon_1^2};$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{4 \cdot 100^2 + 35^2} = 203 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\upsilon_2 = 203$ м/с.

Задача 1.47

Тело скользит по наклонной плоскости, составляющей угол α = 60° с горизонтом. Зависимость пути S от времени t задается уравнением $S = A + Bt + Ct^2$, где A = 5 м; B = −1 м/с; C = 1,5 м/с^2. Найти коэффициент трения μ тела о плоскость.

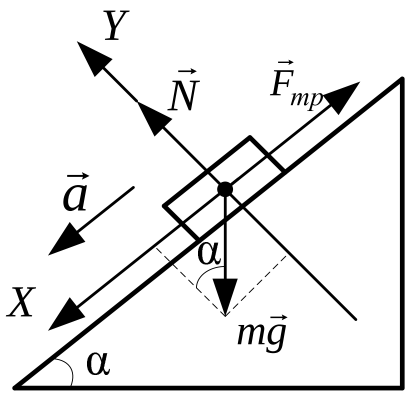
Дано:
α = 60°
$S = A + Bt + Ct^2$
A = 5 м
B = −1 м/с
C =2,5 м/с^2

μ – ?

Решение

Дифференцируя дважды заданное уравнение движения тела по времени, найдем уравнение, описывающее зависимость ускорения от времени:

$$a = \frac{d^2S}{dt^2} = 2C. \qquad (1)$$



На рисунке показаны силы, действующие на тело. Согласно второму закону Ньютона для данного тела можем записать:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{тр} + \vec{N} \; . \qquad (2)$$

Запишем уравнение (2) в проекциях на координатные оси:

OX:

$$ma = -F_{тр} + mg\sin\alpha; \qquad (3)$$

OY:

$$0 = N - mg\cos\alpha \; . \qquad (4)$$

Из уравнения (4) найдем силу реакции опоры:

$$N = mg\cos\alpha.$$

Сила трения

$$F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha. \qquad (5)$$

Подставляя уравнение (5) в (3), получим:

$$ma = -\mu mg\cos\alpha + mg\sin\alpha,$$

откуда $a = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha$, согласно выражению (1) $a = 2C$, тогда

$$g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha = 2C$$

и $\mu = \dfrac{g\sin\alpha - 2C}{g\cos\alpha}$; $[\mu] = \dfrac{\left(\dfrac{м}{с^2} - \dfrac{м}{с^2}\right)}{\dfrac{м}{с^2}} = 1$; т.е. μ – безразмерная величина;

$$\mu = \frac{9{,}8\sin 60 - 2\cdot 2{,}5}{9{,}8\cos 60} = 0{,}7\,.$$

Ответ: μ = 0,7.

Задача 1.48

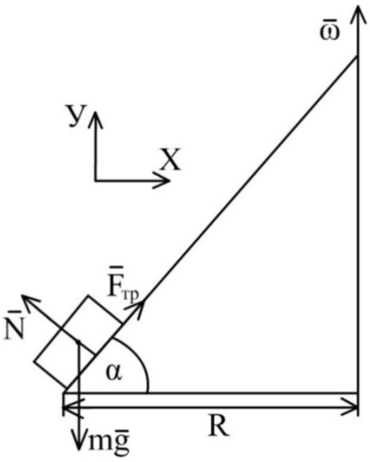
На краю наклонной плоскости с углом наклона α лежит тело. Плоскость равномерно вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Расстояние от тела до оси вращения *R* (см. рисунок).

Определить наименьший коэффициент трения μ_0, при котором тело удерживается на вращающейся наклонной плоскости.

Рассмотреть два предельных случая: 1) тело находится на горизонтальной плоскости, которая равномерно вращается вокруг вертикальной оси; 2) тело лежит на неподвижной наклонной плоскости.

Дано:	**Решение**
α; $\vec{\omega}$; R	
$\mu_0 -$?	

При решении задачи вспомним, что кроме трения скольжения существует также трение покоя, которое характеризует силу сопротивления при любых попытках сдвинуть тело.



Сила трения покоя определяется выражением $F_{тр} = \mu_n N$, где μ_n − коэффициент трения покоя.

Поскольку сила трения покоя изменяется от нуля до этого максимального значения, можно записать: $F_{тр} \le \mu_n N$. Почти всегда μ_n превосходит $\mu_{ск}$ (коэффициент трения скольжения) и никогда не может быть меньше.

Рассмотрим силы, действующие на тело: сила тяжести $M\vec{g}$, сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$, так как относительно наклонной плоскости тело покоится, сила реакции опоры $\vec{N}$.

Запишем второй закон Ньютона в векторной форме, учитывая тот факт, что тело вращается вместе с наклонной плоскостью:

$$\vec{F}_{тр} + \vec{N} + M\vec{g} = M\vec{a}.$$

Выберем направления координатных осей, как показано на рисунке, и запишем уравнение движения тела в скалярной форме:

$$X: \quad F_{тр}\cos\alpha - N\sin\alpha = M\omega^2 R;$$

$$Y: \quad N\cos\alpha + F_{тр}\sin\alpha - Mg = 0;$$

$$F_{тр} = \mu_0 N.$$

Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \mu_0 N\cos\alpha - N\sin\alpha = M\omega^2 R; \\ N\cos\alpha + \mu_0 N\sin\alpha = Mg, \end{cases}$$

делим правые и левые части:

$$\frac{\mu_0\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \mu_0\sin\alpha} = \frac{\omega^2 R}{g};$$

$$g\mu_0\cos\alpha - g\sin\alpha = \omega^2 R\cos\alpha + \mu_0\omega^2 R\sin\alpha;$$

$$\mu_0\left(g\cos\alpha - \omega^2 R\sin\alpha\right) = \omega^2 R\cos\alpha + g\sin\alpha;$$

получаем:

$$\mu_0 = \frac{\omega^2 R\cos\alpha + g\sin\alpha}{g\cos\alpha - \omega^2 R\sin\alpha}.$$

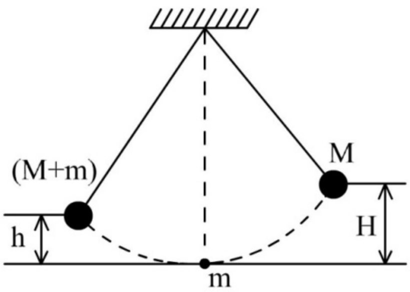
Проанализируем ответ: $\mu_0 > 0$, следовательно, $g\cos\alpha - \omega^2 R\sin\alpha > 0$, т.е. $\mathrm{tg}\alpha < \dfrac{g}{\omega^2 R}$. Если это условие не выполнено, то никакая сила трения не в силах удержать тело на вращающейся наклонной плоскости.

Предельные случаи:

1) $\alpha = 0;\ \mu_0 = \dfrac{\omega^2 R}{g};$ 2) $\omega = 0;\ \mu_0 = \mathrm{tg}\alpha$.

Ответ: $\mu_0 = \dfrac{\omega^2 R\cos\alpha + g\sin\alpha}{g\cos\alpha - \omega^2 R\sin\alpha}$; 1) $\alpha = 0;\ \mu_0 = \dfrac{\omega^2 R}{g}$; 2) $\omega = 0;\ \mu_0 = \mathrm{tg}\alpha$.

Задача 1.49



Маятник с грузиком массой M подняли на высоту H и отпустили. В нижней точке своей траектории грузик налетает на кусочек пластилина массой m (см. рисунок). До какой высоты h поднимется грузик с налипшим на нем пластилином? Какая часть механической энергии при этом ударе перейдет во внутреннюю энергию W?

Дано:
M; H; m
h, W – ?

Решение

В данном случае мы имеем дело с абсолютно неупругим ударом. Физические явления при неупругом столкновении тел довольно сложны. Сталкивающиеся тела деформируются, возникают упругие силы, силы трения и т.д., иначе говоря, во время столкновения в системе действуют диссипативные силы, уменьшающие кинетическую энергию макроскопического движения. Поэтому применять закон сохранения механической энергии к процессам, происходящим во время неупругого удара, нельзя. Но после того, как удар закончился и сталкивающиеся тела соединились в одно тело, законом сохранения механической энергии пользоваться можно (если в дальнейшем не действуют диссипативные силы).

Мы считаем, что процесс столкновения происходит настолько быстро, что за время столкновения система не успевает отклониться на заметный угол. Задача заключается в том, чтобы найти скорость этого движения непосредственно после удара. Систему маятник – пластилин во время удара можно считать замкнутой и применять к ней закон сохранения импульса $\left(\vec{p} = \text{const},\ \text{если}\ \vec{F}_{внеш} = 0\right)$:

$$M\upsilon = (M + m)u\,, \tag{1}$$

где υ − скорость маятника до удара; u − скорость системы маятник – пластилин после удара.

Чтобы найти скорость υ, воспользуемся законом сохранения механической энергии:

$$MgH = \frac{M\upsilon^2}{2}\ . \tag{2}$$

Для определения потерь кинетической энергии W в этом ударе воспользуемся общим законом сохранения энергии:

$$MgH = \frac{(M + m)u^2}{2} + W. \tag{3}$$

Найдем теперь из уравнения (2) скорость υ, подставим ее значение в (1) и получим скорость нашей системы после удара:

$$\upsilon = \sqrt{2gH}\ ; \quad u = \frac{M\sqrt{2gH}}{M + m}. \tag{4}$$

Как было сказано выше, после удара можно опять воспользоваться законом сохранения механической энергии, чтобы найти, на какую высоту h поднимется грузик с пластилином:

$$\frac{(M + m)u^2}{2} = (M + m)gh, \tag{5}$$

отсюда получаем:

$$h = \frac{u^2}{2g} = \frac{M}{M + m}H. \tag{6}$$

Подставляя (4) в (3), определяем:

$$W = MgH\frac{m}{M + m}.$$

Ответ: $h = \dfrac{M}{M + m}H$; $W = MgH\dfrac{m}{M + m}$.

Задача 1.50

Шарик массой m = 0,2 кг, подвешенный на нити длиной l = 1 м, совершает колебания в вертикальной плоскости. Найти угол α отклонения нити от вертикали, при котором кинетическая энергия шарика в его нижнем положении $E_к$ = 1,6 Дж. Чему равно отношение сил натяжения нити в нижнем и верхнем положениях?

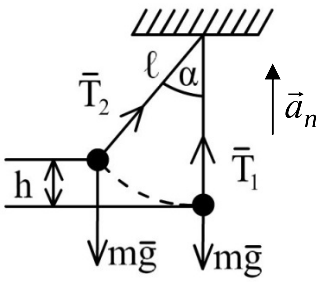
Дано:
m = 0,2 кг
l = 1 м
$E_к = 1,6$ Дж

α; $\dfrac{T_1}{T_2}$ – ?

Решение

Выберем уровень, соответствующий нижней точке траектории шарика, за нулевой уровень потенциальной энергии. Тогда в верхней точке траектории, на высоте $h = l(1 - \cos\alpha)$ относительно выбранного нулевого уровня (см. рисунок) шарик обладает потенциальной энергией, которая максимальна и равна его полной энергии. В нижней точке траектории шарик обладает максимальной кинетической энергией, его потенциальная энергия относительно выбранного уровня равна нулю. Согласно закону сохранения энергии можем записать:

$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} = E_к, \quad mgl(1-\cos\alpha) = \frac{m\upsilon^2}{2} = E_к,$$



откуда

$$\cos\alpha = 1 - \frac{E_к}{mgl} = 0,4; \quad \alpha = \arccos(0,4) \approx 66,5°.$$

Нормальное ускорение шарика

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{l} = \frac{m\upsilon^2}{2}\cdot\frac{2}{ml} = \frac{2E_к}{ml}.$$

Согласно второму закону Ньютона для шарика в нижней точке траектории можем записать:

$$ma_n = T_1 - mg,$$

откуда

$$T_1 = m\left(a_n + g\right) = m\left(\frac{2E_к}{ml} + g\right); \qquad (1)$$

$$\left[T_1\right] = кг\left(\frac{Дж}{кг\cdot м} + \frac{м}{с^2}\right) = кг\left(\frac{кг\cdot м^2}{с^2\cdot кг\cdot м} + \frac{м}{с^2}\right) = \frac{кг\cdot м}{с^2} = Н.$$

В верхней точке траектории скорость шарика и его нормальное ускорении равны нулю, поэтому, согласно второму закону Ньютона,

$$T_2 - mg\cos\alpha = 0; \quad T_2 = mg\cos\alpha = m\left(g - \frac{E_к}{ml}\right). \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) найдем отношение сил натяжения нити:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{m\left(\frac{2E_к}{ml} + g\right)}{m\left(g - \frac{E_к}{ml}\right)} = \frac{2E_к + gml}{gml - E_к}; \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{2\cdot 1{,}6 + 9{,}8\cdot 0{,}2\cdot 1}{9{,}8\cdot 0{,}2\cdot 1 - 1{,}6} = 13{,}5.$$

Ответ: $\alpha = \arccos(0{,}4) \approx 66{,}5°$; $\frac{T_1}{T_2} = 13{,}5.$

Задача 1.51

Два шара массами $m_1 = 6$ кг и $m_2 = 4$ кг движутся со скоростями $\upsilon_1 = 5$ м/с и $\upsilon_2 = 12$ м/с и сталкиваются друг с другом. Найти скорость шаров после удара, считая удар прямым и неупругим, в случаях, когда: а) второй шар догоняет первый; б) шары движутся навстречу друг другу.

Дано:
$m_1 = 6$ кг
$m_2 = 4$ кг
$\upsilon_1 = 5$ м/с
$\upsilon_2 = 12$ м/с

u – ?

Решение

После неупругого удара шары движутся как единое целое, т.е. имеют одну и ту же скорость u.

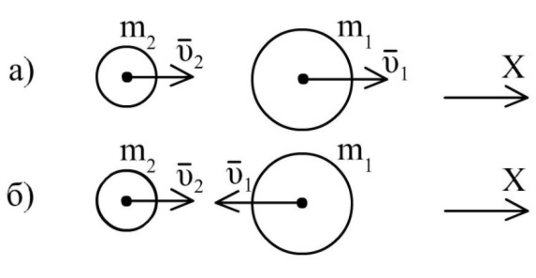
Закон сохранения импульса в проекции на ось *X*, когда второй шар догоняет первый (см. рис., *а*), будет иметь вид:

$$m_2\upsilon_2 + m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)u,$$

откуда скорость шаров после удара

$$u = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}; \quad u = \frac{кг\cdot\frac{м}{с} + кг\cdot\frac{м}{с}}{кг + кг} = \frac{м}{с}; \quad u = \frac{6\cdot 5 + 4\cdot 12}{6 + 4} = 7{,}8\ \frac{м}{с}.$$

Рассмотрим второй случай, когда шары движутся навстречу друг другу (см. рис., *б*). Предположим, что после удара шары будут двигаться в положительном направлении оси *X*. Тогда закон сохранения импульса в проекции на ось *X* будет иметь вид



$$m_2\upsilon_2 - m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)u,$$

откуда

$$u = \frac{m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}\ ;\ u = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{кг}\cdot\text{с}} = \frac{\text{м}}{\text{с}};\ u = \frac{4\cdot 12 - 6\cdot 5}{6+4} = \frac{48-30}{10} = \frac{18}{10} = 1{,}8\ \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: 1) $u = 7{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; 2) $u = 1{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 1.52

Какую часть кинетической энергии передает движущийся шар массой m_1 неподвижному шару массой m_2 при абсолютно упругом центральном ударе, если: а) $m_1 = m_2$; б) $m_1 = 7m_2$?

Дано:

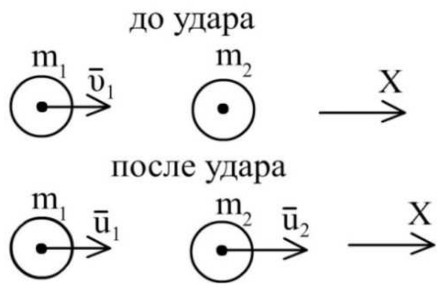
m_1, m_2

$\frac{E'_{к2}}{E_{к1}}$ – ?

Решение

Пусть υ_1 и u_1 – скорости первого шара соответственно до и после соударения, а υ_2 и u_2 – скорости второго шара соответственно до и после соударения. Запишем закон сохранения импульса в проекции на ось X (см. рисунок):

$$m_1\upsilon_1 = m_1u_1 + m_2u_2$$



или

$$m_1(\upsilon_1 - u_1) = m_2u_2. \quad (1)$$

Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}$$

или

$$m_1\left(\upsilon_1^2 - u_1^2\right) = m_2u_2^2\ ;\quad m_1(\upsilon_1 - u_1)(\upsilon_1 + u_1) = m_2u_2^2. \quad (2)$$

Разделив почленно соответствующие части уравнений (1) и (2), получим:

$$\frac{m_1(\upsilon_1 - u_1)(\upsilon_1 + u_1)}{m_1(\upsilon_1 - u_1)} = \frac{m_2u_2^2}{m_2u_2}\ ;\quad \upsilon_1 + u_1 = u_2. \quad (3)$$

Подставив выражение (3) в (1), получим:

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1. \quad (4)$$

Найдем

$$u_2 = \upsilon_1 + u_1 = \upsilon_1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}. \qquad (5)$$

Кинетическая энергия первого шара до удара

$$E_{\kappa 1} = \frac{m_1\upsilon_1^{\,2}}{2}. \qquad (6)$$

Кинетическая энергия второго шара после удара

$$E'_{\kappa 2} = \frac{m_2 u_2^{\,2}}{2} = \frac{4m_1^{\,2}\, m_2\upsilon_1^{\,2}}{2\left(m_1 + m_2\right)^2}. \qquad (7)$$

Из уравнений (6), (7) найдем отношение

$$\frac{E'_{\kappa 2}}{E_{\kappa 1}} = \frac{4m_1 m_2}{\left(m_1 + m_2\right)^2}; \qquad (8)$$

а) пусть $m_1 = m_2$:

$$\frac{E'_{\kappa 2}}{E_{\kappa 1}} = \frac{4m_1 m_2}{\left(m_1 + m_2\right)^2} = \frac{4m_1^{\,2}}{4m_1^{\,2}} = 1; \qquad \left[\frac{E_{\kappa 2}}{E_{\kappa 1}}\right] = \frac{\text{Дж}}{\text{Дж}} = 1 \text{ – безразмерная величина.}$$

б) пусть $m_1 = 7m_2$:

$$\frac{E'_{\kappa 2}}{E_{\kappa 1}} = \frac{4m_1 m_2}{\left(m_1 + m_2\right)^2} = \frac{28}{68m_2^{\,2}}; \qquad \frac{E_{\kappa 2}}{E_{\kappa 1}} \approx 0{,}44.$$

Ответ: а) $\dfrac{E'_{\kappa 2}}{E_{\kappa 1}} = 1$; б) $\dfrac{E'_{\kappa 2}}{E_{\kappa 1}} = 0{,}44$.

Задача 1.53

На тележке, представляющей собой длинную доску с колесами на концах, стоит человек массой M = 70 кг. Определить скорость перемещения доски υ_∂ относительно земли, если человек будет двигаться вдоль нее со скоростью υ = 2 м/с (относительно доски). Масса доски m = 10 кг. Массой колес и сопротивлением при движении пренебречь.

Дано:	**Решение**
M = 70 кг	Поскольку человек движется по доске с постоянной скоростью, то перемещение доски относительно земли также будет равномерным. Скорость перемещения доски найдем, используя закон сохранения импульса:
m = 10 кг	
υ = 2 м/с	
υ_∂ – ?	

$$M\upsilon = (m+M)\upsilon_д,$$

откуда

$$\upsilon_д = \frac{M\upsilon}{m+M}; \quad [\upsilon_д] = \frac{кг \cdot \frac{м}{с}}{кг} = \frac{м}{с}; \quad \upsilon_д = \frac{70 \cdot 2}{10+70} = 1{,}75 \ \frac{м}{с}.$$

Ответ: $\upsilon_д = 1{,}75 \ \frac{м}{с}$.

Задача 1.54

Груз массой m = 4,5 кг, подвешенный на нити длиной l = 1,6 м, вращается в горизонтальной плоскости с частотой n = 36 об/мин. Найти угол α, образованный нитью с вертикалью, силу натяжения нити T и скорость вращения груза υ.

Дано:
m = 4,5 кг
l = 1,6 м
n = 0,6 с$^{-1}$

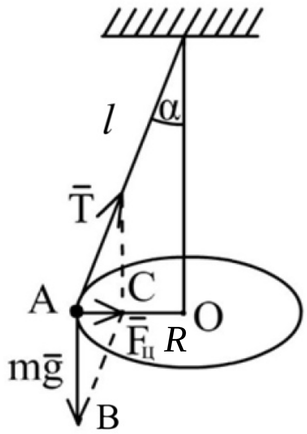
α; υ – ?

Решение

Груз движется по окружности с центром в точке O (см. рисунок). На груз действует сила $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$, направленная вдоль нити. Векторная сумма этих сил $\vec{F}_ц$ сообщает грузу центростремительное ускорение $a_ц = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R$,

$$\vec{F}_ц = m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}_ц, \qquad (1)$$

где R = AO – радиус окружности, которую описывает груз в горизонтальной плоскости, ω = $2\pi n$ – угловая скорость вращения груза.



Из рисунка найдем радиус:

$$R = l\sin\alpha.$$

Силу $F_ц$ выразим из треугольника ABC:

$$F_ц = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) получим:

$$4m\pi^2 n^2 l\sin\alpha = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

откуда

$$4\pi^2 n^2 l\cos\alpha = g; \quad \cos\alpha = \frac{g}{4\pi^2 n^2 l};$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{g}{4\pi^2 n^2 l}\right); \quad \left[\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{n}^2 l}\right] = \frac{\text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{м}} = 1;$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{9,81}{4 \cdot 3,14^2 \cdot 0,6^2 \cdot 1,6}\right) = 64°; \quad \alpha = 64.$$

Из треугольника ABC найдем силу натяжения нити:

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha}; \; [T] = \text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}; \; T = \frac{4,5 \cdot 9,8}{\cos 64°} = 103 \text{ Н}.$$

Линейная скорость груза

$$\upsilon = \omega R = 2\pi n l \sin\alpha; \; [\upsilon] = \frac{1}{\text{с}} \cdot \text{м} = \frac{\text{м}}{\text{с}}; \; \upsilon = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,6 \cdot 1,6 \cdot 0,8988 = 5,1 \; \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\alpha = 64°$; $T = 103$ Н; $\upsilon = 5,1 \; \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 1.55

Вокруг горизонтальной оси может свободно без трения вращаться легкий рычаг, плечи которого равны l_1 и l_2. На концах рычага укреплены грузы m_1 и m_2. Предоставленный самому себе рычаг переходит из горизонтального положения в вертикальное (см. рисунок). Какую скорость υ_2 будет иметь в нижней точке второй груз?

Дано:
$l_1;\; l_2;\; m_1;\; m_2$
$\upsilon_2 - ?$

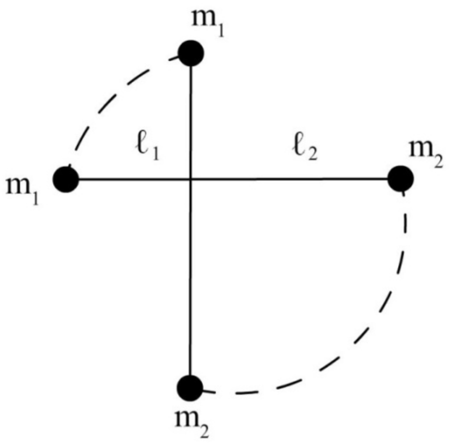
Решение

При решении воспользуемся законом сохранения механической энергии ($E_K + E_n = \text{cons}$) и тем фактом, что угловые скорости первого и второго тел при движении будут равны. За нулевой уровень потенциальной энергии возьмем нижнее положение второго груза. Энергия рычага в горизонтальном положении $E_{гор}$ должна быть равна энергии в вертикальном положении $E_{верт}$:

$$E_{гор} = E_{верт},$$

причем

$$E_{гор} = m_1 g l_2 + m_2 g l_2 = g l_2 (m_1 + m_2);$$



$$E_{верт} = \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} + m_1 g\left(l_1 + l_2\right).$$

Так как $\omega_1 = \omega_2$, то

$$\frac{\upsilon_1}{l_1} = \frac{\upsilon_2}{l_2}.$$

Тем самым переходим к системе

$$\begin{cases} g l_2\left(m_1 + m_2\right) = \dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \dfrac{m_2\upsilon_2^2}{2} + m_1 g\left(l_1 + l_2\right); \\ \dfrac{\upsilon_1}{l_1} = \dfrac{\upsilon_2}{l_2}. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим:

$$\upsilon_2 = l_2\sqrt{\frac{2\left(m_2 l_2 - m_1 l_1\right)g}{m_2 l_2^2 + m_1 l_1^2}}.$$

Ответ: $\upsilon_2 = l_2\sqrt{\dfrac{2\left(m_2 l_2 - m_1 l_1\right)g}{m_2 l_2^2 + m_1 l_1^2}}$.

Задача 1.56

На горизонтальной поверхности находится неподвижная, абсолютно гладкая полусфера радиусом R = 10 м. С ее верхней точки без начальной скорости соскальзывает малое тело. В некоторой точке оно отрывается и летит свободно. Определить время τ падения с момента отрыва до попадания на горизонтальную поверхность. Принять ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

Дано:	**Решение**
R = 10 м	На тело действуют сила тяжести $M\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$.
g = 10 м/с^2	
τ – ?	

Уравнение движения имеет вид

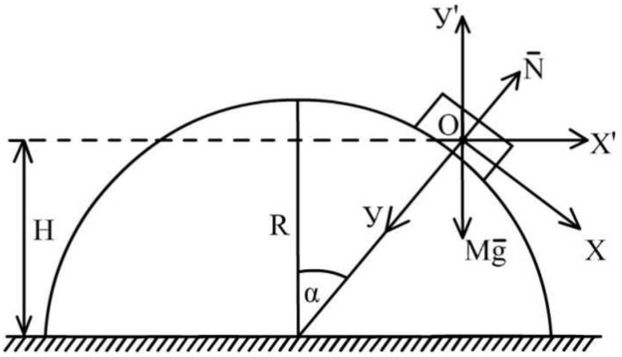
$$\vec{N} + M\vec{g} = M\vec{a}.$$

Выберем систему координат XOY (см. рисунок) и запишем это уравнение в проекции на ось Y:

$$Mg\cos\alpha - N = \frac{M\upsilon_0^2}{R}. \qquad (1)$$

Из физических соображений ясно, что в момент отрыва $\vec{N} = 0$. Следовательно, уравнение (1) приобретает вид

$$gR\cos\alpha = \upsilon_0^{\,2}. \qquad (2)$$



Для того чтобы составить второе уравнение, можно применить закон сохранения механической энергии $\left(E_к + E_п = \text{const}\right)$, так как силы трения при движении тела по полусфере отсутствуют,

$$MgR = MgH + \frac{M\upsilon_0^2}{2}. \qquad (3)$$

Из рисунка следует, что

$$H = R\cos\alpha. \qquad (4)$$

Решаем совместно уравнения (2) – (4):

$$2gR = 2gR\cos\alpha + gR\cos\alpha,$$

определим:

$$\cos\alpha = \frac{2}{3}. \qquad (5)$$

Подставив (5) в уравнение (2), получим скорость в момент отрыва:

$$\upsilon_0 = \sqrt{\frac{2gR}{3}}.$$

Определим время τ. Выберем новые направления координатных осей *X'OY'* и рассмотрим движение по оси *Y'*. Согласно формулам для равноускоренного движения получим:

$\upsilon_{0Y'} = \upsilon_0 \sin\alpha = \sqrt{\dfrac{10Rg}{27}}$ – составляющая начальной скорости вдоль *Y'*.

Высота отрыва от полусферы

$$H = \upsilon_{0y'}\,t + \frac{gt^2}{2} = \frac{2R}{3}.$$

Решая эту систему уравнений относительно *t*, получим:

$$t^2 + \frac{2\upsilon_{0y'}}{g}t - \frac{4R}{3g} = 0; \quad t_{1,2} = -\frac{\upsilon_{0y'}}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{\upsilon_{0y'}}{g}\right)^2 + \frac{4R}{3g}}.$$

Так как t – время движения и $t \geq 0$, решением задачи является корень:

$$t_1 = -\frac{\upsilon_{0y'}}{g} + \sqrt{\left(\frac{\upsilon_{0y'}}{g}\right)^2 + \frac{4R}{3g}}.$$

Таким образом,

$$\tau = -\sqrt{\frac{10R}{27g}} + \sqrt{\frac{46R}{27g}}; \quad [\tau] = \sqrt{\frac{\text{м}}{\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}} + \sqrt{\frac{\text{м}}{\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}} = \sqrt{\text{с}^2} = \text{с};$$

$$\tau = -\sqrt{\frac{10\cdot 10}{27\cdot 10}} + \sqrt{\frac{46\cdot 10}{27\cdot 10}} = 0{,}7 \text{ с}.$$

Ответ: $\tau = 0{,}7$ с.

Задача 1.57

Небольшое тело массой M лежит на вершине гладкой полусферы радиусом R. В тело попадает пуля массой m, летящая горизонтально со скоростью υ_0, и застревает в нем. Пренебрегая смещением тела во время удара, определить высоту h, на которой тело оторвется от поверхности полусферы. При какой скорости пули тело сразу оторвется от полусферы?

Дано:
M; m; R; υ_0.
h; υ_0' – ?

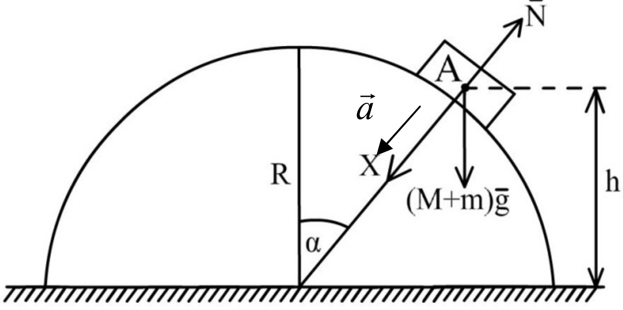
Решение

Здесь происходит неупругое взаимодействие, следовательно, чтобы определить скорость системы пуля – тело после удара, можно применить закон сохранения импульса:

$$m\upsilon_0 = (M+m)u. \tag{1}$$

Предположим, что отрыв происходит в точке A (см. рисунок). Принимая во внимание показанные на рисунке силы, запишем уравнение движения:

$$\vec{N} + (M+m)\vec{g} = (M+m)\vec{a}. \tag{2}$$



Напишем условие отрыва: $N = 0$. Воспользуемся законом сохранения механической энергии: полная механическая энергия системы пуля – тело после удара равна полной механической энергии этой системы в момент отрыва (трение отсутствует):

$$\frac{(M+m)u^2}{2}+(M+m)gR=\frac{(M+m)\upsilon^2}{2}+(M+m)gh. \qquad (3)$$

Из уравнения (1) определяем:

$$u=\frac{m\upsilon_0}{M+m}.$$

Чтобы от векторного уравнения (2) перейти к скалярным соотношениям, введем в соответствии с рисунком ось X вдоль радиуса полусферы:

$$X: \quad (M+m)g\cos\cos\alpha=(M+m)\frac{\upsilon^2}{R}. \qquad (4)$$

Как видно из рисунка, $h=R\cos\alpha$, следовательно, равенство (4) запишется следующим образом:

$$gh=\upsilon^2. \qquad (5)$$

Подставим (5) и (1) в (3) и определим высоту отрыва:

$$h=\frac{2R}{3}+\frac{1}{3g}\left(\frac{m\upsilon_0}{m+M}\right)^2. \qquad (6)$$

Чтобы определить скорость пули υ_0', при которой тело сразу же оторвется от полусферы, достаточно высоту отрыва h в уравнении (6) приравнять к радиусу R и решить уравнение:

$$R=\frac{2R}{3}+\frac{1}{3g}\left(\frac{m\upsilon_0'}{m+M}\right)^2.$$

Получим:

$$\upsilon_0'=\frac{M+m}{m}\sqrt{gR}.$$

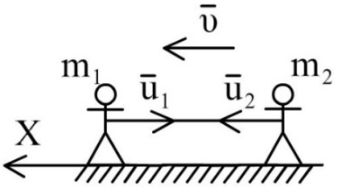
Ответ: $h=\frac{2R}{3}+\frac{1}{3g}\left(\frac{m\upsilon_0}{m+M}\right)^2$; $\upsilon_0'=\frac{M+m}{m}\sqrt{gR}$.

Задача 1.58

Двое спортсменов-фигуристов массами $m_1=70$ кг и $m_2=60$ кг, держась за концы длинного шнура, неподвижно стоят на льду. Один из них начинает укорачивать шнур, выбирая его со скоростью υ = 0,5 м/с. Найти скорости движения u_1 и u_2 фигуристов по льду. Трением пренебречь.

Дано:	**Решение**
$m_1 = 70$ кг	
$m_2 = 60$ кг	
υ = 0,5 м/с	
u_1, u_2 – ?	

Считая систему, состоящую из двух фигуристов, замкнутой, согласно закону сохранения импульса запишем в проекции на ось X (см. рисунок): $P_1 = P_2$, где $P_1 = 0$ − импульс системы в начальном состоянии, а P_2 − импульс системы после укорачивания шнура; т.к. $P_2 = m_2u_2 - m_1u_1$, то



$$m_2u_2 - m_1u_1 = 0. \qquad (1)$$

Скорость движения второго фигуриста в системе отсчета, связанной с первым, равна скорости укорачивания шнура.

Тогда скорость второго фигуриста в системе отсчета, связанной с Землей,

$$u_2 = \upsilon - u_1, \qquad \text{или} \qquad u_1 + u_2 = \upsilon. \qquad (2)$$

Решая систему двух уравнений

$$\begin{cases} m_2u_2 - m_1u_1 = 0; \\ u_1 + u_2 = \upsilon, \end{cases}$$

получим:

$$u_1 = \frac{m_2\upsilon}{m_1 + m_2}; \quad [u_1] = \frac{\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}}{\text{кг}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad u_1 = \frac{60 \cdot 0,5}{70 + 60} = \frac{30}{130} = 0,23\ \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$u_2 = \frac{m_1\upsilon}{m_1 + m_2}; \quad [u_2] = \frac{\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}}{\text{кг}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad u_2 = \frac{70 \cdot 0,5}{130} = \frac{35}{130} = 0,27\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $u_1 = 0,23\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; $u_2 = 0,27\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 1.59

Принимая, что масса Земли неизвестна, определить высоту h, на которой ускорение свободного падения g_1 будет в n = 3 раза меньше, чем ускорение свободного падения у поверхности Земли g. Радиус Земли $R_0 = 6,37 \cdot 10^3$ м.

Дано:

$g_1 = \dfrac{g}{n}$

$n = 3$

$R_0 = 6{,}37 \cdot 10^6$ м

h – ?

Решение

Если пренебречь суточным вращением Земли вокруг своей оси, то сила тяжести и сила гравитационного взаимодействия равны:

$$mg_1 = \frac{GmM}{(R_0+h)^2}, \qquad (1)$$

где M – масса Земли; m – масса тела; R_0 − радиус Земли; h – высота орбиты над поверхностью Земли; G – гравитационная постоянная.

Учитывая условие задачи, выражение (1) запишем в виде

$$\frac{g}{n} = \frac{GM}{\left(R_0+h\right)^2},$$

откуда

$$h = \sqrt{\frac{nGM}{g}} - R_0. \qquad (2)$$

Для тела, находящегося у поверхности Земли,

$$mg = G\frac{mM}{R_0{}^2}, \text{ откуда } GM = gR_0{}^2.$$

Подставив это значение в формулу (2), найдем искомую высоту:

$$h = R_0\left(\sqrt{n}-1\right); \quad [h] = \text{м};$$

$$h = 6{,}37\cdot 10^6\left(\sqrt{3}-1\right) = 6{,}37\cdot 10^6\left(1{,}73-1\right) = 4{,}65\cdot 10^6 \text{ м}.$$

Ответ: $h = 4{,}65\cdot 10^6$ м $= 4{,}65$ Мм.

Задача 1.60

Материальная точка массой m в некоторый момент времени находится в точке O на оси длинного тонкого стержня массой M и длиной l на расстоянии a от одного из его концов. Определить напряженность и потенциал гравитационного поля стержня в точке O, а также силу, действующую на материальную точку.

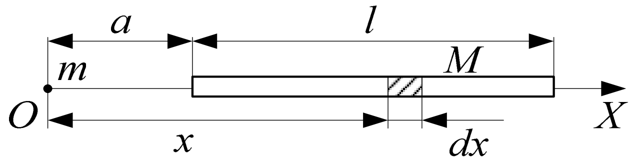
Дано:

m, M, a, l

g, φ, F – ?

Решение

Пусть ось стержня совпадает с осью OX (см. рисунок). Разобьем стержень на элементарные отрезки длиной dx, настолько малые, что каждый из них можно принять за материальную точку.



Найдем массу dM выделенного элемента:

$$dM = M\frac{dx}{l}.$$

Тогда модуль силы притяжения dF материальной точки элементом стержня dx можно определить по закону всемирного тяготения:

$$dF = G\frac{mdM}{x^2} = G\frac{mM}{l}\frac{dx}{x^2}. \tag{1}$$

Поделив выражение (1) на m, получим модуль напряженности гравитационного поля в точке O, создаваемой выделенным элементом стержня:

$$dg = \frac{dF}{m} = G\frac{M}{l}\frac{dx}{x^2}. \tag{2}$$

Направление вектора напряженности $d\vec{g}$ совпадает с направлением силы, действующей на материальную точку, т.е. $d\vec{g}$ направлено по оси OX. Так как от всех элементарных отрезков стержня вектора $d\vec{g}$ направлены в одну сторону, то модуль вектора напряженности поля $|\vec{g}|$ в точке O определяется интегрированием выражения (2):

$$g = G\frac{M}{l}\int_a^{a+l}\frac{dx}{x^2} = \frac{GM}{a(a+l)}; \tag{3}$$

$$[g] = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}\cdot\frac{\text{кг}}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{м}\cdot\text{кг}} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Потенциал гравитационного поля выделенного элемента в точке O

$$d\varphi = \frac{dg}{m} = -G\frac{dM}{x} = -G\frac{M}{l}\frac{dx}{x}. \tag{4}$$

Интегрируя (4), получим потенциал гравитационного поля, создаваемого стержнем в точке O:

$$\varphi = -G\frac{M}{l}\int_a^{a+l}\frac{dx}{x} = -G\frac{M}{l}\ln\left(1+\frac{l}{a}\right); \quad [\varphi] = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}\cdot\frac{\text{кг}}{\text{м}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\frac{\text{м}}{\text{кг}} = \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}.$$

Сила притяжения, действующая на материальную точку,

$$F = mg = \frac{GMm}{a(a+l)}; \quad F = \text{кг}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}$$

и направлена по оси OX к стержню.

Ответ: $g = \dfrac{GM}{a(a+l)}$ $\varphi = -G\dfrac{M}{l}\ln\left(1+\dfrac{l}{a}\right)$; $F = \dfrac{GMm}{a(a+l)}$.

Задача 1.61

Определить потенциал φ поля тяготения, создаваемого однородным стержнем длиной l = 2 м и линейной плотностью τ = 100 кг/м в точке O, находящейся на оси, проходящей через его середину и лежащей на расстоянии R = 1 м от стержня.

Дано:
l = 2 м
τ = 100 кг/м
R = 1 м
φ – ?

Решение

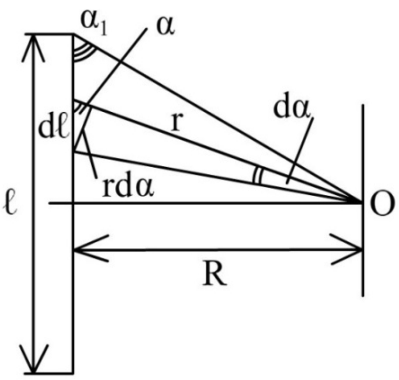
Потенциал $d\varphi$ гравитационного поля, создаваемого в точке O отрезком стержня малой длины dl,

$$d\varphi = -G\frac{dm}{r}, \qquad (1)$$

где G – гравитационная постоянная; $dm = \tau dl$ − масса отрезка dl; r – расстояние от отрезка dl до точки O.

Из рисунка следует, что

$$dl\sin\alpha = \tau dl \quad \text{и} \quad r = \frac{R}{\sin\alpha}.$$



Тогда

$$dm = \frac{\tau R}{\sin^2\alpha}d\alpha.$$

Подставив это выражение в формулу (1), получим:

$$d\varphi = -\frac{G\tau}{\sin\alpha}d\alpha.$$

Потенциал в точке O, создаваемый половиной стержня,

$$\varphi_1 = \int d\varphi = -\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{G\tau}{\sin\alpha}d\alpha, \qquad (2)$$

где согласно рисунку пределы изменения угла α – от $\alpha_1 = \alpha = \operatorname{arctg}\frac{2R}{l} = \frac{\pi}{4}$ до $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$. Точка O лежит на оси, проходящей через середину стержня, поэтому искомый потенциал, создаваемый однородным стержнем,

$$\varphi = -2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{G\tau}{\sin\alpha}d\alpha = -2G\tau\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -2G\tau\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right|;$$

$$[\varphi]=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}\cdot\frac{\text{кг}}{\text{м}}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\frac{\text{м}}{\text{кг}}=\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}\cdot\frac{\text{кг}}{\text{кг}}=\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}.$$

Подставляя числовые данные, находим: $\varphi=-21{,}5\cdot10^{-9}$ Дж/кг.

Ответ: $\varphi=-21{,}5$ нДж/кг.

Задача 1.62

Тело брошено вниз в безветренную погоду с высоты h с нулевой начальной скоростью и попадает на землю в точку с географической широтой φ = 50° северного полушария. Определить эту высоту h, если отклонение l тела от вертикали при его падении составляет 9 см.

Дано:
φ = 50°
$l=9\cdot10^{-2}$ м
$\upsilon_0=0$

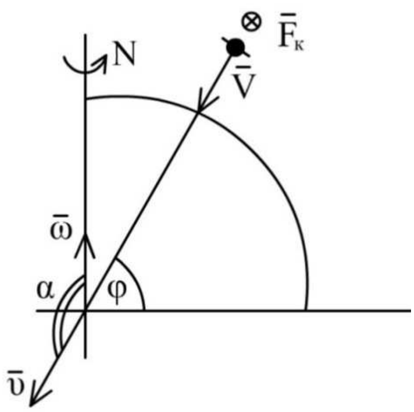
h – ?

Решение

Тело отклоняется от вертикали вследствие действия на него силы Кориолиса (см. рисунок)

$$\vec{F}_к=2m[\vec{\upsilon},\vec{\omega}], \qquad (1)$$

где m – масса тела; $\vec{\upsilon}$ – вектор скорости тела относительно Земли; $\vec{\omega}$ − вектор угловой скорости суточного вращения Земли.



Эта сила возникает вследствие суточного вращения Земли вокруг своей оси, т.е. из-за неинерциальности системы отсчета, связанной с Землей. Как следует из рисунка и анализа формулы (1), сила Кориолиса $\vec{F}_к$ направлена перпендикулярно к плоскости чертежа от нас, т.е. к востоку. В этом же направлении будет происходить отклонение тела.

Модуль силы Кориолиса

$$F_к=2m\upsilon\omega\sin\alpha, \qquad (2)$$

где α – угол между векторами $\vec{\upsilon}$ и $\vec{\omega}$.

Из рисунка следует, что α = 90° + φ, откуда $\sin\alpha=\cos\varphi$.

Скорость падающего тела направлена вдоль радиуса, $\upsilon = gt$ (t – время падения). Тогда сила Кориолиса (1) запишется в виде

$$F_к=2m\omega gt\cos\varphi.$$

Ускорение, сообщаемое телу силой Кориолиса и совпадающее с ней по направлению,

$$a_к=\frac{F_к}{m}=2\omega gt\cos\varphi.$$

Скорость тела, обусловленная действием силы Кориолиса,

$$\upsilon_к = \int_0^t a_к dt = \int_0^t 2\omega gt\cos\varphi dt = \omega gt^2 \cos\varphi .$$

Отклонение тела от вертикали

$$l = \int_0^t \upsilon_к dt = \int_0^t \omega gt^2 \cos\varphi dt = \frac{1}{3}\omega gt^3 \cos\varphi ,$$

откуда время падения

$$t = \sqrt[3]{\frac{3l}{\omega g\cos\varphi}} . \qquad (3)$$

Время падения t связано с высотой h соотношением

$$h = \frac{gt^2}{2} .$$

Учитывая формулу (3) и то, что $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (T = 24 ч – период суточного обращения Земли), найдем искомую высоту:

$$h = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9l^2 gT^2}{4\pi^2\cos^2\varphi}}; \quad [h] = \sqrt[3]{м^2 \cdot \frac{м}{с^2} \cdot с^2} = \sqrt[3]{м^3} = м ;$$

$$h = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9\left(9\cdot 10^{-2}\right)^2 9{,}81\cdot 86400^2}{4\cdot 3{,}14^2 \cdot 0{,}6428^2}} = 743 \text{ м}.$$

Ответ: h = 743 м.

Задача 1.63

Тело массой $m_2 = 0{,}6$ кг скользит по наклонной поверхности клина (см. рис., *а*) массой $m_1 = 2$ кг. Найти ускорение движения тела a_2 и клина a_1, а также силу N взаимодействия тела и клина и силу N_3 взаимодействия клина с Землей, если известно, что угол при основании клина α = 30°. Трением при движении пренебречь.

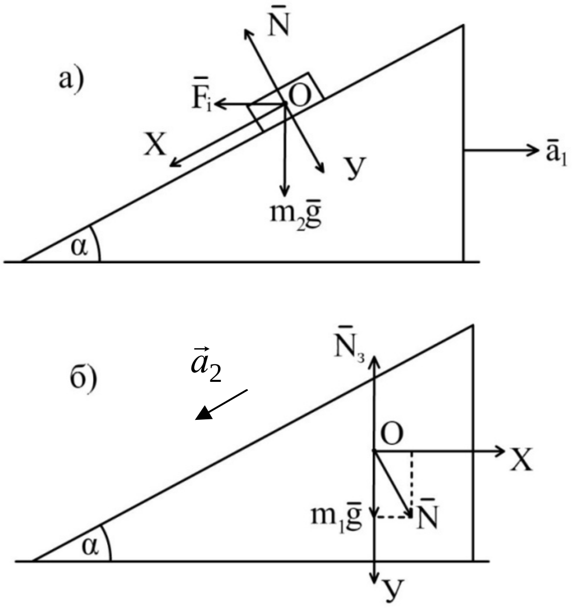
Дано:	**Решение**
$m_1 = 2$ кг $m_2 = 0{,}6$ кг $\alpha = 30°$.	В задаче рассматривается движение тела относительно клина и клина относительно Земли. Примем тело за материальную точку. Рассмотрим его движение относительно клина.
a_1; a_2; N; N_3 – ?	

Поскольку клин движется с ускорением, то система отсчета, связанная с клином, является неинерциальной (НИСО). В неинерциальных системах все законы классической механики справедливы в предположении, что наряду с силами взаимодействия тел действуют силы инерции, зависящие прежде всего от характера движения самой системы.

Второй закон Ньютона применительно к телу в НИСО запишем в виде:

$$m_2\vec{a}_2 = \sum\vec{F} + \vec{F}_i, \quad (1)$$

где $\sum\vec{F}$ – геометрическая сумма внешних сил, действующих на тело; $\vec{F}_i = -m_2\vec{a}_1$ – сила инерции; a_2 – ускорение движения тела, направленное вдоль оси OX (см. рис., *а*).



На рис., *а* показаны силы, действующие на тело, и направления осей координат. Запишем уравнение (1) в проекциях на координатные оси:

OX:

$$m_2 g\sin\alpha + m_2 a_1\cos\alpha = m_2 a_2 \quad (2)$$

OY:

$$-N - m_2 a_1\sin\alpha + m_2 g\cos\alpha = 0 \quad (3)$$

Получим систему двух уравнений с тремя неизвестными – a_1, a_2, N.

Рассмотрим движение клина относительно Земли. Эту систему отсчета можно считать инерциальной.

Направления осей координат и сил, действующих на клин, показаны на рис., *б*.

Здесь $\vec{N}_з$ – сила взаимодействия клина с Землей, $\vec{N}$ – результат взаимодействия тела и клина.

Все силы, действующие на клин, приложим в его центр масс, который движется как материальная точка. Запишем второй закон Ньютона для центра масс клина:

$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{N}_з + \vec{N}\ . \quad (4)$$

Уравнение (4) в проекциях на оси координат примет вид:

OX:

$$m_1 a_1 = N\sin\alpha; \quad (5)$$

OY:

$$0 = m_1 g + N\cos\alpha - N_з\ . \quad (6)$$

Решая систему уравнений (3) и (5), находим ускорение клина:

$$a_1 = \frac{g\sin\alpha\cos\alpha}{\dfrac{m_1}{m_2} + \sin^2\alpha}; \quad a_1 = \frac{9{,}81 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}866}{\dfrac{2}{0{,}6} + 0{,}5^2} = 1{,}2 \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Из уравнений (2) и (7) определяется ускорение движения тела:

$$a_2 = g\sin\alpha\left(\frac{1+\cos^2\alpha}{\dfrac{m_1}{m_2} + \sin^2\alpha}\right); \ a_2 = 9{,}81 \cdot 0{,}5\left(\frac{1+0{,}866^2}{\dfrac{2}{0{,}6} + 0{,}5^2}\right) = 6{,}1 \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Система уравнений (5) − (7) позволяет определить силы взаимодействия N и $N_з$:

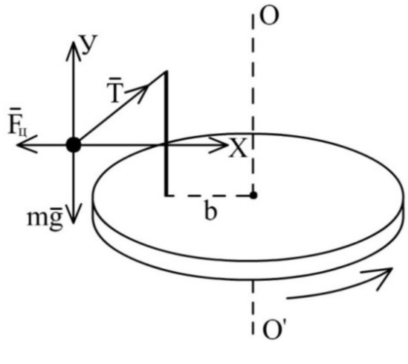
$$N = \frac{m_1 g\cos\alpha}{\dfrac{m_1}{m_2} + \sin^2\alpha}; \quad [N] = \text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}; \quad N = \frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}866}{\dfrac{2}{0{,}6} + 0{,}5^2} = 4{,}8 \ \text{Н}.$$

$$N_з = m_1 g\left(1 + \frac{\cos^2\alpha}{\dfrac{m_1}{m_2} + \sin^2\alpha}\right);$$

$$N_з = 2 \cdot 9{,}81\left(1 + \frac{0{,}866^2}{\dfrac{2}{0{,}6} + 0{,}5^2}\right) = 24{,}1 \ \text{Н}.$$

Ответ: $a_1 = 1{,}2 \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $a_2 = 6{,}1 \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $N = 4{,}8$ Н; $N_з = 24{,}1$ Н.

Задача 1.64



Вертикальный стержень укреплен на горизонтальном диске, вращающемся с частотой n = 0,8 $с^{-1}$. К вершине стержня привязан шарик на нити длиной l = 0,12 м (см. рисунок). Определить расстояние b от стержня до оси вращения, если угол α нити с вертикалью равен 37°.

Дано:	**Решение**
n = 0,8 $с^{-1}$	
l = 0,12 м	
α = 37°	
b – ?	

Движение шарика рассмотрим в неинерциальной системе отсчета, связанной с вращающимся диском. В этой системе отсчета на шарик действует сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}$ и центробежная сила инерции $\vec{F}_ц$, направленная по горизонтали от оси вращения диска.

Относительно системы отсчета, связанной с вращающимся диском, шарик покоится ($\vec{\alpha}' = 0$), и второй закон Ньютона с учетом центробежной силы инерции

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_ц = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) в проекции на вертикальные оси X и Y (см. рисунок) запишется в виде:

$$T\sin\alpha - \frac{m\upsilon^2}{R} = 0; \quad T\cos\alpha - mg = 0,$$

где $R = l\sin\alpha + b$; $-\dfrac{m\upsilon^2}{R} = \vec{F}_ц$ – центробежная сила инерции.

Из уравнения $g\,\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\upsilon^2}{R}$, учитывая, что $\upsilon = 2\pi nR$ и $R = l\sin\alpha + b$, запишем:

$$g\,\mathrm{tg}\,\alpha = 4\pi^2 n^2 (l\sin\alpha + b),$$

откуда искомое расстояние от стержня до оси вращения

$$b = \frac{g\,\mathrm{tg}\alpha}{4\pi^2 n^2} - l\sin\alpha, \qquad [b] = \frac{м \cdot с^2}{с^2} - м = м;$$

$$b = \frac{9{,}81 \cdot 0{,}7536}{4 \cdot (3{,}14)^2 \cdot 0{,}8^2} = 0{,}22 \text{ м}.$$

Ответ: b = 0,22 м.

Задача 1.65

Определить точку либрации Земли, т.е. точку пространства, в которой материальное тело массой m одинаково притягивается Землей и Луной.

Дано:	**Решение**
$F_1 = F_2$.	
r_1 – ?	

Допустим, что точка A, лежащая на линии соединения центров Земли и Луны, является либрационной точкой (см. рисунок).

Выпишем табличные данные:

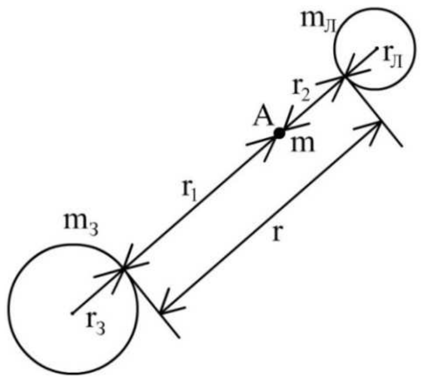
масса Земли $m_З = 5{,}976 \cdot 10^{24}$ кг;

масса Луны $m_Л = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ кг;

радиус Земли $r_З = 6{,}378 \cdot 10^{6}$ м;

радиус Луны $r_Л = 1{,}737 \cdot 10^{6}$ м;

среднее расстояние до Луны $r = 3{,}844 \cdot 10^{8}$ м.



Пусть r_1 – расстояние от поверхности Земли до искомой точки A; r_2 – расстояние от поверхности Луны до точки A.

Найдем силы притяжения: F_1 – между телом массой m и Землей и F_2 – между телом и Луной:

$$F_1 = G\frac{mm_З}{(r_1 + r_З)^2}; \qquad F_2 = G\frac{mm_Л}{(r_2 + r_Л)^2}.$$

По условию задачи модули этих сил равны, т.е. $F_1 = F_2$ или

$$G\frac{mm_З}{(r_1 + r_З)^2} = G\frac{mm_Л}{(r_2 + r_Л)^2}. \tag{1}$$

Расстояние от поверхности Земли до Луны $r = r_1 + r_2$, тогда

$$r_2 = r - r_1. \tag{2}$$

Подставив (2) в (1) и извлекая квадратный корень из обеих частей уравнения, получим:

$$\frac{\sqrt{m_З}}{r_1 + r_З} = \frac{\sqrt{m_Л}}{r - r_1 + r_Л},$$

откуда

$$r_1 + r_З = \sqrt{\frac{m_З}{m_Л}}\left(r - r_1 + r_Л\right). \tag{3}$$

Преобразуем выражение (3):

$$r_1\left(1 + \sqrt{\frac{m_З}{m_Л}}\right) = \sqrt{\frac{m_З}{m_Л}}(r + r_Л) - r_З; \tag{4}$$

$$1 + \sqrt{\frac{m_З}{m_Л}} = \frac{\sqrt{m_З} + \sqrt{m_Л}}{\sqrt{m_Л}}. \tag{5}$$

Тогда из (4) и (5) находим:

$$r_1 = \frac{\left(r + r_З\right)\sqrt{m_З} - r_З\sqrt{m_Л}}{\sqrt{m_З} + \sqrt{m_Л}}; \quad [r_1] = \frac{\sqrt{\text{кг}} \cdot \text{м} - \sqrt{\text{кг}} \cdot \text{м}}{\sqrt{\text{кг}} + \sqrt{\text{кг}}} = \text{м}.$$

Подставив табличные данные, получим, что либрационная точка находится на расстоянии r_1 = 3,4·10^8 м от поверхности Земли.

Ответ: r_1 = 3,4·10^8 м.

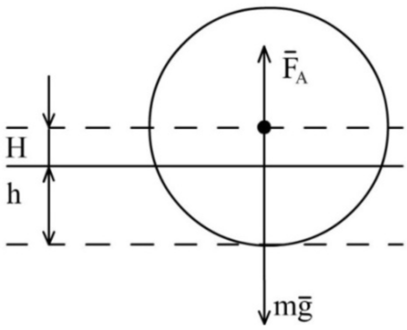
Задача 1.66

Деревянный шар (ρ = 500 $кг/м^3$) радиусом R = 5 см удерживается под водой внешней силой. При этом верхняя точка шара касается поверхности воды. Найти работу, которую произведет сила Архимеда, если отпустить шар.

Дано:
$R = 5\cdot 10^{-2}$ м
$\rho = 500$ кг/м^3;
$\rho_0 = 10^3$кг/м^3
A – ?

Решение

Рассмотрим свободно плавающий шар. Пусть центр шара находится на высоте H (см. рисунок) над поверхностью воды, высота шарового сегмента, погруженного в воду, h. Шар находится в равновесии, если сила тяжести mg, действующая на него, будет уравновешена силой Архимеда F_A, т.е. $mg = F_A$, где $m = \rho V = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$ – масса шара, $F_A = \rho_0 V_0 g$; V_0 — объем погруженной части шара.



Найдем объем V_0 шарового сегмента, погруженного в воду:

$$V_0 = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h),$$

следовательно, сила F_A

$$F_A = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)g\rho_0 = \frac{4}{3}\pi R^3 g\rho$$

или

$$4R^3 = \frac{\rho_0}{\rho}\ h^2(3R - h) = 2h^2(3R - h),$$

откуда

$$2R^3 = h^2(3R - h); \qquad 2R^3 - h^2(3R - h) = 0. \qquad (1)$$

Полученное кубическое уравнение (1) имеет единственный вещественный корень $h = R$. Следовательно, шар свободно плавает, будучи погружен в воду до своей диаметральной плоскости, при этом $H = 0$.

Если теперь погрузить шар на величину X, то сила Архимеда превысит действующую на шар силу тяжести и результирующая сила, выталкивающая шар из воды, будет равна

$$F(x) = F_A(x) - mg. \tag{2}$$

Сила $F(x)$ зависит от величины погружения X. Если отпустить погруженный в воду шар, то он начинает всплывать, величина X, а значит, и сила $F(x)$ уменьшается. По закону Архимеда сила

$$F_A(x) = \rho_0 V_1 g,$$

где $V_1 = \frac{1}{3}\pi\,(h+x)^2[3R - (h+x)]$ – объем шарового сегмента высотой $(h + x)$.

Тогда результирующая сила, выталкивающая шар,

$$F(x) = F_A(x) - mg = \rho_0 V_1 g - \rho_0 V_0 g = \rho_0 g\left(V_1 - V_0\right) = \rho_0 g V(x),$$

где

$$V(x) = \left(V_1 - V_0\right) = \frac{1}{3}\pi(h+x)^2[3R - (h+x)] - \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h). \tag{3}$$

Поскольку $h = R$, то выражение (3) примет вид:

$$V(x) = V_1 - V = \frac{1}{3}\pi(R+x)^2(2R - x) - \frac{2}{3}\pi R^3. \tag{4}$$

Следовательно, выталкивающая сила, действующая на шар,

$$F(x) = \rho_0 g V(x) = \frac{1}{3}\pi\rho_0 g[(R+x)^2(2R - x) - 2R^3] =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\rho_0 g[(R^2 + 2Rx + x^2)(2R - x) - 2R^3] = \frac{1}{3}\pi\rho_0 g(3R^2x - x^3).$$

Работа переменной силы $F(x)$ при изменении x от 0 до R

$$A = \int_0^R F(x)dx = \frac{1}{3}\pi\rho_0 g\int\limits_0^R\left(3R^2x - x^3\right)dx = \frac{1}{3}\pi\rho_0 g\left(\frac{3R^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^R =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\rho_0 g\left(\frac{3R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right) = \frac{5}{12}\,\pi\rho_0 g R^4;$$

$$[A] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\text{м}^4 = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\text{м} = \text{Н}\cdot\text{м} = \text{Дж}\,;$$

$$A = \frac{5}{12} \cdot 3{,}14 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^4 = 0{,}08 \text{ Дж}.$$

Ответ: A = 0,08 Дж.

Задача 1.67

Определить работу сил поля тяготения при перемещении тела массой m = 12 кг из точки 1, находящейся от центра Земли на расстоянии $r_1 = 4R_0$, в точку 2, находящуюся от ее центра на расстоянии $r_2 = 2R_0$, где R_0 – радиус Земли.

Дано:
m = 12 кг
$r_1 = 4R_0$
$r_2 = 2R_0$
$R_0 = 6{,}37 \cdot 10^6$ м

A_{12} – ?

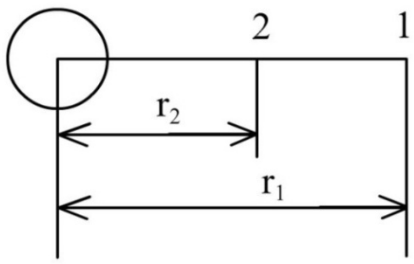
Решение

Поскольку силы тяготения консервативны, работа этих сил равна изменению потенциальной энергии системы «тело – Земля», взятому с обратным знаком:

$$A_{12} = -\Delta E_n = E_{n1} - E_{n2}, \qquad (1)$$

где E_{n1} и E_{n2} – соответственно потенциальные энергии системы «тело – Земля» в точках 1 и 2.

Так как $E_n = -\dfrac{GmM}{r}$ (M – масса Земли), имеем:



$$E_{n1} = -\frac{GmM}{4R_0} \quad \text{и} \quad E_{n2} = -\frac{GmM}{2R_0}$$

Подставив эти выражения в (1), получим:

$$A_{12} = \frac{GmM}{4R_0}.$$

Учитывая, что $g = \dfrac{GM}{R_0^2}$, придем к выражению для искомой работы:

$$A_{12} = \frac{mgR_0}{4}; \quad [A_{12}] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Дж};$$

$$A_{12} = \frac{12 \cdot 9{,}81 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6}{4} = 187 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

Ответ: $A_{12} = 187 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 187 \text{ МДж}.$

Задача 1.68

Определить числовое значение первой космической скорости υ_1 для Луны, если ускорение свободного падения у поверхности Луны g = 1,7 м/с^2, а радиус Луны R = 1,74·10^6 м.

Дано:	**Решение**
$R = 1{,}74\cdot10^6$ g = 1,7 м/с^2	
υ_1 – ?	

Искомая первая космическая скорость – горизонтально направленная минимальная скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло двигаться вокруг Луны по круговой орбите, т.е. превратиться в искусственный спутник Луны. На спутник, движущийся по круговой орбите радиусом r, действует сила тяготения Луны, сообщающая ему нормальное ускорение $\dfrac{\upsilon_1^2}{r}$.

По второму закону Ньютона

$$\frac{m\upsilon_1^2}{r} = \frac{GmM}{r^2},$$

где G – гравитационная постоянная; m – масса спутника; M – масса Луны.

Если спутник движется вблизи поверхности Луны, то $r \approx R$ (R – радиус Луны). Тогда из этого выражения получаем:

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}. \qquad (1)$$

Для тела, находящегося у поверхности Луны,

$$mg = \frac{GmM}{R^2}, \quad \text{откуда } GM = gR^2.$$

Подставляя это значение в формулу (1), получим искомую первую космическую скорость для Луны:

$$\upsilon_1 = \sqrt{gR}; \quad \upsilon_1 = \sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{9{,}81\cdot 1{,}74\cdot 10^6} = 1{,}72\cdot 10^3\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\upsilon_1 = 1{,}72\cdot 10^3\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 1.69

На краю тележки длиной l = 1,8 м, движущейся горизонтально с ускорением a = 2,1 м/с^2, положили брусок. Определить, за какое время t брусок соскользнет с доски, если коэффициент трения между бруском и тележкой μ = 0,4.

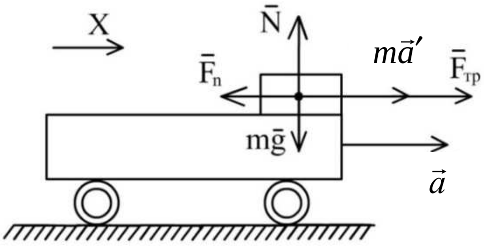
Дано:
l = 1,8 м
a = 2,1 м/с^2
μ = 0,4
t – ?

Решение

Движение рассмотрим в системе отсчета, связанной с тележкой. Эта система является неинерциальной (тележка движется с ускорением относительно Земли). В этой системе отсчета на брусок, кроме силы тяжести $m\vec{g}$, силы реакции опоры $\vec{N}$ и силы трения $\vec{F}_{тр}$, препятствующей относительному проскальзыванию тел, действует также сила инерции

$$\vec{F}_и = -m\vec{a},$$

где $\vec{a}$ – ускорение тележки.



Согласно второму закону Ньютона для бруска с учетом силы инерции можем записать:

$$m\vec{a}' = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} + \vec{F}_и, \qquad (1)$$

где a' – ускорение бруска относительно тележки.

В проекции на ось X (см. рисунок) уравнение (1) будет иметь вид:

$$ma' = F_{тр} - ma. \qquad (2)$$

Учитывая, что при проскальзывании бруска $F_{тр}$ = μN, из уравнения (2) следует, что

$$a' = \mu g - a. \qquad (3)$$

В системе отсчета, связанной с тележкой, брусок должен пройти путь $l = \dfrac{a't^2}{2}$.

Подставив сюда выражение (3), найдем искомый промежуток времени:

$$t = \sqrt{\frac{2l}{\mu g - a}}; \quad [t] = \sqrt{\frac{\text{м}}{\frac{\text{м}}{\text{с}^2} - \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}} = \sqrt{\text{с}^2} = \text{с}; \quad t = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}8}{0{,}4\cdot 9{,}81 - 2{,}1}} = 1{,}4\ \text{с}.$$

Ответ: t = 1,4 с.

Задача 1.70

Электровоз массой m = 142 т движется со скоростью υ = 79 км/ч на широте φ = 62° вдоль меридиана. Определить, чему равна горизонтальная составляющая силы давления на рельсы F.

Дано:	**Решение**
$m = 142 \cdot 10^3$ кг	Ввиду вращения Земли вокруг своей оси система отсчета, связанная с Землей, является неинерциальной. В этой системе отсчета на тело действует центробежная сила инерции $\vec{F}_ц$ и сила Кориолиса $\vec{F}_к$.
υ = 21,9 м/с	
φ = 62°	
F – ?	

Центробежная сила инерции

$$\vec{F}_ц = m\omega^2\vec{r},$$

где ω – угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси; $\vec{r}$ − радиус вращения точки Земли, в которой находится тело (см. рисунок).

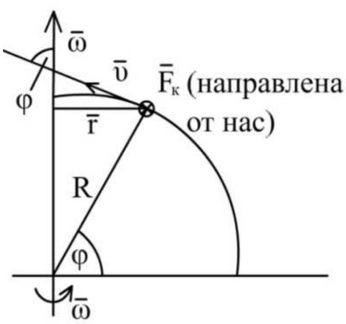
Центробежная сила направлена вдоль $\vec{r}$ и не оказывает бокового (горизонтального) давления на рельсы.

Сила Кориолиса

$$F_к = 2m\left[\vec{\upsilon}, \vec{\omega}\right], \qquad (1)$$

где $\vec{\upsilon}$ − вектор скорости тела относительно Земли; $\vec{\omega}$ − вектор угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси.

Как следует из рисунка и анализа формулы (1), сила Кориолиса направлена по горизонтали (по касательной к поверхности Земли) перпендикулярно к $\vec{\upsilon}$ (перпендикулярно к плоскости чертежа от нас) и оказывает, таким образом, боковое давление на правый рельс по движению поезда.



Модуль силы Кориолиса

$$F_к = 2m\upsilon\omega\sin\varphi,$$

где φ – угол (см. рисунок) между $\vec{\upsilon}$ и $\vec{\omega}$ (равен широте φ).

Учитывая, что $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ (T = 24 ч – период суточного обращения Земли), найдем искомую силу давления на рельсы, которая, как следует из вышерассмотренного, обусловлена только силой Кориолиса:

$$F = \frac{4\pi m\upsilon\sin\alpha}{T}; \quad [F] = \frac{кг \cdot \frac{м}{с}}{с} = \frac{кг \cdot м}{с^2} = Н;$$

$$F = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 142 \cdot 10^3 \cdot 21{,}9 \cdot 0{,}8829}{24 \cdot 3600} = 399 \text{ Н}.$$

Ответ: $F = 399$ Н.

1.3. Механика твердого тела
Основные теоретические сведения

Момент силы относительно неподвижной точки

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right],$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из этой точки в точку приложения силы $\vec{F}$.

Момент силы относительно неподвижной оси Z

$$M_z = \left[\vec{r}, \vec{F}\right].$$

Модуль момента силы

$$M = Fl,$$

где l – плечо силы (кратчайшее расстояние между линией действия силы и осью вращения).

Момент инерции материальной точки

$$J = mr^2,$$

где m – масса точки; r – расстояние до оси вращения.

Момент инерции системы (тела)

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2,$$

где r_i – расстояние материальной точки массой m_i до оси вращения.

Ниже приведены моменты инерции некоторых однородных тел массой m правильной геометрической формы.

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр радиусом R	Ось симметрии	mR^2
Сплошной цилиндр или диск радиусом R	То же	$\frac{1}{2}mR^2$
Прямой тонкостенный стержень длиной l	Ось перпендикулярна к стержню и проходит через его середину	$\frac{1}{12}ml^2$
То же	Ось перпендикулярна к стержню и проходит через его конец	$\frac{1}{3}ml^2$
Шар радиусом R	Ось проходит через центр шара	$\frac{2}{5}mR^2$

В случае непрерывного распределения масс (сплошного однородного твердого тела)

$$J = \oint_m r^2 dm = \rho \oint_V r^2 dV ,$$

где ρ – плотность тела; V – его объем.

Теорема Штейнера

$$J = J_c + ma^2,$$

где J_c – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс; J – момент инерции относительно параллельной оси, отстоящей от первой на расстоянии a; m – масса вращающегося тела.

Момент импульса материальной точки относительно неподвижной точки

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{\upsilon}].$$

Момент импульса (момент количества движения) твердого тела относительно неподвижной оси вращения

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i r_i = J_z \vec{\omega}_z ,$$

где r_i – расстояние от оси z до отдельной частицы тела; $m_i \upsilon_i$ – импульс этой частицы; J_z – момент инерции тела относительно оси Z; $\vec{\omega}_z$ – угловая скорость вращения.

Закон сохранения момента импульса (момента количества движения) для замкнутой системы

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \text{const}.$$

Для двух взаимодействующих тел закон сохранения момента импульса

$$J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = J_1'\omega_1' + J_2'\omega_2',$$

где J_1, J_2, ω_1, ω_2 – моменты инерции и угловые скорости тел до взаимодействия; J_1', J_2', ω_2', ω_2' – те же величины после взаимодействия.

Основное уравнение (закон) динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}; \qquad M_z = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon,$$

где ε – угловое ускорение; J_z – момент инерции тела относительно оси Z.

Элементарная работа при вращении тела

$$dA = M_z d\varphi,$$

где $d\varphi$ – угол поворота тела; M_z – момент силы относительно оси z.

Работа внешних сил при повороте твердого тела на конечный угол φ

$$A = \int_0^{\varphi} M_z d\varphi.$$

Если M_z = const, то работа

$$A = M_z \varphi.$$

Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси Z,

$$W_{Kвр} = \frac{J_z \omega^2}{2},$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси Z; ω – его угловая скорость.

Кинетическая энергия тела, катящегося по плоскости без скольжения,

$$W_K = \frac{1}{2} m\upsilon_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2,$$

где m – масса тела; υ_c – скорость центра масс тела; J_c – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс; ω – угловая скорость тела.

Напряжение при упругой деформации тела

$$\sigma = \frac{F}{S},$$

где F – растягивающая (сжимающая) сила; S – площадь поперечного сечения тела.

Относительное продольное растяжение (сжатие)

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l},$$

где Δl – изменение длины тела при растяжении (сжатии); l – длина тела до деформации.

Относительное поперечное растяжение (сжатие)

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d},$$

где Δd – изменение диаметра стержня при растяжении (сжатии); d – диаметр стержня.

Связь между относительным поперечным сжатием (растяжением) ε' и относительным продольным растяжением (сжатием) ε:

$$\varepsilon' = \mu\varepsilon,$$

где μ – коэффициент Пуассона.

Закон Гука для продольного растяжения (сжатия)

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где E – модуль Юнга.

Потенциальная энергия упругорастянутого (сжатого) тела

$$W_{\Pi} = \int_0^{\Delta l} F dx = \frac{1}{2}\frac{ES}{l}(\Delta l)^2 = \frac{E\varepsilon^2}{2}V,$$

где V – объем тела.

Примеры решения задач

Задача 1.71

Зависимость угла поворота от времени для точки, лежащей на ободе колеса радиусом R, задается уравнением $\varphi = t^3 + 0{,}5t^2 + 2t + 1$. К концу третьей секунды эта точка получила нормальное ускорение, равное 153 м/с^2. Определить радиус колеса.

Дано:
$\varphi = t^3 + 0{,}5t^2 + 2t + 1$
$t = 3$ с
$a_n = 153$ м/с^2

R – ?

Решение

Для определения радиуса колеса воспользуемся формулой связи нормального ускорения с угловой скоростью:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R,$$

отсюда

$$R = \frac{a_n}{\omega^2}.$$

Угловую скорость найдем как первую производную от угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 3t^2 + t + 2.$$

Численное значение угловой скорости в конце третьей секунды найдем, подставив в полученное уравнение для ω время $t = 3$ с:

$$\omega = (2 + 3 + 3 \cdot 9) = 32 \text{ (1/с)}.$$

Радиус колеса

$$R = \frac{a_n}{\omega^2}; \quad [R] = \frac{\text{м}/\text{с}^2}{1/\text{с}^2} = \text{м}; \quad R = \frac{153}{32^2} = 0{,}15 \text{ м}.$$

Ответ: $R = 0{,}15$ м.

Задача 1.72

Маховик массой 4 кг свободно вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр, делая 720 об/мин. Массу маховика можно считать распределенной по его ободу радиусом 40 см. Через 30 с под действием тормозящего момента маховик остановился. Найти тормозящий момент и число оборотов, которое делает маховик до полной остановки.

Дано:

$\omega = 0$

$m = 4$ кг

$\Delta t = 30$ с

$R = 0{,}4$ м

$n = 12$ с$^{-}$

M, N – ?

Решение

Для определения тормозящего момента M нужно применить основное уравнение динамики вращательного движения:

$$J\Delta\omega = M\Delta t, \qquad (1)$$

где J – момент инерции маховика относительно оси, проходящей через центр масс; $\Delta\omega$ – изменение угловой скорости за время Δt, причем $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$, где ω – конечная угловая скорость, а ω_0 – начальная; M – тормозящий момент сил, действующих на тело.

По условию задачи $\Delta\omega = \omega_0$, так как конечная угловая скорость $\omega = 0$. Выразим начальную угловую скорость ω_0 через число оборотов маховика n в единицу времени, тогда

$$\omega_0 = 2\pi n \quad \text{и} \quad \Delta\omega = 2\pi n.$$

Момент инерции маховика $J = mR^2$, где m – масса маховика, а R – его радиус.

Зная все величины, можно определить тормозящий момент:

$$mR^2 \cdot 2\pi n = M\Delta t,$$

откуда

$$M = \frac{2\pi n \cdot mR^2}{\Delta t};$$

$$[M] = \frac{\frac{1}{\text{с}} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Н} \cdot \text{м};$$

$$M = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 12 \cdot 4 \cdot 0{,}4^2}{30} = 1{,}61 \text{ нм}.$$

Угол поворота (угловой путь φ) за время вращения маховика до остановки может быть определен по формуле для равнозамедленного вращения:

$$\varphi = \omega_0 \Delta t - \frac{\varepsilon \Delta t^2}{2}, \qquad (2)$$

где ε – угловое ускорение.

По условию задачи

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon\Delta t; \quad \omega = 0; \quad \omega_0 = \varepsilon\Delta t.$$

Тогда выражение (2) может быть записано так:

$$\varphi = \omega_0 \Delta t - \frac{\omega_0 \Delta t}{2} = \frac{\omega_0 \Delta t}{2}. \qquad (3)$$

Формула (3) может быть также получена по значению средней угловой скорости. Выразив значение φ через число полных оборотов N и ω_0 через число оборотов маховика n в единицу времени, найдем:

$$\varphi = 2\pi N; \quad \omega_0 = 2\pi n.$$

Отсюда определим число полных оборотов N:

$$\varphi = \frac{\omega_0 \Delta t}{2};$$

$$2\pi N = \frac{2\pi n \Delta t}{2};$$

$$N = \frac{n \Delta t}{2}.$$

$$[N] = 1/\text{с}\cdot\text{с} = 1; \quad N = \frac{12 \cdot 30}{2} = 180.$$

Ответ: $M = 1{,}61$ Н·м; $N = 180$.

Задача 1.73

Однородный диск, имеющий вес $P = 124$ Н, вращается с постоянным угловым ускорением, и его движение описывается уравнением $\varphi = 30t^2 + 2t + 1$. Диск вращается под действием постоянной касательной тангенциальной силы $F_\tau = 90{,}2$ Н, приложенной к ободу диска. Определить момент сил трения $M_{тр}$, действующих на диск при вращении. Радиус диска $R = 0{,}15$ м.

Дано:
$P = 124$ Н
$\varphi = 30t^2 + 2t + 1$
$F_\tau = 90{,}2$ Н
$R = 0{,}15$ м

$M_{тр}$ – ?

Решение

Для нахождения $M_{тр}$ используем второй закон Ньютона для вращательного движения. На диск при вращении действует две силы: движущая сила F_τ и сила трения $F_{тр}$. Результирующий момент сил, под действием которого вращается диск, равен

$$M = F_\tau R - M_{тр}.$$

С другой стороны, согласно основному закону динамики вращательного движения

$$M = J\varepsilon,$$

где J – момент инерции диска; $J = \dfrac{mR^2}{2}$; ε – угловое ускорение, приобретаемое диском под действием результирующего момента сил M.

Искомый момент сил трения найдем, приравняв друг к другу два полученных выражения для *M*.

Значение ε найдем из уравнения движения, взяв вторую производную по времени от φ:

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 60\ \text{с}^{-2}.$$

Масса диска

$$m = \frac{P}{g} = \frac{124}{9{,}81} = 12{,}64\ \text{кг}.$$

Окончательно

$$M_{тр} = F_\tau R - \frac{mR^2}{2}\varepsilon.$$

$$[M_{тр}] = \text{Н·м} - \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Н·м} - \text{Н·м} = \text{Н·м}.$$

$$M_{тр} = 90{,}2\cdot 0{,}15 - \frac{12{,}7\cdot 0{,}0225}{2}\cdot 60 = 5\ \text{Н·м}.$$

Ответ: $M_{тр} = 5$ Н·м.

Задача 1.74

Найти момент инерции *J* прямоугольника, сделанного из проволоки, со сторонами $a = 20$ см и $b = 10$ см относительно оси, лежащей в плоскости прямоугольника и проходящей через середины больших сторон. Масса прямоугольника $m_0 = 0{,}3$ кг.

Дано:
$a = 0{,}2$ м
$b = 0{,}1$ м
$m_0 = 0{,}3$ кг

J – ?

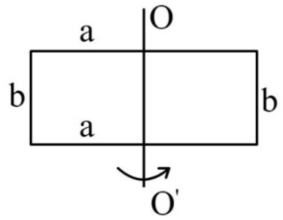
Решение

Момент инерции прямоугольника равен сумме моментов инерции его сторон. С учетом симметрии фигуры (см. рисунок) можно записать:

$$J = 2\,(J_a + J_b), \qquad (1)$$

где J_a и J_b – моменты инерции сторон *a* и *b* прямоугольника соответственно.

Определим J_a. Момент инерции стержня массой *m* и длиной *l* относительно оси, проходящей через центр инерции стержня перпендикулярно к нему, найдем по формуле



$$J = \frac{ml^2}{12}.$$

Так как на единицу длины прямоугольника приходится масса $\dfrac{m_0}{2\,(a+b)}$, то масса стороны a равна

$$m_a = \frac{m_0 a}{2\,(a+b)},$$

а ее момент инерции

$$J_a = \frac{m_0 a^3}{24\,(a+b)}. \qquad (2)$$

Определим J_b. Момент инерции стержня относительно оси, совпадающей с осью стержня, равен нулю. Согласно теореме Штейнера момент инерции стержня длиной l и массой m относительно оси, параллельной стержню и расположенной на расстоянии r от стержня,

$$J = mr^2.$$

С учетом того, что масса стороны b

$$m_b = \frac{m_0 b}{2\,(a+b)},$$

а расстояние $r = a/2$, запишем:

$$J_b = \frac{m_0 b a^2}{8\,(a+b)}. \qquad (3)$$

Подставляя выражения (2) и (3) в (1), получим:

$$J = 2\left[\frac{m_0 a^3}{24\,(a+b)} + \frac{m_0 b a^2}{8\,(a+b)}\right] = \frac{m_0 a^2}{4\,(a+b)}\left(\frac{a}{3} + b\right);$$

$$[J] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{м}}\cdot\text{м} = \text{кг}\cdot\text{м}^2; \quad J = \frac{0,3\cdot 0,2^2}{4(0,2+0,1)}\cdot\left(\frac{0,2}{3}+0,1\right) = 1,67\cdot 10^{-3}\,\text{кг}\cdot\text{м}^2.$$

Ответ: $J = 1,67\cdot 10^{-3}\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$.

Задача 1.75

К стержню длиной l = 0,5 м и массой m = 0,3 кг приварен цилиндр массой M = 1,2 кг радиусом R = 0,25 м (см. рисунок). Определить момент инерции J системы относительно оси OO', проходящей через незакрепленный конец стержня параллельно образующей цилиндра.

Дано:
l = 0,5 м
m = 0,3 кг
M = 1,2 кг
R = 0,25 м

J – ?

Решение

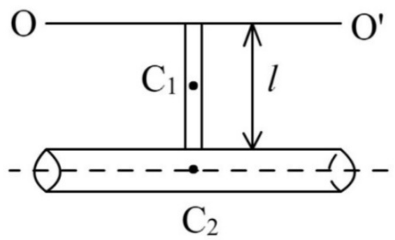
Общий момент инерции J рассматриваемой системы относительно оси OO' равен сумме моментов инерции стержня J_1 и цилиндра J_2:

$$J = J_1 + J_2. \qquad (1)$$

Для определения J_1 и J_2 следует воспользоваться теоремой Штейнера:

$$J = J_c + md^2, \qquad (2)$$

где J_c – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс; J – момент инерции относительно параллельной оси, отстоящей от первой на расстоянии d; m – масса тела.



Моменты инерции стержня и цилиндра, согласно формуле (2),

$$J_1 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}; \qquad (3)$$

$$J_2 = \frac{MR^2}{2} + M(R+l)^2. \qquad (4)$$

Подставив выражения (3) и (4) в формулу (1), найдем искомый момент инерции:

$$J = \frac{ml^2}{3} + \frac{MR^2}{2} + M(R+l)^2;$$

$$[J] = \text{кг·м}^2 + \text{кг·м}^2 + \text{кг·м}^2 = \text{кг·м}^2;$$

$$J = \frac{0,3 \cdot 0,5^2}{3} + \frac{1,2 \cdot 0,25^2}{2} + 1,2\ (0,25 + 0,5)^2 = 0,738\ \text{кг} \cdot \text{м}^2.$$

Ответ: J = 0,738 кг·м^2.

Задача 1.76

Определить момент инерции J однородной прямоугольной пластинки массой 500 г со сторонами a = 20 см и b = 30 см относительно оси, проходящей через геометрический центр пластинки параллельно большей ее стороне.

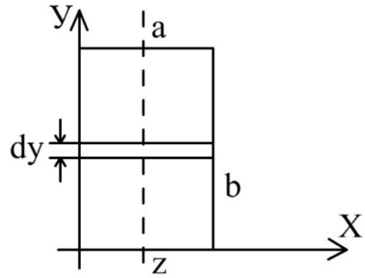
Дано:
a = 0,2 м
b = 0,3 м
m = 0,5 кг

J – ?

Решение

Согласно условию задачи ось Y проходит параллельно стороне b (см. рисунок). Мысленно выделим тонкую полоску шириной dY. Эту полоску можно считать тонким стержнем длиной a.

Тогда, с учетом того, что масса полоски $dm = \rho ahdy$, ее момент инерции



$$dJ = \frac{a^2}{12}dm = \frac{\rho ha^3}{12}dy,$$

где ρ – плотность пластинки; h – толщина пластинки.

Искомый момент инерции пластинки

$$J = \int dJ = \int_0^b \frac{\rho ha^3}{12}dy = \frac{\rho ha^3 b}{12} = \frac{ma^2}{12},$$

где m – масса всей пластинки, $m = \rho abh$.

$$J = \frac{0,5 \cdot 0,2^2}{12} = 1,67 \cdot 10^{-3}\ \text{кг}\cdot\text{м}^2.$$

Ответ: $J = 1,67 \cdot 10^{-3}$ кг·м^2.

Задача 1.77

Найти момент инерции обруча радиусом $R = 30$ см и массой $m = 200$ г относительно оси, проходящей через его центр и лежащей в плоскости обруча.

Дано:
$R = 0,3$ м
$m = 0,2$ кг
J – ?

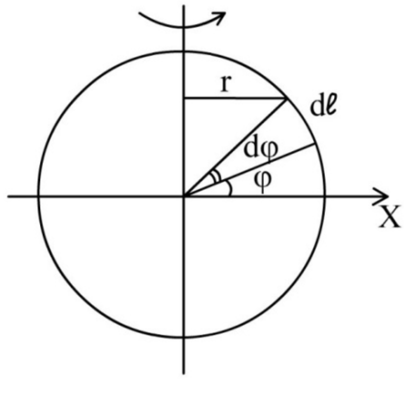
Решение

Момент инерции однородного тела находится по формуле

$$J = \int_m r^2 dm,$$

где r – расстояние от выбранной точки до оси вращения.

Выделим на обруче элемент длиной dl (см. рисунок) массой $dm = \frac{m}{2\pi R}dl$.



Положение элемента dl относительно центра обруча можно определить углом φ и радиус-вектором $\vec{r}$. При этом $dl = Rd\varphi$, $r = R\cos\varphi$.

Тогда

$$dJ = (R\cos\varphi)^2 \frac{m}{2\pi R} Rd\varphi. \qquad (1)$$

Для нахождения момента инерции всего обруча выражение (1) можно проинтегрировать от $\varphi_1 = -\dfrac{\pi}{2}$ до $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}$, а полученный результат удвоить:

$$J = \frac{2m}{2\pi R}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} R^3\cos^2\varphi d\varphi = \frac{2mR^2}{2\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\varphi d\varphi = \frac{mR^2}{\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= \frac{mR^2}{2\pi}\left[\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi + \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos 2\varphi d\varphi\right] = \frac{mR^2}{2\pi}\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{mR^2}{2\pi}(\pi + \sin\pi) = \frac{mR^2}{2};$$

$$[J] = \text{кг·м}^2.$$

$$J = \frac{0{,}2\cdot 0{,}3^2}{2} = 9\cdot 10^{-3}\text{кг}\cdot\text{м}^2.$$

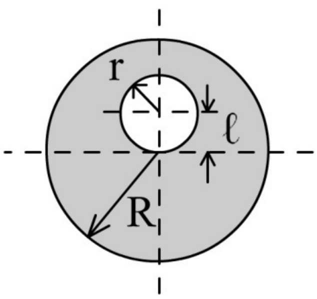
Ответ: $J = 9\cdot10^{-3}$ кг·м^2.

Задача 1.78

Найти момент инерции однородного диска массой m_0 = 1 кг и радиусом R = 0,5 м относительно оси, проходящей через центр диска перпендикулярно к его плоскости, если в диске вырезано отверстие радиусом r = 0,1 м, центр которого находится на расстоянии l = 10 см от оси диска.

Дано:
m_0 = 1 кг
R = 0,5 м
r = 0,1 м
l = 0,1 м

J – ?



Решение

Момент инерции сплошного диска относительно оси, проходящей через его центр инерции,

$$J_0 = \frac{1}{2}mR^2. \quad (1)$$

Масса сплошного диска

$$m_0 = \rho V = \rho\pi R^2 h, \quad (2)$$

где ρ – плотность материала; h – высота диска; V – объем диска.

Из выражения (2) найдем плотность:

$$\rho = \frac{m_0}{\pi R^2 h}. \quad (3)$$

Масса вырезанного диска

$$m = \rho\pi r^2 h = \frac{m_0 r^2 h\pi}{\pi R^2 h} = m_0 \frac{r^2}{R^2}.$$

Момент инерции вырезанного диска относительно оси, проходящей через его центр инерции,

$$J_в = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{m_0 r^4}{2R^2}. \qquad (4)$$

Момент инерции вырезанного диска относительно центра сплошного диска определяется по теореме Штейнера:

$$J' = J_в + ml^2 = \frac{m_0 r^4}{2R^2} + ml^2 = \frac{m_0 r^4}{2R^2} + \frac{m_0 r^2}{R^2} l = \frac{m_0 r^2}{R^2}\left(\frac{r^2}{2} + l^2\right). \qquad (5)$$

Искомый момент инерции найдем из уравнений (1), (5):

$$J = J_0 - J' = \frac{1}{2} m_0 R^2 - \frac{m_0 r^2}{R^2}\left(\frac{r^2}{2} + l^2\right) = \frac{m_0}{2R^2}\left(R^4 - r^4 - r^2 l^2\right);$$

$$[J] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^2} \cdot \text{м}^4 = \text{кг} \cdot \text{м}^2.$$

$$J = \frac{1}{2 \cdot 0{,}5}\left(0{,}5^4 - 0{,}1^4 - 0{,}1^2 \cdot 0{,}1^2\right) = 12{,}5 \cdot 10^{-2} \text{кг} \cdot \text{м}^2.$$

Ответ: $J = 12{,}5 \cdot 10^{-2}$ кг·м^2.

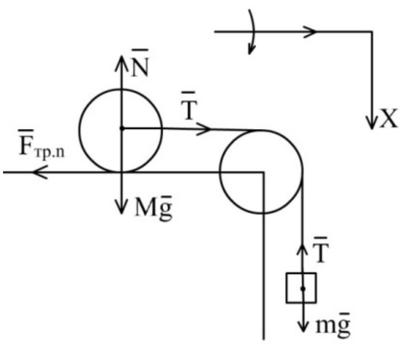
Задача 1.79

Система, состоящая из цилиндрического катка радиусом R и гири, связанных нитью, перекинутой через блок, под действием силы тяжести гири приходит в движение из состояния покоя. Определить ускорение $\vec{a}$ центра инерции катка и силу натяжения нити $\vec{T}$. Какую скорость $\vec{\upsilon}$ приобретет гиря, если она спустится с высоты h? Масса цилиндра M, масса гири m, массой блока пренебречь. Считать, что цилиндр катится по горизонтальной поверхности без скольжения. Трением качения пренебречь.

Дано:
R; M; m; h
a; T; υ – ?

Решение

Катящийся цилиндр участвует в двух движениях: вращается вокруг оси и движется поступательно со скоростью оси. На каток действуют четыре силы (см. рисунок): сила натяжения нити $\vec{T}$, сила тяжести $M\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения покоя $\vec{F}_{тр.п}$.



Сила трения покоя обусловлена тем, что каток не скользит, а катится по плоскости, в то время как первые три силы, проходящие через ось, не могли бы вызвать вращение тела. Действие силы $\vec{F}_{тр.п}$ не связано с трением качения. Она проявляется как сила реакции опоры, противодействующая возникновению скольжения катка по плоскости. При исчезновении силы натяжения нити $\vec{T}$ исчезнет и сила $\vec{F}_{тр.п}$. Выберем положительные направления оси X и угла поворота. Для поступательного движения на основании закона, описывающего движение твердого тела, получим:

$$T - F_{тр.п} = Ma. \qquad (1)$$

Так как вращающий момент относительно оси цилиндра создает лишь сила трения, то согласно основному уравнению динамики вращательного движения твердого тела имеем:

$$F_{тр.п}R = J\varepsilon. \qquad (2)$$

Поскольку каток катится без проскальзывания,

$$\varepsilon = \frac{a}{R}.$$

Известно, что момент инерции однородного цилиндра

$$J = \frac{MR^2}{2}.$$

Применим второй закон Ньютона для гири, ускорение которой равно ускорению центра инерции катка:

$$mg - T = ma. \qquad (3)$$

Решая систему (1) – (3), найдем неизвестные величины a и T:

$$a = \frac{2mg}{3M + 2m};$$

$$T = \frac{3Mmg}{3M + 2m}.$$

Зная ускорение гири, вычислим искомую скорость υ по формуле скорости равноускоренного движения:

$$\upsilon = \sqrt{2ah} = 2\sqrt{\frac{mgh}{3M + 2m}}.$$

Ответ: $a = \dfrac{2mg}{3M + 2m}$; $T = \dfrac{3Mmg}{3M + 2m}$; $\upsilon = 2\sqrt{\dfrac{mgh}{3M + 2m}}$.

Задача 1.80

На однородный сплошной цилиндрический вал радиусом R = 20 см намотана невесомая нить, к концу которой подвешен груз массой m = 2 кг. Груз, разматывая нить, опускается с ускорением a = 1 м/с^2. Определить: 1) момент инерции J вала; 2) массу m_1 вала.

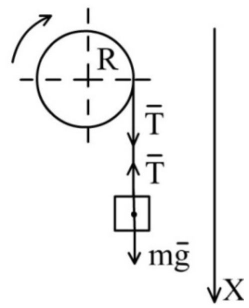
Дано:
R = 0,2 м
m = 2 кг
a = 1 м/с^2
1) J; 2) m_1 – ?

Решение

Согласно основному уравнению динамики вращательного движения вращающий момент, приложенный к валу,

$$M = J\varepsilon, \tag{1}$$

где J – момент инерции вала относительно оси, перпендикулярной к плоскости чертежа; в данном случае линейное ускорение груза является тангенциальным ускорением точек, лежащих на ободе вала, поэтому угловое ускорение $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$.



С другой стороны, вращающий момент, действующий на вал, равен произведению силы натяжения T нити на радиус R вала:

$$M = TR. \tag{2}$$

Приравнивая выражения (1) и (2) и учитывая формулу для ε, найдем:

$$J = \frac{TR^2}{a}. \tag{3}$$

Направив ось X вертикально вниз (см. рисунок), запишем уравнение движения (второй закон Ньютона) на эту ось:

$$ma = mg - T, \tag{4}$$

где T – сила натяжения нити.

Из уравнения (4) сила натяжения нити

$$T = m\,(g - a).$$

Подставив это выражение в формулу (3), найдем искомый момент инерции вала:

$$J = mR^2\left(\frac{g}{a} - 1\right);$$

$$[J] = \text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\frac{\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{м}} = \text{кг}\cdot\text{м}^2;$$

$$J = 2\cdot 0{,}2^2\left(\frac{9{,}8}{1} - 1\right) = 0{,}7\ \text{кг}\cdot\text{м}^2.$$

Учитывая, что момент инерции сплошного цилиндрического вала $J = \dfrac{m_1 R^2}{2}$, можно определить искомую массу вала:

$$m_1 = \frac{2J}{R^2};\quad [m_1] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{м}^2} = \text{кг};\quad m_1 = \frac{2\cdot 0{,}7}{0{,}2^2} = 35\ \text{кг}.$$

Ответ: $J = 0{,}7$ кг·м^2; $m_1 = 35$ кг.

Задача 1.81

Кинетическая энергия вращающегося с частотой $n_1 = 3$ с$^{-1}$ маховика равна 8,4 кДж. Во сколько раз увеличится частота вращения маховика за время $t = 5$ с, если на маховик начнет действовать ускоряющий момент силы $M = 100$ Н·м?

Дано:
$E_{к.вр} = 8{,}4$
$n_1 = 3$ с$^{-1}$
$M = 100$ Н·м
$t = 5$ с

$\dfrac{n_2}{n_1}$ – ?

Решение

Кинематическое уравнение для угловой скорости вращательного движения имеет вид:

$$\omega_2 = \omega_1 + \varepsilon t,$$

или

$$2\pi n_2 = 2\pi n_1 + \varepsilon t, \tag{1}$$

где ω_1 и ω_2 – угловые скорости; $\omega_1 = 2\pi n_1$ и $\omega_2 = 2\pi n_2$; ε – угловое ускорение.

Угловое ускорение, согласно основному уравнению динамики вращательного движения,

$$\varepsilon = \frac{M}{J}, \tag{2}$$

где M – момент силы относительно оси; J – момент инерции маховика относительно той же оси.

Кинетическая энергия вращающегося маховика до начала действия ускоряющего момента силы

$$E_{к.вр} = \frac{J\omega_1^2}{2} = 2\pi^2 n_1^2 J \quad (\text{учли, что } \omega_1 = 2\pi n_1),$$

откуда момент инерции

$$J = \frac{E_{к.вр}}{2\pi^2 n_1^2}. \tag{3}$$

Подставив выражение (3) в формулу (2), найдем:

$$\varepsilon = \frac{2\pi^2 n_1^2 M}{E_{к.вр}}. \qquad (4)$$

Запишем формулу (1) с учетом (4):

$$2\pi n_2 = 2\pi n_1 + \frac{2\pi^2 n_1^2 M t}{E_{к.вр}},$$

откуда искомое отношение частот

$$\frac{n_2}{n_1} = 1 + \frac{\pi n_1 M t}{E_{к.вр}}; \qquad \left[\frac{n_2}{n_1}\right] = \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{с} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}} = 1; \qquad \frac{n_2}{n_1} = 1 + \frac{3{,}14 \cdot 3 \cdot 100 \cdot 5}{8{,}4 \cdot 10^3} = 6{,}61.$$

Ответ: $\frac{n_2}{n_1} = 6{,}61.$

Задача 1.82

Через блок массой m_0 = 300 г, укрепленный на горизонтальной оси, проходящей через его центр, перекинута нить, к которой прикреплены грузы m_1 = 300 г и m_2 = 200 г. Блок считать однородным диском с радиусом 20 см.

Найти: 1) ускорения грузов; 2) результирующий момент вращения блока; 3) силу давления $F_{давл.}$ блока на ось.

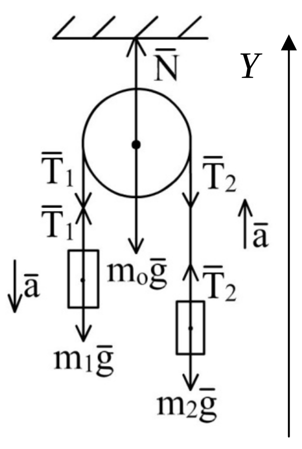
Дано:
m_0 = 0,3 кг
m_1 = 0,3 кг
m_2 = 0,2 кг
R = 0,2 м
g = 10 м/с

a_0; M; F – ?

Решение

Система состоит из трех тел: грузов m_1 и m_2, движущихся поступательно, и блока m_0, который вращается. Основное уравнение динамики для поступательного движения:

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}; \\ m_2\vec{g} + \vec{T}_2 = m_2\vec{a} \end{cases}$$



в проекции на ось Y:

$$\begin{cases} -m_1 g + T_1 = -m_1 a; \\ T_2 - m_2 g = m_2 a. \end{cases}$$

На блок действуют: сила тяжести $m_0\vec{g}$, реакция опоры $\vec{N}$ со стороны оси, равная силе давления $F_{давл}$ блока на эту ось, силы натяжения нити $\vec{T}_1$ со стороны груза m_1 и $\vec{T}_2$ со стороны груза m_2. Силы $\vec{N}$ и $m_0\vec{g}$ во вращении не участвуют, так как их моменты относительно оси вращения равны нулю. Вращение вызывается только силами $\vec{T_1}$ и $\vec{T_2}$.

Моменты сил $\vec{T_1}$ и $\vec{T_2}$ направлены по оси вращения, но в противоположные стороны. Основное уравнение динамики для вращательного движения блока:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = J\vec{\varepsilon}; \quad R(T_1 - T_2) = J\varepsilon.$$

1. Учитывая, что $J = \dfrac{m_0R^2}{2}$, а $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$, решаем совместно уравнения:

$$\begin{cases} -m_1g + T_1 = -m_1a; \\ T_2 - m_2g = m_2a; \\ (T_1 - T_2)\,R = \dfrac{m_0R^2}{2}\dfrac{a}{R}; \end{cases}$$

$$m_1g - T_1 + T_2 - m_2g + T_1 - T_2 = \left(m_1 + m_2 + \frac{m_0}{2}\right)a;$$

$$a = \frac{(m_1 - m_2)\,g}{m_1 + m_2 + \dfrac{m_0}{2}}; \quad [a] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2}{\text{кг}} = \text{м/с}^2; \quad a = \frac{0{,}1\cdot 10}{0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}3/2} = 1{,}54\ \text{м/с}^2.$$

2. Найдем силы натяжения $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$:

$$T_1 = m_1\,(g - a);$$

$$T_2 = m_2\,(g + a).$$

Тогда результирующий момент блока

$$M = (T_1 - T_2)R = (m_1g - m_1a - m_2g - m_2a)R = [(m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a]R;$$

$$[M] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\text{м} = \text{Н·м};$$

$$M = (0{,}1\cdot 10 - 0{,}5\cdot 1{,}54)\cdot 0{,}2 = 0{,}046\ \text{Н·м} = 0{,}05\ \text{Н·м}.$$

3. Сила давления $|F_{давл}|$ на ось блока по третьему закону Ньютона равна реакции опоры $|N|$. Сумма сил, действующих на блок по оси Y, равна нулю:

$$\vec{N} - m_0\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0;$$

$$N - T_1 - T_2 - m_0g = 0;$$

$$N = T_1 + T_2 + m_0g = m_1g - m_1a + m_2g + m_2a + m_0g;$$

$$N = (m_1 + m_2 + m_0)\,g - (m_1 - m_2)a;$$

$$[N] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} - \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}.$$

$$N = (0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}3)\ 10 - (0{,}3 - 0{,}2)\ 1{,}54 = 7{,}62\ \text{Н}.$$

Ответ: a = 1,54 м/с^2; M = 0,05 Н·м; F = 7,62 Н.

Задача 1.83

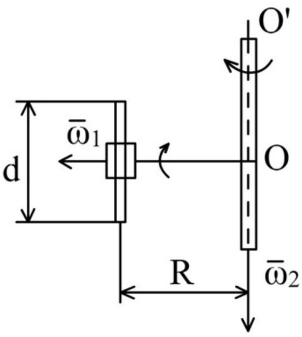
Колесо диаметром d = 7 см, насаженное на горизонтальную ось, катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью υ = 16,8 см/с, описывая окружность радиусом R = 12 см. Найти величину результирующей угловой скорости колеса и угол ее наклона к вертикали.

Дано:
d = 0,07 м
υ = 0,168 м/с
R = 0,12 м
ω, α – ?

Решение

Пусть колесо катится так, что сверху его движение видно происходящим по часовой стрелке (см. рисунок). Колесо одновременно участвует в двух движениях: вращении вокруг оси OO' с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$ и вращении вокруг собственной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$, направленной вдоль радиуса от оси OO'. Вектор результирующей угловой скорости равен сумме $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$:

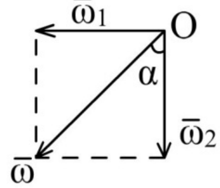
$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2.$$



Так как векторы $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ взаимно перпендикулярны, то модуль вектора результирующей угловой скорости

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}; \qquad (1)$$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \qquad (2)$$



Модуль вектора угловой скорости $\vec{\omega}_2$ численно равен отношению линейной скорости к радиусу вращения:

$$\omega_2 = \frac{\upsilon}{R}. \qquad (3)$$

Численное значение угловой скорости $\vec{\omega}_1$ найдем из условия, что колесо катится по плоскости без скольжения. Отсутствие скольжения означает, что линейная скорость $\vec{\upsilon}_1$ точки колеса, касающейся плоскости, равна скорости точек плоскости, т.е. равна нулю. Скорость $\vec{\upsilon}_1$ численно равна разности линейной скорости υ вращения колеса вокруг оси OO' и линейной скорости $\omega_1 \dfrac{d}{2}$ вращения колеса вокруг собственной оси: $\upsilon_1 = \upsilon - \dfrac{\omega_1 d}{2} = 0$.

Поэтому

$$\omega_1 = \frac{2\upsilon}{d}. \qquad (4)$$

Заменяя в формулах (1) и (2) ω_1 и ω_2 выражениями (3) и (4), получим окончательно:

$$\omega = \sqrt{\frac{4\upsilon^2}{d^2} + \frac{\upsilon^2}{R^2}} = \frac{\upsilon}{dR}\sqrt{4R^2 + d^2}; \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{2R}{d};$$

$$[\omega] = \frac{\text{м}}{\text{см} \cdot \text{м}} \cdot \sqrt{\text{м}^2} = \frac{\text{м} \cdot \text{м}}{\text{с} \cdot \text{м} \cdot \text{м}} = \frac{1}{\text{с}};$$

$$\omega = \frac{0{,}168}{0{,}07 \cdot 0{,}12} \cdot \sqrt{4 \cdot 0{,}12^2 + 0{,}07^2} = 5 \text{ рад/с}; \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{2 \cdot 0{,}12}{0{,}07} = 73^\circ 45'.$$

Ответ: $\omega = 5$ рад/с; $\alpha = 73^\circ 45'$.

Задача 1.84

Через неподвижный блок, укрепленный на краю стола, перекинута нить, к которой привязаны три груза массами $m_1 = 800$ г, $m_2 = 700$ г, $m_3 = 200$ г. Масса блока $M = 500$ г, радиус $R = 0{,}38$ м. Считая нить невесомой и пренебрегая трением, определить ускорение грузов a, а также расстояние S, которое груз m_3 пройдет от начала движения до того момента, когда кинетическая энергия вращения блока будет $E_{к.вр} = 1{,}1$ Дж.

Дано:
$m_1 = 0{,}8$ кг
$m_2 = 0{,}7$ кг
$m_3 = 0{,}2$ кг
$M = 0{,}5$ кг
$R = 0{,}38$ м
$E_{к.вр} = 1{,}1$ Дж

a; S – ?

Решение

Выбрав направления осей X и Y (см. рисунок), запишем уравнения движения (второй закон Ньютона) для грузов в проекциях на эти оси:

$$T_1 = m_1 a; \qquad (1)$$

$$T_2 - T'_1 = m_2 a; \qquad (2)$$

$$m_3 g - T_3 = m_3 a. \qquad (3)$$

Согласно основному закону динамики вращательного движения вращающий момент, приложенный к блоку,

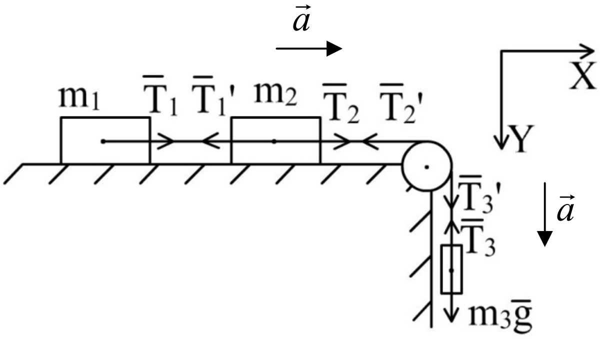
$$M_Z = J\varepsilon, \tag{4}$$

где J – момент инерции блока относительно оси Z, перпендикулярной к плоскости чертежа; ε – угловое ускорение.

С другой стороны,

$$M_Z = (T'_3 - T'_2)R, \tag{5}$$

где T'_3 и T'_2 – силы, приложенные к ободу блока; R – плечо силы, равное радиусу блока.



Приравняв выражения (4) и (5), получаем:

$$J\varepsilon = (T'_3 - T'_2)R. \tag{6}$$

Учитывая, что $J = \dfrac{MR^2}{2}$, $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$, уравнение (6) запишем в виде:

$$\frac{Ma}{2} = T'_3 - T'_2. \tag{7}$$

По третьему закону Ньютона и учитывая, что нити невесомы, $T'_1 = T_1$, $T'_2 = T_2$, $T'_3 = T_3$. Учитывая эти равенства, из уравнений (1) – (3) и (7) находим искомую величину a:

$$a = \frac{m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3 + 0{,}5M}; \qquad [a] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2}{\text{кг}} = \text{м/с}^2;$$

$$a = \frac{0{,}2 \cdot 9{,}8}{0{,}8 + 0{,}7 + 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 1{,}01 \text{ м/с}^2.$$

Кинетическая энергия вращающегося блока

$$E_{к.вр} = \frac{J\omega^2}{2},$$

где ω – угловая скорость.

Учитывая, что $\omega = \varepsilon t$, $J = \dfrac{1}{2}MR^2$, $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$, получаем:

$$E_{к.вр} = \frac{J\varepsilon^2 t^2}{2} = \frac{Ma^2 t^2}{4}.$$

Откуда время движения

$$t = \frac{2}{a}\sqrt{\frac{E_{к.вр}}{M}}.$$

Пройденное за это время расстояние

$$S = \frac{at^2}{2} = \frac{2E_{к.вр}}{M}; \quad [S] = \frac{м}{с^2} \cdot с^2 = м; \quad S = \frac{2 \cdot 1{,}1}{0{,}5} = 4{,}4 \text{ м.}$$

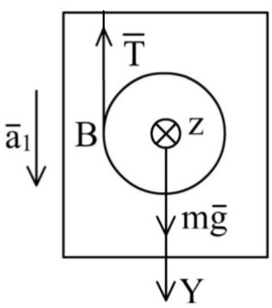
Ответ: a = 1,01 м/с^2; S = 4,4 м.

Задача 1.85

На полый тонкостенный цилиндр массой m = 2 кг намотана нить (тонкая, невесомая) (см. рисунок). Свободный конец ее прикреплен к потолку лифта, движущегося вниз с ускорением a_1 = 2 м/с^2. Цилиндр предоставлен сам себе. Найти ускорение a_2 цилиндра относительно лифта и силу натяжения T нити.

Дано:
m = 2 кг
a_1 = 2 м/с^2
g = 10 м/с^2

a_2; T – ?



Решение

На цилиндр действует сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения $\vec{O}$ нити, которая создает вращающий момент относительно оси, проходящей через центр масс цилиндра перпендикулярно к плоскости рисунка. Следовательно, цилиндр совершает сложное плоское движение – вращение вокруг оси и поступательное движение вниз (разматывается нить, и лифт движется с ускорением a_1).

В системе отсчета, связанной с Землей, можно записать уравнения:

$$m\vec{a}_0 = m\vec{g} + \vec{T}; \quad \vec{M} = J\vec{\varepsilon},$$

где a_0 – ускорение центра масс цилиндра относительно Земли, при этом

$$\vec{a}_0 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2,$$

где a_2 – ускорение цилиндра относительно лифта.

Рассмотрим точку B на ободе цилиндра. Скорость этой точки относительно лифта

$$\vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon}_0 + \vec{u},$$

где $\vec{\upsilon}_0$ – скорость центра масс цилиндра относительно лифта, т.е. скорость поступательного движения цилиндра; u – линейная скорость, обусловленная вращением,

$$u = \omega R,$$

где ω – угловая скорость; R – радиус цилиндра.

Тогда $\upsilon_B = \upsilon_0 - u = 0$, так как точка B принадлежит нити, а она неподвижна относительно лифта; $\upsilon_0 = \omega R$, после дифференцирования по времени имеем:

$$\frac{d\upsilon_0}{dt} = \frac{d\omega}{dt}R; \quad a_2 = \varepsilon R.$$

Введем оси координат Y (направлена вниз) и Z (перпендикулярна к рисунку).

В проекциях на эти оси

$$a_0 = a_1 + a_2; \quad \varepsilon_Z = \varepsilon; \quad M_Z = TR.$$

Для полого цилиндра момент инерции

$$J = mR^2.$$

Уравнение динамики можно записать в виде:

$$m(a_1 + a_2) = mg - T;$$

$$TR = mR^2\varepsilon; \quad ma_1 + ma_2 = mg - ma_2;$$

$$a_2 = \frac{(g - a_1)}{2}; \quad [a] = \text{м/с}^2; \quad a_2 = \frac{9{,}8 - 2}{2} = 3{,}9 \text{ м/с}^2;$$

$$T = \frac{(g - a_1)}{2}; \quad [T] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}; \quad T = \frac{2(9{,}8 - 2)}{2} = 7{,}8 \text{ Н}.$$

Ответ: $a_2 = 3{,}9$ м/с^2; $T = 7{,}8$ Н.

Задача 1.86

Маховик, массу которого $m = 5$ кг можно считать распределенной по ободу радиусом $R = 20$ см, свободно вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр, с частотой $n = 720$ мин$^{-1}$. При торможении маховик останавливается через $\Delta t = 20$ с.

Найти: 1) тормозящий момент; 2) число оборотов, которое сделает маховик до полной остановки; 3) работу сил торможения.

Дано:
$m = 5$ кг
$R = 0{,}2$ м
$n = 12$ с$^{-1}$
$\Delta t = 20$ с

M; N; A – ?

Решение

1. Если тормозящий момент постоянен, то движение маховика равнозамедленное и основное уравнение динамики запишется в виде:

$$M = J\,\frac{\Delta\omega}{\Delta t},$$

где $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_0 = -\omega_0 = -2\pi n$ – измерение угловой скорости за время Δt; J – момент инерции маховика, $J = mR^2$ (масса распределена по ободу);

$$M = \frac{mR^2(2\pi n)}{\Delta t}; \quad [M] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с} \cdot \text{с}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Н·м};$$

$$M = \frac{5 \cdot 0,2^2 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 12}{20} = 0,75 \text{ Нм}.$$

2. Для определения числа оборотов до остановки найдем угол поворота из уравнения кинематики для вращательного движения:

$$\varphi = \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon}; \quad \varepsilon = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\Delta t}; \quad \varphi = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\Delta t; \quad \omega_1 = 0;$$

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega_0 \Delta t}{2 \cdot 2\pi} = \frac{n\Delta t}{2}; \quad [N] = \text{с/с} = 1; \quad N = \frac{12 \cdot 20}{2} = 120 \text{ об.}$$

3. Работа торможения будет равна изменению кинетической энергии при вращательном движении:

$$A = \frac{J\omega_1^2}{2} - \frac{J\omega_0^2}{2} = -\frac{mR^2(2\pi n)^2}{2}; \quad A = mR^2 \cdot 2\pi^2 n^2;$$

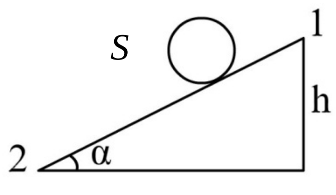
$$[A] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Дж}; \quad A = 5 \cdot 0,2^2 \cdot 2 \cdot 3,14^2 \cdot 12^2 = 567,91 \text{ Дж}.$$

Ответ: M = 0,75 Нм; N = 120 об; A = 367,91 Дж.

Задача 1.87

С наклонной плоскости высотой h = 7 м, составляющей угол α = 30° с горизонтом (см. рисунок), скатывается без скольжения шарик. Пренебрегая трением качения, определить время движения шарика по наклонной плоскости.

Дано:
h = 7 м
α = 30°
g = 10 м/с^2
t – ?



Решение

Согласно закону сохранения энергии при переходе шарика из состояния 1 в состояние 2

$$E_1 = E_2,$$

где E_1 – энергия в состоянии 1 – потенциальная; E_2 – энергия в состоянии 2 – кинетическая, состоящая из кинетической энергии поступательного движения $\frac{m\upsilon^2}{2}$ и вращательного движения $\frac{J\omega^2}{2}$.

Тогда можем записать:

$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2},$$

где υ – скорость поступательного движения центра масс шарика в конце движения; ω – угловая скорость его вращения, $\omega = \frac{\upsilon}{R}$; R – радиус шарика; J – момент инерции шарика, $J = \frac{2}{5}mR^2$.

$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{\frac{2}{5}mR^2\upsilon^2}{2R^2}; \quad gh = \frac{7}{10}\upsilon^2; \quad \upsilon = \sqrt{\frac{10gh}{7}}.$$

Шарик проходит путь $S = \frac{h}{\sin\alpha}$ с ускорением a; $S = \frac{at^2}{2}$, скорость в конце движения связана с ускорением: $\upsilon = at$;

$$\sqrt{\frac{10gh}{7}} = \frac{2S}{t}; \quad t = 2S\sqrt{\frac{7}{10gh}} = \frac{2h}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{7}{10gh}} = \frac{2}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{7h}{10g}};$$

$$[t] = \sqrt{\frac{\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{м}}} = \sqrt{\text{с}^2} = \text{с}; \quad t = \frac{2}{0{,}5}\sqrt{\frac{7\cdot 7}{10\cdot 10}} = \frac{4\cdot 7}{10} = 2{,}8 \text{ с}.$$

Ответ: t = 2,8 с.

Задача 1.88

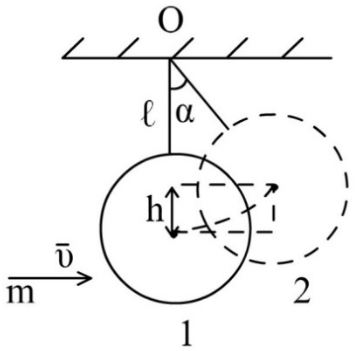
Маятник в виде однородного шара массой M = 10 кг, жестко скрепленного с тонким невесомым стержнем, длина которого l равна радиусу шара R ($l = R$, R = 15 см), может качаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через конец стержня. В центр шара попадает пуля массой m = 10 г, летевшая горизонтально со скоростью υ = 800 м/с, и застревает в нем. На какой угол отклонится маятник в результате удара пули? Массой стержня пренебречь.

Дано:
$l = R$
R = 0,15 м
m = 0,01 кг
M = 10 кг
υ = 800 м/с

α – ?

Решение

Из рисунка видно, что $\cos\alpha = \frac{(2R-h)}{2R}$. Следовательно, для ответа на вопрос задачи надо найти высоту, на которую поднимается центр масс шара. В результате удара пули в шар скорости обоих тел будут одинаковыми, следовательно,



этот удар можно считать абсолютно неупругим. Значит, механическая энергия в процессе удара не сохраняется. Однако после удара механическая энергия системы «шар плюс пуля» будет сохраняться. Следовательно, кинетическая энергия шара с пулей в состоянии 1 равна их потенциальной энергии в состоянии 2:

$$\frac{J\omega^2}{2} = Mgh \quad (M >> m),$$

где J – момент инерции шара; ω – угловая скорость, приобретенная шаром, когда в него попала пуля.

Для определения угловой скорости воспользуемся законом сохранения момента импульса. На систему «шар плюс пуля» во время удара действуют внешние силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и реакция опоры оси вращения. Эти силы не создают вращательного момента. Значит, момент импульса системы во время удара должен сохраняться. До удара пуля обладала моментом импульса $L_1 = m\upsilon 2R$, после удара момент импульса «пуля и шар» $L_2 = J\omega$. По закону сохранения момента импульса можно записать:

$$m\upsilon 2R = J\omega,$$

где J – момент инерции шара относительно оси вращения ($M >> m$), проходящей через точку O перпендикулярно к плоскости рисунка.

По теореме Штейнера

$$J = \frac{2}{5}MR^2 + M(2R)^2; \quad J = \frac{22}{5}MR^2.$$

Подставляя это значение в закон сохранения момента импульса, получаем:

$$m\upsilon 2R = 4{,}4MR^2\omega; \quad \omega = \frac{m\upsilon}{2{,}2MR}.$$

Подставим значения J и ω в уравнение закона сохранения энергии:

$$\frac{4{,}4MR^2m^2\upsilon^2}{2{,}2^2M^2R^2\cdot 2} = Mgh; \quad h = \frac{m^2\upsilon^2}{2{,}2M^2g}; \quad \cos\alpha = 1 - \frac{h}{2R};$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{m^2\upsilon^2}{2{,}2M^2g\cdot 2R}; \quad [\cos\alpha] = \frac{\text{кг}^2\cdot\dfrac{\text{м}^2}{\text{с}^2}}{\text{кг}^2\cdot\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\text{м}} = 1;$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{10^{-4}\cdot 64\cdot 10^4}{4{,}4\cdot 10^2\cdot 0{,}15} = 1 - 0{,}097 = 0{,}9; \quad \alpha = 26^\circ.$$

Ответ: $\alpha = 26^\circ$.

Задача 1.89

Однородный стержень массой M и длиной a может свободно вращаться в горизонтальной плоскости относительно вертикальной оси, проходящей через его конец. Во второй конец нормально к стержню ударяется шар массой m, летящий горизонтально со скоростью υ. Удар считать упругим, силы трения между поверхностью плоскости и телами пренебрежимо малы. Найти скорость шара u и угловую скорость стержня ω.

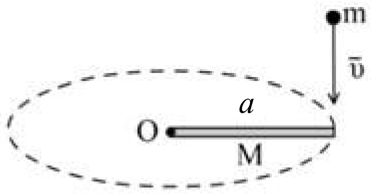
Дано:
M; a; m; υ

u, ω – ?

Решение

Воспользуемся законами сохранения механической энергии и момента импульса. Энергия системы «шар – стержень» до удара определялась кинетической энергией шара $E_0 = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$, после взаимодействия – кинетической энергией поступательного движения шара $E_ш = \dfrac{mu^2}{2}$ и вращательной энергией стержня $E_{ст} = \dfrac{J\omega^2}{2}$. Таким образом, закон сохранения энергии:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{mu^2}{2} = \frac{J\omega^2}{2}. \qquad (1)$$



Момент импульса данной системы может быть найден из следующего соотношения:

(до взаимодействия) $m\upsilon a = J\omega + mua$ (после взаимодействия). (2)

Момент инерции стержня относительно оси вращения

$$J = \frac{Ma^2}{3}.$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{m\upsilon^2}{2} = \dfrac{mu^2}{2} + \dfrac{J\omega^2}{2}; \\ m\upsilon a = J\omega + mua; \\ J = \dfrac{Ma^2}{3}, \end{cases}$$

откуда
$$m(\upsilon^2 - u^2) = J\omega^2; \qquad (3)$$
$$ma(\upsilon - u) = J\omega. \qquad (4)$$

Делим уравнение (3) на (4) и получаем

$$\upsilon + u = \omega a, \quad \text{откуда} \quad u = \omega a - \upsilon.$$

Подставим последнее выражение в (2):

$$2m\upsilon a = \omega(J + ma^2),$$

следовательно,
$$\omega = \frac{2m\upsilon a}{J + ma^2} = \frac{6m\upsilon}{(M+3m)a};$$

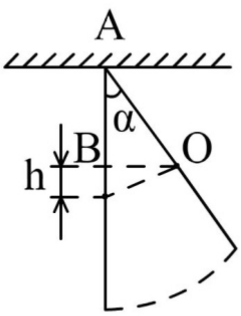
$$u = \omega a - \upsilon = \frac{\upsilon(3m-M)}{3m+M}.$$

Ответ: $\omega = \dfrac{6m\upsilon}{(M+3m)a}$; $u = \dfrac{\upsilon(3m-M)}{3m+M}$.

Задача 1.90

Тонкий однородный стержень длиной l = 0,8 м имеет горизонтальную ось вращения, проходящую через его конец. Найти скорость υ нижней точки стержня, когда стержень проходит положение равновесия, при отклонении его от вертикали на угол α = 30º.

Дано:
l = 0,8 м
α = 30º
υ – ?



Решение

При отклонении стержня на угол α от положения равновесия его центр поднимается на высоту h (см. рисунок), которую можно определить из треугольника AOB:

$$\frac{l}{2} - h = \frac{l}{2}\cos\alpha; \quad h = \frac{l}{2}(1 - \cos\alpha). \tag{1}$$

При этом потенциальная энергия стержня увеличится на величину

$$\Delta E_n = mgh, \tag{2}$$

где m – масса стержня. При прохождении стержнем положения равновесия потенциальная энергия ΔE_n переходит в кинетическую энергию

$$E_к = \frac{J\omega^2}{2}, \tag{3}$$

где J – момент инерции стержня; ω – его угловая скорость вращения.

Для стержня, ось вращения которого проходит через его конец,

$$J = \frac{1}{3}ml^2. \tag{4}$$

По закону сохранения энергии

$$E_к = \Delta E_п. \qquad (5)$$

Из уравнений (1) – (5) получим:

$$mg\frac{l}{2}(1-\cos\alpha) = \frac{1}{6}m\,l^2\omega^2$$

или

$$g\,(1 - \cos\alpha) = \frac{1}{3}l\omega^2. \qquad (6)$$

Из выражения (6) найдем угловую скорость:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g(1-\cos\alpha)}{l}}$$

Линейная скорость

$$\upsilon = \omega l = \sqrt{3gl(1-\cos\alpha)}; \quad [\upsilon] = \sqrt{\frac{м}{с^2}\cdot м} = \frac{м}{с};$$

$$\upsilon = \sqrt{3\cdot 9{,}8\cdot 0{,}8(1-0{,}866)} = 1{,}78 \text{ м/с}.$$

Ответ: υ = 1,78 м/с.

Задача 1.91

Горизонтальная поверхность массой m_1 = 250 кг имеет форму диска радиусом R = 2,5 м. Платформа может вращаться относительно оси, проходящей через ее центр. С какой угловой скоростью ω будет вращаться платформа, если вдоль ее края будет двигаться человек массой m_2 = 75 кг со скоростью υ = 2,5 м/с относительно платформы? Найти угол поворота платформы, если человек сделает по платформе 1 оборот.

Дано:
m_1 = 250 кг
m_2 = 75 кг
R = 2,5 м
υ = 2,5 м/с
ω, φ – ?

Решение

Согласно условию задачи платформа с человеком вращается по инерции. Это значит, что момент внешних сил, действующих на систему, равен нулю. Систему «человек – платформа» будем считать замкнутой. Применим к этой системе закон сохранения момента импульса:

$$\vec{L}_ч + \vec{L}_п = 0, \qquad (1)$$

где $L_ч = m_2\upsilon R$ – момент импульса человека относительно оси вращения платформы; $L_п$ – момент импульса платформы с человеком,

$$L_п = \omega(J_п + J_ч), \qquad (2)$$

где $J_п = \frac{1}{2}m_1R^2$, $J_ч = m_2R^2$ – моменты инерции платформы и человека соответственно.

Из уравнений (1) и (2) получим:

$$m_2 \upsilon R = \omega \left(\frac{1}{2} m_1 R^2 + m_2 R^2\right),$$

откуда

$$\omega = \frac{m_2 \upsilon}{\frac{1}{2} m_1 R + m_2 R} = \frac{2 m_2 \upsilon}{R\,(m_1 + 2m_2)};$$

$$[\omega] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{кг}} = \text{с}^{-1}; \quad \omega = \frac{2 \cdot 75 \cdot 2{,}5}{2{,}5(250 + 2 \cdot 75)} = 37{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{с}^{-1}.$$

Время, необходимое для совершения полного круга по платформе, будет равно

$$t = \frac{2\pi R}{\upsilon},$$

где $2\pi R$ – путь, пройденный человеком со скоростью υ относительно платформы.

Угол поворота платформы

$$\varphi = \omega t = \omega \frac{2\pi R}{\upsilon}; \quad [\varphi] = \frac{\text{рад} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{с} \cdot \text{м}} = \text{рад};$$

$$\varphi = 37{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}5}{2{,}5} = 2{,}36\ \text{рад}.$$

Ответ: $\omega = 37{,}5 \cdot 10^{-2}$ с$^{-1}$; $\varphi = 2{,}36$ рад.

Задача 1.92

Платформа в виде сплошного диска радиусом 1,5 м и массой 180 кг вращается по инерции около вертикальной оси с частотой n = 10 мин$^{-1}$. В центре платформы стоит человек массой 60 кг. Какую линейную скорость относительно пола будет иметь человек, если он перейдет на край платформы?

Дано:
m_1 = 180 кг
R = 1,5 м
n = 1/6 с$^{-1}$
m_2 = 60 кг

υ – ?

Решение

Так как платформа вращается по инерции, то момент внешних сил относительно оси вращения z, совпадающей с геометрической осью платформы, равен нулю. При этом условии момент импульса L_z системы «платформа – человек» остается постоянным:

$$L_z = J_z \omega = \text{const}, \tag{1}$$

где J_z – момент инерции платформы с человеком относительно оси z; ω – угловая скорость платформы.

Момент инерции системы равен сумме моментов инерции тел, входящих в состав системы, поэтому

$$J_z = J_1 + J_2,$$

где J_1 – момент инерции платформы, J_2 – момент инерции человека.

С учетом этого равенство (1) имеет вид:

$$(J_1 + J_2)\omega = \text{const},$$

или

$$(J_1 + J_2)\,\omega = (J'_1 + J'_2)\,\omega', \tag{2}$$

где значения величин без штриха относятся к начальному состоянию системы, со штрихом – к конечному состоянию.

Момент инерции платформы (сплошного диска) относительно оси z при переходе человека не изменяется:

$$J_1 = J'_1 = \frac{1}{2} m_1 R^2.$$

Момент инерции человека относительно той же оси будет изменяться. Если рассматривать человека как материальную точку, то его момент инерции J_2 в начальном положении (в центре платформы) можно считать равным нулю. В конечном положении (на краю платформы) момент инерции человека

$$J'_2 = m_2 R^2.$$

Подставим в формулу (2) найденные выражения моментов инерции, а также выразим начальную угловую скорость ω вращения платформы с человеком через частоту вращения n ($\omega = 2\pi n$) и конечную угловую скорость ω' – через линейную скорость υ человека относительно пола ($\omega' = \upsilon/R$):

$$\left(\frac{1}{2}m_1R^2 + 0\right)2\pi n = \left(\frac{1}{2}m_1R^2 + m_2R^2\right)\frac{\upsilon}{R}.$$

После сокращения на R^2 и простых преобразований находим скорость:

$$\upsilon = 2\pi nR\frac{m_1}{m_1 + 2m_2}; \qquad [\upsilon] = \frac{\text{м}\cdot\text{кг}}{\text{с}\cdot\text{кг}} = \text{м/с};$$

$$\upsilon = 2\cdot 3{,}14\cdot\frac{1}{6}\cdot 1{,}5\cdot\frac{180}{180 + 2\cdot 60} = 0{,}942 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\upsilon = 0{,}942$ м/с.

1.4. Механика жидкостей

Основные теоретические сведения

Гидростатическое давление столба жидкости на глубине h

$$p = \rho g h,$$

где ρ – плотность жидкости.

Закон Архимеда:

$$F_A = \rho g V,$$

где F_A – выталкивающая сила; V – объем вытесненной жидкости.

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости

$$S\upsilon = \text{const},$$

где S – площадь поперечного сечения трубки тока; υ – скорость жидкости.

Уравнение Бернулли для стационарного течения идеальной несжимаемой жидкости

$$\frac{\rho\upsilon^2}{2} + \rho g h + p = \text{const},$$

где $\dfrac{\rho\upsilon^2}{2}$ – динамический напор; $\rho g h$ – гидравлический напор (h – глубина рассматриваемого сечения жидкости относительно уровня жидкости); p – статическое давление.

С физической точки зрения *динамический напор* соответствует удельной кинетической энергии, т.е. энергии 1 ед. объема движущейся жидкости, а *гидравлический напор* – удельной потенциальной энергии 1 единицы объема в поле силы тяжести.

Для трубки тока, расположенной горизонтально,

$$\frac{\rho\upsilon^2}{2} + p = \text{const}.$$

Формула Торричелли, позволяющая определить скорость истечения жидкости из малого отверстия в открытом широком сосуде,

$$\upsilon = \sqrt{2gh},$$

где h – глубина, на которой находится отверстие относительно уровня жидкости в сосуде.

Сила внутреннего трения между слоями текущей жидкости

$$F = -\eta\left|\frac{\Delta\upsilon}{\Delta x}\right|S,$$

где η – динамическая вязкость жидкости; $\dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta x}$ – градиент скорости; S – площадь соприкасающихся слоев.

Число Рейнольдса, определяющее характер движения жидкости,

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho\langle\upsilon\rangle d}{\eta},$$

где ρ – плотность жидкости; $\langle\upsilon\rangle$ – средняя по сечению трубы скорость жидкости; d – характерный линейный размер, например, диаметр трубы.

Формула Стокса, позволяющая определить силу сопротивления, действующую на медленно движущийся в вязкой среде шарик,

$$F = -6\pi\eta r\upsilon,$$

где r – радиус шарика; υ – его скорость.

Формула Пуазейля, позволяющая определить объем жидкости, протекающий за время t через капиллярную трубку длиной l,

$$V = \pi R^4\frac{\Delta pt}{8\eta l},$$

где R – радиус трубки; Δp – разность давлений на концах трубки.

При движении твердых тел в жидкостях и газах лобовое сопротивление

$$R_x = C_x\frac{\rho\upsilon^2}{2}S,$$

где C_x – коэффициент сопротивления (безразмерный); ρ – плотность среды; υ – скорость движения тела; S – площадь наибольшего поперечного сечения тела.

Подъемная сила

$$R_y = C_y\frac{\rho\upsilon^2}{2}S,$$

где C_y – коэффициент подъемной силы (безразмерный).

Примеры решения задач

Задача 1.93

В стакан с водой, уравновешенный на рычажных весах, опустили подвешенный на нити латунный шарик массой M = 400 г так, чтобы он не касался дна. Определить массу m гирьки, с помощью которой можно уравновесить весы. Плотность материала шарика ρ = 8,55 г/см^3, плотность воды ρ_1 = 1 г/см^3.

Дано:
M = 0,4 кг
$\rho = 8{,}55 \cdot 10^3$ кг/м^3
$\rho_1 = 10^3$ кг/м^3
m – ?

Решение

На шарик со стороны жидкости действует выталкивающая сила F_A (сила Архимеда), направленная вертикально вверх. Согласно третьему закону Ньютона со стороны шарика на воду (и, в соответствии с законом Паскаля, на дно стакана) действует такая же по величине сила, но направленная вертикально вниз. Эта сила возникает вследствие увеличения давления жидкости за счет повышения ее уровня в стакане. Таким образом, чашка весов со стаканом опустится, и на другую чашку весов нужно поставить гирьку массой m, определяемой из условия:

$$mg = F_A \quad \text{или} \quad mg = \rho_1 gV,$$

где V – объем шарика.

Поскольку $V = \dfrac{M}{\rho}$, искомая масса гирьки

$$m = \frac{\rho_1 M}{\rho}; \quad [m] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{кг}}{\text{м}^3 \cdot \text{кг}} = \text{кг};$$

$$m = \frac{10^3 \cdot 0{,}4}{8{,}55 \cdot 10^3} = 4{,}7 \cdot 10^{-2}\ \text{кг} = 47\ \text{г}.$$

Ответ: m = 47 г.

Задача 1.94

Два мальчика массами m_1 = 20 кг и m_2 = 25 кг катаются на льдинах. Определить минимальную площадь $S_{\min}$ льдины, способной удержать их обоих, если толщина льда h = 0,4 м. Плотность льда ρ = 0,9 г/см^3, плотность воды ρ_1 = 1 г/см^3.

Дано:	**Решение**
$m_1 = 20$ кг $m_2 = 25$ кг $h = 0{,}4$ м $\rho = 900$ кг/м^3 $\rho_1 = 10^3$ кг/м^3	На льдину с мальчиками действуют сила тяжести
$S_{\min}$ – ?	

$$F = \rho Shg + (m_1 + m_2)g \qquad (1)$$

и выталкивающая сила (определяется законом Архимеда)

$$F_A = \rho_1 Sh_1 g, \qquad (2)$$

где S – площадь льдины; g – ускорение свободного падения; h_1 – толщина погрузившейся под воду части льдины.

Льдина плавает, если силы (1) и (2) равны:

$$\rho Shg + (m_1 + m_2)g = \rho_1 Sh_1 g,$$

откуда площадь льдины

$$S = \frac{m_1 + m_2}{h_1\rho_1 - h\rho}.$$

Из приведенной формулы следует, что $S = S_{\min}$, когда $h_1 = h$. Следовательно, искомая минимальная площадь льдины

$$S_{\min} = \frac{m_1 + m_2}{h(\rho_1 - \rho)}; \quad S_{\min}] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3}{\text{м} \cdot \text{кг}} = \text{м}^2; \quad S_{\min} = \frac{20 + 25}{0{,}4(10^3 - 900)} = 1{,}13 \text{ м}^2.$$

Ответ: $S_{\min} = 1{,}13$ м^2.

Задача 1.95

Цилиндрический сосуд высотой $H = 1$ м до краев заполнен жидкостью. Пренебрегая вязкостью жидкости, определить, на какой высоте h должно быть проделано малое отверстие в стенке сосуда, чтобы струя, вытекающая из отверстия, падала на пол на расстоянии 50 см от цилиндра.

Дано:	**Решение**
$H = 1$ м $l = 0{,}5$ м	Согласно уравнению Бернулли
h – ?	

$$\frac{\rho\upsilon_1^2}{2} + \rho gH + p_1 = \frac{\rho\upsilon_2^2}{2} + \rho gh + p_2, \qquad (1)$$

где ρ – плотность жидкости, υ_1 – скорость понижения уровня жидкости в цилиндре; p_1 и p_2 – статическое давление у поверхности жидкости и у отверстия соответственно; υ_2 – скорость вытекания жидкости из отверстия.

Поскольку сосуд открыт, $p_1 = p_2$ (равны атмосферному давлению).

Согласно уравнению неразрывности

$$S_1\upsilon_1 = S_2\upsilon_2,$$

где S_1 и S_2 – площади сечений цилиндра и отверстия соответственно, причем по условию $S_1 >> S_2$. Следовательно, $\upsilon_1 << \upsilon_2$. Учитывая приведенные рассуждения, уравнение Бернулли (1) запишется в виде:

$$\frac{\rho\upsilon_2^2}{2} = \rho g(H - h),$$

откуда

$$\upsilon_2^{\,2} = 2g(H - h). \qquad (2)$$

Учитывая кинематические уравнения $h = \dfrac{gt^2}{2}$ и $l = \upsilon_2 t$ (t – время падения струи на поверхность земли), найдем:

$$\upsilon_2^{\,2} = \frac{gl^2}{2h}. \qquad (3)$$

Приравняв (2) и (3), запишем:

$$2g\,(H - h) = \frac{gl^2}{2h},$$

откуда

$$4h^2 - 4hH + l^2 = 0.$$

Решая это уравнение, найдем искомую высоту:

$$h = \frac{H \pm \sqrt{H^2 - l^2}}{2}; \quad [h] = \text{м} + \sqrt{\text{м}^2} = \text{м} + \text{м} = \text{м};$$

$$h = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 0{,}5^2}}{2}; \quad h_1 = 0{,}933 \text{ м}; \quad h_2 = 0{,}067 \text{ м}.$$

Ответ: h_1 = 93,3 см; h_2 = 6,7 см.

Задача 1.96

За 15 минут по трубе диаметром 2 см протекает 50 кг воды. Найти скорость течения.

Дано:
$t = 9\cdot10^2$ с
$d = 2\cdot10^{-2}$ м
$\rho = 10^3$ кг/м^3
m = 50 кг

υ – ?

Решение

За время t через поперечное сечение трубы S, равное $\dfrac{\pi d^2}{4}$, протекает объем воды, равный

$$V = S\upsilon t,$$

где υ – скорость течения.

Плотность $\rho = \frac{m}{V}$, откуда $V = \frac{m}{\rho}$.

Подставляя выражения для V и S в формулу объема, получим:

$$\frac{m}{\rho} = \frac{\pi d^2}{4} \upsilon t,$$

откуда

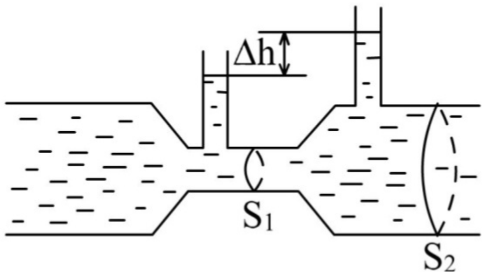
$$\upsilon = \frac{4m}{\pi d^2 \rho t}; \qquad [\upsilon] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}} = \text{м/с};$$

$$\upsilon = \frac{4 \cdot 50}{3{,}14 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3 \cdot 9 \cdot 10^2} = 0{,}18 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\upsilon = 0{,}18$ м/с.

Задача 1.97

Водомер представляет собой горизонтальную трубу переменного сечения, в которую впаяны две вертикальные манометрические трубки одинакового сечения (см. рисунок). По трубе протекает вода. Пренебрегая вязкостью воды, определить ее массовый расход, если разность уровней в манометрических трубках Δh = 8 см, а сечения трубы у оснований манометрических трубок соответственно равны S_1 = 6 см^2 и S_2 = 12 см^2. Плотность воды ρ = 1 г/см^3.



Дано:
$\Delta h = 0{,}8$ м
$S_1 = 6 \cdot 10^{-4}$ м^2
$S_2 = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ м^2
$\rho = 10^3$ кг/м^3
Q – ?

Решение

Массовый расход воды – это масса воды, протекающая через сечение за единицу времени:

$$Q = \frac{m}{\Delta t} = \frac{\rho \upsilon_2 S_2 \Delta t}{\Delta t} = \rho \upsilon_2 S_2, \qquad (1)$$

где ρ – плотность воды; υ_2 – скорость течения воды в месте сечения S_2.

При стационарном течении идеальной несжимаемой жидкости выполняются уравнение неразрывности

$$S_1 \upsilon_1 = S_2 \upsilon_2 \qquad (2)$$

и уравнение Бернулли для горизонтальной трубы ($h_1 = h_2$)

$$p_1 + \frac{\rho\upsilon_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho\upsilon_2^2}{2}, \tag{3}$$

где p_1 и p_2 – статические давления в сечениях манометрических трубок; υ_1 и υ_2 – скорости течения воды в местах сечений S_1 и S_2.

Учитывая, что $p_2 - p_1 = \rho g\Delta h$ и решая систему уравнений (2), (3), получаем:

$$\upsilon_2 = S_1\sqrt{\frac{2g\Delta h}{S_2^2 - S_1^2}}$$

Подставляя это выражение в (1), найдем искомый массовый расход воды:

$$Q = \rho S_1 S_2\sqrt{\frac{2g\Delta h}{S_2^2 - S_1^2}};$$

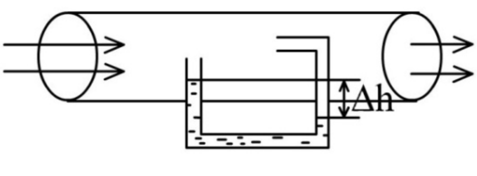
$$[Q] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\cdot\text{м}^2\cdot\text{м}^2\sqrt{\frac{\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{м}^4}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^4\cdot\text{м}}{\text{м}^3\cdot\text{с}\cdot\text{м}^2} = \text{кг/с};$$

$$Q = 10^3\cdot 6\cdot 10^{-4}\cdot 1{,}2\cdot 10^{-3}\sqrt{\frac{2\cdot 9{,}8\cdot 0{,}08}{(1{,}2\cdot 10^{-3})^2 - (6\cdot 10^{-4})^2}} = 0{,}868 \text{ кг/с}.$$

Ответ: $Q = 0{,}868$ кг/с.

Задача 1.98

Для определения объема перекачки газа используется прибор, основанный на принципе действия трубки Пито (см. рисунок). При перекачке азота по трубке за время $t = 1$ мин проходит объем газа $V = 59{,}3$ м^3. Определить диаметр d трубы, если разность уровней воды в коленах трубки Пито $\Delta h = 1$ см. Плотность азота $\rho = 1{,}25$ кг/м^3, плотность воды $\rho_1 = 1$ г/см^3.



Дано:
$t = 60$ с
$V = 59{,}3$ м^3
$\Delta h = 10^{-2}$ м
$\rho = 1{,}25$ кг/м^3
$\rho_1 = 10^3$ кг/м^3

d – ?

Решение

Согласно уравнению Бернулли разность давлений газа, оказываемых на колена трубки,

$$\Delta p = \frac{\rho\upsilon^2}{2}, \tag{1}$$

где ρ – плотность газа; υ – скорость течения газа.

С другой стороны, разность давлений в коленах определяется разностью уровней жидкости в коленах трубки:

$$\Delta p = \rho_1 g \Delta h. \qquad (2)$$

Приравняв выражения (1) и (2)

$$\frac{\rho \upsilon^2}{2} = \rho_1 g \Delta h,$$

найдем скорость движения газа:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2\rho_1 g \Delta h}{\rho}}. \qquad (3)$$

Объем V газа, перекачиваемого за время t,

$$V = S\upsilon t,$$

где S – площадь сечения трубы.

Подставив в эту формулу выражение (3) и $S = \frac{\pi d^2}{4}$, найдем:

$$V = \frac{\pi d^2}{4} t \sqrt{\frac{2\rho_1 g \Delta h}{\rho}},$$

откуда искомый диаметр трубы

$$d = \sqrt{\frac{4V}{\pi t \sqrt{2 g \Delta h \frac{\rho_1}{\rho}}}}; \quad [d] = \sqrt{\frac{\text{м}^3}{\text{с}\sqrt{\frac{\text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \cdot \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^3 \cdot \text{кг}}}}} = \sqrt{\frac{\text{м}^3}{\frac{\text{с} \cdot \text{м}}{\text{с}}}} = \sqrt{\text{м}^2} = \text{м};$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 59{,}3}{3{,}14 \cdot 60 \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{10^3}{1{,}25}}}} = 0{,}3 \text{ м}.$$

Ответ: d = 30 см.

Задача 1.99

В области соприкосновения двух параллельно текущих слоев воды их скорость изменяется, как показано на рисунке. Определить силу внутреннего трения F, если площадь S соприкосновения слоев равна 3 м^2. Динамическая вязкость воды $\eta = 10^{-3}$ Па·с.

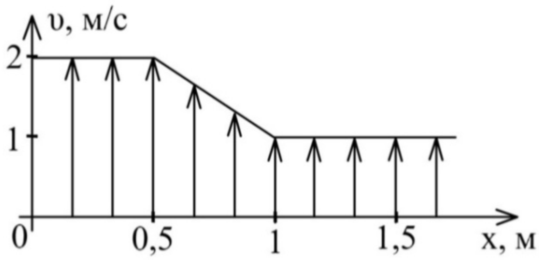
Дано:	**Решение**
S = 3 м^2 $\eta = 10^{-3}$ Па·с.	Сила внутреннего трения между слоями текущей жидкости
F – ?	

$$F = \eta\left|\frac{d\upsilon}{dX}\right|S, \qquad (1)$$

где η – динамическая вязкость жидкости; $\dfrac{d\upsilon}{dX}$ – градиент скорости; S – площадь соприкосновения слоев.

Согласно графику, где определен градиент на участке от 0,5 до 1 м,

$$\left|\frac{d\upsilon}{dX}\right| = \frac{1}{0{,}5} = 2\ \text{с}^{-1}.$$



Подставляя значения физических величин в формулу (1), определим искомую силу внутреннего трения:

$$F = 10^{-3}\cdot 2\cdot 3 = 6\cdot 10^{-3}\ \text{Н};$$

$$[F] = \text{Па}\cdot\text{с}\cdot\text{с}^{-1}\cdot\text{м}^2 = \frac{\text{Н}\cdot\text{с}\cdot\text{м}^2}{\text{м}^2\cdot\text{с}} = \text{Н}.$$

Ответ: F = 6 мН.

Задача 1.100

Свинцовый шарик диаметром 2 мм падает с постоянной скоростью 3,6 см/с в сосуде, наполненном глицерином. Найти коэффициент вязкости глицерина.

Дано:	**Решение**
d = 0,2 см ρ_1 = 11,3 г/см^3 ρ_2 = 1,2 г/см^3 υ = 3,6 см/с	На тело массой m и объемом V, движущееся в жидкости (газе), действуют три силы: $F_T = mg$ – сила тяжести; $F_A = \rho_2 Vg$ – выталкивающая сила Архимеда; $F_C = 6\pi\eta r\upsilon$ – сила сопротивления (внутреннего трения), определяемая по формуле Стокса.
η – ?	

В случае если тело движется равномерно, сила тяжести уравновешивается силой Архимеда и силой сопротивления, т.е. $F_T = F_A + F_C$;

$$mg = \rho_2 Vg + 6\pi\eta r\upsilon.$$

Учитывая, что

$$m = \rho_1 V = \rho_1 \frac{\pi d^3}{6}, \quad V = \frac{\pi d^3}{6}, \quad r = d/2,$$

где ρ_1 и ρ_2 – плотности шарика и глицерина; r и d – радиус и диаметр шарика; υ – скорость опускания шарика, получим:

$$\frac{\rho_1 \pi d^3 g}{6} = \frac{\rho_2 \pi d^3 g}{6} + 3\pi\eta d\upsilon.$$

Отсюда коэффициент вязкости η будет равен:

$$\eta = \frac{(\rho_1 - \rho_2) d^2 g}{18\upsilon};$$

$$[\eta] = \frac{\text{г}}{\text{см}^3} \cdot \frac{\text{см}^3 \cdot \text{см} \cdot \text{с}}{\text{с}^2 \cdot \text{см}} = \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{с}} \cdot \frac{\text{с}}{\text{с}} = \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{с}^2} \cdot \text{с} = \text{Па} \cdot \text{с};$$

$$\eta = \frac{10{,}1 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 9{,}81}{18 \cdot 3{,}6} = 6{,}1 \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{с}^2} = 0{,}61 \text{ Па·с}.$$

Ответ: $\eta = 0{,}61$ Па·с.

Задача 1.101

Два свинцовых шарика диаметром 2 и 1 мм опускают в сосуд с глицерином высотой 0,5 м. Считая, что скорость шариков сразу становится равномерной, определить, насколько раньше и какой из шариков достигнет дна сосуда.

Дано:
$d_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ м
$\rho_1 = 11{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3
$d_2 = 1 \cdot 10^{-3}$ м
$\rho_2 = 1{,}2 \cdot 10^3$ кг/м^3
$h = 0{,}5$ м
$\eta = 0{,}61$ Па·с
t_1; t_2 – ?

Решение

На каждый из шариков, опускающийся в жидкости, действуют три силы: сила тяжести F_T; сила внутреннего трения (вязкость) F_C, определяемая по формуле Стокса, и выталкивающая сила – сила Архимеда F_A.

Если скорость υ опускания шариков постоянна, то время опускания t будет равно:

$$t = h/\upsilon.$$

Для шариков, опускающихся в глицерине, при равномерном движении сила тяжести уравновешивается силой Архимеда и силой сопротивления, т.е. $F_T = F_A + F_C$,

$$mg = \rho_2 Vg + 6\pi\eta r\upsilon.$$

Учитывая, что $\upsilon = h/t$, получим выражение для t:

$$t = \frac{6\pi r h\eta}{mg - \rho_2 Vg}.$$

Учитывая, что $V = \dfrac{\pi d^3}{6}$, $m = \rho_1 V = \rho_1 \dfrac{\pi d^3}{6}$, $r = d/2$,

получим:

$$t = \frac{18h\cdot\eta}{g(\rho_1 - \rho_2)d^2}; \quad [t] = \frac{\text{м}\cdot\text{Па}\cdot\text{с}\cdot\ \text{с}^2\ \cdot\ \text{м}^3}{\text{м}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^3\cdot\text{м}}{\text{с}^2\ \cdot\ \text{м}^2\cdot\text{кг}} = \text{с};$$

$$t_1 = \frac{18\cdot 0,5\cdot 0,61}{9,81\left(11,3-1,2\right)\cdot 10^3\cdot 4\cdot 10^{-6}} = 13,88\ \text{с};$$

$$t_2 = \frac{18\cdot 0,5\cdot 0,61}{9,81\left(11,3-1,2\right)\cdot 10^3\cdot 1\cdot 10^{-6}} = 55,52\ \text{с}; \quad \frac{t_2}{t_1} = \frac{d_1^2}{d_2^2} = 4.$$

Ответ: шарик меньшего диаметра будет опускаться в четыре раза медленнее.

Задача 1.102

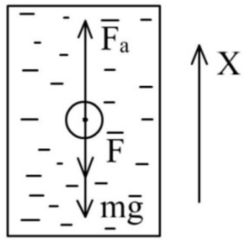
Пробковый шарик радиусом r = 0,5 см всплывает в широком сосуде в глицерине. Определить предельную скорость υ_0 шарика, если течение жидкости, вызванное его всплытием, является ламинарным. Плотность материала шарика ρ = 0,2 г/см^3, плотность глицерина ρ_1 = 1,26 г/см^3. Динамическая вязкость глицерина η = 1,48 Па·с.

Дано:
$r = 5\cdot 10^{-3}$ м
$\rho = 0,2\cdot 10^3$ кг/м^3
$\rho_1 = 1,26\cdot 10^3$ кг/м^3
η = 1,48 Па·с
υ_0 – ?

Решение

На всплывающий шарик (см. рисунок) действует сила тяжести $mg = \dfrac{4}{3}\pi r^3\rho g$ (r – радиус шарика), стоксова сила сопротивления жидкости $F = 6\pi\eta r\upsilon_0$ (υ – скорость шарика) и выталкивающая сила $F_A = \dfrac{4}{3}\pi r^3\rho_1 g$.

Сила сопротивления F возрастает до тех пор, пока геометрическая сумма сил не станет равной нулю, после чего движение шарика происходит с постоянной скоростью υ_0.



Второй закон Ньютона в проекции на выбранную ось X (см. рисунок):

$$F_A - mg - F = 0 \qquad (1)$$

Подставив записанные выражения для сил в формулу (1), найдем:

$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho_1 g - \frac{4}{3}\pi r^3\rho g = 6\pi\eta r\upsilon_0.$$

Откуда искомая предельная скорость

$$\upsilon_0 = \frac{2(\rho_1-\rho)gr^2}{9\eta};$$

$$[\upsilon_0] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}^2}{\text{м}^3\cdot\text{с}^2\cdot\text{Па}\cdot\text{с}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^3\cdot\text{Н}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^2}{\text{с}^3\cdot\text{кг}\cdot\text{м}} = \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\upsilon_0 = \frac{2(1{,}26-0{,}2)\cdot 10^3\cdot 9{,}81\cdot(5\cdot 10^{-3})^2}{9\cdot 1{,}48} = 0{,}039 \text{ м/с} = 3{,}9 \text{ см/с}.$$

Ответ: $\upsilon_0 = 3{,}9$ см/с.

Задача 1.103

Шарик радиусом r = 2 мм падает в глицерине с постоянной скоростью υ = 8,5 мм/с. Определить число Рейнольдса, $\text{Re}_{кр}$ = 0,5. Плотность глицерина ρ = 1,26 г/см^3, динамическая вязкость глицерина η = 1,48 Па·с.

Дано:
$r = 2\cdot10^{-3}$ м
$\upsilon = 8{,}5\cdot10^{-3}$ м/с
$\text{Re}_{кр} = 0{,}5$
$\eta = 1{,}48$ Па·с
$\rho = 1{,}26\cdot10^3$ кг/м^3

Re; ρ_1 – ?

Решение

Характер течения жидкости зависит от числа Рейнольдса, определяемого формулой

$$\text{Re} = \frac{\rho\upsilon d}{\eta},$$

где ρ – плотность жидкости; υ – скорость жидкости; d – диаметр шарика; η – динамическая вязкость жидкости.

Учитывая данные задачи, получаем Re = 0,029.

Поскольку $Re < Re_{кр}$, то движение жидкости является ламинарным.

Стокс установил, что при небольших скоростях и размерах тел (при малых Re) сопротивление среды обусловлено практически только силой трения, определяемой по формуле

$$F = 6\pi\eta r\upsilon,$$

где r – радиус шарика.

При установившемся движении шарика в глицерине (υ = const) сила тяжести шарика (P) уравновешивается выталкивающей силой (F_A) и силой трения (F):

$$p = F_A + F \quad \text{или} \quad \rho_1 gV = \rho gV + 6\pi\eta r\upsilon, \qquad (1)$$

где g – ускорение свободного падения; V – объем шарика.

Подставив в уравнение (1) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ и решив его, найдем искомую плотность материала шарика:

$$\rho_1 = \rho + \frac{9\eta\upsilon}{2gr^2};$$

$$[\rho_1] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} + \frac{\text{Па}\cdot\text{с}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}\cdot\text{м}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} + \frac{\text{Н}\cdot\text{с}^2}{\text{м}^2\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} + \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{м}^2\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} + \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

$$\rho_1 = 1{,}26\cdot10^3 + \frac{9\cdot1{,}48\cdot8{,}5\cdot10^{-3}}{2\cdot9{,}81\cdot(2\cdot10^{-3})^2} = 2{,}7\ \text{г/см}^3.$$

Ответ: Re = 0,029; ρ_1 = 2,7 г/см^3.

Задача 1.104

За время t = 1 ч через трубу диаметром d = 40 см прокачивается газ массой m = 15 кг. Динамическая вязкость газа $\eta = 10^{-5}$ Па·с. Если за характерный размер принять диаметр трубы, то критическое значение числа Рейнольдса $Re_{кр}$ для ламинарного течения газа равно 2000. Определить характер течения газа.

Дано:	**Решение**
t = 3600 с d = 0,4 м m = 15 кг $\eta = 10^{-5}$ Па·с $Re_{кр}$ = 2000	Масса m газа, протекающего за время t через поперечное сечение трубы S, $m = \rho V = \rho S \upsilon t,$ где ρ – плотность газа; V – объем протекающего газа; υ – скорость потока.
Re – ?	

Тогда

$$\upsilon = \frac{4m}{\pi d^2 \rho t}, \tag{1}$$

учли, что $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$.

По определению число Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \upsilon d}{\eta}. \tag{2}$$

Подставив в (2) выражение (1), найдем число Рейнольдса:

$$\mathrm{Re} = \frac{4m}{\pi \eta t d}; \quad [\mathrm{Re}] = \frac{\text{кг}}{\text{Па} \cdot \text{с} \cdot \text{с} \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{Н} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м}} = 1;$$

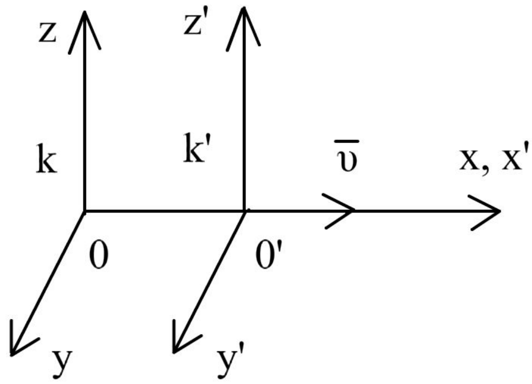
$$\mathrm{Re} = \frac{4 \cdot 15}{3{,}14 \cdot 10^{-5} \cdot 3600 \cdot 0{,}4} = 1330.$$

Поскольку $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{кр}$, течение газа является ламинарным.

Ответ: течение ламинарное.

1.5. Элементы специальной теории относительности (СТО)

Основные теоретические сведения



В СТО рассматриваются только инерциальные системы отсчета. В рассматриваемых задачах считается, что оси координат y и y' и z, z' (см. рисунок) сонаправлены, а относительная скорость υ системы координат k' относительно системы k направлена вдоль общей оси xx'.

Релятивистское (лоренцево) сокращение длины стержня

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2}\,,$$

где l_0 – длина стержня в системе k', относительно которой стержень покоится (собственная длина); стержень параллелен оси x; l − длина стержня в системе k, относительно которой он движется со скоростью υ; $\beta = \dfrac{\upsilon}{c}$; $c = 3\cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме.

Релятивистское замедление хода часов

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\,,$$

где Δt_0 − промежуток времени между двумя событиями, происходящими в одной точке системы k', измеренными по часам этой системы (собственное время движущихся часов); Δt − промежуток времени между двумя событиями, измеренными по часам системы k.

Зависимость массы частицы от скорости ее движения (релятивистская масса)

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\,,$$

где m_0 − масса покоя этой частицы.

Релятивистский импульс

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon} = \frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Кинетическая энергия релятивистской частицы

$$E_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right); \quad E_к = E - E_0,$$

где $E = mc^2 = m_0c^2 + E_к$ – полная энергия релятивистской частицы; $E_0 = m_0c^2$ − энергия покоя частицы.

Изменение массы системы на величину Δm соответствует изменению энергии системы на величину

$$\Delta E = \Delta mc^2.$$

Связь между полной энергией и импульсом релятивистской частицы:

$$E = \sqrt{m_0^2c^4 + p^2c^2}; \quad pc = \sqrt{E_к\left(E_к + 2E_0\right)}.$$

Релятивистское сложение скоростей:

$$u = \frac{u' + \upsilon}{1 + \frac{u'\upsilon}{c^2}}; \quad u' = \frac{u - \upsilon}{1 - \frac{u\upsilon}{c^2}},$$

где u' − скорость тела относительно системы k' (относительная скорость), υ − скорость системы k' относительно системы k (переносная скорость); u – скорость тела относительно системы k.

Энергию микрочастиц часто измеряют в электрон-вольтах:

1эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Примеры решения задач

Задача 1.105

Протон движется со скоростью 0,7 скорости света. Найти импульс и кинетическую энергию протона.

Дано:
$m_0 = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг
$\beta = 0,7$
$c = 3 \cdot 10^8$ м/с
P; T – ?

Решение

Импульс частицы в релятивистской механике определяется по формуле

$$P = \frac{m_0 \upsilon}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \quad \text{или} \quad P = m_0 c \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (1)$$

где $\beta = \frac{\upsilon}{c}$.

Подставив в формулу (1) числовые значения, получим:

$$P = 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot \frac{0,7}{\sqrt{1-0,7^2}} \approx 4,91 \cdot 10^{-19} \text{ кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$[P] = \text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

В релятивистской механике кинетическая энергия частицы $E_к$ определяется как разность между полной энергией E и энергией покоя этой частицы:

$$E_к = E - E_0,$$

где

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}; \; E_0 = m_0 c^2.$$

Тогда формула $E_к$ примет вид:

$$E_к = m_0 c^2 \left(\frac{1}{1-\beta^2} - 1 \right); \quad [E] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Дж};$$

$$E_к = 1,5 \cdot 10^{-10} \left(\frac{1}{1-0,7^2} - 1 \right) \approx 6,02 \cdot 10^{-11} \text{ Дж}.$$

Ответ: $P = 4,91 \cdot 10^{-19}$ кг $\cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}$; $E_к = 6,02 \cdot 10^{-11}$ Дж.

Задача 1.106

Релятивистское сокращение длины движущегося тела составляет 30 %. С какой относительной скоростью υ движется тело?

Дано:	**Решение**
$\dfrac{\Delta l}{l_0} = 0,3$	Релятивистское сокращение длины
υ – ?	

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\,, \qquad (1)$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света.

По условию задачи

$$\frac{l_0 - l}{l_0} = 1 - \frac{l}{l_0} = 0,3\,,$$

откуда

$$l = 0,7\ l_0. \qquad (2)$$

Подставив выражение (2) в (1), получим:

$$\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = 0,7\,;\ \ \upsilon = \sqrt{c^2\left(1-0,49\right)} = \sqrt{0,51c^2} = 0,714\ c\,;\ \ \upsilon = 2,14\cdot 10^8\ \text{м/с}.$$

Ответ: $\upsilon = 2,14\cdot 10^8$ м/с.

Задача 1.107

Тело движется со скоростью, равной 0,9 c. Найти релятивистское сокращение объема тела.

Дано:	**Решение**
$\upsilon = 0,9\ c$	Поскольку поперечные размеры тела при
τ – ?	

его движении не изменяются, то изменение объема тела будет определяться релятивистским сокращением продольного размера, определяемого формулой

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\,.$$

Тогда сокращение объема можно найти по аналогичной формуле:

$$V = V_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\,.$$

Определим относительное изменение объема:

$$\tau = \frac{V_0 - V}{V_0}100\% = \frac{V_0 - V_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}{V_0}100\% = \left(1-\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\right)100\%.$$

$$\tau = 56\ \%.$$

Ответ: $\tau = 56\ \%$.

Задача 1.108

Скорость движения мезона υ = 0,95 *c*. Какой промежуток времени $\Delta\tau$ по часам неподвижного наблюдателя соответствует одной секунде «собственного времени» мезона?

Дано:
υ = 0,95 *c*
Δt = 1 с
$\Delta\tau$ – ?

Решение

Промежуток времени $\Delta\tau$ по часам неподвижного наблюдателя и соответствующий ему промежуток собственного времени связаны соотношением

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

отсюда

$$\Delta\tau = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}95^2}} = 3{,}2\ \text{с}.$$

Ответ: $\Delta\tau = 3{,}2$ с.

Задача 1.109

В ускорителе протонов − циклотроне относительное увеличение массы частицы не должно превышать 5 %. До какой энергии можно ускорять протоны в циклотроне?

Дано:
$n \le 5$ %.
$E_к$ – ?

Решение

Согласно формуле полной энергии релятивистской частицы кинетическая энергия релятивистской частицы

$$E_к = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 = c^2(m - m_0).$$

Разделив правую и левую части уравнения на m_0, получим:

$$\frac{E_к}{m_0} = \frac{c^2\left(m - m_0\right)}{m_0}.$$

Обозначим $\dfrac{m - m_0}{m_0} = n$, тогда $E_к = m_0 c^2 n$.

По условию задачи $n = 0{,}05$, а масса протона $m_0 = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$, следовательно,

$$E_к = 1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot \left(3 \cdot 10^8\right)^2 \cdot 0{,}05 = 41 \cdot 10^{-16} \text{ Дж} = 25{,}6 \text{ кэВ};$$

$$[E_к] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Дж}.$$

Ответ: $E_к = 41 \cdot 10^{-16}$ Дж $= 25{,}6$ кэВ.

Задача 1.110

В ускорителе электронов – бетатроне частицы приобретают энергию $E_к = 0{,}67$ МэВ. До какой скорости разгоняются электроны?

Дано:
$E_к = 1{,}072 \cdot 10^{-13}$ Дж
$\upsilon - ?$

Решение

Кинетическая энергия релятивистской частицы определяется выражением

$$E_к = E - E_0 = E_0\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1\right), \qquad (1)$$

где $\beta = \dfrac{\upsilon}{c}$ – скорость частицы, выраженная в долях скорости света.

Из уравнения (1) запишем:

$$\frac{E_к}{E_0} + 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \text{ откуда } 1 - \beta^2 = \frac{1}{\left(\dfrac{E_к}{E_0} + 1\right)^2};$$

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\dfrac{E_к}{E_0} + 1\right)^2}}; \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\dfrac{1{,}072 \cdot 10^{-13}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}} + 1\right)^2}} = 0{,}902.$$

Скорость

$$\upsilon = \beta c; \ [\upsilon] = \text{м/с}; \ \upsilon = 0{,}902 \cdot 3 \cdot 10^8 = 2{,}71 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\upsilon = 2{,}71 \cdot 10^8$ м/с.

Задача 1.111

Поток энергии, излучаемой Солнцем, $P = 4 \cdot 10^{26}$ Вт. За какое время масса Солнца уменьшится в 2 раза? Излучение Солнца считать постоянным.

Дано:
$P = 4 \cdot 10^{26}$ Вт
$\dfrac{m_0}{\Delta m} = 2$

---

t – ?

Решение

Изменение массы системы на Δm соответствует изменению энергии на величину $\Delta E = c^2 \Delta m$. За время t при постоянном излучении Солнце выделит энергию $\Delta E = Pt$ и потеряет при этом массу $\Delta m = m_0 / 2$, где $m_0 = 1{,}98 \cdot 10^{30}$кг − масса Солнца.

Тогда

$$Pt = \frac{c^2 m_0}{2}, \text{ откуда } t = \frac{c^2 m_0}{2P};$$

$$[t] = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{Вт}} = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}}{\text{с}^2 \cdot \text{Дж}} = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с} \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2} = \text{с};$$

$$t = \frac{\left(3 \cdot 10^8\right)^2 \cdot 1{,}98 \cdot 10^{30}}{2 \cdot 4 \cdot 10^{26}} \approx 7 \cdot 10^{12} \text{ лет}.$$

Ответ: $t \approx 7 \cdot 10^{12}$ лет.

Задача 1.112

Две ракеты летят навстречу друг другу со скоростями, равными $0{,}8c$ по отношению к неподвижному наблюдателю. Здесь c – скорость света в вакууме. Найти скорость сближения ракет.

Дано:
$\upsilon = 0{,}8c$
$u' = 0{,}8c$

---

u – ?

Решение

По условию задачи первая ракета летит со скоростью $u' = 0{,}8c$ относительно второй ракеты. В свою очередь, вторая ракета движется со скоростью $\upsilon = 0{,}8c$ относительно неподвижного наблюдателя. Обе скорости лежат на одной прямой. Результирующую скорость ракет u (скорость их сближения) относительно неподвижного наблюдателя можно определить по формуле сложения скоростей в релятивистской механике:

$$u = \frac{u' + \upsilon}{1 + \dfrac{u' \upsilon}{c^2}}; \quad u = \frac{0{,}8c + 0{,}8c}{1 + \dfrac{0{,}8c \cdot 0{,}8c}{c^2}} = 0{,}98c.$$

Ответ: $u = 0{,}98c$.

Задача 1.113

Реакция деления ядра урана ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ сопровождается выделением энергии ΔE_0 = 200 МэВ. Определить изменение массы Δm при делении одного моля урана.

Дано:	Решение
$\Delta E_0 = 3{,}2 \cdot 10^{-11}$ Дж	Изменение массы
ν = 1 моль	$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}. \quad (1)$$
Δm – ?	

При делении ν молей урана освобождается энергия

$$\Delta E = \Delta E_0 \nu N_A, \quad (2)$$

где ΔE_0 − энергия, освобождаемая при делении одного ядра; N_A − число Авогадро.

Подставив уравнение (2) в (1), получим:

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0 \nu N_A}{c^2}; \quad [m] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{моль} \cdot \text{с}^2}{\text{моль} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{м}^2} = \text{кг};$$

$$\Delta m = \frac{3{,}2 \cdot 10^{-11} \cdot 1 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}{\left(3 \cdot 10^8\right)^2} = 0{,}2 \cdot 10^{-2}\ \text{кг}.$$

Ответ: $\Delta m = 0{,}2 \cdot 10^{-2}$ кг.

Задача 1.114

Определить импульс электрона, обладающего кинетической энергией 5 МэВ.

Дано:	Решение
$E_к = 5$ МэВ	Полная энергия E частицы равна:
$E_0 = 0{,}511$ МэВ	$$E = E_0 + E_к,$$
$c = 3 \cdot 10^8$ м/с	
P – ?	где E_0 − энергия покоя, $E_к$ − кинетическая энергия частицы.

Релятивистское соотношение между полной энергией и импульсом имеет вид:

$$E^2 = {E_0}^2 + P^2 c^2,$$

где c – скорость света в вакууме.

Импульс электрона будет равен:

$$P = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - E_0{}^2} = \frac{1}{c}\sqrt{E_к\left(E_к + 2E_0\right)}\ ;\quad [P] = \frac{\text{Дж}\cdot\text{с}}{\text{м}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}}{\text{с}^2\cdot\text{м}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}};$$

$$P = \frac{\sqrt{5(5+2\cdot 0{,}511)}}{\text{с}} = \frac{5{,}5\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}}{3\cdot 10^8} = 2{,}93\cdot 10^{-21}\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $P = 2{,}93\cdot 10^{-21}\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 1.115

Протон движется со скоростью, равной 0,8 скорости света. Навстречу ему движется электрон со скоростью 0,9 скорости света. Каковы их скорости относительно друг друга? Определить полную и кинетическую энергию электрона.

Дано:
$u = 0{,}8c$
$\upsilon = 0{,}9\tilde{n}$
$c = 3\cdot 10^8$ м/с
$E_0 = 0{,}511$ МэВ

u'; E; $E_к$ – ?

Решение

Скорость u' относительного движения частиц в релятивистской механике, когда частицы движутся навстречу друг другу, определяется по теореме сложения скоростей:

$$u' = \frac{u+\upsilon}{1+\dfrac{u\upsilon}{c^2}}.$$

Здесь u и υ − скорости движения протона и электрона; c – скорость света в вакууме,

$$u' = \frac{(0{,}8+0{,}9)c}{1+\dfrac{0{,}8\cdot 0{,}9c^2}{c^2}} = \frac{1{,}7\cdot 3\cdot 10^8}{1+0{,}72} \approx 2{,}97\cdot 10^8\text{м/с}.$$

Полная энергия электрона

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

где m_0 − масса электрона.

$$E = \frac{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 9\cdot 10^{16}}{\sqrt{1-0{,}9^2}} \approx 1{,}88\cdot 10^{-13}\,\text{Дж} = 1{,}173\,\text{МэВ}.$$

Кинетическая энергия частицы

$$E_к = 1{,}173 - 0{,}511 = 0{,}662 \text{ МэВ}.$$

Ответ: $u' = 2{,}97 \cdot 10^8$ м/с; $E = 1{,}173$ МэВ; $E_к = 0{,}662$ МэВ.

Задача 1.116

Определить скорость нестабильной частицы, если время ее жизни по часам наблюдателя с Земли увеличилось в n = 1,8 раз.

Дано:
$n = \dfrac{\tau'}{\tau} = 1{,}8$
υ – ?

Решение

Систему отсчета K свяжем с частицей, тогда промежуток времени между возникновением и распадом частицы в этой системе отсчета равен ее собственному времени жизни τ. Поскольку система K движется вместе с частицей, то эти события происходят в одной точке, что является необходимым условием применения формулы, описывающей релятивистское замедление хода часов. Для системы K', связанной с Землей, время жизни частицы − τ'.

Тогда

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Откуда

$$\frac{\tau'}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} = n,$$

откуда искомая скорость

$$\upsilon = c\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}; \quad \upsilon = 3 \cdot 10^8 \sqrt{1 - \frac{1}{1{,}8^2}} = 8{,}831 \text{ с}.$$

Ответ: $\upsilon = 8{,}831$ с.

Задача 1.117

Долетит ли до поверхности Земли возникшая на высоте h = 4 км нестабильная частица, обладающая собственным временем жизни τ = 4,5 мкс и летящая со скоростью υ = 0,95c по направлению к Земле?

Дано:	**Решение**
$h = 4 \cdot 10^3$ м $\upsilon = 0{,}95c$ $\tau = 4 \cdot 10^{-6}$с S – ?	Расстояние, которое пройдет частица в системе отсчета, связанной с Землей, определяется так:

$$S = \upsilon\tau', \qquad (1)$$

где τ' – время жизни частицы, измеренное по часам на Земле.

Промежуток времени τ' связан с собственным временем жизни частицы τ соотношением

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} . \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), получаем искомое расстояние:

$$S = \frac{\upsilon\tau}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \quad [S] = \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \text{с} = \text{м}; \quad S = \frac{0{,}95 \cdot 3 \cdot 10^8}{\sqrt{1 - \frac{\left(0{,}95 \cdot 3 \cdot 10^8\right)^2}{\left(3 \cdot 10^8\right)^2}}} = 4{,}11 \cdot 10^3 \text{ м}.$$

Так как $S > h$, то частица долетит до Земли.

Ответ: $S > h$, частица до Земли долетит.

Задача 1.118

Космическая платформа движется со скоростью $\upsilon = 0{,}8c$ относительно наблюдателя. На платформе одновременно происходят два события в точках, расположенных на расстоянии $l_0 = 150$ м друг от друга. Определить промежуток времени τ' между этими событиями, отсчитанный по часам наблюдателя.

Дано:	**Решение**
$\upsilon = 0{,}8c$ $l_0 = x_2 - x_1 = 150$ м $t_2 = t_1 = t$ τ' – ?	Систему отсчета K свяжем с платформой, систему отсчета K' − с наблюдателем. По условию задачи K' движется относительно K со скоростью υ в направлении, принятом за положительное.

Искомый промежуток времени

$$\tau' = t_1' - t_2', \qquad (1)$$

где t_1' и t_2' − показания синхронизированных часов в системе K', расположенных в точках x_1' и x_2', в те моменты времени, когда в каждой из точек произошло рассматриваемое событие.

Согласно преобразованиям Лоренца

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{\upsilon}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \quad t_2' = \frac{t_2 - \frac{\upsilon}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}. \qquad (2)$$

Подставив выражение (2) в формулу (1) и учитывая, что $t_2 = t_1 = t$ и $x_2 - x_1 = l_0$, найдем:

$$\tau' = \frac{l_0\upsilon}{c^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \quad [\tau'] = \frac{\text{м}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}\cdot\text{м}^2} = \text{с};$$

$$\tau' = \frac{150\cdot 0{,}8\cdot 3\cdot 10^8}{\left(3\cdot 10^8\right)^2\sqrt{1-\frac{\left(0{,}8\cdot 3\cdot 10^8\right)^2}{3\cdot 10^8}}} = 0{,}667\ \text{мкс}.$$

Ответ: $\tau' = 0{,}667$ мкс.

Задача 1.119

Определить релятивистский импульс частицы, если ее полная энергия E = 1,5 ГэВ, а скорость υ = 0,5c.

Дано:	**Решение**
$E = 2{,}4\cdot 10^{-10}$ Дж	Релятивистский импульс частицы
$\upsilon = 0{,}5c$	
P – ?	

$$P = \frac{m_0\upsilon}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \qquad (1)$$

где m – масса частицы; υ – ее скорость.

Умножая выражение (1) на c^2 и учитывая, что полная энергия $E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$, получим искомый импульс:

$$P=\frac{m_0\upsilon c^2}{c^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=\frac{E\upsilon}{c^2}\ ;\quad [P]=\frac{\text{Дж}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}\cdot\text{м}^2}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{с}\cdot\text{м}^2}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}\cdot\frac{\text{с}}{\text{с}}=\text{Н}\cdot\text{с}\,;$$

$$P=\frac{2,4\cdot10^{-10}\cdot0,5\cdot3\cdot10^8}{\left(3\cdot10^8\right)^2}=0,4\cdot10^{-18}\ \text{Н}\cdot\text{с}\,.$$

Ответ: $P=0,4\cdot10^{-18}\ \text{Н}\cdot\text{с}$.

Задача 1.120

Определить скорость частицы, если ее полная энергия в n = 2,5 раза больше ее энергии покоя.

Дано:

$\frac{E}{E_0}=n=\ 2,5$

$\upsilon-?$

Решение

Полная энергия частицы

$$E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\,, \tag{1}$$

где m – масса частицы; υ – ее скорость; c – скорость распространения света в вакууме.

Энергия покоя частицы

$$E_0=m_0c^2\,. \tag{2}$$

Согласно формулам (1) и (2)

$$\frac{E}{E_0}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=n\,,$$

откуда искомая скорость частицы

$$\upsilon=c\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\ ;\ \ \upsilon=c\sqrt{1-\frac{1}{2,5^2}}=0,917c\,.$$

Ответ: $\upsilon=0,917c$.

1.6. Механические колебания. Упругие волны.

Основные теоретические сведения

Колебаниями называют движения и процессы, обладающие повторяемостью во времени. К гармоническим относят колебания, при которых координаты тела меняются по закону

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \quad \text{или} \quad x = A\sin(\omega t + \varphi_0),$$

где x – смещение колеблющейся величины от положения равновесия; A – амплитуда колебаний; $\omega = 2\pi / T = 2\pi\nu$ – круговая (циклическая) частота; $\nu = 1/T$ – частота; T – период колебаний; φ_0 – начальная фаза (в момент времени $t_0 = 0$); $(\omega t + \varphi_0)$ – фаза колебаний в момент t.

Гармонические колебания можно представить с помощью векторной диаграммы. Вектор $\vec{A}$ равномерно вращается с угловой скоростью ω относительно точки O (рис. 4), при этом угол φ между осью OX и вектором $\vec{A}$ непрерывно меняется со временем t:

$$\varphi = \omega t + \varphi_0,$$

где φ_0 – начальный угол при $t_0 = 0$.

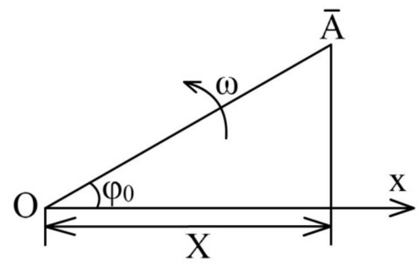


Рис. 4

При вращении проекция вектора $\vec{A}$ на ось OX совершает гармонические колебания:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0),$$

при которых модуль вектора $|\vec{A}|$ является амплитудой, угловая скорость вращения ω – циклической частотой, а угол φ_0 – начальной фазой колебаний. Метод векторной диаграммы используется при сложении гармонических колебаний одинаковой частоты и определении сдвига фаз между током и напряжением в цепях переменного тока.

Скорость и ускорение материальной точки, совершающей гармонические колебания,

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) = A\omega\cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi) = -\omega^2 x.$$

Максимальные скорость υ_{max} (амплитуда скорости) и ускорение a_{max} (амплитуда ускорения) материальной точки, совершающей гармонические колебания:

$$\upsilon_{max} = A\omega; \qquad a_{max} = A\omega^2.$$

Фаза колебаний

$$\varphi = \left(\omega t + \varphi_0\right) = \left(2\pi\nu t + \varphi_0\right) = \left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right).$$

Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний материальной точки массой m:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \text{или} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

где m – масса точки; k – коэффициент квазиупругой силы ($k = m\omega^2$); ω – собственная частота колебаний, которая зависит от параметров колеблющейся системы.

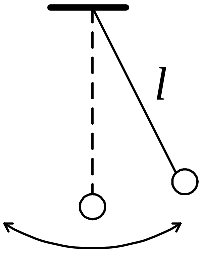


Рис. 5

Математический маятник (рис. 5) *с неподвижной осью*:

период колебаний $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$;

циклическая частота $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}$,

где l – длина маятника; g – ускорение свободного падения.

Математический маятник с осью, движущейся с ускорением $\vec{a}$:

период колебаний $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g^*}}$;

циклическая частота $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g^*}{l}}$,

где l – длина маятника; g^* – модуль вектора ускорения маятника, $\vec{g}^* = \vec{g} + \vec{a}$.

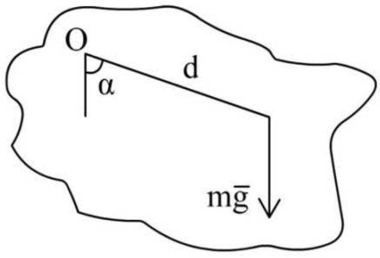


Рис.6

Физический маятник (рис. 6):

период колебаний $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$;

циклическая частота $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mgd}{J}} = \sqrt{\frac{g}{L}}$,

где J – момент инерции маятника относительно оси колебаний O; d – расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника; $L = J/(md)$ – приведенная длина физического маятника.

Пружинный маятник (рис. 7):

период колебаний $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$;

циклическая частота $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$,

где k – коэффициент упругости (жесткость пружины).

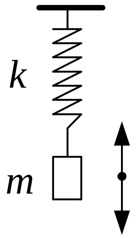


Рис. 7

Крутильный маятник (тело, подвешенное на упругой нити) (рис. 8):

период крутильных колебаний $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{k}}$;

циклическая частота $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{J}}$,

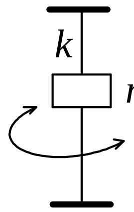


Рис. 8

где J – момент инерции тела относительно оси, совпадающей с упругой нитью; k – жесткость упругой нити, равная отношению упругого момента, возникающего при закручивании нити, к углу, на который нить закручивается.

Приведенные формулы являются точными для случая бесконечно малых амплитуд. При конечных амплитудах эти формулы дают лишь приближенные результаты. При амплитудах порядка 3° погрешность в значении периода не превышает 1 %.

При наличии сил трения свободные колебания будут *затухающими* и их амплитуда уменьшается в результате потерь энергии.

Дифференциальное уравнение свободных *затухающих колебаний*:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{или} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt},$$

где $\delta = \frac{r}{2m}$ – коэффициент затухания; если амплитуда уменьшилась в e раз ($e \approx 2{,}718$), то $\delta = \frac{1}{\tau}$, где τ – время релаксации; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – собственная частота той же колебательной системы; r – коэффициент сопротивления.

Уравнение затухающих колебаний, т.е. смещение колеблющейся точки от положения равновесия (решение дифференциального уравнения):

$$x = A(t)\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $A(t) = A_0 e^{-\delta t}$ – амплитуда затухающих колебаний в момент t; A_0 – амплитуда затухающих колебаний в начальный момент времени (t_0 = 0); $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ – круговая частота затухающих колебаний.

Логарифмический декремент затухания

$$\Theta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e},$$

где δ – коэффициент затухания; T – период затухающих колебаний; τ – время релаксации; N_e – число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в e раз; $A(t)$ и $A(t+T)$ – амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующих моментам времени, отличающимся на период.

Добротность колебательной системы

$$Q = \frac{\pi}{\Theta} = \frac{\omega_0}{2\delta},$$

где Θ – логарифмический декремент затухания, ω_0 – циклическая частота свободных незатухающих колебаний той же колебательной системы, δ – коэффициент затухания.

Если система совершает колебания под периодически изменяющимся внешним воздействием, то такие колебания называют *вынужденными*.

Дифференциальное уравнение *вынужденных колебаний* для установившихся колебаний:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \quad \text{или} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt} + F_0\cos\omega t,$$

где $F_0\cos\omega t$ – внешняя периодическая сила, действующая на колеблющуюся материальную точку и вызывающая вынужденные колебания; F_0 – амплитуда вынуждающей силы.

Решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний для установившихся колебаний:

$$x = A\cos(\omega t - \varphi),$$

где A – амплитуда вынужденных колебаний, которая зависит от соотношения вынужденной ω и собственной частоты ω_0:

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}},$$

где φ определяет отставание по фазе вынужденного колебания от вынуждающей силы:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Резонансная частота и резонансная амплитуда:

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}; \qquad A_{рез} = \frac{F_0/m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}},$$

где F_0 – амплитудное значение внешней периодической силы.

Кинетическая энергия колеблющейся материальной точки массой m (рис. 9):

$$E_k = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}\sin^2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right).$$

Потенциальная энергия колеблющейся материальной точки массой m (см. рис. 9):

$$E_П = \frac{kx^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right).$$

Полная энергия колеблющейся материальной точки массой m (см. рис. 9):

$$E_П = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} = \frac{1}{2}kA^2.$$

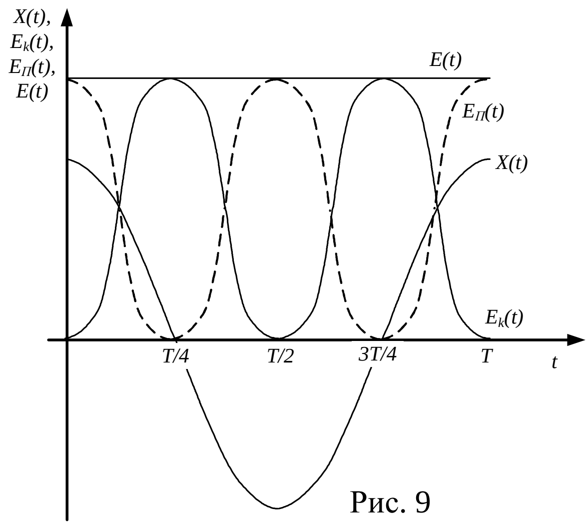


Рис. 9

Сложение двух гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты

Амплитуда A результирующего колебания:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Начальная фаза результирующего колебания:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2},$$

где A_1 и A_2 – амплитуды двух складываемых колебаний; φ_1 и φ_2 – начальные фазы колебаний.

Частота биений, возникающих при сложении двух колебаний, происходящих по одной прямой с различными, но близкими по значению частотами ν_1 и ν_2,

$$\nu = \nu_1 - \nu_2.$$

Уравнение траектории точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях с амплитудами A_1 и A_2 и начальными фазами φ_1 и φ_2,

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Если начальные фазы φ_1 и φ_2 составляющих колебаний одинаковы, уравнение траектории примет вид:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1,$$

т.е. точка движется по эллипсу.

Связь длины волны λ с периодом T и частотой ν колебаний:

$$\lambda = \upsilon T; \qquad \upsilon = \lambda\nu,$$

где υ – скорость распространения колебаний в среде (фазовая скорость).

Уравнение *плоской волны*, распространяющейся вдоль положительного направления оси *x:*

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

где ξ (x, t) – смещение точек среды с координатой x в момент времени t; A – амплитуда волны; ω – циклическая (круговая) частота; $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\upsilon T} = \frac{\omega}{\upsilon}$ – волновое число (λ – длина волны; υ – фазовая скорость волны; T – период колебаний); φ_0 – начальная фаза колебаний.

Величина $\varphi = \omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) + \varphi_0$ или $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0$ называется *фазой волны*.

Дифференциальное уравнение *волнового процесса*:

$$\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial t^2} = \upsilon^2\frac{\partial^2\xi(x,t)}{dx^2},$$

где ξ (x, t) – смещение точек среды с координатой x в момент времени t, υ – фазовая скорость волны.

Уравнение *плоской затухающей волны*:

$$\xi(x,t) = A_0 e^{-\beta x}\cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

где A_0 – амплитуда волны в точке $x = 0$, β – коэффициент затухания, зависящий от свойств среды, ω – циклическая (круговая) частота; $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\upsilon T} = \frac{\omega}{\upsilon}$ – волновое число (λ – длина волны; υ – фазовая скорость волны; T – период колебаний); φ_0 – начальная фаза колебаний.

Уравнение *сферической волны* без учета затухания имеет вид

$$\xi(x,t) = \frac{A}{r}\cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{\upsilon}\right) + \varphi_0\right),$$

где ξ (x, t) – смещение точек среды с координатой x в момент времени t; A – амплитуда волны; r – расстояние от источника колебаний; ω – циклическая (круговая) частота; υ – фазовая скорость волны; φ_0 – начальная фаза колебаний.

Волновое уравнение для волн, распространяющихся в упругой изотропной среде, имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \tilde{o}^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

его решением является выражение

$$\xi = a\cos\left[\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\varphi_0\right],$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, который характеризует точку пространства, которой достигла волна к промежутку времени t, $\vec{k}$ – волновой вектор, т.е. вектор, модуль которого равен волновому числу, а направление совпадает с направлением линии, касательная к которой в каждой ее точке совпадает с направлением распространения волны. При этом выполняются следующие равенства:

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=\frac{\omega^2}{\upsilon^2}; \qquad \vec{k}\cdot\vec{r}=k_x x+k_y y+k_z z.$$

Связь между разностью фаз $\Delta\varphi$ и разностью хода Δ:

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta.$$

Условия максимума и минимума амплитуды колебания при интерференции волн:

$$\Delta_{\max}=\pm 2m\frac{\lambda}{2}; \qquad \Delta_{\min}=\pm(2m+1)\frac{\lambda}{2},$$

где m = 0, 1, 2, … – порядок максимума (минимума).

Фазовая υ и групповая u скорости, а также связь между ними:

$$\upsilon=\frac{\omega}{k}; \qquad u=\frac{d\omega}{dk}; \qquad u=\upsilon-\lambda\frac{d\upsilon}{d\lambda}.$$

Уравнение стоячей волны:

$$\xi(x,t)=2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cos\omega t=2A\cos kx\cdot\cos\omega t,$$

где ξ (x, t) – смещение точек среды с координатой x в момент времени t; A – амплитуда волны; ω – циклическая (круговая) частота; $k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi}{\upsilon T}=\frac{\omega}{\upsilon}$ – волновое число (λ – длина волны; υ – фазовая скорость; T – период колебаний).

Координаты пучностей и узлов стоячей волны:

$$x_{П} = \pm m\frac{\lambda}{2}; \qquad x_{у} = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2},$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Уровень *интенсивности* звука в децибелах:

$$L = 10\lg\frac{I}{I_0},$$

где I – интенсивность звука; I_0 – интенсивность звука на пороге слышимости ($I_0 = 10^{-12}$ Вт/м^2).

Эффект Доплера в акустике

$$\nu = \frac{(\upsilon \pm \upsilon_{пр})\nu_0}{\upsilon \mp \upsilon_{ист}},$$

где ν – частота звука, воспринимаемая движущимся приемником; ν_0 – частота звука, посылаемая источником; $\upsilon_{пр}$ – скорость движения приемника; $\upsilon_{ист}$ – скорость движения источника; υ – скорость распространения звука. Верхний знак берется, если при движении источника или приемника происходит их сближение, нижний знак – в случае их взаимного удаления.

Скорость распространения поперечной упругой волны (например, в тонкой струне):

$$\upsilon_{\perp} = \sqrt{\frac{F}{\rho S}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}},$$

где $\sigma = \dfrac{F}{S}$ – механическое напряжение в струне (модуль сдвига), ρ – плотность вещества струны.

Скорость распространения продольных волн в стержне

$$\upsilon_{\text{II}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

где E – модуль Юнга.

В изотропном твердом теле по любому направлению могут распространяться продольная упругая волна со скоростью $\upsilon_{\text{II}} = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$ и две поперечные волны со скоростью $\upsilon_{\perp} = \sqrt{\dfrac{\sigma}{\rho}}$. Скорость поперечных волн меньше скорости продольных волн ($\upsilon_{\perp} < \upsilon_{\text{II}}$).

В жидкостях возможно распространение лишь продольных волн. Скорость их распространения определяется формулой

$$\upsilon_{\text{II}} = \sqrt{\frac{k}{\rho}},$$

где k – модуль всестороннего сжатия, ρ – плотность жидкости (например, в воде $\upsilon_{\text{II}} \approx 1450$ м/с).

Скорость распространения продольных волн в *газообразной среде* (звук) определяется выражением

$$\upsilon_{\text{II}} = \sqrt{\gamma\frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma\frac{RT}{M}} = \langle\upsilon\rangle\sqrt{\frac{\pi\gamma}{8}},$$

где $\gamma = \dfrac{C_p}{C_V}$ – отношение теплоемкости газа при постоянном давлении к теплоемкости газа при постоянном объеме (показатель адиабаты); p и ρ – давление и плотность невозмущенного газа; M – молярная масса газа, T – абсолютная температура, R – универсальная газовая постоянная; $\langle\upsilon\rangle = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}$ – средняя скорость теплового движения молекул газа.

В воздухе при нормальных условиях скорость звука $\upsilon_{\text{II}} \approx 340$ м/с.

При распространении волн происходит перенос энергии без переноса вещества. Энергия волны в упругой среде состоит из *кинетической энергии* колебательного движения частиц вещества $K_{\Delta x}$ и *потенциальной энергии* упругой деформации среды $\Pi_{\Delta x}$.

Кинетическая энергия элемента стержня длиной Δx в точке x в момент времени t

$$K_{\Delta x} = \frac{1}{2}\rho S\Delta x\omega^2 A^2 \sin^2\left(\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)\right) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2\left(\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)\right),$$

где S – площадь сечения стержня; ρ – плотность материала стержня; ω – циклическая (круговая) частота; A – амплитуда колебания; υ – фазовая скорость; $m = \rho S\Delta x$ – масса выделенного элемента стержня.

Плотность кинетической энергии в точке x в момент времени t

$$w_K = \frac{K_{\Delta x}}{S\Delta x} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \sin^2\left(\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)\right).$$

Потенциальная энергия деформации $П_{\Delta x}$ в момент времени t:

$$П_{\Delta x} = \frac{1}{2} S\Delta x E\left(\frac{\Delta l}{\Delta x}\right)^2 = \frac{1}{2} S\Delta x E\left(\frac{\omega}{\upsilon} A\right)^2 \sin^2\left(\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)\right),$$

где Δl – удлинение рассматриваемого элемента стержня Δx, вызванное проходящей волной; S – площадь сечения стержня; E – модуль Юнга; ω – циклическая (круговая) частота; A – амплитуда колебания; υ – фазовая скорость.

Плотность потенциальной энергии в точке x в момент времени t:

$$w_П = \frac{П_{\Delta x}}{S\Delta x} = \frac{1}{2} E \frac{\omega^2}{\upsilon^2} A^2 \sin^2\left[\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)\right] = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \sin^2\left(\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)\right).$$

Суммарная плотность энергии в точке x в момент времени t:

$$w = w_П + w_К = \rho\omega^2 A^2 \sin^2\left(\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)\right),$$

где ρ – плотность материала; ω – циклическая (круговая) частота; A – амплитуда колебания; υ – фазовая скорость.

Среднее значение вдоль направления распространения волны:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2.$$

Плотность потока энергии волны (***вектор Умова***):

$$\vec{j} = \frac{d\Phi}{dS} = w\vec{\upsilon},$$

где $d\Phi$ – *поток энергии*, переносимой волной за единицу времени через площадку dS, перпендикулярную к направлению распространения волны.

Среднее значение модуля вектора Умова

$$\langle j \rangle = \langle w \rangle \upsilon = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 \upsilon = I.$$

При произвольной ориентации площадки dS (единичного вектора $\vec{n}$, нормального к плоскости площадки) относительно вектора Умова $\vec{j}$ поток через нее будет равен

$$d\Phi = \vec{j} \cdot d\vec{S} = j\Delta S \cos\alpha.$$

Полный поток через поверхность S определяется интегралом

$$\Phi = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_S j_n dS.$$

Примеры решения задач

Задача 1.121

Написать уравнение гармонического колебания, если амплитуда его 10 см, максимальная скорость 50 см/с, начальная фаза 15º. Определить период колебаний и смещение колеблющейся точки через 0,2 с от начала колебания.

Дано:

$A = 0,1$ м

$\upsilon_{max} = 0,5$ м/с

$\varphi_0 = 15^o$

$t = 0,2$ с

$x(t)$; T; $x(0,2)$ – ?

Решение

Уравнение гармонического колебания с начальной фазой φ_0 имеет вид:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Циклическая частота $\omega = 2\pi/T$. Скорость колеблющейся точки находится как первая производная смещения от времени:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Максимальная скорость достигается при значении

$$\cos(\omega t + \varphi_0) = 1; \quad \upsilon_{max} = A\omega,$$

откуда

$$\omega = \frac{\upsilon_{max}}{A} = \frac{2\pi}{T}; \quad T = \frac{2\pi A}{\upsilon_{max}}; \quad [T] = \frac{\text{м} \cdot \text{с}}{\text{м}} = \text{с};$$

$$T = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 0,1}{0,5} = 1,26 \text{ с}; \quad \omega = \frac{\upsilon_{max}}{A} = 5 \text{ с}^{-1}.$$

Выразим начальную фазу в радианах:

$$\varphi_0 = 2\pi\frac{15}{360} = \frac{\pi}{12}.$$

Тогда уравнение гармонического колебания запишется:

$$x(t) = 0,1\sin\left(5t + \frac{\pi}{12}\right).$$

В момент времени $t = 0,2$ с смещение $x(t)$ будет равно

$$x = 0,1\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{12}\right) = 0,1\sin\pi\left(\frac{2t}{T} + \frac{1}{12}\right); \; x = 0,1\sin\pi\left(\frac{2 \cdot 0,2}{1,26} + \frac{1}{12}\right) = 0,095 \text{ м}.$$

Следует отметить, что исходное уравнение гармонического колебания может быть определено в виде $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$. Повторив с этим уравнением вышеприведенное решение, получим тот же ответ.

Ответ: $x(t) = 0,1\sin\left(5t + \frac{\pi}{12}\right)$; $T = 1,26$ с; $x(0,2) = 0,095$ м.

Задача 1.122

Материальная точка совершает гармонические колебания с частотой n = 500 Гц и амплитудой A = 0,02 см. Определить среднее значение скорости $<\upsilon>$ и ускорения $<a>$ точки на пути от ее крайнего положения до положения равновесия, а также найти амплитудные значения этих величин υ_m, a_m.

Дано:
$n = 5\cdot10^2$ Гц
$A = 2\cdot10^{-4}$ м
$<\upsilon>; <a>; \upsilon_m; a_m$ – ?

Решение

По определению $<\upsilon> = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$. В данном случае $\Delta x = A$, а время $\Delta t = T/4$, так как за один период T колеблющаяся точка проходит путь, равный четырем амплитудам.

Следовательно,

$$<\upsilon> = \frac{4A}{T} = 4An; \quad [<\upsilon>] = \text{м}\cdot\text{с}^{-1} = \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$<\upsilon> = 4\cdot2\cdot10^{-4}\cdot5\cdot10^2 = 0{,}4 \text{ м/с}.$$

Уравнение скорости в гармонических колебаниях:

$$\upsilon = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Амплитудное значение скорости

$$\upsilon_m = A\omega = A2\pi n; \quad [\upsilon_m] = \text{м}\cdot\text{с}^{-1} = \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad \upsilon_m = 2\cdot10^{-4}\cdot2\pi\cdot5\cdot10^{-2} = 0{,}63\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

По определению среднее значение ускорения

$$<a> = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t},$$

где $\Delta\upsilon = \upsilon_m - \upsilon_0$; υ_m – максимальное значение скорости в момент положения равновесия; $\upsilon_0 = 0$ – скорость в крайнем положении.

$$<a> = \frac{4\upsilon_m}{T} = A8\pi n^2; \ [<a>] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; \ <a> = 2\cdot10^{-4}\cdot8\pi\cdot25\cdot10^4 = 1{,}26\cdot10^3 \text{ м/с}^2.$$

Уравнение ускорения в гармонических колебаниях:

$$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Амплитудное значение ускорения

$$a_m = A\omega^2 = A4\pi^2n^2; \quad [a_m] = \text{м/с}^2; \quad a_m = 2\cdot10^{-4}\cdot4\pi^2\cdot25\cdot10^4 = 2\cdot10^3 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $<\upsilon> = 0{,}4$ м/с; $<a> = 1{,}26\cdot10^3$ м/с^2; $\upsilon_m = 0{,}63$ м/с; $a_m = 2\cdot10^3$ м/с^2.

Задача 1.123

Материальная точка массой 20 г совершает гармонические колебания с периодом 9 с. Начальная фаза колебаний 10º. Через какое время от начала движения смещение точки достигнет половины амплитуды? Найти амплитуду, максимальные скорость и ускорение точки, если полная ее энергия равна 10^{-2} Дж.

Дано:	**Решение**
$m = 0{,}02$ кг $T = 9$ с $\varphi_0 = 10^\circ = \dfrac{\pi}{18}$ $x = 0{,}5\,A$ $E = 10^{-2}$ Дж	Уравнение гармонического колебательного движения: $$x = A\sin(\omega t + \varphi_0). \qquad (1)$$ Из уравнения (1) можно определить время t: $$x = A\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0\right);$$
t; A; υ_m; a_m – ?	

$$\frac{x}{A} = \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0\right); \qquad \text{тогда} \qquad \frac{2\pi t}{T} + \varphi_0 = \arcsin\frac{x}{A};$$

$$t = \frac{\left(\arcsin\dfrac{x}{A} - \varphi_0\right)T}{2\pi}. \qquad (2)$$

Подставляя числовые значения в формулу (2), получим:

$$t = \frac{\left(\arcsin 0{,}5 - \dfrac{\pi}{18}\right)}{2\pi}\cdot 9 = \frac{\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{18}}{2\pi}\cdot 9 = 0{,}5 \text{ с}.$$

Амплитуду колебаний можно определить из формулы полной энергии E колеблющейся точки:

$$E = \frac{mA^2\omega^2}{2}; \quad A = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2E}{m}} = \frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{2E}{m}}; \quad [A] = \text{с}\sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}} = \text{с}\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2\cdot\text{кг}}} = \text{с}\sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = \text{м};$$

$$A = \frac{9}{2\cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{2\cdot 10^{-2}}{2\cdot 10^{-2}}} = 1{,}43 \text{ м}.$$

Зная амплитуду, можно вычислить максимальную скорость точки, которая определяется как первая производная от смещения x по времени:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Полагая cos ($\omega t + \varphi$) = 1, получаем значение максимальной скорости:

$$\upsilon_m = A\omega = A\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{2E}{m}};\ [\upsilon_m] = \sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2\cdot\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = \text{м/с};\ \upsilon_m = \sqrt{\frac{2\cdot 10^{-2}}{2\cdot 10^{-2}}} = 1\ \text{м/с}.$$

Уравнение точки определяется как первая производная скорости по времени, т.е.

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Считая при максимальном ускорении sin ($\omega t + \varphi_0$) = –1, получим:

$$a_m = A\omega^2 = A\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{2\pi}{T}\sqrt{\frac{2E}{m}};$$

$$[a_m] = \frac{1}{\text{с}}\cdot\sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}} = \frac{1}{\text{с}}\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2\cdot\text{кг}}} = \frac{1}{\text{с}}\cdot\sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = \frac{1}{\text{с}}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a_m = \frac{2\cdot 3{,}14}{9} = \sqrt{\frac{2\cdot 10^{-2}}{2\cdot 10^{-2}}} = 6{,}98\cdot 10^{-1}\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 0{,}698\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 0{,}7\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

Ответ: t = 0,5 с; A = 1,43 м; υ_m = 1 м/с; a_m = 0,7 м/с^2.

Задача 1.124

Материальная точка массой m = 1 г колеблется гармонически. Амплитуда колебаний равна 5 см, циклическая частота 2 с$^{-1}$, начальная фаза равна 0. Определить силу, действующую на точку в тот момент, когда ее скорость равна 6 м/с.

Дано:
$\upsilon = 6\cdot 10^{-3}$ м/с
$A = 5\cdot 10^{-2}$ м
$m = 10^{-3}$ кг
$\omega = 2$ с$^{-1}$
$\varphi_0 = 0$

F – ?

Решение

Скорость определяется первой производной от смещения по времени:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt}.$$

Смещение x определим уравнением

$x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$, или, т.к. $\varphi_0 = 0$, то $x = A\sin\omega t$.

Находим скорость:

$$\upsilon = A\omega\cos\omega t.$$

Ускорение равно производной от скорости по времени:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt};\quad a = -A\omega^2\sin\omega t.$$

Возводим скорость и ускорение во вторую степень:

$$\upsilon^2 = A^2\omega^2\cos^2 \omega t; \qquad (1)$$

$$a^2 = A^2\omega^4\sin^2 \omega t\,. \qquad (2)$$

Уравнение (1) разделим на $A^2\omega^2$, а уравнение (2) – на $A^2\omega^4$ и сложим их:

$$\frac{\upsilon^2}{A^2\omega^2} + \frac{a^2}{A^2\omega^4} = 1.$$

Производим дальнейшие преобразования:

$$\upsilon^2\omega^2 + a^2 = A^2\omega^4; \quad a^2 = A^2\omega^4 - \upsilon^2\omega^2; \quad a^2 = \omega^2(A^2\omega^2 - \upsilon^2).$$

Ускорение получается равным

$$a = \omega\sqrt{A^2\omega^2 - \upsilon^2}\,.$$

Следовательно, сила по второму закону Ньютона равна:

$$F = ma; \quad F = m\omega\sqrt{A^2\omega^2 - \upsilon^2}\,; \quad [F] = \frac{\text{кг}}{\text{с}}\sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н};$$

$$F = 10^{-3}\cdot 2\sqrt{(5\cdot 10^{-2})^2\cdot 2^2 - (6\cdot 10^{-2})^2} = 16\cdot 10^{-5}\ \text{Н}.$$

Ответ: $F = 16\cdot 10^{-5}$ Н.

Задача 1.125

За какую часть периода точка, совершающая гармонические колебания, пройдет путь, равный: 1) половине амплитуды, если в начальный момент она находилась в положении равновесия; 2) одной трети амплитуды, если в начальный момент она находилась в крайнем положении.

Дано:
1) $x_1 = A/2$
2) $x_2 = A/3$
t_1; t_2 – ?

Решение

1. Смещение точки x от положения равновесия к крайнему положению

$$x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right) \text{ при } t = 0;\ x = 0;\ \varphi_0 = 0;$$

$$x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right); \quad x = \frac{x_m}{2}; \quad \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = 1/2; \quad \frac{2\pi}{T}t = \pi/6; \quad t = T/12.$$

2. Точка движется из крайнего положения точки B, поэтому начальные условия будут такие: $t = 0$; $x = A$.

Уравнение смещения:

$$x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right), \text{ где } \varphi_0 = \pi/2; \quad x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \pi/2\right);$$

$$x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right); \quad x = 2/3\,A; \quad \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = 2/3; \quad \frac{2\pi}{T}t = \arccos 2/3;$$

$$t = \frac{T\cdot 48^\circ}{360^\circ} = \frac{T}{7{,}5}.$$

Ответ: 1) $t_1 = \dfrac{T}{12}$; 2) $t_2 = \dfrac{T}{7{,}5}$.

Задача 1.126

Тело массой m = 10 г совершает гармонические колебания по закону $x = 0{,}1\cos(4\pi t + \pi/4)$ м.

Определить максимальные значения: 1) кинетической энергии; 2) возвращающей силы.

Дано:	**Решение**
$m = 10^{-2}$ кг	Уравнение зависимости смещения от времени задано:
$x = 0{,}1\cos(4\pi t + \pi/4)$ м	$x = 0{,}1\cos(4\pi t + \pi/4)$,
E_{km}, F_m – ?	

где амплитуда A = 0,1 м; циклическая частота $\omega = 4\pi$ с$^{-1}$.

Продифференцировав уравнение смещения по времени, получим уравнение скорости υ:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -0{,}1\cdot 4\pi\sin(4\pi t + \pi/4).$$

Максимальное значение скорости достигается при $\sin(4\pi t + \pi/4) = 1$;

$$\upsilon_m = 0{,}1\cdot 4\pi \text{ м/с},$$

максимальное значение кинетической энергии

$$E_{km} = \frac{m\upsilon_m^2}{2}; \quad [E_{km}] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Дж};$$

$$E_{km} = \frac{10^{-2}\cdot(0{,}1\cdot 4\pi)^2}{2} = 8\pi^2\cdot 10^{-4}\text{ Дж} = 7{,}89 \text{ мДж}.$$

Продифференцировав уравнение скорости по времени, получим уравнение ускорения:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -0{,}1(4\pi)^2\cos(4\pi t + \pi/4).$$

Максимальное значение ускорения достигается при

$$\cos(4\pi t + \pi/4) = 1; \quad a = 0{,}1\,(4\pi)^2 \text{ м/с}^2.$$

Тогда максимальное значение возвращающей силы

$$F_m = ma_m; \quad F_m = 10^{-2}\cdot 0{,}1\cdot(4\pi)^2 = 0{,}158 \text{ Н}.$$

Ответ: 1) $E_{km} = 7{,}89$ мДж; 2) $F_m = 0{,}158$ Н.

Задача 1.127

Материальная точка массой m = 10 г совершает гармонические колебания с амплитудой A = 10 см. Определить частоту n колебаний, если максимальная сила F_m, действующая на точку, равна 10 мН.

Дано:
$m = 10^{-2}$ кг
$A = 0{,}1$ м
$F_m = 10^{-2}$ Н

n – ?

Решение

Уравнение гармонических колебаний:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Скорость и ускорение колеблющейся точки:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0);$$

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Согласно второму закону Ньютона сила, действующая на точку,

$$F = ma = -mA\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Сила максимальна ($F = F_m$) при $\cos(\omega t + \varphi_0) = \pm 1$, т.е. $F_m = mA\omega^2$.

Учитывая, что циклическая частота $\omega = 2\pi n$, выражение для F_m можно записать в виде:

$$F_m = 4\pi^2 mAn^2,$$

откуда искомая частота

$$n = \sqrt{\frac{F_m}{4\pi^2 Am}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{F_m}{Am}}; \quad [n] = \sqrt{\frac{\text{Н}}{\text{м}\cdot\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{м}\cdot\text{кг}}} = \sqrt{\frac{1}{\text{с}^2}} = \text{с}^{-1};$$

$$n = \frac{1}{2\cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{10^{-2}}{0{,}1\cdot 10^{-2}}} = 0{,}503 \text{ с}^{-1}.$$

Ответ: $n = 0{,}503$ Гц.

Задача 1.128

Пружинный маятник совершает гармонические колебания, описываемые уравнением $x = 0{,}3\cos\frac{\pi}{6}t$, м. В тот момент, когда возвращающая сила F в первый раз достигла значения –10 мН, потенциальная энергия E_n маятника оказалась равной 7,5 мДж. Определить этот момент времени t.

Дано:	**Решение**
$x = 0{,}3\cos\frac{\pi}{6}t$, м $F = -10^{-2}$ Н $E_n = 7{,}5\cdot10^{-3}$ Дж	Из заданного уравнения гармонических колебаний маятника $x = 0{,}3\cos\frac{\pi}{6}t$, м, следует, что амплитуда колебаний $A = 0{,}3$ м, циклическая частота $\omega = \pi/6$ с$^{-1}$.
t – ?	

Тогда в общем виде это уравнение можно записать:

$$x = A\cos\omega t. \qquad (1)$$

Возвращающая сила упругости F деформированной пружины пропорциональна смещению x из положения равновесия и равна:

$$F = -kx = -k\,A\cos\omega t, \qquad (2)$$

где k – жесткость пружины.

Потенциальная энергия маятника, совершающего под действием упругой силы гармонические колебания,

$$E_n = -\int_0^x F dx = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}\cos^2\omega t. \qquad (3)$$

Поделив (3) на (2), получаем:

$$\frac{E_n}{F} = -\frac{A}{2}\cos\omega t,$$

откуда

$$\omega t = \arccos\left(-\frac{2E_n}{AF}\right) = \arccos\left(-\frac{2\cdot7{,}5\cdot10^{-3}}{0{,}3\cdot(-10^{-2})}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ рад.}$$

Тогда искомый момент времени

$$t = \frac{\frac{\pi}{3}}{\omega} = \frac{\pi}{3\omega} = \frac{6\pi}{3\pi} = \frac{6}{3} = 2 \text{ с}.$$

Ответ: $t = 2$ с.

Задача 1.129

Материальная точка массой m = 50 г совершает гармонические колебания согласно уравнению $x = 0{,}1\cos\dfrac{3\pi}{2}t$, м.

Определить: 1) возвращающую силу F для момента времени t = 0,5 с; 2) полную энергию.

Дано:
$m = 5\cdot10^{-2}$ кг
t = 0,5 с
$x = 0{,}1\cos\dfrac{3\pi}{2}t$, м
F; E – ?

Решение

Возвращающая сила $F = ma$, где ускорение

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -0{,}1\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2\cos\frac{3\pi}{2}t,$$

через t = 0,5 с ускорение равно:

$$a = -0{,}1\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2\cos\frac{3\pi}{4}.$$

Возвращающая сила будет равна:

$$F = ma;\quad F = 5\cdot10^{-2}\cdot0{,}1\cdot\frac{9\pi^2}{2}\cdot0{,}71 = 78{,}7 \text{ мН}.$$

Полная энергия

$$E = \frac{mA^2\omega^2}{2};\quad [E] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Дж};$$

$$E = \frac{5\cdot10^{-2}\cdot10^{-2}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)^2}{2} = 5{,}55\cdot10^{-3}\text{ Дж} = 5{,}55\text{ мДж}.$$

Ответ: F = 78,7 мН; E = 5,55 мДж.

Задача 1.130

Через какую долю периода в первый раз от начала колебаний кинетическая энергия будет равна потенциальной?

Дано:
$t_0 = 0$
$E_п = E_к$
t – ?

Решение

Смещение колеблющейся точки от положения равновесия

$$x = A\cos\frac{2\pi}{T}t.$$

Уравнение скорости:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\frac{2\pi}{T}\sin\frac{2\pi}{T}t.$$

Кинетическая энергия

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{mA^2 4\pi^2}{2T^2} = \sin^2\frac{2\pi}{T}t\ .$$

Потенциальная энергия

$$E_п = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2\cos^2\frac{2\pi}{T}t}{2} = \frac{m4\pi^2 A^2\cos^2\frac{2\pi}{T}t}{2T^2}\ ;$$

$$\frac{E_k}{E_n} = tg^2\frac{2\pi}{T}t\ .$$

Так как энергии равны, то

$$1 = \mathrm{tg}^2\frac{2\pi}{T}t;\quad \mathrm{tg}\frac{2\pi}{T}t = 1;\quad \frac{2\pi}{T}t = \pi/4;\quad t = T/8.$$

Ответ: $t = T/8$.

Задача 1.131

Складываются два гармонических колебания одного направления с периодами $T_1 = T_2 = 2$ с, амплитудами $A_1 = A_2 = 3$ см и начальными фазами $\varphi_1 = \pi/2$ и $\varphi_2 = \pi/3$. Записать уравнение результирующих колебаний, найти амплитуду A и начальную фазу φ, построить векторную диаграмму.

Дано:
$T_1 = T_2 = 2$ с
$A_1 = A_2 = 0{,}03$ м
$\varphi_1 = \pi/2$
$\varphi_2 = \pi/3$

A, φ – ?

Решение

Амплитуду и начальную фазу результирующего колебания определим по формулам

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}\ ;\quad A = 5{,}8\cdot10^{-2}\ \text{м};$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} = 75^o;$$

$$\varphi = 0{,}417\ \pi\ \text{рад}.$$

Запишем уравнения складывающихся колебаний:

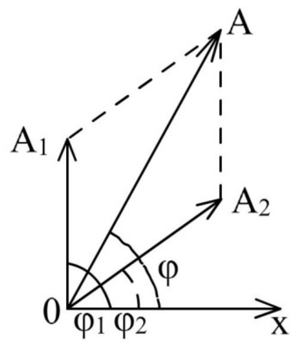
$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1);$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

и результирующих колебаний:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) = 5{,}8\cdot10^{-2}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + 0{,}417\pi\right) =$$

$$= 5{,}8\cdot10^{-2}\cos(\pi t + 0{,}417\pi)\text{ м.}$$



Векторная диаграмма складываемых колебаний показана на рисунке.

Ответ: $A = 5{,}8\cdot10^{-2}$ м; $\varphi = 0{,}417\ \pi$ рад; $x = 5{,}8\cdot10^{-2}\cos(\pi t + 0{,}417\pi)$ м.

Задача 1.132

Тонкий однородный диск радиусом R = 0,3 м имеет вырез в виде круга радиусом r = 0,15 м (см. рисунок). Найти период колебаний диска, если ось вращения перпендикулярна к его плоскости и проходит через точку O.

Дано:
R = 0,3 м
r = 0,15 м
T – ?

Решение

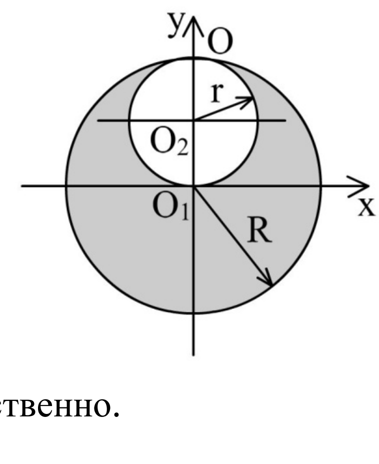
Диск представляет собой физический маятник, период колебаний которого определяется по формуле

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}, \qquad (1)$$

где J – момент инерции маятника относительно оси колебаний O; d – расстояние между центром масс маятника и осью колебаний.

Момент инерции диска найдем по формуле

$$J = J_R - J_r, \qquad (2)$$



где J_R – момент инерции диска радиусом R (без выреза); J_r – момент инерции диска радиусом r.

С использованием теоремы Штейнера имеем:

$$J_R = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2; \qquad (3)$$

$$J_r = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2, \qquad (4)$$

где M и m – массы дисков радиусами R и r соответственно.

Подставив выражения (3), (4) в (2), получим:

$$J = \frac{3}{2}\left(Mr^2 - mr^2\right). \qquad (5)$$

Найдем массы дисков:

$$M = \rho\pi R^2 h; \quad m = \rho\pi r^2 h, \qquad (6)$$

где ρ – плотность материала диска; h – толщина диска.

Уравнение (5) с учетом (6) примет вид:

$$J = \frac{3}{2}(\rho\pi R^4 - \rho\pi r^4)h = \frac{3}{2}\rho\pi(R^4 - r^4)h. \quad (7)$$

Найдем расстояние d по формуле

$$d = \frac{\sum m_y}{\sum m} = \frac{\left(\rho\pi R^2 \cdot R - \rho\pi r^2 \cdot r\right)h}{\left(\rho\pi R^2 - \rho\pi r^2\right)h} = \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}. \quad (8)$$

Подставим выражения (7) и (8) в формулу (1):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3\pi\rho\left(R^4 - r^4\right)\left(R^2 - r^2\right)h}{2\pi\rho\left(R^2 - r^2\right)g\left(R^3 - r^3\right)h}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2g}\cdot\frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}};$$

$$[T] = \sqrt{\frac{\text{м}^4 \cdot \text{с}^2}{\text{м} \cdot \text{м}^3}} = \text{с};$$

$$T = 2\cdot 3{,}14\sqrt{\frac{3}{2\cdot 9{,}8}\cdot\frac{0{,}3^4 - 0{,}15^4}{0{,}3^3 - 0{,}15^4}} = 1{,}39 \text{ с}.$$

Ответ: $T = 1{,}39$ с.

Задача 1.133

Физический маятник в виде тонкого однородного стержня совершает гармонические колебания вокруг неподвижной оси, проходящей через точку подвеса O, находящуюся от центра масс C на расстоянии $x = 28{,}9$ см. Определить длину стержня, если циклическая частота колебаний максимальна.

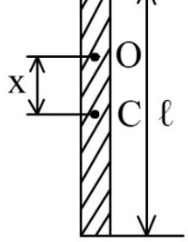
Дано:
$x = 0{,}289$ м
$\omega = \omega_m$

l – ?

Решение

Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgx}},$$



где J – момент инерции стержня относительно горизонтальной оси, проходящей через точку O, не совпадающую с центром масс C стержня (см. рисунок); m – масса стержня; g – ускорение свободного падения; x – расстояние между точкой подвеса O и центром масс C.

Циклическая частота

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mgx}{J}}\,. \qquad (1)$$

Согласно теореме Штейнера момент инерции стержня относительно оси, проходящей через точку подвеса, находящуюся от центра масс на расстоянии x,

$$J = J_0 + mx^2 = \frac{ml^2}{12} + mx^2, \qquad (2)$$

где $J_0 = \dfrac{ml^2}{12}$ – момент инерции стержня относительно горизонтальной оси, проходящей через центр масс стержня (через середину стержня).

Подставив (2) в (1), получаем:

$$\omega = \sqrt{\frac{12gx}{l^2 + 12x^2}}\,. \qquad (3)$$

Найдем экстремум функции (3) (по условию задачи циклическая частота максимальна):

$$\frac{d\omega}{dx} = 0; \qquad \frac{d\omega}{dx} = \frac{\sqrt{3}g\ (l^2 - 12x^2)}{x^{1/2}\ (l^2 + 12x^2)^{3/2}} = 0,$$

откуда

$l^2 - 12x^2 = 0$ (нас интересует только положительные решения),

т.е. искомая длина маятника

$$l = 2\sqrt{3}x; \quad l = 2\cdot 1{,}73\cdot 0{,}289 = 1 \text{ м}.$$

Ответ: $l = 1$ м.

Задача 1. 134

Шарик массой $m = 20$ г колеблется с периодом $T = 2$ с. В начальный момент времени шарик обладал энергией $E = 0{,}01$ Дж и находился от положения равновесия на расстоянии $x_1 = 0{,}25$ м. Написать уравнение гармонических колебаний шарика.

Дано:
$m = 0{,}02$ кг
$T = 2$ с
$E = 0{,}01$ Дж
$x_1 = 0{,}25$ м

$x(t)$ – ?

Решение

Полная энергия колеблющейся точки, независимо от ее положения, определяется выражением

$$E = \frac{m\omega^2 A^2}{2}, \qquad (1)$$

где A – амплитуда колебаний; $\omega = 2\pi/T$ – круговая частота.

Уравнение колебаний имеет вид:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0), \text{ в момент } t = 0$$

$$x_1 = A\cos\varphi; \quad \cos\varphi = \frac{A}{x_1} = 0{,}78; \quad \varphi \approx 51^\circ \approx 0{,}3\,\pi.$$

Определив начальную фазу, найдем из (1) амплитуду колебаний:

$$A^2 = \frac{2E}{m\omega^2} = \frac{4ET^2}{m \cdot 4\pi^2}; \quad A = \frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{2E}{m}}; \quad [A] = \text{с}\sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}} = \text{с}\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2\cdot\text{кг}}} = \text{с}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}} = \text{м};$$

$$A = \frac{2}{2\cdot 3{,}14}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 0{,}01}{0{,}02}} = 0{,}32 \text{ м}.$$

Таким образом, получаем уравнение колебаний точки:

$$x = 0{,}32\cos\pi(t + 0{,}3).$$

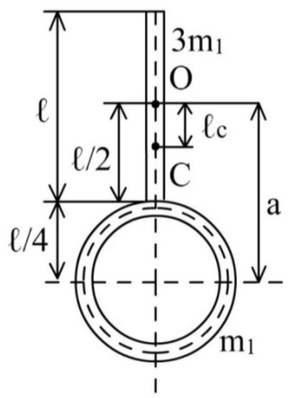
Ответ: $x = 0{,}32\cos\pi(t + 0{,}3)$ м.

Задача 1.135

Физический маятник представляет собой стержень длиной $l = 1$ м и массой $3m_1$ с прикрепленным к одному из его концов обручем диаметром $d = l/2$ и массой m_1. Горизонтальная ось OZ маятника проходит через середину стержня перпендикулярно к нему (см. рисунок). Определить период T колебаний такого маятника.

Дано:
$l = 1$ м
$m = 3m_1$
$d = l/2$
m_1

T – ?



Решение

Период колебаний физического маятника определяется по формуле

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl_c}}, \tag{1}$$

где J – момент инерции маятника относительно оси колебаний; m – его масса; l_c – расстояние от центра масс маятника до оси колебаний.

Момент инерции маятника равен сумме моментов инерции стержня J_1 и обруча J_2:

$$J = J_1 + J_2. \tag{2}$$

Момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его центр масс, определяется по формуле

$$J_1 = \frac{ml^2}{12}.$$

В данном случае $m = 3m_1$, тогда

$$J_1 = \frac{m_1 l^2}{4}. \quad (3)$$

Момент инерции обруча найдем, воспользовавшись теоремой Штейнера:

$$J = J_0 + ma^2,$$

где J – момент инерции относительно произвольной оси; J_0 – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс параллельно заданной оси; a – расстояние между указанными осями. Применив эту формулу к обручу, получим:

$$J_2 = m_1\left(\frac{l}{4}\right)^2 + m_1\left(\frac{3l}{4}\right)^2 = \frac{5}{8}\, m_1 l^2. \quad (4)$$

Подставив выражения (3) и (4) в формулу (2), найдем момент инерции маятника относительно оси вращения:

$$J = \frac{1}{4}\, m_1 l^2 + \frac{5}{8}\, m_1 l^2 = \frac{7}{8}\, m_1 l^2. \quad (5)$$

Расстояние l_c от оси маятника до его центра масс

$$l_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{3m_1 \cdot 0 + m_1 \dfrac{3l}{4}}{3m_1 + m_1} = \frac{\dfrac{3}{4} m_1 l}{4m_1} = \frac{3}{16} l\,. \quad (6)$$

Подставив в формулу (1) выражения (5) и (6) и массы маятника ($m = 3m_1 + m_1 = 4m_1$), найдем период его колебаний:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\dfrac{7}{8} m_1 l^2}{4m_1 g\, \dfrac{3}{16} l}} = 2\pi\sqrt{\frac{7l}{6g}}; \quad [T] = \sqrt{\frac{\text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{м}}} = \text{с};$$

$$T = 2 \cdot 3{,}14\sqrt{\frac{7 \cdot 1}{6 \cdot 9{,}8}} = 2{,}17 \text{ с}.$$

Ответ: $T = 2{,}17$ с.

Задача 1.136

Тонкий невесомый стержень длиной $l = 0{,}5$ м с грузиками на концах массами $m_1 = m_2 = m$ колеблется около точки O на горизонтальной оси (см. рисунок). Определить приведенную длину $l_{пр}$ и период колебаний такого маятника, если расстояние $d = 0{,}1$ м.

Дано:
l = 0,5 м
$m_1 = m_2 = m$
d = 0,1 м
T; $l_{пр}$ – ?

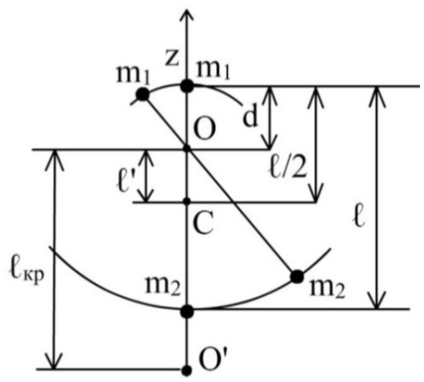
Решение

Приведенная длина физического маятника

$$l_{пр} = \frac{J}{m'l'}, \qquad (1)$$

а период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_{пр}}{g}}, \qquad (2)$$



где J – момент инерции маятника относительно оси колебаний (точки O); $m' = m_1 + m_2 = 2m$ – масса маятника; $l' = l/2 - d$ – расстояние от оси вращения до центра инерции маятника (точки C).

Считая грузики за материальные точки, найдем момент инерции J маятника относительно оси вращения (точки O):

$$J = J_1 + J_2,$$

где $J_1 = md^2$, $J_2 = m(l - d)^2$, поэтому

$$J = md^2 + m(l - d)^2.$$

Определим приведенную длину маятника по формуле (1):

$$l_{пр} = \frac{J}{m'l'} = \frac{m\,[d^2 + (l-d)^2]}{2m\left(\frac{l}{2} - d\right)} = \frac{d^2 + (l-d)^2}{2\left(\frac{l}{2} - d\right)}; \quad [l_{пр}] = \frac{м^2}{м} = м;$$

$$l_{пр} = \frac{0{,}1^2 + (0{,}5 - 0{,}1)^2}{2\left(\frac{0{,}5}{2} - 0{,}1\right)} = 0{,}57 \text{ м}.$$

По формуле (2) найдем период колебаний маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_{пр}}{g}}; \quad [T] = \sqrt{\frac{м \cdot с^2}{м}} = с; \quad T = 2 \cdot 3{,}14 \cdot \sqrt{\frac{0{,}57}{9{,}81}} = 1{,}5 \text{ с}.$$

Ответ: T = 1,5 с; $l_{пр}$ = 0,57 м.

Задача 1.137

Определить период колебаний T математического маятника с длиной нити l = 0,8 м, поднимающегося вверх с ускорением a = 2 м/с^2.

Дано:	**Решение**
l = 0,8 м a = 2 м/с^2	Колебания маятника, поднимающегося с ускорением a, эквивалентны колебаниям маятника в поле силы тяжести с ускорением $g' = g + a$, если маятник поднимается вверх, и $g' = g - a$, если маятник опускается вниз.
T – ?	

Таким образом,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}; \quad [T] = \sqrt{\frac{\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{м}}} = \text{с}; \quad T = 2\cdot 3{,}14\sqrt{\frac{0{,}8}{9{,}8+2}} = 1{,}6\ \text{с}.$$

Ответ: T = 1,6 с.

Задача 1.138

Найти период T затухающих колебаний математического маятника длиной l = 1 м, если известен логарифмический декремент затухания θ = 0,6.

Дано:	**Решение**
l = 1 м θ = 0,6	Найдем период T_0 свободных колебаний: $$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$
T – ?	

Частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2},$$

где $\omega = \frac{2\pi}{T}$; $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$; $\delta = \frac{\theta}{T}$ – коэффициент затухания.

Следовательно,

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{T_0^2} - \frac{\theta^2}{T^2}};$$

Из этого выражения определим период затухающих колебаний:

$$T = \frac{T_0}{2\pi}\sqrt{4\pi^2+\theta^2} = \sqrt{\frac{l}{g}(4\pi^2+\theta^2)}; \quad [T] = \sqrt{\frac{\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{м}}} = \text{с};$$

$$T = \sqrt{\frac{1}{9{,}8}(4\cdot 3{,}14^2 + 0{,}6^2)} = 2\ \text{с}.$$

Ответ: T = 2 с.

Задача 1.139

Результирующее колебание, получающееся при сложении двух гармонических колебаний одного направления, мало отличающихся по частоте, описывается уравнением вида $x = A\cos t\cos 50t$. Определить циклические частоты складываемых колебаний; циклическую частоту биений; период биений.

Дано:	**Решение**
$x = A\cos t\cos 50t$	
ω_1; ω_2; $\omega_б$; $T_б$ – ?	

Результирующее колебание, получающееся при сложении двух гармонических колебаний одного направления с очень близкими частотами (для простоты считаем, что амплитуды складываемых колебаний равны, а начальные фазы складываемых колебаний равны нулю),

$$x = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right). \qquad (1)$$

Из заданного в задаче результирующего колебания $x = A\cos t\cos 50t$ и уравнения (1) следует, что

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = 50,$$

откуда

$$\omega_1 - \omega_2 = 2; \quad \omega_1 + \omega_2 = 100.$$

Решая эти уравнения, получаем:

$$\omega_1 = 51\ \text{с}^{-1}; \quad \omega_2 = 49\ \text{с}^{-1}.$$

Циклическая частота биений равна разности циклических частот складываемых колебаний:

$$\omega_б = |\omega_1 - \omega_2|. \qquad (2)$$

Таким образом, искомая частота биений согласно (2) равна 2 с$^{-1}$.

Период абсолютного значения косинуса равен π, поэтому период биений определяется из условия

$$\frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2}T_б = \pi,$$

откуда искомый период биений

$$T_б = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}.$$

Вычисляя, получаем: $T_б = 3{,}14$ с.

Ответ: $\omega_1 = 51\ \text{с}^{-1}$; $\omega_2 = 49\ \text{с}^{-1}$; $\omega_б = 2\ \text{с}^{-1}$; $T_б = 3{,}14$ с.

Задача 1.140

Энергия затухающих колебаний маятника, происходящих в некоторой среде, за время t_1 = 2 мин уменьшилась в N = 100 раз. Определить коэффициент сопротивления, если масса маятника m = 0,1 кг.

Дано:
t = 120 с
$\frac{E_1}{E_2} = 100$
m = 0,1 кг
r – ?

Решение

Коэффициент сопротивления r связан с коэффициентом затухания δ и массой m соотношением

$$\frac{r}{m} = 2\delta; \quad r = 2\delta m.$$

Чтобы определить коэффициент затухания δ, запишем уравнение смещения затухающих колебаний:

$$x = A_0 e^{-\delta t}\cos\omega t,$$

где A_0 – амплитуда при t = 0.

Полная энергия затухающих колебаний $E = \frac{m\omega^2 A^2}{2}$ пропорциональна квадрату амплитуды:

$$\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2; \quad \frac{A_1}{A_2} = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} = \sqrt{100} = 10;$$

$$A_1 = A_0 e^{-\delta t}; \quad A_2 = A_0 e^{-\delta(t_1+t)}; \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_0 e^{-\delta t}}{A_0 e^{-\delta(t+t_1)}}; \quad \frac{A_1}{A_2} = e^{\delta t_1}; \quad \delta = \frac{\ln\frac{A_1}{A_2}}{t_1}.$$

Тогда

$$r = 2\delta m = 2\,\frac{\ln\frac{A_1}{A_2}}{t_1}m; \quad [r] = \text{кг/с}; \quad r = \frac{2\cdot 2{,}3\cdot 0{,}1}{120} = 0{,}0038 \text{ кг/с}.$$

Ответ: r = 0,0038 кг/с.

Задача 1.141

Тело массой m = 0,6 кг, подвешенное к пружине жесткостью k = 30 Н/м, совершает в некоторой среде упругие колебания. Логарифмический декремент затухания θ = 0,01.

Определить: 1) время t_1, за которое амплитуда колебаний уменьшится в 3 раза; 2) число полных колебаний N, которые должно совершить тело, чтобы произошло подобное уменьшение амплитуды.

Дано:
$m = 0{,}6$ кг
$k = 30$ Н/м
$\theta = 0{,}01$
$\dfrac{A_1}{A_2} = 3$

t_1; N – ?

Решение

Уравнение смещения для затухающих колебаний:

$$x = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $A = A_0 e^{-\delta t}$ – амплитуда затухающих колебаний;

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_0 e^{-\delta t}}{A_0 e^{-\delta(t+t_1)}} = e^{-\delta t_1}; \qquad e^{\delta t_1} = 3;$$

$$t_1 = \frac{\ln 3}{\delta} = \frac{\ln 3}{0{,}01} = 110 \text{ с.}$$

Период колебаний пружинного маятника $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ – время одного полного колебания.

Число полных колебаний

$$N = \frac{t_1}{T}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}6}{30}} = \frac{2\pi}{7{,}07} = 0{,}89 \text{ с}; \quad N = \frac{110}{0{,}89} = 123.$$

Ответ: $t_1 = 110$ с; $N = 123$.

Задача 1.142

Тело массой $m = 100$ г, совершая затухающие колебания, за $t_1 = 1$ мин потеряло 40 % своей энергии. Определить коэффициент сопротивления r.

Дано:
$m = 0{,}1$ кг
$t_1 = 60$ с
$\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{1}{0{,}6} = \dfrac{5}{3}$

r – ?

Решение

Полная энергия при колебательном движении $E = \dfrac{m\omega^2 A^2}{2}$ пропорциональна квадрату амплитуды:

$$\frac{E(t)}{E(t+t_1)} = \left(\frac{A_0 e^{-\delta t}}{A_0 e^{-\delta(t+t_1)}}\right)^2; \quad \frac{E(t)}{E(t+t_1)} = e^{2\delta t_1},$$

где δ – коэффициент затухания; $2\delta = \dfrac{r}{m}$.

Потеряно 40 % энергии, осталось 60 % энергии:

$$\frac{1}{0{,}6} = e^{2\delta t_1}; \qquad \delta = \frac{\ln\frac{5}{3}}{2t_1}.$$

Коэффициент сопротивления

$$r = 2\delta m;\quad [r] = \text{с}^{-1}\cdot\text{кг} = \text{кг/с};\quad r = \frac{m\ln\frac{5}{3}}{60} = \frac{0{,}1\ln\frac{5}{3}}{60} = 8{,}54\cdot10^{-4}\ \text{кг/с}.$$

Ответ: $r = 8{,}54\cdot10^{-4}$ кг/с.

Задача 1.143

Определить добротность Q колебательной системы, если за время, в течение которого система совершает $N = 90$ полных колебаний, их амплитуда уменьшилась в 3 раза.

Дано:
$N = 90$
$n = 3$
Q – ?

Решение

При малых значениях логарифмического декремента θ добротность колебательной системы может быть определена так:

$$Q = \pi/\theta. \qquad (1)$$

Логарифмический декремент затухания

$$\theta = \delta T, \qquad (2)$$

где δ – коэффициент затухания; T – условный период затухающих колебаний.

Амплитуда затухающих колебаний

$$A = A_0 e^{-\delta t}. \qquad (3)$$

Зная число полных колебаний, найдем

$$t = NT. \qquad (4)$$

Тогда, учитывая выражения (2) и (4),

$$A = A_0 e^{-N\theta} \quad \text{или} \quad \frac{A_0}{A} = n = e^{N\theta},$$

откуда

$$\theta = \frac{\ln n}{N}. \qquad (5)$$

Подставив формулу (5) в выражение (1), найдем искомую добротность колебательной системы:

$$Q = \frac{\pi N}{\ln n};\quad Q = \frac{3{,}14\cdot 90}{\ln 3} = 257.$$

Ответ: $Q = 257$.

Задача 1.144

Колебательная система совершает затухающие колебания с частотой ν = 900 Гц. Определить собственную частоту колебательной системы, если резонансная частота $\nu_{рез}$ = 898 Гц.

Дано:	**Решение**
ν = 900 Гц $\nu_{рез}$ = 898 Гц	Циклическая частота затухающих колебаний
$\nu_{собс}$ – ?	

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\,, \qquad (1)$$

где ω_0 – собственная циклическая частота колебательной системы; δ – коэффициент затухания.

Резонансная частота

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}\,. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) находим:

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \delta^2; \qquad (3)$$

$$\omega_0^2 = \omega_{рез}^2 + 2\delta^2. \qquad (4)$$

Умножая уравнение (3) на 2 и вычитая из него (4), получаем:

$$\omega_0^2 = 2\omega^2 - \omega_{рез}^2. \qquad (5)$$

Учитывая, что $\omega = 2\pi\nu$, из уравнения (5) найдем искомую собственную частоту колебательной системы:

$$\nu_{собс} = \sqrt{2\nu^2 - \nu_{рез}^2}\,; \quad \nu_{собс} = \sqrt{2\cdot 900^2 - 898^2} = 902 \text{ Гц}.$$

Ответ: $\nu_{собс}$ = 902 Гц.

Задача 1.145

Тело массой m = 50 г совершает затухающие колебания, начальная амплитуда A_0 которых равна 10 см, начальная фаза $\varphi_0 = 0$, коэффициент затухания δ = 1,6 с$^{-1}$. В результате действия на это тело внешней периодической силы установились вынужденные колебания, описываемые уравнением $x = 6\cos(10\pi t - 0{,}75\pi)$, см. Написать уравнение собственных затухающих колебаний; уравнение внешней периодической силы.

Дано:	**Решение**
m = 0,05 кг A_0 = 0,1 м $\varphi_0 = 0$ $x = 0{,}06\cos(10\pi t - 0{,}75\pi)$, м δ = 1,6 с$^{-1}$	Уравнение собственных затухающих колебаний с начальной фазой, равной нулю:
$x(t)$; $F(t)$ – ?	

$$x = A_0 e^{-\delta t}\cos\omega t. \qquad (1)$$

Для определения собственной частоты ω колебательной системы запишем выражение для сдвига фаз φ между собственными и вынужденными колебаниями:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \qquad (2)$$

где ω – циклическая частота внешней вынуждающей силы, которая согласно уравнению вынужденных колебаний, заданному в условии, равна 10 π. Из этого же уравнения следует, что φ = –0,75 π, откуда tg φ = 1.

Тогда согласно (2)

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + 2\delta\omega},$$

после подстановки числовых значений получаем:

$$\omega_0 = \sqrt{(10\pi)^2 + 2\cdot 1{,}6\cdot 10\pi} = 10{,}5\pi \text{ с}^{-1}.$$

Уравнение (1) собственных затухающих колебаний после подстановки числовых значений запишем в виде:

$$x = 0{,}1e^{-1{,}6t}\cos 10{,}5\pi t, \text{ м.}$$

Уравнение внешней вынуждающей силы:

$$F = F_0\cos\omega t, \qquad (3)$$

где F_0 и ω – соответственно амплитуда и частота внешней вынуждающей силы (по условию задачи ω = 10π с$^{-1}$).

Зная выражение для амплитуды вынужденных колебаний

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

(из заданного уравнения вынужденных колебаний A = 0,06 м), найдем амплитуду вынуждающей силы:

$$F_0 = mA\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2};$$

$$F_0 = 0{,}05\cdot 0{,}06\sqrt{((10{,}5\pi)^2 - (10\pi)^2)^2 + 4\cdot 1{,}6^2(10\pi)^2} = 0{,}712 \text{ Н.}$$

Тогда искомое уравнение внешней периодической силы

$$F = 0{,}712\cos 10\pi t, \text{ Н.}$$

Ответ: $x = 0{,}1e^{-1{,}6t}\cos 10{,}5\pi t$, м; $F = 0{,}712\cos 10\pi t$, Н.

Задача 1.146

Груз массой m = 50 г, подвешенный на нити длиной l = 20 см, совершает колебания в жидкости. Коэффициент сопротивления r = 0,02 кг/с. На груз действует вынуждающая сила $F = 0{,}1\cos\omega t$, Н.

Определить: 1) частоту вынуждающей силы, при которой амплитуда вынужденных колебаний максимальна; 2) резонансную амплитуду.

Дано:
$m = 5\cdot10^{-2}$ кг
$l = 0{,}2$ м
$r = 0{,}02$ кг/с
$F = 0{,}1\cos\omega t$, Н

$\omega_{рез}$; $A_{рез}$ – ?

Решение

Очевидно, что частота вынуждающей силы, при которой амплитуда вынужденных колебаний максимальна, является резонансной частотой:

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}\,, \qquad (1)$$

где ω_0 – собственная частота колебаний системы;

$\delta = \dfrac{r}{2m}$ – коэффициент затухания.

Груз, подвешенный на нити, можно принять за математический маятник, тогда $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{q}{l}}$.

Подставив значения ω_0 и δ в формулу (1), найдем искомую резонансную частоту:

$$\omega_{рез} = \sqrt{\frac{q}{l} - \frac{r^2}{2m^2}}\,; \quad [\omega_{рез}] = \sqrt{\frac{м}{с^2 м} - \frac{кг^2}{с^2 кг^2}} = \sqrt{\frac{1}{с^2}} = с^{-1}.$$

Подставив в выражение для амплитуды вынужденных колебаний

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}\,,$$

где F_0 – амплитудное значение вынуждающей силы (по условию задачи $F_0 = 0{,}1$ Н), формулу (1), найдем искомую резонансную амплитуду:

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2m\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{F_0}{r\sqrt{\dfrac{q}{l} - \dfrac{r^2}{4m^2}}}\,;$$

$$[A_{рез}] = \frac{кг \cdot м \cdot с}{с^2 \cdot кг\sqrt{\dfrac{м}{с^2 м} - \dfrac{кг^2}{с^2 кг^2}}} = \frac{м}{с\sqrt{\dfrac{1}{с^2}}} = \frac{м \cdot с}{с} = м;$$

$$A_{рез} = \frac{0{,}1}{0{,}02\sqrt{\dfrac{9{,}8}{0{,}2} - \dfrac{(0{,}02)^2}{4(5\cdot10^{-2})^2}}} = 7{,}14\cdot10^{-2}\ м = 71{,}4\ см.$$

Ответ: 1) $\omega_{рез} = 7$ рад/с; 2) $A_{рез} = 71{,}4$ см.

Задача 1.147

Точка одновременно совершает гармонические колебания, происходящие по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемые уравнениями $x = A_1\sin\omega t$ и $y = A_2\cos\omega t$, где $A_1 = 0{,}5$ см; $A_2 = 2$ см. Найти уравнение траектории и построить ее, указав направление движения.

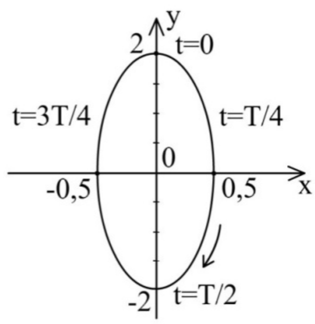
Дано:	**Решение**
$x = A_1\sin\omega t$ $y = A_2\cos\omega t$ $A_1 = 0{,}5$ см $A_2 = 2$ см	Размерность амплитуд и смещений колебаний целесообразно оставить в сантиметрах. По условию задачи
$y = y(x)$ – ?	

$$x = A_1\sin\omega t = 0{,}5\sin\omega t; \qquad (1)$$

$$y = A_2\cos\omega t = 2\cos\omega t. \qquad (2)$$

Исключая из уравнений (1) и (2) параметр t, с помощью основного тригонометрического тождества $\cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1$ получим:

$$\begin{cases} \sin\omega t = \dfrac{x}{0{,}5}; \\ \cos\omega t = \dfrac{y}{2}, \end{cases} \quad \text{отсюда} \quad \frac{x^2}{0{,}5^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1.$$



Траектория представляет собой эллипс с полуосями $a = 0{,}5$ см и $b = 2$ см (см. рисунок).

Направление движения по эллипсу определим, построив таблицу.

Время t выразим через период колебаний T.

t	0	$T/4$	$T/2$	$3T/4$	T
x, см	0	0,5	0	–0,5	0
y, см	2	0	–2	0	2

Ответ: эллипс, $\dfrac{x^2}{0{,}5^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1.$

Задача 1.148

Складываются два взаимно перпендикулярных колебания с одинаковыми периодами 0,2 с и одинаковой начальной фазой $\pi/3$. Амплитуда одного колебания $A = 4$ см, второго $B = 3$ см. Найти уравнение результирующего колебания.

Дано:
$T_1 = T_2 = T = 0{,}2$ с
$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = \pi/3$
$A = 0{,}04$ м
$B = 0{,}03$ м

$y(x)$ – ?

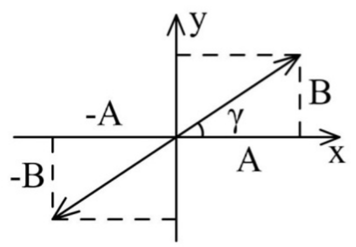
Решение

При сложении двух взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты (одинакового периода) уравнение траектории результирующего колебания имеет вид:

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi, \qquad (1)$$

где A и B – амплитуды складываемых колебаний; φ – разность между фазами колебаний.

Уравнение (1) описывает эллипс, оси которого ориентированы относительно координатных осей произвольно.



Согласно условию задачи разность фаз $\varphi = 0$, поэтому уравнение (1) примет вид:

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} + \frac{y^2}{B^2} = 0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0,$$

откуда

$$y = \frac{B}{A}x \text{ – уравнение прямой.}$$

Следовательно, результирующее колебание будет происходить вдоль прямой линии (см. рисунок).

Угол наклона прямой найдется из уравнения

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{B}{A}; \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{0{,}03}{0{,}04} = 0{,}75; \quad \gamma = 36^\circ 52'.$$

Результирующее колебание является гармоническим с тем же периодом T (с той же циклической частотой $\omega = \frac{2\pi}{T}$), а амплитуда результирующего колебания $C = \sqrt{A^2 + B^2}$; $C = \sqrt{0{,}04^2 + 0{,}03^2} = 5 \cdot 10^{-2}$ м = 5 см.

Следовательно, уравнение результирующего колебания

$$y(x) = 0{,}05\cos(10\pi t + \pi/3), \text{ м.}$$

Ответ: $y(x) = 0{,}05\cos(10\pi t + \pi/3)$, м.

Задача 1.149

Материальная точка одновременно участвует в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях, уравнения которых $x = \cos 2\pi t$ и $y = \cos \pi t$. Найти уравнение траектории точки. Вычертить траекторию точки с соблюдением масштаба, указав направление движения точки.

Дано:	**Решение**
$x = \cos 2\pi t$, см $y = \cos \pi t$, см $y(x)$ – ?	Для нахождения уравнения траектории точки следует из заданных в задаче уравнений исключить время t.

Второе заданное уравнение, воспользовавшись формулой

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2},$$

можно записать в виде:

$$y = \cos \pi t = \sqrt{\frac{1+\cos 2\pi t}{2}}.$$

Учитывая, что $x = \cos 2\pi t$, придем к уравнению

$$y = \sqrt{\frac{1+x}{2}},$$

откуда искомое уравнение материальной точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях,

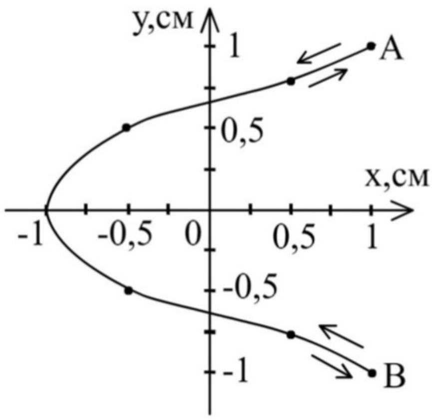
$$2y^2 - x = 1 \text{ – уравнение параболы.} \qquad (1)$$

Из уравнений $x = \cos 2\pi t$, см и $y = \cos \pi t$, см следует, что смещение точки по осям координат x и y ограничено и заключено в пределах от –1 см до +1 см.

Для построения траектории найдем, согласно уравнению (1), значения y, отвечающие ряду значений x, удовлетворяющих условию $|x| \le 1$ см.

x, см	–1	–0,5	0	0,5	1
y, см	0	±0,5	±0,707	±0,866	±1

Начертив координатные оси и выбрав масштаб, нанесем на плоскость xoy найденные точки. Соединив их, получим траекторию точки, совершающей одновременно взаимно перпендикулярные колебания согласно заданным в задаче уравнениям (см. рисунок).



Для определения направления движения точки рассмотрим, как изменяется ее положение с течением времени.

При $t = 0$ координаты точки $x(0) = 1$ см, $y(0) = 1$ см. Далее, например, при $t = 0{,}5$ с координаты точки изменяются и станут равными $x(0{,}5) = -1$ см, $y(0{,}5) = 0$ см; при $t = 1$ с $x(1) = 1$ см, $y(1) = -1$ см и т.д.

Анализ расположения точек показывает, что движение происходит от точки A к началу координат (это указано стрелкой). После того, как в момент времени $t = 1$ с колеблющаяся точка достигнет точки B, она будет двигаться в обратном направлении.

Ответ: $y(x) = 2y^2 - x = 1$.

Задача 1.150

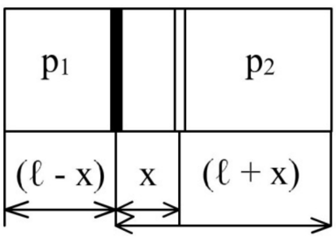
Найти период колебаний поршня массой $m = 50$ г, разделяющего закрытый горизонтальный цилиндрический сосуд сечением $S = 100$ см^2 на две равные части длиной $l = 20$ см каждая (см. рисунок), при отклонении поршня от среднего положения на малую величину x. По обе стороны от поршня находится воздух под давлением $p = 100$ Па. Температуру считать постоянной. Трением пренебречь.

Дано:
$m = 5 \cdot 10^{-2}$ кг
$S = 10^{-2}$ м^2
$l = 0{,}2$ м
$p = 100$ Па
T – ?

Решение

Пусть поршень отклонился влево на величину x. Считая процесс изотермическим (T = const), применим к газу, заключенному в цилиндре, закон Бойля – Мариотта:

$$p_1(l - x)S = p_2(l + x)S = plS, \tag{1}$$



где p_1, p_2 – давление в левой и правой частях цилиндра; p – первоначальное давление газа в цилиндре.

Найдем силу, действующую на поршень после его отклонения:

$$F = (p_1 - p_2)S. \tag{2}$$

Давления p_1 и p_2 определим из уравнения (1):

$$p_1 = \frac{pl}{l-x}; \quad p_2 = \frac{pl}{l+x}. \tag{3}$$

Подставляя выражения (3) в (2), получим:

$$F = \frac{2plxS}{l^2 - x^2} = \frac{2pVx}{l^2 - x^2}, \tag{4}$$

где V – объем половины цилиндра.

При малых колебания $x << l$ и выражение (4) можно записать в виде:

$$F = \frac{2pVx}{l^2}. \qquad (5)$$

Согласно второму закону Ньютона $a = F/m$, и, используя формулу (5), получим:

$$a = -\frac{2pVx}{l^2 m} = -\frac{2pSx}{ml}. \qquad (6)$$

Знак «минус» в уравнении (6) берется потому, что сила давления газа на поршень направлена в сторону, противоположную смещению x.

Поскольку ускорение есть вторая производная по времени t, то из уравнения (6) можно записать:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2pS}{ml}x = 0.$$

Получили дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний, в котором множитель $\frac{2pS}{ml} = \omega^2$, откуда $\omega = \sqrt{\frac{2pS}{ml}}$, где ω – циклическая частота колебаний.

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{2ml}{pS}};$$

$$[T] = \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{Па} \cdot \text{м}^2}} = \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}}} = \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}} = \text{с};$$

$$T = 3{,}14\sqrt{\frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}2}{100 \cdot 10^{-2}}} = 0{,}45 \text{ с}.$$

Ответ: $T = 0{,}45$ с.

2. ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

2.1. Молекулярно-кинетическая теория идеального газа. Законы идеального газа

Основные теоретические сведения

Количество вещества тела (системы)

$$\nu = \frac{N}{N_A},$$

где N – число структурных элементов (молекул, атомов, ионов и т.п.); $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – постоянная Авогадро (число молекул в одном моле).

Молярная масса вещества

$$M = \frac{m}{\nu},$$

где m – масса однородного тела (системы); ν – количество вещества этого тела.

Молярная масса смеси газов

$$M_{см} = \frac{\sum_{i=0}^{n} m_i}{\sum_{i=0}^{n} \nu_i},$$

где m_i – масса i-го компонента смеси; ν_i – количество вещества i-го компонента смеси; n – число компонентов смеси.

Концентрация частиц (молекул, атомов, ионов и т.п.) однородной системы

$$n = \frac{N}{V},$$

где N – число частиц в системе; V – объем системы.

Нормальные условия – стандартные физические условия, определяемые давлением $p = 101325 \approx 10^5$ Па (760 мм. рт. ст.) и абсолютной температурой $T = 273{,}15$ К ($t = 0\,°$C).

Уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева – Клапейрона):

$$pV = \frac{m}{M} RT,$$

где R = 8,31 Дж/моль·К – молярная газовая постоянная; T – термодинамическая температура газа; p – давление газа; V – объем газа.

Зависимость давления газа p от концентрации молекул n и температуры T газа (уравнение состояния газа):

$$p = nkT,$$

где k = 1,38·10^{-23} Дж/К – постоянная Больцмана (определяет «долю» газовой постоянной, приходящейся на одну молекулу, $k = \frac{R}{N_A}$).

Опытные газовые законы

Объединенный газовый закон:

для неизменной массы газа : $\frac{pV}{T} = \mathrm{const}$,

или для двух состояний газа: $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$,

где p_1, V_1, T_1 – соответственно давление, объем и температура газа в начальном состоянии; p_2, V_2, T_2 – те же величины в конечном состоянии.

Закон Бойля – Мариотта (изотермический процесс, m = const, T = const):

$$pV = \mathrm{const},$$

или для двух состояний газа: $p_1V_1 = p_2V_2$.

Закон Гей – Люссака (изобарный процесс, m = const, p = const):

$$\frac{V}{T} = \mathrm{const},$$

или для двух состояний газа: $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$.

Закон Шарля (изохорный процесс, m = const, V = const):

$$\frac{p}{T} = \mathrm{const},$$

или для двух состояний газа: $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$.

Закон Дальтона, определяющий давление смеси газов:

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n,$$

где p – давление смеси газов; p_i – парциальное давление i-го компонента смеси; n – число компонентов смеси.

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов:

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \left\langle \upsilon_{кв} \right\rangle^2 \quad \text{или} \quad p = \frac{2}{3} n \left\langle E_к \right\rangle,$$

где m_0 – масса одной молекулы; $\left\langle \upsilon_{кв} \right\rangle$ – средняя квадратичная скорость молекул; $\left\langle E_к \right\rangle$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул.

Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы газа

$$\left\langle E_1 \right\rangle = \frac{3}{2} kT,$$

где k = 1,38·10^{-23} Дж/К – постоянная Больцмана (определяет «долю» газовой постоянной, приходящейся на одну молекулу, $k = \frac{R}{N_A}$).

Средняя полная кинетическая энергия поступательного движения (приходящаяся на все степени свободы молекулы)

$$\left\langle E_i \right\rangle = \frac{i}{2} kT,$$

где i – сумма числа поступательных $i_П$, числа вращательных $i_В$ и удвоенного числа колебательных $i_К$ степеней свободы молекулы: $i = i_П + i_В + 2i_К$; для одноатомной молекулы $i = 3$ (поступательное движение описывается тремя координатами); для двухатомной $i = 5$ ($i_{пост.} = 3$ для поступательного движения, $i_{вр.} = 2$ для вращательного движения); для трехатомной и более $i = 6$ ($i_{пост.} = 3$ для поступательного движения, $i_{вр.} = 3$ для вращательного движения).

Внутренняя энергия идеального газа

для произвольной массы газа

$$U = \frac{i}{2} \frac{m}{M} RT = \frac{i}{2} \nu RT;$$

для одного моля газа

$$U = \frac{i}{2} kTN_A = \frac{i}{2} RT,$$

где i – число степеней свободы газа; k – постоянная Больцмана; T – термодинамическая температура; N_A – постоянная Авогадро; R – молярная газовая постоянная; m – масса газа; M – молярная масса; ν – количество вещества.

Примеры решения задач

Задача 2.1

Найти число молекул газа, находящегося в сосуде объемом V = 0,5 л при нормальных условиях.

Дано:	**Решение**
$V = 5{\cdot}10^{-4}$ м^3 $P = 10^5$ Па T = 273 К	Считая газ идеальным, из уравнения Менделеева – Клапейрона $pV = \nu RT$ найдем количество вещества газа ν:
N – ?	

$$\nu = \frac{PV}{RT},$$

где $R = 8{,}31 \dfrac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – молярная газовая постоянная.

Число молекул газа N, находящегося в сосуде, найдем как произведение количества вещества ν на постоянную Авогадро N_A:

$$N = \nu N_A \quad \text{или} \quad N = \frac{PV}{RT} N_A;$$

$$[N] = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{моль} \cdot \text{К}}{\text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{моль}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3}{\text{Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{м}} = 1 \text{ – безразмерная величина;}$$

$$N = \frac{10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{8{,}31 \cdot 273} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} = 1{,}3 \cdot 10^{22}.$$

Ответ: $N = 1{,}3{\cdot}10^{22}$.

Задача 2.2

В цилиндр длиной l_1 = 1,5 м и площадью S = 100 см^2, заполненный идеальным газом при нормальном давлении, начали медленно вдвигать поршень. Определить силу, действующую на поршень, если его остановить на расстоянии l_2 = 15 см от дна цилиндра.

Дано:	**Решение**
$P_1 = 10^5$ Па $l_1 = 1{,}5$ м $l_2 = 0{,}15$ м $S = 10^{-2}$ м^2	Считая температуру газа неизменной, запишем закон Бойля – Мариотта: $$P_1V_1 = P_2V_2,$$ где $V_1 = Sl_1$; $V_2 = Sl_2$.
F – ?	Тогда

$$P_1Sl_1 = P_2Sl_2.$$

Отсюда определим давление:

$$P_2 = P_1\frac{l_1}{l_2}.$$

Сила, действующая на поршень,

$$F = P_2S = P_1\frac{l_1}{l_2}S; \qquad [F] = \frac{\text{Па}\cdot\text{м}}{\text{м}}\cdot\text{м}^2 = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}\cdot\text{м}^2 = \text{Н};$$

$$F = 10^5\cdot\frac{1{,}5}{0{,}15}\cdot 10^{-2} = 10^4 H = 10\ \text{кН}.$$

Ответ: $F = 10$ кН.

Задача 2.3

Идеальный газ находится в сосуде при температуре $t_1 = 20$ °С. При нагревании газа до температуры t_2 его давление возросло в 1,5 раза. Найти температуру газа t_2.

Дано:	**Решение**
$T_1 = 293$ К $P_2 = 1{,}5P_1$	Процесс нагревания газа протекает при постоянном объеме, т.е. является изохорическим.
t_2 – ?	Для такого процесса по закону Шарля

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2},$$

откуда

$$T_2 = \frac{P_2}{P_1}T_1; \qquad T_2 = \frac{1{,}5P_1}{P_1}\cdot 293 = 439{,}5\ \text{К}.$$

Тогда

$$t_2 = T_2 - 273 = 439{,}5 - 273 = 166{,}5\ °\text{С}.$$

Ответ: $t_2 = 166{,}5$ °С.

Задача 2.4

При нагревании газа на ΔT = 10 К его объем увеличился на $\dfrac{1}{250}$ часть первоначального объема. Найти начальную температуру газа, считая давление постоянным.

Дано:
ΔT = 10 К
P = const
$\Delta V = \dfrac{V_1}{250}$

T_1 – ?

Решение

Воспользуемся законом Гей-Люссака, поскольку процесс нагревания газа изобарный:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2},$$

где $V_2 = V_1 + \Delta V = \dfrac{250}{251} V_1$, $T_2 = T_1 + \Delta T$.

Получим

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_1 + \Delta V}{T_1 + \Delta T} = \frac{251 V_1}{250\ (T_1 + \Delta T)},$$

откуда

$$T_1 = \frac{250\ (T_1 + \Delta T)}{251 V_1};$$

$$251 T_1 = 250 T_1 + 250 \Delta T; \quad T_1 = 250 \Delta T;$$

$$T_1 = 2500 \text{ К}.$$

Ответ: T_1 = 2500 К.

Задача 2.5

Сосуд емкостью V = 10 л, заполненный воздухом при температуре 500 К, соединяется трубочкой с чашкой, в которой находится ртуть. Найти количество ртути Δm, перешедшей в сосуд при остывании воздуха в нем до 300 К.

Дано:
$V = 10^{-2}$ м^3
T_1 = 500 К
T_2 = 300 К

Δm – ?

Решение

Поскольку объем сосуда не меняется, найдем изменение давления ΔP воздуха в нем с уменьшением температуры.

По закону Шарля запишем:

$$\frac{P_1}{T_1}=\frac{P_2}{T_2}; \quad P_2=\frac{T_2}{T_1}P_1,$$

откуда

$$\Delta P = P_1 - P_2 = P_1 - \frac{P_1 T_2}{T_1} = \frac{P_1(T_1-T_2)}{T_1}.$$

Считая, что

$$\frac{\Delta m}{m}=\frac{\Delta P}{P_1},$$

получим

$$\frac{\Delta m}{\rho V}=\frac{P_1(T_1-T_2)}{P_1 T_1},$$

откуда

$$\Delta m=\rho V\,\frac{(T_1-T_2)}{T_1},$$

где ρV – масса ртути, помещающейся в объеме V; ρ – плотность ртути.

$$[\Delta m]=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^3}{\text{м}^3}\cdot\frac{\text{К}}{\text{К}}=\text{кг}; \qquad \Delta m = 13{,}6\cdot10^3\cdot10^{-2}\cdot\frac{500-300}{500} = 54{,}4 \text{ кг}.$$

Ответ: $\Delta m = 54{,}4$ кг.

Задача 2.6

Определить: 1) число N молекул воды, занимающей при температуре $t = 4$ °С объем $V = 1$ мм^3; 2) массу m_1 молекул воды; 3) диаметр d молекулы воды, считая, что молекулы имеют форму шариков, соприкасающихся друг с другом.

Дано:	**Решение**
$t = 4$ °С $V = 1$ мм^3 = 10^{-9} м^3 N; m_1; d – ?	1. Число N молекул, содержащихся в теле некоторой массы m, равно произведению постоянной Авогадро N_A на количество вещества:

$$N=\nu N_A.$$

Так как $\nu=\frac{m}{M}$, где M – молярная масса, то

$$N=\frac{m}{M}N_A.$$

Выразив в этой формуле массу как произведение плотности ρ на объем V, получим

$$N=\frac{\rho V}{M}N_A,$$

где ρ – плотность воды.

Зная химическую формулу воды (H_2O), найдем молярную массу воды по формуле

$$M=M_r k,$$

где M_r – относительная молекулярная масса вещества; $k = 10^{-3}$ кг/моль;

$$M=M_r k = (2\cdot1+1\cdot16)\cdot10^{-3} = 18\cdot10^{-3} \text{ кг/моль};$$

$$[N]=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^3\cdot\text{моль}}{\text{м}^3\cdot\text{кг}\cdot\text{моль}} = 1;$$

$$N=\frac{10^{-3}\cdot10^{-9}}{18\cdot10^{-3}}\cdot6{,}02\cdot10^{23}=3{,}34\cdot10^{19} \text{ молекул.}$$

2. Массу одной молекулы воды найдем делением ее молярной массы на постоянную Авогадро:

$$m_1=\frac{M}{N_A};$$

$$[m_1]=\frac{\text{кг}\cdot\text{моль}}{\text{моль}}=\text{ кг};$$

$$m_1=\frac{18\cdot10^{-3}}{6{,}02\cdot10^{23}}=299\cdot10^{-26}\text{кг.}$$

3. Будем считать, что молекулы плотно прилегают друг к другу, тогда на каждую молекулу диаметром d приходится объем (кубическая ячейка) $V_1 = d^3$.

Отсюда

$$d=\sqrt[3]{V_1}.$$

Объем V_1 найдем, разделив молярный объем V_m вещества на число молекул в моле, т.е. на постоянную Авогадро N_A:

$$V_1=\frac{V_m}{N_A}.$$

Молярный объем равен отношению молярной массы к плотности вещества, т.е. $V_m = \dfrac{M}{\rho}$.

Поэтому можем записать, что

$$V_1 = \frac{M}{\rho N_A}.$$

Подставив полученное выражение V_1 в формулу для d, получим

$$d = \sqrt[3]{\frac{M}{\rho N_A}};$$

$$[d] = \left(\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{кг}}\right)^{1/3} = \text{м};$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{18 \cdot 10^{-3}}{10^{-3} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}} = 3{,}11 \cdot 10^{-10}\ \text{м}.$$

Ответ: $N = 3{,}34 \cdot 10^{19}$ молекул; $m_1 = 2{,}99 \cdot 10^{-26}$ кг; $d = 3{,}11 \cdot 10^{-10}$ м.

Задача 2.7

В оболочке сферического аэростата находится газ объемом $V_1 = 1000$ м^3, заполняющий оболочку лишь частично. На сколько увеличится подъемная сила аэростата, если газ в нем нагреть от $T_1 = 273$ К до $T_2 = 300$ К? Давление газа в оболочке и в окружающей среде постоянно и равно нормальному атмосферному давлению.

Дано:
$V_1 = 1000$ м^3
$T_1 = 273$ К
$T_2 = 300$ К
$P_1 = 10^5$ Па
ΔF – ?

Решение

Подъемная сила, действующая на аэростат, в начальном состоянии

$$F_1 = F_{A1} - mg,$$

где $F_{A1} = \rho_1 V_1 g$ – сила Архимеда; mg – сила тяжести.

Плотность воздуха при нормальных условиях $\rho_1 = 1{,}29$ кг/м^3.

Таким образом,

$$F_1 = \rho_1 V_1 g - mg.$$

Подъемная сила, действующая на шар после нагревания воздуха,

$$F_2 = F_{A2} - mg = \rho_1 V_2 g - mg,$$

где V_2 – объем газа в оболочке после нагревания.

При изобарическом нагревании газа, применяя закон Гей-Люссака, получим

$$V_2 = \frac{T_2}{T_1} V_1,$$

поэтому

$$\Delta F = F_2 - F_1 = F_{A2} - mg - F_{A1} + mg = \rho_1 g(V_2 - V_1) = \rho_1 V_1 g \frac{T_2 - T_1}{T_1};$$

$$[\Delta F] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м}^3 \cdot \frac{\text{К}}{\text{К}} = \text{Н};$$

$$\Delta F = 1{,}29 \cdot 9{,}81 \cdot 10^3 \cdot \frac{300 - 273}{273} \cdot 1{,}28 \cdot 10^3 \text{ Н} = 1{,}28 \text{ кН}.$$

Ответ: $\Delta F = 1{,}28$ кН.

Задача 2.8

Два баллона емкостью $V_1 = 2$ л и $V_2 = 6$ л, в которых находятся различные газы, соединены трубкой с краном. Давление газа в первом баллоне
$P_1 = 0{,}2$ МПа, а во втором $P_2 = 0{,}12$ МПа. Температура газов одинакова. Найти общее давление P в баллонах и парциальные давления P'_1 и P'_2 газов после открытия крана.

Дано:
$V_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ м^3
$V_2 = 6 \cdot 10^{-3}$ м^3
$P_1 = 2 \cdot 10^5$ Па
$P_2 = 12 \cdot 10^4$ Па
P; P'_1; P'_2 – ?

Решение

Запишем для каждого из газов, находящихся в баллонах, уравнение Менделеева – Клапейрона:

$$P_1 V_1 = \nu_1 RT; \quad (1)$$

$$P_2 V_2 = \nu_2 RT, \quad (2)$$

где ν_1 и ν_2 – количество вещества; R – универсальная газовая постоянная, T – температура.

После открытия крана каждый из газов занимает объем $V = V_1 + V_2$ и находится под своим парциальным давлением. Поэтому для каждого газа снова можно записать уравнение Менделеева – Клапейрона:

$$P'_1(V_1 + V_2) = \nu_1 RT; \quad (3)$$

$$P'_2(V_1 + V_2) = \nu_2 RT. \quad (4)$$

Из уравнений (1) – (4) запишем:

$$P'_1(V_1 + V_2) = P_1V_1; \qquad (5)$$

$$P'_2(V_1 + V_2) = P_1V_1. \qquad (6)$$

Парциальные давления газов найдем из уравнений (5), (6):

$$P_1' = P_1\frac{V_1}{V_1+V_2}; \qquad P_2' = P_2\frac{V_2}{V_1+V_2};$$

$$[P'] = \frac{\text{Па}\cdot\text{м}^3}{\text{м}^3} = \text{Па};$$

$$P'_1 = 2\cdot10^5\cdot\frac{2\cdot10^{-3}}{2\cdot10^{-3}+6\cdot10^{-3}} = 5\cdot10^4\ \text{Па};$$

$$P'_2 = 12\cdot10^4\cdot\frac{6\cdot10^{-3}}{2\cdot10^{-3}+6\cdot10^{-3}} = 8\cdot10^4\ \text{Па}.$$

Согласно закону Дальтона давление P смеси газов равно:

$$P = P'_1 + P'_2 = \frac{P_1V_1 + P_2V_2}{V_1+V_2};$$

$$P = \frac{2\cdot10^5\cdot2\cdot10^{-3} + 6\cdot10^{-3}\cdot12\cdot10^4}{2\cdot10^{-3}+6\cdot10^{-3}} = 1{,}3\cdot10^5\ \text{Па}.$$

Ответ: $P'_1 = 5\cdot10^4$ Па; $P'_2 = 8\cdot10^4$ Па; $P = 1{,}3\cdot10^5$ Па.

Задача 2.9

В сосуде находится смесь водорода и кислорода, причем их массовые доли равны соответственно: $\omega_1 = 2/7$ и $\omega_2 = 5/7$. Найти плотность ρ смеси газов, если давление смеси P = 50 кПа, а температура T = 273 К.

Дано:
$\omega_1 = 2/7$
$\omega_2 = 5/7$
$M_1 = 2\cdot10^{-3}$ кг/моль
$M_2 = 32\cdot10^{-3}$ кг/моль
$P = 5\cdot10^4$ Па
T = 273 К

ρ – ?

Решение

Из уравнения Менделеева – Клапейрона $pV = \frac{m}{M}RT$, зная массовые доли газов, найдем массы водорода и кислорода:

$$m_1 = \frac{P_1VM_1}{RT}, \quad m_2 = \frac{P_2VM_2}{RT},$$

где P_1, P_2 – парциальные давления водорода и кислорода.

Используя полученные формулы, запишем:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{P_2 M_2}{P_1 M_1}. \quad (1)$$

Согласно закону Дальтона давление

$$P = P_1 + P_2. \quad (2)$$

Из выражения (2) найдем P_2 и подставим в (1):

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{(P - P_1) M_2}{P_1 M_1},$$

откуда

$$P_1 = \frac{P M_2}{\frac{\omega_2}{\omega_1} M_1 + M_2}. \quad (3)$$

Тогда

$$P_2 = P - P_1 = \frac{P \frac{\omega_2}{\omega_1} M_1}{\frac{\omega_2}{\omega_1} M_1 + M_2}. \quad (4)$$

Согласно уравнению Менделеева – Клапейрона плотность смеси

$$\rho = \frac{PM}{RT}. \quad (5)$$

Тогда из уравнений (2) – (5) запишем:

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 = \frac{P_1 M_1}{RT} + \frac{P_2 M_2}{RT} = \left(\frac{P M_2 M_1}{\frac{\omega_2}{\omega_1} M_1 + M_2} + \frac{P \frac{\omega_2}{\omega_1} M_1 M_2}{\frac{\omega_2}{\omega_1} M_1 + M_2} \right) / RT = \frac{P M_2 M_1 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} + 1 \right)}{RT \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} M_1 + M_2 \right)};$$

$$[\rho] = \frac{\text{Па} \cdot \text{кг} \cdot \text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{моль} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{кг}} = \frac{\text{Па} \cdot \text{кг}}{\text{Дж}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

$$\rho = \frac{5 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 32 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{5}{2} + 1 \right)}{8{,}31 \cdot 273 \left(\frac{5}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-3} + 32 \cdot 10^{-3} \right)} = 0{,}13 \ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Ответ: $\rho = 0{,}13 \ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Задача 2.10

Найти массу водорода m_1 и гелия m_2 в смеси, находящийся в баллоне объемом V = 20 л при температуре 300 К и давлении P = 800 кПа, если общая масса смеси m = 20 г.

Дано:	Решение
$M_1 = 2\cdot10^{-3}$ кг/моль $M_2 = 4\cdot10^{-3}$ кг/моль $P = 8\cdot10^5$ Па T = 300 К $V = 2\cdot10^{-2}$ м^3 $m = 2\cdot10^{-2}$ кг	По закону Дальтона давление смеси
m_1, m_2 – ?	

$$P = P_1 + P_2,$$

где P_1, P_2 – парциальные давления водорода и гелия соответственно.

Используя уравнение Менделеева – Клапейрона, запишем:

$$P_1V = \frac{m_1}{M_1}RT; \quad P_2V = \frac{m_2}{M_2}RT.$$

Просуммировав эти уравнения, получим

$$PV = (P_1 + P_2)V = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)RT;$$

$$\begin{cases} \dfrac{m_1}{M_1} + \dfrac{m_2}{M_2} = \dfrac{PV}{RT}; \\ m_1 + m_2 = m. \end{cases}$$

Имеем систему уравнений с двумя неизвестными, решая которую, найдем массу:

$$m_1 = \frac{M_1M_2}{M_2 - M_1}\left(\frac{PV}{RT} - \frac{m}{M_2}\right);$$

$$[m] = \frac{\text{кг}\cdot\text{кг}\cdot\text{моль}}{\text{моль}\cdot\text{моль}\cdot\text{кг}}\left(\frac{\text{Па}\cdot\text{м}^3\cdot\text{К}\cdot\text{моль}}{\text{Дж}\cdot\text{К}} - \frac{\text{кг}\cdot\text{моль}}{\text{моль}}\right) =$$

$$= \frac{\text{кг}}{\text{моль}}\left(\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^3\cdot\text{моль}}{\text{м}^2\cdot\text{Н}\cdot\text{м}} - \text{моль}\right) = \frac{\text{кг}\cdot\text{моль}}{\text{моль}} = \text{кг};$$

$$m_1 = \frac{2\cdot10^{-3}\cdot4\cdot10^{-3}}{4\cdot10^{-3} - 2\cdot10^{-3}}\left(\frac{2\cdot10^{-2}\cdot8\cdot10^5}{8{,}31\cdot300} - \frac{2\cdot10^{-2}}{4\cdot10^{-3}}\right) = 5{,}7\cdot10^{-3}\text{кг};$$

$$m_2 = m - m_1;$$

$$m_2 = 2 \cdot 10^{-2} - 5{,}7 \cdot 10^{-3} = 14{,}3 \cdot 10^{-3}\,\text{кг}.$$

Ответ: $m_1 = 5{,}7 \cdot 10^{-3}\,\text{кг}$; $m_2 = 14{,}3 \cdot 10^{-3}\,\text{кг}$.

Задача 2.11

В баллоне объемом $V = 10$ л находится гелий под давлением $P_1 = 1$ МПа при температуре $T_1 = 300$ К. После того, как был израсходован гелий массой $m = 10$ г, температура в баллоне понизилась до $T_2 = 290$ К. Определить давление P_2 гелия, оставшегося в баллоне.

Дано:
$V = 10^{-2}$ м^3
$P_1 = 10^6$ Па
$T_1 = 300$ К
$m = 10^{-2}$ кг
$T_2 = 290$ К

P_2 – ?

Решение

Воспользуемся уравнением Менделеева – Клапейрона, применив его дважды к начальному и конечному состояниям газа:

$$P_1 V = \frac{m_1}{M} RT, \quad P_2 V = \frac{m_2}{M} RT,$$

где m_1 и m_2 – массы гелия в начальном и конечном состояниях.

Выразим массы m_1 и m_2 гелия из этих уравнений:

$$m_1 = \frac{P_1 MV}{RT_1}; \quad m_2 = \frac{P_2 MV}{RT_2}.$$

Вычитая из выражения m_1 выражение m_2, получаем:

$$m = m_1 - m_2 = \frac{P_1 MV}{RT_1} - \frac{P_2 MV}{RT_2}.$$

Отсюда искомое давление

$$P_2 = \frac{RT_2}{MV}\left(\frac{P_1 MV}{RT_1} - m\right) = \frac{T_2}{T_1} P_1 - \frac{m}{M}\frac{RT_2}{V}.$$

$$[P_2] = \frac{\text{К}}{\text{К}}\text{Па} - \frac{\text{кг} \cdot \text{моль}}{\text{кг}} \cdot \frac{\text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{К} \cdot \text{моль} \cdot \text{м}^3} = \text{Па} - \frac{\text{кг} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}{\text{кг} \cdot \text{К} \cdot \text{моль} \cdot \text{м}^3} = \text{Па} - \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} =$$

$$= \text{Па} - \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м} \cdot \text{м}^2} = \text{Па} - \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па} - \text{Па} = \text{Па}.$$

Учитывая, что молярная масса гелия $M = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, получим

$$P_2 = \left(\frac{290}{300} \cdot 10^6 - \frac{10^{-2}}{4 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{8{,}31 \cdot 290}{10^{-2}} \right) = 3{,}64 \cdot 10^5 \text{Па} = 364 \text{кПа}.$$

Ответ: $P_2 =$ 364 кПа.

Задача 2.12

Какое количество Δm кислорода выпустили из баллона емкостью 10 л, если при этом показания манометра на баллоне изменились от P_1 = 1,4 МПа до P_2 = 0,7 МПа, а температура изменилась от t_1 = 27 °C до t_2 = 7 °C?

Дано:
$V = 10^{-2}$ м^3
$P_1 = 1{,}4 \cdot 10^6$ Па
$P_2 = 0{,}7 \cdot 10^6$ Па
$T_1 = 300$ К
$T_2 = 280$ К
$M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

Δm – ?

Решение

Масса выпущенного газа

$$\Delta m = m_1 - m_2,$$

где m_1 – первоначальная масса; m_2 – масса оставшегося после выпуска газа.

Тогда уравнение газового состояния для каждой массы:

$$P_1 V = \frac{m_1}{M} RT, \quad P_2 V = \frac{m_2}{M} RT.$$

Выразив массы m_1 и m_2, получим:

$$\Delta m = \frac{P_1 MV}{RT_1} - \frac{P_2 MV}{RT_2};$$

$$\Delta m = \frac{MV}{R} \left(\frac{P_1}{T_1} - \frac{P_2}{T_2} \right);$$

$$[\Delta m] = \frac{\text{м}^3 \cdot \text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}}{\text{моль} \cdot \text{Дж}} \cdot \frac{\text{Па}}{\text{К}} = \frac{\text{м}^3 \cdot \text{кг} \cdot \text{Па} \cdot \text{К}}{\text{Дж} \cdot \text{К}} = \frac{\text{м}^3 \cdot \text{кг} \cdot \text{Н}}{\text{м}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{м}} = \text{кг};$$

$$\Delta m = \frac{10^{-2} \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{8{,}31} \left(\frac{1{,}4 \cdot 10^6}{300} - \frac{0{,}7 \cdot 10^6}{280} \right) = \frac{32}{8{,}31} \left(\frac{1{,}4}{30} - \frac{0{,}7}{28} \right) = 0{,}085 \text{ кг}.$$

Ответ: $\Delta m =$ 0,085кг = $85 \cdot 10^{-3}$ кг.

Задача 2.13

Плотность смеси азота и водорода при температуре t = 47 °С и давлении $P = 2\cdot10^5$ Па равна $\rho = 0{,}3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Найти концентрации молекул азота (n_1) и водорода (n_2).

Дано:	Решение
$P = 2\cdot10^5$ Па T = 320 К ρ = 0,3 кг/м^3 $M_1 = 28\cdot10^{-3}$ кг/моль $M_2 = 2\cdot10^{-3}$ кг/моль	Концентрацию однородного по составу газа можно найти из уравнения $$P = nkT.$$ Для азота можно записать: $$P_1 = n_1kT.$$
n_1; n_2 – ?	

Для водорода

$$P_2 = n_2kT.$$

По закону Дальтона давление смеси равно сумме парциальных давлений:

$$P = P_1 + P_2 = (n_1 + n_2)kT.$$

Масса одной молекулы газа

$$m_0 = \frac{M}{N_A},$$

где M – молярная масса газа, N_A – число Авогадро.

Количество молекул

$$N = nV,$$

где n – концентрация; V – объем сосуда.

Умножив массу одной молекулы на число молекул, найдем массу газа:

$$m = \frac{M}{N_A}nV.$$

Следовательно, для азота можно записать:

$$m_1 = \frac{M_1}{N_A}n_1V.$$

Для водорода

$$m_2 = \frac{M_2}{N_A}n_2V.$$

Масса смеси будет равно сумме

$$m_1 + m_2 = \frac{V}{N_A}\left(M_1 n_1 + M_2 n_2\right).$$

Плотность смеси

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V} = \frac{M_1 n_1 + M_2 n_2}{N_A};$$

$$\rho N_A = M_1 n_1 + M_2 n_2.$$

Найдем из уравнения $\frac{m}{kT} = n_1 + n_2$

$$n_2 = \frac{m}{kT} - n_1.$$

Подставим в найденное уравнение:

$$\rho N_A = M_1 n_1 + M_2\left(\frac{P}{kT} - n_1\right);$$

$$\rho N_A = M_1 n_1 + M_2\frac{P}{kT} - M_2 n_1;$$

$$n_1 = \frac{\rho N_A - M_2\frac{P_2}{kT}}{M_1 - M_2} = \frac{\rho RT - M_2 P}{\left(M_1 - M_2\right)kT};$$

$$[n] = \frac{\frac{\text{кг}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{м}^3\cdot\text{моль}\cdot\text{К}} - \frac{\text{кг}\cdot\text{Па}}{\text{моль}}}{\frac{\text{кг}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{моль}\cdot\text{К}}} = \frac{\frac{\text{кг}\cdot\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{м}^3\cdot\text{моль}} - \frac{\text{кг}\cdot\text{Н}}{\text{моль}\cdot\text{м}^2}}{\frac{\text{кг}\cdot\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{моль}}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{Н}\cdot\text{моль}}{\text{м}^2\cdot\text{моль}\cdot\text{кг}\cdot\text{Н}\cdot\text{м}} = \text{м}^{-3};$$

$$n_1 = \frac{0,3\cdot 8,3\cdot 320 - 2\cdot 10^{-3}\cdot 2\cdot 10^5}{(28-2)\cdot 10^{-3}\cdot 1,38\cdot 10^{-23}\cdot 320} = \frac{396,8\cdot 10^{26}}{11,48\cdot 10^3} = 3,46\cdot 10^{24}\ \text{м}^{-3};$$

$$n_1 = \frac{\rho RT - M_1 P}{\left(M_2 - M_1\right)kT};$$

$$n_2 = \frac{0,3\cdot 8,3\cdot 320 - 28\cdot 10^{-3}\cdot 2\cdot 10^5}{-26\cdot 10^{-3}\cdot 1,38\cdot 10^{-23}\cdot 320} = \frac{480,32\cdot 10^{26}}{26\cdot 1,38\cdot 320} = 4,2\cdot 10^{25}\ \text{м}^{-3}.$$

Ответ: $n_1 = 3,46\cdot 10^{24}$ м$^{-3}$; $n_2 = 4,2\cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

Задача 2.14

В баллоне объемом V = 0,4 м^3 находится кислород массой m_1 = 1,2 кг и m_2 = 0,5 кг воды. Баллон нагревается до температуры t = 300 °С, при этом вся вода превращается в пар. Определить давление в баллоне после нагревания.

Дано:
m_1 = 1,2 кг
m_2 = 0,5 кг
$M_1 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$M_2 = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
V = 0,4 м^3
T = 573 К
P – ?

Решение

Согласно закону Дальтона давление смеси

$$P = P_1 + P_2,$$

где P_1, P_2 – парциальные давления кислорода и водяного пара соответственно.

Запишем уравнение Менделеева – Клапейрона для каждой компоненты газа:

$$P_1 V = \frac{m_1}{M_1} RT,$$

откуда

$$P_1 = \frac{m_1}{M_1 V} RT.$$

Аналогично

$$P_2 V = \frac{m_2}{M_2} RT, \quad \text{откуда} \quad P_2 = \frac{m_2}{M_2 V} RT.$$

Тогда давление смеси

$$P = P_1 + P_2 = \frac{RT}{V}\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right);$$

$$[P] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{кг} \cdot \text{моль}}{\text{К} \cdot \text{моль} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{кг}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па};$$

$$P = \frac{8,31 \cdot 573}{0,4}\left(\frac{1,2}{32 \cdot 10^{-3}} + \frac{0,5}{18 \cdot 10^{-3}}\right) = 7,77 \cdot 10^5 \text{ Па} = 777 \text{ кПа}.$$

Ответ: P = 777 кПа.

Задача 2.15

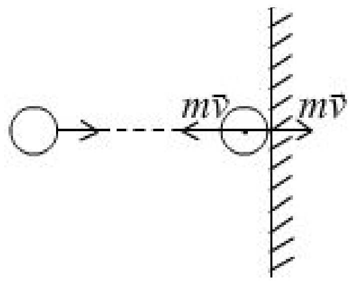
Молекула кислорода, летящая со скоростью υ = 500 м/с, упруго ударяется о стенку по нормали к ней. Найти импульс, полученный стенкой.

Дано:	**Решение**
υ = 500 м/с $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	При нормальном упругом ударе молекулы о стенку ее скорость по модулю не меняется, но изменяется на противоположное направление вектора скорости (см. рисунок).
P – ?	

Тогда изменение импульса молекулы

$$\Delta P = -m\upsilon - m\upsilon = -2m\upsilon,$$

где $m = \dfrac{M}{N_A}$ – масса одной молекулы; N_A – число Авогадро.



Таким образом,

$$\Delta P = -2\upsilon \frac{M}{N_A};$$

$$[\Delta P] = \frac{\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{моль}}{\text{с} \cdot \text{моль}} = \frac{\text{м} \cdot \text{кг}}{\text{с}};$$

$$\Delta P = -2 \cdot 500 \cdot \frac{32 \cdot 10^{-3}}{6,02 \cdot 10^{23}} = -5,3^{-23} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Такой же по модулю импульс получит стенка, т.е. $P = \Delta P$.

Ответ: $P = \Delta P = -5,3 \cdot 10^{-23} \dfrac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$.

Задача 2.16

В баллоне вместимостью V = 50 л находится азот, концентрация молекул которого $n = 9,5 \cdot 10^{23}$ м$^{-3}$. Найти массу газа.

Дано:	**Решение**
$V = 5 \cdot 10^{-2}$ м^3 $n = 9,5 \cdot 10^{23}$ м$^{-3}$ $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	Число молей газа $$\nu = \frac{N}{N_A},$$
m – ?	где N – число молекул газа; N_A – постоянная Авогадро.

С другой стороны, число молекул газа

$$N = nV,$$

тогда

$$\nu = \frac{nV}{N_A}. \qquad (1)$$

Поскольку число молей может быть также определено выражением $\nu = \dfrac{m}{M}$, то, используя выражение (1), находим массу газа:

$$m = \frac{nV}{N_A};$$

$$[m] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{м}^3} = \text{кг};$$

$$m = 28 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{9{,}5 \cdot 10^{23} \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{6{,}02 \cdot 10^{23}} = 221 \cdot 10^{-3}\text{кг}.$$

Ответ: $m = 221{\cdot}10^{-3}$ кг.

Задача 2.17

Найти внутреннюю энергию U массы m = 50 г азота при температуре t = 20 °C. Какая часть этой энергии приходится на долю поступательного движения молекул, и какая часть – на долю вращательного движения?

Дано:
T = 293 К
$m = 50{\cdot}10^{-3}$ кг
$M = 28{\cdot}10^{-3}$ кг/моль

U ; $U_п$; $U_в$ – ?

Решение

Внутренняя энергия идеального газа определяется по формуле

$$U = \frac{i}{2}\frac{m}{M}RT, \tag{1}$$

где i – число степеней свободы.

Для двухатомного газа i = 5, причем i = 3 приходится на долю поступательного движения и i = 2 – на долю вращательного движения.

Подставляя в формулу (1) числовые данные и соответствующие значения числа степеней свободы, получим:

$$U = \frac{5}{2} \cdot \frac{50 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}} \cdot 8{,}31 \cdot 293 = 10{,}8 \cdot 10^3 \text{Дж} = 10{,}8 \text{ кДж};$$

$$U_п = \frac{3}{2} \cdot \frac{50 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}} \cdot 8{,}31 \cdot 293 = 6{,}5 \cdot 10^3 \text{Дж} = 6{,}5 \text{ кДж};$$

$$U_в = \frac{2}{2} \cdot \frac{50 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}} \cdot 8{,}31 \cdot 293 = 4{,}3 \cdot 10^3 \text{Дж} = 4{,}3 \text{ кДж};$$

Ответ: $U = 10{,}8$ кДж; $U_п = 6{,}5$ кДж; $U_в = 4{,}3$ кДж.

Задача 2.18

Найти среднюю кинетическую энергию $\langle E_{K1вр} \rangle$ вращательного движения одной молекулы кислорода при температуре T = 286 К, а также кинетическую энергию $E_{К\ вр}$ вращательного движения всех молекул этого газа, если его масса m = 4 г.

Дано:	**Решение**
T = 286 К m = 4 г	Известно, что на каждую степень свободы молекул газа приходится одинаковая средняя энергия $\frac{1}{2}kT$. Так как молекула кислорода двух-
$\langle E_{K1вр} \rangle; E_{К\ вр}$ – ?	

атомная, а, следовательно, обладает двумя вращательными степенями свободы, то средняя кинетическая энергия вращательного движения молекулы кислорода

$$\langle E_{K1вр} \rangle = 2\frac{1}{2}kT = kT;$$

$$\left[\langle E_{K1вр} \rangle\right] = \frac{Дж}{К} \cdot К = Дж;$$

$$\langle E_{K1вр} \rangle = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 286 = 3{,}95 \cdot 10^{-21} \text{ Дж.}$$

Средняя кинетическая энергия вращательного движения всех молекул газа выражается соотношением

$$E_{К\ вр} = N \langle E_{K1вр} \rangle,$$

где число молекул газа $N = \frac{m}{M} N_A$.

В результате

$$E_{К\ вр} = \frac{m}{M} N_A \langle E_{K1вр} \rangle;$$

$$\left[E_{К\ вр}\right] = \frac{кг \cdot моль}{моль \cdot кг} \cdot Дж = Дж;$$

$$E_{К\ вр} = 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot 3{,}95 \cdot 10^{-21} = 297 \text{ Дж.}$$

Ответ: $\langle E_{K1вр} \rangle$ = $3{,}95 \cdot 10^{-21}$Дж; $E_{К\ вр}$ = 297 Дж.

Задача 2.19

Смесь азота и гелия при температуре t = 27 °С находится под давлением P = 1,3·10^2 Па. Масса азота составляет 70 % от общей массы смеси. Найти концентрацию молекул каждого из газов.

Дано:	Решение
T = 300 К	
P = 1,3·10^2 Па	
c_1 = 70 %	
n_1; n_2 – ?	

Решение

Зависимость давления газа от концентрации молекул и температуры выражается уравнением

$$P = nkT\,, \tag{1}$$

где n – концентрация молекул; $k = 1{,}38\cdot10^{-23}\dfrac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – постоянная Больцмана; $T = t + 273$ °С – термодинамическая температура.

Давление идеального газа (при данном давлении газ можно считать идеальным) не зависит от его природы и, как видно из уравнения (1), однозначно определяется его температурой и концентрацией, т.е. отношением числа частиц к занимаемому объему.

Уравнение (1) позволяет найти концентрацию молекул смеси и по известному процентному содержанию – концентрацию каждого газа.

Процентное содержание газов задано по массе, это значит, что масса каждого из них

$$m_1 = c_1 m\ ; \qquad m_2 = c_2 m, \tag{2}$$

где m – масса смеси; c_1 и c_2 – процентное содержание, соответственно, азота и гелия.

С другой стороны, масса каждого из газов

$$m_1 = \frac{M_1}{N_A} n_1 V; \quad m_2 = \frac{M_2}{N_A} n_2 V, \tag{3}$$

где M – молярная масса газа; N_A – постоянная Авогадро; ($\dfrac{M_i}{N_A}$ – масса молекулы); V – объем газа.

Из (1) концентрация смеси

$$n = \frac{P}{kT}.$$

Приравняв правые части уравнений (2) и (3), получим:

$$c_1 m = \frac{M_1}{N_A} n_1 V;$$

$$c_2 m = \frac{M_2}{N_A} n_2 V,$$

откуда

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{c_1 M_2}{c_2 M_1} = \frac{1}{3}.$$

Поскольку $n_1 + n_2 = n$, то

$$n_1 = \frac{1}{4}\frac{P}{kT};$$

$$n_2 = \frac{3}{4}\frac{P}{kT};$$

$$[n] = \frac{\text{Па} \cdot \text{К}}{\text{Дж} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{м}} = \text{м}^{-3};$$

$$n_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1,3 \cdot 10^2}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300} = 0,8 \cdot 10^{23}\ \text{м}^{-3};$$

$$n_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1,3 \cdot 10^2}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300} = 2,4 \cdot 10^{23}\ \text{м}^{-3}\ .$$

Ответ: $n_1 = 0{,}8 \cdot 10^{23}$ м$^{-3}$, $n_2 = 2{,}4 \cdot 10^{23}$ м$^{-3}$.

Задача 2.20

В баллоне вместимостью V = 6,9 л находится азот массой m = 2,3 г. При нагревании часть молекул диссоциировали на атомы. Степень диссоциации α = 0,2.

Определить: 1) общее число N_1 молекул и концентрацию n_1 молекул азота до нагревания; 2) концентрацию n_2 молекул и n_3 атомов азота после нагревания.

Дано:
$V = 6,9 \cdot 10^{-3}$ м^3
$m = 2{,}3 \cdot 10^{-3}$ кг
$\alpha = 0{,}2$

N_1; n_1; n_2; n_3 – ?

Решение

По определению концентрация частиц газа есть отношение числа частиц к вместимости сосуда, занимаемого газом:

$$n = \frac{N}{V}. \qquad (1)$$

1. Число N_1 молекул газа до нагревания найдем из соотношения

$$N_1 = \nu N_A = \frac{m}{M} N_A; \qquad (2)$$

$$[N_1] = \frac{\text{кг} \cdot \text{моль}}{\text{кг} \cdot \text{моль}} \text{ – безразмерная величина;}$$

$$N_1 = \frac{2,3 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} = 4,94 \cdot 10^{23} \text{ молекул.}$$

Концентрацию n_1 найдем по (1):

$$n_1 = \frac{N_1}{V};$$

$$n_1 = \frac{4,94 \cdot 10^{23}}{6,9 \cdot 10^{-3}} = 7,16 \cdot 10^{25} \text{м}^{-3}.$$

2. Концентрацию молекул после нагревания найдем из соотношения

$$n_2 = \frac{N_2}{V} = n_1 = \frac{N_1(1-\alpha)}{V}, \qquad (3)$$

где N_2 – число молекул, не распавшихся на атомы;

$$n_2 = \frac{4,94 \cdot 10^{23}(1-0,2)}{6,9 \cdot 10^{-3}} = 5,73 \cdot 10^{25} \text{м}^{-3}.$$

Концентрация атомов после нагревания азота

$$n_3 = \frac{2N_1\alpha}{V}. \qquad (4)$$

Число 2 в формуле (4) выражает тот факт, что каждая молекула после распада дает два атома;

$$n_3 = \frac{2 \cdot 4,94 \cdot 10^{23} \cdot 0,2}{6,9 \cdot 10^{-3}} = 2,86 \cdot 10^{25} \text{м}^{-3}.$$

Ответ: N_1 = 4,94·10^{23}молекул; n_1 = 7,16·10^{25} м$^{-3}$; n_2 = 5,73·10^{25} м$^{-3}$; n_3 = 2,86·10^{25} м$^{-3}$.

Задача 2.21

В колбе вместимостью V = 0,5 л находится кислород при нормальных условиях. Определить среднюю энергию $\langle E_n \rangle$ поступательного движения всех молекул, содержащихся в колбе.

Дано:	**Решение**
$V = 0{,}5\cdot10^{-3}$ м^3 $V_m = 22{,}4\cdot10^{-3}$ м^3/моль T = 273 К $\langle E_n\rangle$ – ?	

Средняя энергия $\langle E_n\rangle$ поступательного движения всех молекул может быть выражена соотношением

$$\langle E_n\rangle = N\langle E_{n1}\rangle, \tag{1}$$

где $\langle E_{n1}\rangle$ – средняя энергия поступательного движения одной молекулы; N – число всех молекул, содержащихся в колбе.

Как известно,

$$\langle E_{n1}\rangle = \frac{3}{2}kT, \tag{2}$$

где $k = 1{,}38\cdot10^{-23}\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – постоянная Больцмана; T – термодинамическая температура.

Число молекул, содержащихся в колбе, найдем по формуле

$$N = \nu N_A, \tag{3}$$

где ν – количество вещества кислорода; N_A – постоянная Авогадро.

Так как по условию задачи кислород в колбе находится при нормальных условиях, то количество вещества кислорода в колбе выражается соотношением

$$\nu = \frac{V}{V_m}. \tag{4}$$

Подставив выражение ν по (4) в (3), получим

$$N = \frac{V}{V_m}N_A. \tag{5}$$

С учетом (2) и (5) выражение (1) энергии поступательного движения молекул примет вид

$$\langle E_n\rangle = \frac{3kTVN_A}{2V_m};$$

$$[\langle E_n\rangle] = \frac{\text{Дж}\cdot\text{К}\cdot\text{м}^3\cdot\text{моль}}{\text{К}\cdot\text{м}^3\cdot\text{моль}} = \text{Дж};$$

$$\langle E_n\rangle = \frac{3\cdot1{,}38\cdot10^{-23}\cdot273\cdot0{,}5\cdot10^{-3}\cdot6{,}02\cdot10^{23}}{2\cdot22{,}4\cdot10^{-3}} = 75{,}9\ \text{Дж}.$$

Ответ: $\langle E_n\rangle$ = 75,9 Дж.

Задача 2.22

Какой объем занимает смесь 1 кг кислорода и 2 кг гелия при нормальных условиях? Какова молярная масса смеси?

Дано:
$m_1 = 1$ кг
$m_2 = 2$ кг
$M_1 = 32\cdot10^{-3}$ кг/моль
$M_2 = 4\cdot10^{-3}$ кг/моль
$P = 1{,}01\cdot10^5$ Па
$T = 273$ К

V; $M_{см}$ – ?

Решение

Обозначим через m_1 и M_1 массу и молярную массу кислорода, через m_2 и M_2 – массу и молярную массу гелия.

Для смеси газов справедлив закон Дальтона:

$$P = P_1 + P_2,$$

где P_1, P_2 – парциальные давления, определяемые из уравнения Менделеева – Клапейрона:

$$P_1 = \frac{m_1}{M_1 V}RT; \qquad P_2 = \frac{m_2}{M_2 V}RT,$$

где T – температура; V – объем сосуда, в котором смешаны газы; R – молярная газовая постоянная.

Тогда

$$P = \frac{RT}{V}\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right); \qquad V = \frac{RT}{P}\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right).$$

Молярная масса смеси определяется по уравнению Менделеева – Клапейрона:

$$PV = \frac{m_{см}}{M_{см}}RT = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)RT,$$

поэтому

$$M_{см} = \frac{m_{см}}{\dfrac{m_1}{M_1} + \dfrac{m_2}{M_2}} = \frac{(m_1 + m_2)M_1 M_2}{m_1 M_2 + m_2 M_1};$$

$$[V] = \left(\frac{\text{кг}\cdot\text{моль}}{\text{кг}} + \frac{\text{кг}\cdot\text{моль}}{\text{кг}}\right)\cdot\frac{\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{моль}\cdot\text{К}\cdot\text{Па}} = \frac{\text{моль}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{моль}\cdot\text{К}\cdot\text{Па}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{м}^2}{\text{м}} = \text{м}^3;$$

$$[M_{см}] = \frac{\text{кг}\cdot\text{кг}\cdot\text{кг}\cdot\text{моль}}{\text{моль}\cdot\text{моль}\cdot\text{кг}\cdot\text{кг}} = \frac{\text{кг}}{\text{моль}};$$

$$V = \left(\frac{1}{32} + \frac{2}{4}\right)\cdot\frac{8{,}31\cdot 273}{1{,}01\cdot10^5} = 12\ \text{м}^3; \qquad M_{см} = \frac{(1+2)\cdot 32\cdot 4}{1\cdot 4 + 2\cdot 32} = 5{,}65\cdot10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}.$$

Ответ: $V = 12$ м^3; $M_{см} = 5{,}65\cdot10^{-3}$ кг/моль.

Задача 2.23

Двухатомный газ занимает объем V = 100 см^3 при давлении P = 6 кПа и температуре t = 20 °С. Какое число молекул N содержится в газе и какой энергией теплового движения обладают эти молекулы?

Дано:	**Решение**
T = 273 К i = 5 $V = 10^{-4}$ м^3 P = 6000 Па	Из уравнения состояния идеального газа (уравнения Менделеева-Клапейрона) $pV = \frac{m}{M}RT$ найдем количество вещества $\nu = \frac{m}{M}$:
N; U – ?	

$$\nu = \frac{PV}{RT}.$$

Тогда число молекул, находящихся в объеме,

$$N = \nu N_A = \frac{PV}{RT}N_A;$$

$$[N] = \frac{\text{Па}\cdot\text{м}^3\cdot\text{моль}\cdot\text{К}}{\text{Дж}\cdot\text{моль}\cdot\text{К}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^3\cdot\text{моль}}{\text{м}\cdot\text{Н}\cdot\text{м}^2\cdot\text{моль}}$$ – безразмерная величина;

$$N = \frac{6000\cdot 10^{-4}\cdot 6{,}02\cdot 10^{23}}{8{,}31\cdot 293} = 1{,}510^{20}.$$

Внутренняя энергия

$$U = \frac{i}{2}\nu RT = \frac{i}{2}PV;$$

$$[U] = \text{Па}\cdot\text{м}^3 = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^3}{\text{м}^2} = \text{ Дж};$$

$$U = \frac{5}{2}6000\cdot 10^{-4} = 1{,}5 \text{ Дж}.$$

Ответ: $N = 1{,}5\cdot 10^{20}$; U = 1,5 Дж.

Задача 2.24

Найти энергию теплового движения молекул, содержащихся в двухатомном газе массой m = 2 кг, имеющем плотность ρ = 5 кг/м^3 и находящемся под давлением P = 100 кПа.

Дано:	**Решение**
m = 2 кг ρ = 5 кг/м^3 $P = 10^5$ Па	Внутренняя энергия идеального газа $$U = \frac{i}{2}\frac{m}{M}RT,$$
U – ?	где i = 5 для двухатомного газа.

Из уравнения состояния $PV = \frac{m}{M}RT$, $P = \frac{\rho}{M}RT$ найдем, что

$$\frac{RT}{M} = \frac{P}{\rho},$$

поэтому

$$U = \frac{i}{2}\frac{mP}{\rho}; \qquad [U] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Па} \cdot \text{м}^3}{\text{кг}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^2} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж};$$

$$U = \frac{5}{2} \cdot \frac{2 \cdot 10^5}{5} = 10^5 \text{ Дж}.$$

Ответ: $U = 10^5$ Дж.

Задача 2.25

Найти температуру T и среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул газа $\langle E_n \rangle$, имеющего концентрацию $n = 10^{16}$ м$^{-3}$ и находящегося под давлением P = 0,5 мПа.

Дано:
$n = 10^{16}$ м$^{-3}$
$P = 5 \cdot 10^{-4}$ Па
$\langle E_n \rangle$; T – ?

Решение

Согласно уравнению состояния давление газа

$$P = nkT,$$

где k = 1,38·10–23 $\frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – постоянная Больцмана.

Отсюда температура

$$T = \frac{P}{nk}; \qquad [T] = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{К}}{\text{Дж}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{К}}{\text{м} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}^2} = \text{К};$$

$$T = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{10^{16} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}} = 3600 \text{ К}.$$

На основании уравнения МКТ $P = \frac{2}{3}n\langle E_к \rangle$ определим среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул:

$$\langle E_к \rangle = \frac{3}{2}\frac{P}{n}; \qquad [\langle E_к \rangle] = \text{Па} \cdot \text{м}^3 = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^2} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж};$$

$$\langle E_к \rangle = \frac{3}{2} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-4}}{10^{16}} = 7{,}5 \cdot 10^{-20} \text{Дж}.$$

Ответ: T = 3600 К; $\langle E_к \rangle$ = 7,5·10^{-20} Дж.

Задача 2.26

Кислород массой m = 10 г находится под давлением 200 кПа при температуре 280 К. В результате изобарного расширения газ занял объем 9 л.

Определить: 1) объем газа V_1 до расширения; 2) температуру газа T_2 после расширения; 3) плотность газа ρ_2 после расширения.

Дано:	**Решение**
$M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль $m = 10^{-2}$ кг $P = 2 \cdot 10^5$ Па = const $T_1 = 280$ К $V_2 = 9 \cdot 10^{-3}$ м^3	Объем газа до расширения найдем согласно уравнению Менделеева – Клапейрона
V_1; T_2; ρ_2 – ?	

$$pV_1 = \frac{m}{M} RT_1,$$

откуда

$$V_1 = \frac{mRT_1}{MP};$$

$$[V_1] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{кг} \cdot \text{Па}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Па}} = \frac{\text{м} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Н}} = \text{м}^3;$$

$$V_1 = \frac{10^{-2} \cdot 8{,}31 \cdot 280}{32 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^5} = 3{,}64 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3 = 3{,}64\ \text{л}.$$

Записав уравнение Менделеева – Клапейрона для конечного состояния газа $pV_2 = \frac{m}{M} RT_2$, найдем искомую температуру:

$$T_2 = \frac{M}{mR} pV_2;$$

$$[T] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Па} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{кг} \cdot \text{Дж}} = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{К}}{\text{Дж}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{К}}{\text{м} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}^2} = \text{К};$$

$$T_2 = \frac{32 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 9 \cdot 10^{-3}}{10^{-2} \cdot 8{,}31} = 693\ \text{К}.$$

Плотность газа после расширения

$$\rho_2 = \frac{m}{V_2}; \qquad [\rho] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

$$\rho_2 = \frac{10^{-2}}{9 \cdot 10^{-3}} = 1{,}11\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Ответ: V_1 = 3,64 л; T_2 = 693 К; $\rho_2 = 1{,}11 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Задача 2.27

В баллоне вместимостью V = 5 л находится гелий под давлением P_1 = 3 МПа при температуре t_1 = 27 °С. После того, как из баллона был израсходован гелий массой m = 15 г, температура в баллоне понизилась до t_2 = 17 °С. Определить давление P_2 гелия, оставшегося в баллоне.

Дано:
$V = 5 \cdot 10^{-3}$ м^3
$P_1 = 3 \cdot 10^6$ Па
T_1 = 300 К
$M = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

P_2 – ?

Решение

Запишем уравнение Менделеева – Клапейрона для начального 1 и конечного 2 состояний газов:

$$P_1 V = \frac{m_1}{M} RT\,; \quad P_2 V = \frac{m_2}{M} RT\,,$$

где R – молярная газовая постоянная.

Выразим из этих уравнений массы:

$$m_1 = \frac{P_1 MV}{RT_1}; \quad m_2 = \frac{P_2 MV}{RT_2};$$

тогда

$$m = m_1 - m_2 = \frac{P_1 MV}{RT_1} - \frac{P_2 MV}{RT_2}.$$

Отсюда выражение для искомого давления:

$$P_2 = P_1 \frac{T_2}{T_1} - \frac{m}{M}\frac{RT_2}{V} = T_2\left(\frac{P_1}{T_1} - \frac{m}{M}\frac{R}{V}\right);$$

$$[P_2] = \frac{\text{К}}{\text{К}}\text{Па} - \frac{\text{кг} \cdot \text{моль}}{\text{кг}} \cdot \frac{\text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{К} \cdot \text{моль} \cdot \text{м}^3} = \text{Па} - \frac{\text{кг} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}{\text{кг} \cdot \text{К} \cdot \text{моль} \cdot \text{м}^3} =$$

$$= \text{Па} - \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} = \text{Па} - \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м} \cdot \text{м}^2} = \text{Па} - \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па} - \text{Па} = \text{Па};$$

$$P_2 = \left(\frac{290}{300} \cdot 3 \cdot 10^6 - \frac{1{,}5 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{8{,}31 \cdot 290}{5 \cdot 10^{-3}}\right) = 1{,}09 \cdot 10^6\,\text{Па} = 1{,}09\ \text{МПа}\ .$$

Ответ: P_2 = 1,09 МПа.

Задача 2.28

Давление в автомобильной шине объемом V = 0,3 м^3 равно P_0 = 1,5 атм. Шина накачивается насосом с емкостью хода поршня $\Delta V = 3 \cdot 10^{-3}$ м^3 до давления P_N = 2 атм. Сколько ходов поршня N потребуется, если процесс накачки происходит достаточно медленно, так что система сохраняет температуру окружающей среды. Атмосферное давление принять равным P_a = 1 атм.

Дано:
V = 0,3 м^3
P_0 = 1,5 атм
$\Delta V = 3 \cdot 10^{-3}$ м^3
P_N = 2 атм
P_a = 1 атм

N – ?

Решение

Сначала из уравнения состояния $P_a \Delta V = \dfrac{\Delta m}{M} R T_0$ определяем массу воздуха, перекачиваемую за один ход поршня в шину:

$$\Delta m = P_a \Delta V \frac{M}{RT_0},$$

где T_0 – температура окружающей среды.

Аналогично начальная масса воздуха в шине

$$m_0 = P_0 V \frac{M}{RT_0}.$$

После N ходов поршня масса воздуха в шине станет равной

$$m_N = m_0 + N\Delta m = \left(P_0 V + N P_a \Delta V \right) \frac{M}{RT_0},$$

а давление в ней определится из уравнения состояния

$$P_N V = \frac{m_N}{M_N} R T_0,$$

откуда

$$P_N = P_0 + N P_a \frac{\Delta V}{V}.$$

Из этого уравнения находим число ходов поршня N:

$$N = \frac{P_N - P_0}{P_a} \frac{V}{\Delta V}.$$

Учтем, что в данном случае нет необходимости переводить единицы измерения давления из атмосфер в паскали, поскольку в ответ входит только безразмерная комбинация давлений;

$$N = \frac{2 - 1{,}5}{1} \frac{0{,}3}{3 \cdot 10^{-3}} = 50.$$

Отметим, что результат не зависит от температуры T_0.

Ответ: N = 50.

2.2. Элементы статистической физики

Основные теоретические сведения

Скорости молекул:

наиболее вероятная

$$\upsilon_в = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}};$$

средняя квадратичная

$$\langle \upsilon_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}};$$

средняя арифметическая

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}},$$

где m_0 – масса одной молекулы.

Распределение молекул по скоростям (распределение Максвелла):

$$dN = Nf(\upsilon)d\upsilon,$$

где $f(\upsilon)$ – функция распределения молекул газа по скоростям (доля молекул, модули скоростей которых находятся в единичном интервале скоростей).

Аналитическое выражение функции распределения:

$$f(\upsilon) = \frac{dN(\upsilon)}{Nd\upsilon} = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2}\upsilon^2 e^{-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}},$$

где m_0 – масса одной молекулы газа; k = 1,38·10^{-23} Дж/К – постоянная Больцмана; T – термодинамическая температура.

Закон распределения молекул по скоростям (Максвелла) в дифференциальной форме:

$$dN(u) = Nf(u)du = \frac{4}{\sqrt{\pi}}Ne^{-u^2}u^2du,$$

где $u = \dfrac{\upsilon}{\upsilon_в}$ – относительная скорость; υ – данная скорость; $\upsilon_в$ – наиболее вероятная скорость молекул; $f(u)$ – функция распределения; N – общее число молекул.

Для малых интервалов относительных скоростей $\Delta u << u$ или, поскольку $u = \frac{\upsilon}{\upsilon_в}$ и $\Delta u = \frac{\Delta\upsilon}{\upsilon_в}$, $\Delta\upsilon << \upsilon$, закон распределения молекул по скоростям справедлив в виде

$$f(u) = \frac{\Delta N}{N \Delta u} = \frac{4}{\pi} N e^{-u^2} u^2,$$

и при решении задач на закон распределения молекул по скоростям удобно пользоваться таблицей, в которой даны значения функции распределения $f(u) = \frac{\Delta N}{N \Delta u} = \frac{4}{\pi} N e^{-u^2} u^2$ для различных u.

u	$f(u)$	u	$f(u)$	u	$f(u)$
0,1	0,022	0,8	0,761	1,5	0,535
0,2	0,087	0,9	0,813	1,6	0,447
0,3	0,185	1,0	0,830	1,7	0,362
0,4	0,308	1,1	0,814	1,8	0,286
0,5	0,439	1,2	0,770	2,0	0,165
0,6	0,567	1,3	0,703	2,2	0,186
0,7	0,677	1,4	0,623	2,4	0,041

Распределение частиц в потенциальном силовом поле (распределение Больцмана):

$$n = n_0 e^{-Mgh/(RT)} = n_0 e^{-m_0 gh/(kT)} \quad \text{или} \quad n = n_0 e^{-\Pi/(kT)},$$

где n и n_0 – концентрации молекул соответственно на высоте h и $h = 0$; $\Pi = m_0 gh$ – потенциальная энергия молекулы в поле тяготения.

Распределение давления в однородном поле силы тяжести (барометрическая формула)

$$p = p_0 e^{-Mgh/(RT)} = p_0 e^{-m_0 gh/(kT)},$$

где h – координата (высота) точки по отношению к уровню, принятому за нулевой; p – давление газа на высоте h; p_0 – давление газа на высоте $h = 0$; m_0 – масса частицы; M – молярная масса; g – ускорение свободного падения; R – молярная газовая постоянная; k – постоянная Больцмана.

Примеры решения задач

Задача 2.29

Найти число молекул n кислорода в единице объема сосуда при давлении P = 300 Па, если средняя квадратичная скорость его молекул $\langle \upsilon_{кв} \rangle$= 2,5 км/с.

Дано:	**Решение**
P = 300 Па	Из уравнения состояния газа
$\langle \upsilon_{кв} \rangle$= 2500 м/с	$P = nkT$
$M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	выразим
n – ?	

$$n = \frac{P}{kT}, \qquad (1)$$

где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$Дж/К – постоянная Больцмана.

Температуру газа T найдем, зная среднюю квадратичную скорость молекул,

$$\langle \upsilon_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}},$$

откуда

$$T = \frac{M \langle \upsilon_{кв} \rangle^2}{3R}. \qquad (2)$$

Подставляя выражение (2) в (1), получим:

$$n = \frac{3PR}{kM \langle \upsilon_{кв} \rangle^2};$$

$$[n] = \frac{\text{Па} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{моль} \cdot \text{с}^2}{\text{К} \cdot \text{моль} \cdot \text{Дж} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Па} \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Н} \cdot \text{с}^2}{\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^4} = \frac{1}{\text{м}^3} = \text{м}^{-3};$$

$$n = \frac{3 \cdot 300 \cdot 3{,}81}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 32 \cdot 10^{-3} \cdot (2500)^2} = 6{,}8 \cdot 10^{24} \text{м}^{-3}.$$

Ответ: $n = 6{,}8 \cdot 10^{24}$ м$^{-3}$.

Задача 2.30

Найти температуру T, при которой среднеквадратичная скорость молекулы азота равнялась бы среднеквадратичной скорости молекулы водорода при температуре T_1 =200 К.

Дано:	**Решение**
$M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль $M_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль $T_1 = 200$ К	Средняя квадратичная скорость
T – ?	

$$\langle \upsilon_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

По условию задачи

$$\langle \upsilon_{кв1} \rangle = \langle \upsilon_{кв2} \rangle,$$

где $\langle \upsilon_{кв1} \rangle$ и $\langle \upsilon_{кв2} \rangle$ – среднеквадратичные скорости азота и водорода соответственно.

Таким образом,

$$\frac{3RT}{M} = \frac{3RT_1}{M_1},$$

откуда

$$T = \frac{M}{M_1} T_1; \qquad T = \frac{28 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} 200 = 2800 \text{ К}.$$

Ответ: T = 2800 К.

Задача 2.31

Какое число молекул n содержит единица массы газа при нормальных условиях, если средняя квадратичная скорость молекул $\upsilon_{кв}$ = 500 м/с?

Дано:	**Решение**
$\langle \upsilon_{кв} \rangle$ = 500 м/с $P = 10^5$ Па $T = 273$ К	Средняя квадратичная скорость
n – ?	

$$\langle \upsilon_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \qquad (1)$$

Число молекул газа, содержащихся в его массе m, равно:

$$N = \frac{m}{M} N_A,$$

где M – молярная масса газа; N_A – число Авогадро.

Тогда число молекул, содержащихся в единице массы,

$$n = \frac{N}{m} = \frac{N_A}{M}. \qquad (2)$$

Выразив молярную массу из уравнения (1) и подставив ее в (2), получим:

$$n = \frac{N_A \upsilon_{кв}^2}{3RT};$$

$$[n] = \frac{\text{К} \cdot \text{моль} \cdot \text{м}^2}{\text{К} \cdot \text{моль} \cdot \text{Дж} \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{м}^2}{\text{Дж} \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{м}^2}{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^2} = \frac{1}{\text{кг}} = \text{кг}^{-1};$$

$$n = \frac{6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot (500)^2}{3 \cdot 8{,}31 \cdot 273} = 2{,}2 \cdot 10^{25} \text{кг}^{-1}.$$

Ответ: $n = 2{,}2 \cdot 10^{25}$ кг$^{-1}$.

Задача 2.32

Пылинка массой $m = 10^{-11}$ кг находится среди молекул азота. Во сколько раз скорость пылинки υ меньше средней квадратичной скорости $\langle \upsilon_{кв} \rangle$ молекул азота?

Дано:
$m = 10^{-11}$ кг
$M = 28 \cdot 10^{-3}$кг/моль

$n = \dfrac{\langle \upsilon_{кв2} \rangle}{\langle \upsilon_{кв1} \rangle}$ – ?

Решение

Средняя квадратичная скорость молекул находится по формуле

$$\langle \upsilon_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}},$$

где k – постоянная Больцмана; m_0 – масса молекулы.

Тогда для пылинки

$$\langle \upsilon_{кв_1} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m}},$$

для молекул азота

$$\langle \upsilon_{кв2} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

Тогда

$$n = \frac{\langle \upsilon_{кв2} \rangle}{\langle \upsilon_{кв1} \rangle} = \sqrt{\frac{Rm}{kM}};$$

$$[n] = \sqrt{\frac{Дж \cdot кг \cdot К \cdot моль}{моль \cdot К \cdot Дж \cdot кг}}$$ – безразмерная величина;

$$n = \sqrt{\frac{8,31 \cdot 10^{-11}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 28 \cdot 10^{-3}}} = 1,47 \cdot 10^{7} \text{ раз.}$$

Ответ: $n = 1,47 \cdot 10^{7}$ раз.

Задача 2.33

Средняя квадратичная скорость молекул газа $\langle \upsilon_{кв} \rangle$= 800 м/с. Чему равна их средняя арифметическая скорость $\langle \upsilon \rangle$?

Дано:	**Решение**
$\langle \upsilon_{кв} \rangle$= 800 м/с	Зная, что средняя квадратичная скорость молекул
$\langle \upsilon \rangle$ – ?	

$$\langle \upsilon_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}},$$

а средняя арифметическая скорость молекул

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}},$$

поделив скорость $\langle \upsilon \rangle$ на $\upsilon_{кв}$, получим

$$\frac{\langle \upsilon \rangle}{\upsilon_{кв}} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}}.$$

Отсюда

$$\langle \upsilon \rangle = \upsilon_{кв} \sqrt{\frac{8}{3\pi}};$$

$$\langle \upsilon \rangle = 800 \sqrt{\frac{8}{3 \cdot 3,14}} = 737 \text{ м/с.}$$

Ответ: $\langle \upsilon \rangle = 737$ м/с.

Задача 2.34

Найти массу m и давление P двухатомного газа, находящегося в баллоне объемом V = 40 л, если известны энергия поступательного движения E_n = 10 кДж и средняя квадратичная скорость его молекул $\langle\upsilon_{кв}\rangle$ = 2500 м/с.

Дано:
$V = 40\cdot10^{-3}$ м^3
$E_n = 10^4$ Дж
$\langle\upsilon_{кв}\rangle$ = 2500 м/с
m; P – ?

Решение

Из формулы для средней квадратичной скорости определим температуру газа:

$$\langle\upsilon_{кв}\rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}},$$

откуда

$$T = \frac{M\langle\upsilon_{кв}\rangle^2}{3R}. \qquad (1)$$

Внутренняя энергия идеального газа

$$U = \frac{i}{2}\frac{m}{M}RT. \qquad (2)$$

Поскольку для поступательного движения i = 3, то из уравнений (1) и (2) получим:

$$E_n = \frac{3}{2}\frac{m}{M}R\frac{M\upsilon_{кв}^2}{3R} = \frac{m\upsilon_{кв}^2}{2}. \qquad (3)$$

Из выражения (3) найдем массу газа:

$$m = \frac{2E_n}{\upsilon_{кв}^2}; \qquad (4)$$

$$[m] = \frac{\text{Дж}\cdot\text{с}^2}{\text{м}^2} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{м}^2\cdot\text{с}^2} = \text{кг};$$

$$m = \frac{2\cdot10^4}{2500^2} = 3{,}2\cdot10^{-3}\ \text{кг}.$$

Давление газа находится из уравнения состояния

$$PV = \frac{m}{M}RT;$$

$$P = \frac{mRT}{MV}. \qquad (5)$$

Подставляя в выражение (5) формулы (1) и (4), получим

$$P = \frac{2}{3}\frac{E_n}{V};$$

$$[P] = \frac{Дж}{м^3} = \frac{Н \cdot м}{м^3} = \frac{Н}{м^2} = Па;$$

$$P = \frac{2}{3} \cdot \frac{10^4}{40 \cdot 10^{-3}} = 0{,}17 \cdot 10^6 \text{ Па} = 0{,}17 \text{ МПа}.$$

Ответ: $m = 3{,}2 \cdot 10^{-3}$ кг ; $P = 0{,}17$ МПа .

Задача 2.35

Найти среднюю квадратичную скорость, среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул гелия и азота при температуре t = 27 °С.

Дано:
$M_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$M_2 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$T = 300$ К
$\langle \upsilon_{кв\,1} \rangle$; $\langle \upsilon_{кв\,2} \rangle$; $\langle E_n \rangle$ – ?

Решение

Средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы любого газа однозначно определяется его термодинамической температурой:

$$\langle E_n \rangle = \frac{3}{2} kT,$$

где k – постоянная Больцмана.

$$\langle E_n \rangle = \frac{3}{2} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 = 6{,}21 \cdot 10^{-21} \text{ Дж.}$$

Средняя квадратичная скорость молекул зависит от молярной массы газа:

$$\langle \upsilon_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}},$$

Для гелия

$$\langle \upsilon_{кв1} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M_1}};$$

$$\langle \upsilon_{кв\,1} \rangle = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}31 \cdot 300}{4 \cdot 10^{-3}}} = 1{,}37 \cdot 10^3 \text{м/с.}$$

Для азота

$$\langle \upsilon_{кв2} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M_2}};$$

$$\langle \upsilon_{кв\,2} \rangle = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}31 \cdot 300}{28 \cdot 10^{-3}}} = 0{,}52 \cdot 10^3 \text{м/с}.$$

Ответ: $\langle E_n \rangle = 6{,}21 \cdot 10^{-21}$Дж; $\langle \upsilon_{кв1} \rangle = 1{,}37 \cdot 10^3$м/с; $\langle \upsilon_{кв\,2} \rangle = 0{,}52 \cdot 10^3$м/с.

Задача 2.36

Сколько молекул водорода находится в сосуде емкостью V = 2 л, если средняя квадратичная скорость движения молекул $\langle \upsilon_{кв} \rangle$ = 500 м/с, а давление на стенки $P = 10^4$ Па?

Дано:
$V = 2 \cdot 10^{-3}$ м^3
$\langle \upsilon_{кв} \rangle$ = 500 м/с
$P = 10^4$ Па
N – ?

Решение

Применим основное уравнение кинетической теории газов

$$P = \frac{2}{3} n \langle E_n \rangle = \frac{2}{3} n \left\langle \frac{m\upsilon^2}{2} \right\rangle = \frac{1}{3} nm \langle \upsilon^2 \rangle.$$

Из него выражаем концентрацию n молекул газа:

$$n = \frac{3P}{m\langle \upsilon^2 \rangle}.$$

Тогда искомая величина

$$N = nV = \frac{3PV}{m\langle \upsilon \rangle^2},$$

где масса молекулы водорода

$$m = \frac{M}{N_A}.$$

Тогда

$$N = \frac{3PVN_A}{M\langle \upsilon \rangle^2};$$

$$[N] = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{моль} \cdot \text{с}^2}{\text{моль} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Па} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{кг}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{м}^2 \cdot \text{кг}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{м}^2 \cdot \text{с}^2 \cdot \text{кг}} = 1;$$

$$N = \frac{3 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{26}}{2 \cdot 500^2} = 0{,}72 \cdot 10^{23} = 7{,}2 \cdot 10^{22}.$$

Ответ: $N = 7{,}2 \cdot 10^{22}$.

Задача 2.37

Найти относительное число молекул ω идеального газа, скорости которых находятся в пределах от 0 до одной сотой наиболее вероятной скорости $\upsilon_в$.

Дано:	**Решение**
$\upsilon_{min} = 0$ м/с $\upsilon_{max} = 0{,}01 \cdot \upsilon_в$	Воспользуемся распределением молекул по скоростям:
ω – ?	

$$dN(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N e^{-u^2} u^2 du,$$

где $u = \dfrac{\upsilon}{\upsilon_в}$; dN – число молекул, скорости которых u заключены в пределах от u до du. Так как $\upsilon_{max} = 0{,}01 \cdot \upsilon_в$, то $u_{max} = \dfrac{\upsilon_{max}}{\upsilon_в} = 0{,}01.$

Для $u << 1$ имеем: $e^{-u^2} = 1 - u^2$.

Пренебрегая значением $u^2 = 0{,}01^2 = 10^{-4}$ по сравнению с 1, получим:

$$\omega = \int_0^{u_{max}} \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 du = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{0{,}01} u^2 du = 7 \cdot 10^{-7}.$$

Ответ: $\omega = 7 \cdot 10^{-7}$.

Задача 2.38

В сосуде объемом $V = 1\,\text{см}^3$ находится водород при нормальных условиях. Найти число молекул ΔN, скорости которых лежат в диапазоне от 0 до 1 м/с.

Дано:	**Решение**
$T = 273$ К $V = 10^{-6}$ м^3 $P = 10^5$ Па $\upsilon_{min} = 0$ м/с $\upsilon_{max} = 1$ м/с $M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	Воспользуемся распределением молекул по скоростям:
ΔN – ?	

$$dN(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N e^{-u^2} u^2 du, \qquad (1)$$

где $dN(u)$ – число молекул, скорости u которых заключены в интервале от u до du; N – полное число молекул.

Найдем значение максимальной скорости интересующих нас молекул:

$$u_{\max} = \frac{\upsilon_{\max}}{\upsilon_{в}},$$

где $\upsilon_{в} = \sqrt{\dfrac{2RT}{M}}$ – наиболее вероятная скорость.

Тогда $u_{max} = 0,66 \cdot 10^{-3}$.

Для таких значений u выражение (1) можно упростить; учитывая, что $u << 1$, выполняется равенство $e^{-u^2} = 1 - u^2$.

Если пренебречь значением $u^2 = 0,44 \cdot 10^{-6}$ по сравнению с 1, выражение (1) примет вид:

$$dN(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N u^2 du \ ;$$

$$\Delta N = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \int_0^{u_{\max}} u^2 du = \frac{4N}{3\sqrt{\pi}} u^3{}_{\max} . \qquad (2)$$

Число молекул $N = N_A$, а количество вещества ν выразим из уравнения Менделеева – Клапейрона:

$$pV = \nu RT,$$

откуда

$$\nu = \frac{PV}{RT}.$$

Тогда

$$N = \frac{PV}{RT} N_A. \qquad (3)$$

Подставив выражение (3) в (2), получим:

$$\Delta N = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{PV}{RT} N_A u^3{}_{\max};$$

$$[\Delta N] = \frac{Па \cdot м^3 \cdot моль \cdot К}{моль \cdot Дж \cdot К} = \frac{Па \cdot м^3}{Дж} = \frac{Н \cdot м^3}{м^2 \cdot Н \cdot м} = 1;$$

$$\Delta N = \frac{4}{3\sqrt{3,14}} \cdot \frac{10^5 \cdot 10^{-6} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{8,31 \cdot 273} \cdot 1^3 = 5,8 \cdot 10^9.$$

Ответ: $\Delta N = 5,8 \cdot 10^9$.

Задача 2.39

Найти долю молекул кислорода, находящегося при температуре t = 20 °C, скорости которых находятся в интервале от υ_1 = 275 м/с до υ_2 = 280 м/с.

Дано:
T = 293 K
$M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
υ_1 = 275 м/с
υ_2 = 280 м/с

$\dfrac{\Delta N}{N}$ – ?

Решение

В данном случае для нахождения доли молекул, обладающих скоростями, лежащими в заданном интервале, можно воспользоваться распределением молекул по скоростям

$$\frac{\Delta N(u)}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 \Delta u \ .$$

Тогда при решении задачи можно воспользоваться таблицей, в которой даны значения функции распределения $f(u) = \dfrac{\Delta N(u)}{N \Delta u}$ для различных значений u (см. п. 2.2). Функция распределения $f(u)$ является универсальной, так как не зависит ни от температуры, ни от рода газа.

Вычислим:

наиболее вероятную скорость

$$\upsilon_в = \sqrt{\frac{2RT}{M}};$$

$$\upsilon_в = \sqrt{\frac{2 \cdot 8{,}31 \cdot 293}{32 \cdot 10^{-3}}} = 385 \text{ м/с};$$

отношение

$$u = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_в};$$

$$u = \frac{275}{385} = 0{,}7$$

и интервал скоростей

$$\Delta u = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{\upsilon_в};$$

$$\Delta u = \frac{280-275}{385} = 0{,}013.$$

По приведенной выше таблице (с. 230) находим, что скорости $u = 0{,}7$ соответствует значение $f\left(u\right) = 0{,}677$.

Отсюда

$$\frac{\Delta N}{N} = f\left(u\right)du;$$

$$\frac{\Delta N}{N} = 0{,}677 \cdot 0{,}013 = 0{,}009.$$

Это значит, что 0,9 % всех молекул кислорода обладают скоростями, лежащими в заданном интервале скоростей.

Ответ: $\frac{\Delta N}{N} = 0{,}9$ %.

Задача 2.40

Температура окиси азота NO t = 27 °C. Определить долю молекул, скорости которых лежат в интервале от υ_1 = 820 м/с до υ_2 = 830 м/с.

Дано:
T = 300 К
$M = 30 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
υ_1 = 820 м/с
υ_2 = 830 м/с

$\frac{dN}{N}$ – ?

Решение

Рассматриваемый газ находится в равновесном состоянии, и, согласно Максвеллу, относительное число молекул, скорости которых заключены в интервале от υ до $(\upsilon + d\upsilon)$,

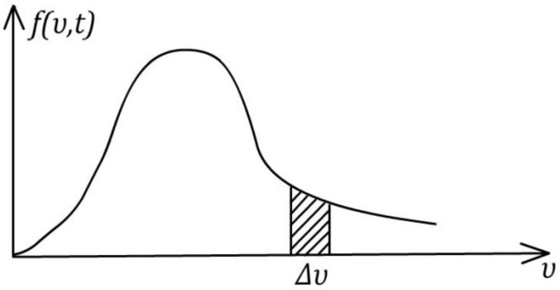
$$\frac{dN}{N} = f\left(\upsilon, t\right)d\upsilon,$$

где $f\left(\upsilon, t\right)$ – функция распределения Максвелла (см. рисунок).

Так как $\Delta\upsilon << \upsilon$, то искомую величину можно рассчитать по приближенной формуле:

$$\frac{dN}{N} = f\left(\upsilon, t\right)d\upsilon;$$

$$\frac{dN}{N} = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2}\upsilon^2 e^{\frac{-m_0^2}{2kT}}\Delta\upsilon.$$



Относительная скорость

$$u=\frac{\upsilon}{\upsilon_в},$$

где $\upsilon_в$ – наиболее вероятная скорость;

$$\upsilon_в=\sqrt{\frac{2kT}{m_0}}=\sqrt{\frac{2RT}{M}};$$

$$\upsilon_в=\sqrt{\frac{2\cdot 8{,}31\cdot 300}{30\cdot 10^{-3}}}=407\,\text{м/с};$$

$$u=\frac{\upsilon}{\upsilon_в};\qquad u=\frac{820}{407}=2{,}01;\qquad \upsilon=u\upsilon_в;\qquad \Delta\upsilon=\upsilon_в\Delta u;$$

$$\frac{\Delta N}{N}=4\pi\frac{m_0}{2\pi kT}\sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}}\frac{2kT}{m_0}u^2e^{\frac{-m_0 2kTu^2}{2kTm_0}}\sqrt{\frac{2kT}{m_0}}\Delta u;$$

$$\frac{\Delta N}{N}=4\sqrt{\pi}u^2e^{-u^2}\Delta u;$$

$$\Delta u=\frac{\Delta\upsilon}{\upsilon_в}=\frac{10}{407}=0{,}025;$$

$$\frac{\Delta N}{N}=\frac{4\cdot 2{,}01^2}{\sqrt{\pi}}e^{-2{,}01^2}\cdot 0{,}025=4\cdot 10^{-3};$$

$$\frac{\Delta N}{N}=0{,}4\%.$$

Ответ: $\frac{\Delta N}{N}=0{,}4$ %.

Задача 2.41

Какая часть молекул водорода, находящегося при температуре T, обладает скоростями, отличающимися от наиболее вероятной скорости не более чем на 5 м/с? Задачу решить для двух значений T: 1) T_1 = 400 К; 2) T_2 = 900 К.

Дано:
$\Delta\upsilon = 5$ м/с
$M = 2\cdot10^{-3}$ кг/моль
$T_1 = 400$ К
$T_2 = 900$ К

$\dfrac{\Delta N}{N}$ – ?

Решение

Найдем наиболее вероятную скорость:

$$\upsilon_{в1} = \sqrt{\frac{2RT_1}{M}};$$

$$\upsilon_{в1} = \sqrt{\frac{2\cdot 8,3\cdot 400}{2\cdot 10^{-3}}} = 1,82\cdot10^3 \text{ м/с};$$

$$\upsilon_{в2} = \sqrt{\frac{2RT_2}{M}};$$

$$\upsilon_{в2} = \sqrt{\frac{2\cdot 8,3\cdot 900}{2\cdot 10^{-3}}} = 2,73\cdot10^3 \text{ м/с}.$$

Так как $\Delta\upsilon << \upsilon$, то можно воспользоваться приближенной формулой

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 \Delta u,$$

где $u = \dfrac{\upsilon}{\upsilon_в}$; $u = 1$; $\sqrt{\pi} = 1,77$.

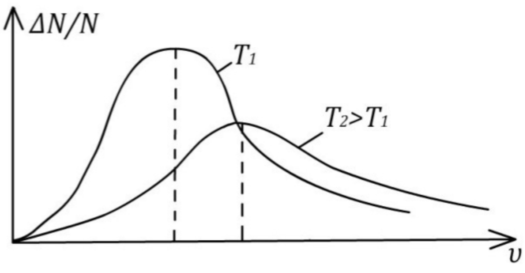
1) $$\Delta u = \frac{\Delta\upsilon}{\upsilon_{в1}}; \quad \Delta u = \frac{10}{1,82\cdot10^3} = 5,5\cdot10^{-3};$$

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4e^{-1}}{\sqrt{\pi}}\cdot 2,75\cdot10^{-3} = \frac{4\cdot 2,75\cdot 10^{-3}}{e\sqrt{\pi}} = 4,6\cdot10^{-3};$$

2) $$\Delta u = \frac{\Delta\upsilon}{\upsilon_{в2}}; \quad \Delta u = \frac{10}{2,73\cdot10^3} = 3,66\cdot10^{-3};$$

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4\cdot 3,66\cdot 10^{-3}}{e\sqrt{\pi}} = 3,06\cdot10^{-3}.$$

При увеличении температуры наиболее вероятная скорость увеличивается, а число молекул, скорости которых лежат в одном и том же интервале около наиболее вероятной скорости, уменьшается. Максимум сдвигается вправо, а величина максимума уменьшается (см. рисунок).



Ответ: 1) $\dfrac{\Delta N}{N} = 0,46\,\%$; 2) $\dfrac{\Delta N}{N} = 0,31\,\%$.

Задача 2.42

Найти изменение атмосферного давления при подъеме на высоту h = 500 м, считая температуру воздуха постоянной и равной T = 300 К, а давление у поверхности Земли $P_0 = 10^5$ Па.

Дано:	**Решение**
h = 500 м T = 300 К $P_0 = 10^5$ Па	Давление воздуха P_1 на высоте h найдем, используя барометрическую формулу
ΔP – ?	

$$P_1 = P_0 e^{\frac{-Mgh}{RT}},$$

где $M = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса воздуха.

Тогда

$$\Delta P = P_0 - P_1 = P_0\left(1 - e^{\frac{-Mgh}{RT}}\right);$$

$$\Delta P = 5{,}8 \text{ кПа}.$$

Ответ: ΔP = 5,8 кПа.

Задача 2.43

Определить высоту полета самолета, если барометр в его кабине показывает давление $P = 2{,}5 \cdot 10^4$ Па. Температуру воздуха считать постоянной и равной T = 220 К, а давление у поверхности Земли $P_0 = 10^5$ Па.

Дано:	**Решение**
T = 220 К $P = 2{,}5 \cdot 10^4$ Па $P_0 = 10^5$ Па	Воспользуемся барометрической формулой
h – ?	

$$P = P_0 e^{\frac{-Mgh}{RT}}, \qquad (1)$$

где $M = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса воздуха.

Приведем уравнение (1) к виду

$$\frac{P_0}{P} = e^{\frac{Mgh}{RT}}$$

и прологарифмируем его:

$$\frac{Mgh}{RT} = \ln\frac{P_0}{P},$$

откуда

$$h = \frac{RT}{Mg}\ln\frac{P_0}{P};$$

$$[h]=\frac{\text{Дж}\cdot\text{К}\cdot\text{моль}\cdot\text{с}^2}{\text{моль}\cdot\text{К}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}}=\frac{\text{Дж}}{\text{Н}}=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{Н}}=\text{м};$$

$$h=\frac{8{,}3\cdot 220}{29\cdot 10^{-3}\cdot 9{,}8}\ln\frac{10^5}{2{,}5\cdot 10^4}=8700\ \text{м}.$$

Ответ: $h=8700$ м.

Задача 2.44

Определить отношение давления воздуха на высоте h_1 = 1 км к давлению воздуха на дне скважины глубиной 1 км ($h_2 = -1$ км). Воздух на поверхности земли находится при нормальных условиях, и его температура не зависит от высоты.

Дано:
$M = 29\cdot 10^{-3}$ кг/моль
$P = 10^5$ Па
$T = 273$ К
$h_1 = 10^3$ м
$h_2 = -10^3$ м

$\frac{P_1}{P_2}$.– ?

Решение

Барометрическая формула определяет давление воздуха на высоте h над поверхностью Земли:

$$P_1 = P_0 e^{\frac{-Mgh_1}{RT}}; \qquad P_2 = P_0 e^{\frac{-Mgh_2}{RT}},$$

$$\frac{P_1}{P_2} = e^{\frac{-Mg}{RT}(h_1 + h_2)};$$

$$\frac{P_1}{P_2} = e^{\frac{-29\cdot 10^{-3}\cdot 10\cdot 2\cdot 10^3}{8{,}3\cdot 273}} = e^{-0{,}26} = 0{,}788.$$

Ответ: $\frac{P_1}{P_2} = 0{,}778$.

Задача 2.45

На какой высоте плотность воздуха в e раз (e – основание натурального логарифма) меньше по сравнению с его плотностью на уровне моря? Температура воздуха и ускорение свободного падения не зависят от высоты.

Дано:
$M = 29\cdot 10^{-3}$ кг/моль
$\frac{P_0}{P} = e$
$T = 273$ К

h – ?

Решение

Из уравнения газового состояния можно найти связь давления с плотностью:

$$PV = \frac{m}{M}RT;$$

поскольку плотность $\rho = \frac{m}{V}$, то $PM = \rho RT$.

Тогда $\rho = \frac{PM}{RT}$.

Отсюда видно, что плотность вещества меняется с высотой так же, как давление:

$$P = P_0 e^{\frac{-Mgh}{RT}}; \qquad \rho = \rho_0 e^{\frac{-Mgh}{RT}},$$

где ρ – плотность воздуха на высоте h; ρ_0 – плотность воздуха на поверхности;

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{e}; \qquad \frac{\rho}{\rho_0} = e^{\frac{-Mgh}{RT}}; \qquad \frac{Mgh}{RT} = 1; \qquad h = \frac{RT}{Mg};$$

$$[h] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{моль} \cdot \text{с}^2}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}} = \text{м};$$

$$h = \frac{8{,}3 \cdot 273}{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8} = 7{,}8 \cdot 10^3 \text{ м}.$$

Ответ: $h = 7{,}8 \cdot 10^3$ м.

Задача 2.46

Температура воздуха на некоторой высоте T_0 = 220 К, а давление P = 25 кПа. Найти изменение высоты Δh, соответствующее изменению давления на $\Delta P = 100$ Па.

Дано:
T_0 = 220 К
$P = 25 \cdot 10^3$ Па
$\Delta P = 100$ Па

Δh – ?

Решение

Используем барометрическую формулу:

$$P = P_0 e^{\frac{-Mgh}{RT}},$$

откуда

$$\frac{P}{P_0} = e^{\frac{-Mgh}{RT}}. \qquad (1)$$

Так как $P = P_0 - \Delta P$, а $h = \Delta h$, то выражение (1) приводится к виду

$$\frac{P_0 - \Delta P}{P_0} = e^{\frac{-Mg\Delta h}{RT}}.$$

Логарифмируя полученное выражение по основанию *e*, получим

$$\ln\frac{P_0-\Delta P}{P_0}=-\frac{Mg\Delta h}{RT},$$

откуда

$$\Delta h=\frac{RT}{Mg}\ln\frac{P_0}{P_0-\Delta P};$$

$$[\Delta h]=\frac{\text{Дж}\cdot\text{К}\cdot\text{моль}\cdot\text{с}^2}{\text{моль}\cdot\text{К}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}}=\frac{\text{Дж}}{\text{Н}}=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{Н}}=\text{м};$$

$$\Delta h=\frac{8{,}3\cdot 220}{29\cdot 10^{-3}\cdot 9{,}8}\ln\frac{25\cdot 10^3}{2{,}5\cdot 10^3-100}=25{,}7\,\text{м}.$$

Ответ: $\Delta h=25{,}7\,\text{м}$.

Задача 2.47

Известно отношение концентрации пылинок $n_1 / n_0 = 0{,}787$, взвешенных в воздухе и находящихся на высоте $h_1 = 0{,}1$ м и $h_0 = 0$ м. Температура воздуха $T = 300$ К, а масса пылинки $m=10^{-21}$ кг. Найти по эти данным значение постоянной Авогадро N_A.

Дано:	**Решение**
$m=10^{-21}$ кг $T = 300$ К $n_1 / n_0 = 0{,}787$ $h_1 = 0{,}1$ м $h_0 = 0$ м	Воспользуемся распределением Больцмана
N_A – ?	

$$n=n_0e^{\frac{-E_n}{kT}},$$

где $k=\dfrac{R}{N_A}$ – постоянная Больцмана.

Тогда

$$n_1=n_0e^{\frac{-mgh_1N_A}{RT}} \quad \text{или} \quad \frac{n_1}{n_0}=e^{\frac{-mgh_1N_A}{RT}}. \qquad (1)$$

Логарифмируя выражение (1), получим:

$$\ln\frac{n_1}{n_0}=-\frac{mgh_1N_A}{RT},$$

откуда

$$N_A = -\ln\frac{n_1}{n_0}\frac{RT}{mgh_1};$$

$$[N_A] = \frac{\text{Дж}\cdot\text{К}\cdot\text{с}^2}{\text{моль}\cdot\text{К}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{Н}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{Дж}} = \text{моль}^{-1};$$

$$N_A = 5{,}96\cdot 10^{23}\,\text{моль}^{-1}.$$

Ответ: $N_A = 5{,}96\cdot 10^{23}\,\text{моль}^{-1}$.

Задача 2.48

Одинаковые частицы массой $m = 10^{-12}$ г каждая распределены в однородном гравитационном поле напряженностью g = 0,2 мкН/кг. Определить отношение n_1 / n_2 концентрации частиц, находящихся на эквипотенциальных уровнях, отстоящих друг от друга на Δz = 10 м. Температура T во всех слоях считается одинаковой и равной 290 К.

Дано:
$m = 10^{-15}$ кг
$g = 2\cdot 10^{-7}$ Н/кг
Δz = 10 м
T = 290 К

$\frac{n_1}{n_2}$. – ?

Решение

Согласно распределению Больцмана концентрация частиц в силовом поле

$$n = n_0 e^{\frac{-E_n}{kT}},$$

где k – постоянная Больцмана; E_n – потенциальная энергия частиц.

В однородном гравитационном поле напряженностью g потенциальная энергия

$$E_n = mgz,$$

где z – координата (высота) точки, в которой расположена частица массой m, по отношению к уровню, принятому за нулевой.

Для частиц, находящихся на двух эквипотенциальных уровнях, концентрация

$$n_1 = n_0 e^{\frac{-mgz_1}{kT}};$$

$$n_2 = n_0 e^{\frac{-mgz_2}{kT}}.$$

Отсюда найдем отношение

$$\frac{n_1}{n_2} = e^{\frac{mg}{kT}(z_2 - z_1)}.$$

По условию задачи $\Delta z = z_2 - z_1$.

Поэтому

$$\frac{n_1}{n_2} = e^{\frac{mg\Delta z}{kT}};$$

$$\left[\frac{mg\Delta z}{kT}\right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{К}}{\text{кг} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Дж}} = 1;$$

$$\frac{n_1}{n_2} = 1{,}65.$$

Ответ: $\frac{n_1}{n_2} = 1{,}65.$

Задача 2.49

Во время полета вертолета барометр в его кабине показывает давление P = 80 кПа, поэтому летчик считает, что летит на постоянной высоте. Однако температура воздуха изменилась на ΔT = 2 К. Какую ошибку допускает летчик при определении высоты полета? Считать температуру воздуха не зависящей от высоты, а давление у поверхности Земли $P_0 = 10^5$ Па.

Дано:
ΔT = 2 К
$P = 8 \cdot 10^4$ Па
$P_0 = 10^5$ Па
$M = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

Δh – ?

Решение

До изменения температуры давление, показываемое барометром,

$$P = P_0 e^{\frac{-Mgh}{RT}}, \tag{1}$$

где h – высота полета.

После изменения температуры на ΔT давление, показываемое барометром, осталось таким же, поэтому

$$P = P_0 e^{\frac{-Mg(h+\Delta h)}{R(T+\Delta T)}}, \tag{2}$$

где Δh – ошибка в измерении высоты.

Из уравнений (1), (2) следует:

$$P_0 e^{\frac{-Mgh}{RT}} = P_0 e^{\frac{-Mg(h+\Delta h)}{R(T+\Delta T)}},$$

откуда

$$\frac{h}{T} = \frac{h+\Delta h}{T+\Delta T}$$

или

$$\Delta h = \frac{h}{T}\Delta T. \tag{3}$$

Соотношение $\dfrac{h}{T}$ найдем из формулы (1):

$$\frac{P_0}{P} = e^{\frac{Mg}{R}\cdot\frac{h}{T}};$$

$$\ln\frac{P_0}{P} = \frac{Mg}{R}\frac{h}{T},$$

откуда

$$\frac{h}{T} = \frac{R}{Mg}\ln\frac{P_0}{P}. \tag{4}$$

Подставив выражение (4) в (3), получим:

$$\Delta h = \frac{R\Delta T}{Mg}\ln\frac{P_0}{P};$$

$$[\Delta h] = \frac{\text{Дж}\cdot\text{К}\cdot\text{моль}\cdot\text{с}^2}{\text{моль}\cdot\text{К}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Н}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{Н}} = \text{м};$$

$$\Delta h = \frac{8{,}3\cdot 2}{29\cdot 10^{-3}\cdot 10}\ln\frac{10^5}{8\cdot 10^4} = 13\ \text{м}.$$

Ответ: $\Delta h = 13$ м.

Задача 2.50

Идеальный газ с молярной массой M находится в однородном поле тяжести, ускорение свободного падения в котором равно g. Найти давление газа как функцию высоты h, если при $h = 0$ давление $P = P_0$, а температура изменяется с высотой: 1) $T = T_0(1-\alpha h)$; 2) $T = T_0(1+\alpha h)$, где α – положительная постоянная.

Дано:
M; g; h;
$h = 0$; $P = P_0$
1) $T = T_0(1-\alpha h)$
2) $T = T_0(1+\alpha h)$

P – ?

Решение

Комбинируя соотношение $dP = -\rho g dh$ с уравнением состояния идеального газа

$$P = \frac{m}{M}\frac{RT}{V} = \frac{\rho RT}{M},$$

получаем дифференциальное уравнение для определения зависимости давления P от высоты h:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{Mgdh}{RT}.$$

Его решение с учетом начального условия $P = P_0$ при $h = 0$ дает:

для случая 1 следующую зависимость:

$$P = P_0(1-\alpha h)^{\frac{Mg}{RT_0\alpha}},$$

а для случая 2 получаем соотношение

$$P = P_0(1+\alpha h)^{-\frac{Mg}{RT_0\alpha}}.$$

Ответ: 1) $P = P_0(1-\alpha h)^{\frac{Mg}{RT_0\alpha}}$; 2) $P = P_0(1+\alpha h)^{-\frac{Mg}{RT_0\alpha}}$.

2.3. Явления переноса в газах

Основные теоретические сведения

Среднее число соударений, испытываемых одной молекулой газа в единицу времени,

$$\langle z\rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n\langle \upsilon\rangle,$$

где d – эффективный диаметр молекулы; n – концентрация молекул; $\langle \upsilon\rangle$ – средняя арифметическая скорость молекул.

Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle l\rangle = \frac{\langle \upsilon\rangle}{\langle z\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p},$$

где $k = 1{,}38\cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана.

Среднее число ударов молекул о единицу поверхности в единицу времени

$$\nu = \frac{1}{4}n\langle \upsilon\rangle.$$

Закон Ньютона для внутреннего трения (вязкости)

$$F = -\eta\frac{d\upsilon}{dx}S,$$

где F – сила внутреннего трения между движущимися слоями площадью S; $\frac{d\upsilon}{dx}$ – градиент скорости; η – динамическая вязкость,

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\langle \upsilon\rangle\langle l\rangle,$$

где ρ – плотность газа.

Закон теплопроводности Фурье:

$$Q = -\lambda\frac{dT}{dx}St,$$

где Q – теплота, прошедшая посредством теплопроводности через площадь S за время t; $\frac{dT}{dx}$ – градиент температуры; λ – коэффициент теплопроводности,

$$\lambda = \frac{1}{3}c_V\rho\langle \upsilon\rangle\langle l\rangle,$$

где c_V – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; ρ – плотность газа; $\langle \upsilon\rangle$ – средняя арифметическая скорость теплового движения его молекул; $\langle l\rangle$ – средняя длина свободного пробега молекул.

Закон диффузии Фика:

$$M = -D\frac{d\rho}{dx}St\,,$$

где M – масса вещества, переносимая посредством диффузии через площадь S за время t; $\frac{d\rho}{dx}$ – градиент плотности, D – коэффициент диффузии,

$$D = \frac{1}{3}\langle \upsilon \rangle \langle l \rangle\,.$$

Связь между коэффициентами теплопроводности λ, диффузии D и внутреннего трения η:

$$\eta = \rho D\,\frac{\lambda}{\eta c_V} = 1,$$

где c_V – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; ρ – плотность газа.

Примеры решения задач

Задача 2.51

Водород находится при температуре t = 20 °C и давлении P = 15 Па. Найти среднюю длину пробега $\langle \lambda \rangle$ молекул водорода.

Дано:	**Решение**
T = 293 К P = 15 Па $d = 0{,}23 \cdot 10^{-9}$ м	Средняя длина свободного пробега молекул определяется по формуле
$\langle \lambda \rangle$ – ?	$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}, \qquad (1)$$

где n – концентрация молекул газа.

Выразим n из уравнения состояния идеального газа:

$$P = nkT;$$

$$n = \frac{P}{kT}. \qquad (2)$$

Подставив формулу (2) в (1), получим:

$$\langle\lambda\rangle=\frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2P};\qquad [\lambda]=\frac{\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{К}\cdot\text{м}^2\cdot\text{Па}}=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{м}^2}{\text{м}^2\cdot\text{Н}}=\text{м};$$

$$\langle\lambda\rangle=\frac{1,38\cdot10^{-23}\cdot293}{\sqrt{2}\cdot3,14\cdot\left(0,23\cdot10^{-9}\right)^2\cdot15}=1,16\cdot10^{-3}\text{м}.$$

Ответ: $\langle\lambda\rangle=1,16\cdot10^{-3}$м.

Задача 2.52

Средняя длина свободного пробега $\langle\lambda\rangle$ молекул кислорода равна 10 см. Найти плотность ρ газа.

Дано:	**Решение**
$\langle\lambda\rangle$ = 0,1 м M = 32·10^{-3} кг/моль d = $0,23\cdot10^{-9}$ м	Поскольку (см. задачу 2.51)
ρ – ?	

$$\langle\lambda\rangle=\frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2P},\tag{1}$$

то, выразив давление P из уравнения Менделеева – Клапейрона, $p=\frac{\rho}{M}RT$ (учли, что $\rho=\frac{m}{V}$, $m=\rho V$), и подставив его в формулу (1), получим:

$$\langle\lambda\rangle=\frac{kTM}{\sqrt{2}\pi d^2\rho RT},$$

откуда

$$\rho=\frac{kM}{\sqrt{2}\pi d^2\langle\lambda\rangle R};\qquad [\rho]=\frac{\text{Дж}\cdot\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{К}}{\text{К}\cdot\text{моль}\cdot\text{м}^2\cdot\text{м}\cdot\text{Дж}}=\frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

$$\rho=\frac{1,38\cdot10^{-23}\cdot32\cdot10^{-3}}{\sqrt{2}\cdot3,14\cdot\left(0,23\cdot10^{-9}\right)^2\cdot0,1\cdot8,31}=0,13\cdot10^{-5}\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Ответ: $\rho=0,13\cdot10^{-5}\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Задача 2.53

Определить среднюю длину $\langle\lambda\rangle$ свободного пробега атомов гелия, если плотность ρ газа равна $2\cdot10^{-2}$ кг/м^3. Эффективный диаметр d молекулы гелия равен 0,22 нм.

Дано:
$\rho = 2\cdot10^{-2}$ кг/м^3
$M = 4\cdot10^{-3}$ кг/моль
$d = 0,22\cdot10^{-9}$ м
$\langle\lambda\rangle$ – ?

Решение

Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle\lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}, \qquad (1)$$

где n – концентрация молекул газа.

Плотность газа

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT} \qquad (2)$$

(использовали уравнение Менделеева – Клапейрона $PV = \frac{m}{M}RT$).

Давление газа

$$P = nkT, \qquad (3)$$

где k – постоянная Больцмана; T – температура.

Подставив выражение (3) в формулу (2), получаем:

$$\rho = \frac{nkTM}{RT},$$

откуда

$$n = \frac{\rho RP}{kTM}. \qquad (4)$$

Подставив выражение (4) в (1), получим:

$$\langle\lambda\rangle = \frac{kTM}{\sqrt{2}\pi d^2\rho RT} = \frac{kM}{\sqrt{2}\pi d^2\rho R} = \frac{M}{\sqrt{2}\pi d^2\rho N_A}$$

(учли, что $R = kN_A$, где N_A – постоянная Авогадро);

$$\left[\langle\lambda\rangle\right] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^3\cdot\text{моль}}{\text{моль}\cdot\text{м}^2\cdot\text{кг}} = \text{м};$$

$$\langle\lambda\rangle = \frac{4\cdot10^{-3}}{1,41\cdot3,14\cdot\left(0,22\cdot10^{-9}\right)^2\cdot2\cdot10^{-2}\cdot6,02\cdot10^{23}} = 1,55\cdot10^{-6}\,\text{м} = 1,55\ \text{мкм}.$$

Ответ: $\langle\lambda\rangle = 1,55$ мкм.

Задача 2.54

При температуре T = 280 К и некотором давлении средняя длина $\langle\lambda_1\rangle$ свободного пробега молекул кислорода равна 0,1 мкм. Определить среднее число $\langle z_r\rangle$ столкновений молекул в 1 с, если давление в сосуде уменьшить до 0,02 от первоначального значения. Температуру считать постоянной, а эффективный диаметр d молекулы кислорода принять равным 0,36 нм.

Дано:

T = 280 К

$\langle\lambda_1\rangle = 10^{-7}$ м

$d = 0{,}36\cdot 10^{-9}$ м

$M = 32\cdot 10^{-3}$ кг/моль

$\dfrac{P_2}{P_1} = 0{,}02$

$\langle z_r\rangle$ – ?

Решение

Среднее число столкновений молекул в 1 с при конечном давлении определяется отношением средней скорости υ молекулы к средней длине ее свободного пробега λ_2 при том же давлении:

$$\langle z_r\rangle = \frac{\langle\upsilon\rangle}{\langle\lambda_2\rangle}, \quad (1)$$

где средняя скорость молекул определяется по формуле

$$\langle\upsilon\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \quad (2)$$

где R – молярная газовая постоянная; M – молярная масса вещества.

Из формул

$$\langle\lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \quad \text{и} \quad P = nkT$$

следует, что средняя длина свободного пробега молекул обратно пропорциональна давлению:

$$\frac{\langle\lambda_1\rangle}{\langle\lambda_2\rangle} = \frac{P_2}{P_1},$$

откуда

$$\langle\lambda_2\rangle = \langle\lambda_1\rangle\frac{P_1}{P_2}.$$

Подставив это выражение в формулу (1) и учитывая (2), получим искомое среднее число столкновений молекул в 1 с:

$$\langle z_r\rangle = \frac{\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}}{\langle\lambda_1\rangle\frac{P_1}{P_2}} = \frac{P_2}{P_1}\frac{\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}}{\langle\lambda_1\rangle};$$

$$\left[\langle z_r\rangle\right]=\frac{\sqrt{\dfrac{\text{Дж}\cdot\text{К}\cdot\text{моль}}{\text{моль}\cdot\text{К}\cdot\text{кг}}}}{\text{м}}=\frac{\sqrt{\dfrac{\text{Дж}}{\text{кг}}}}{\text{м}}=\frac{\sqrt{\dfrac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{кг}}}}{\text{м}}=\frac{\sqrt{\dfrac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{кг}}}}{\text{м}}=\frac{\dfrac{\text{м}}{\text{с}}}{\text{м}}=\frac{1}{\text{с}}=\text{с}^{-1};$$

$$\langle z_r\rangle=0{,}02\frac{\sqrt{\dfrac{8\cdot 8{,}31\cdot 280}{3{,}14\cdot 32\cdot 10^{-3}}}}{10^{-7}}=2{,}39\cdot 10^{-8}\,\text{с}^{-1}.$$

Ответ: $\langle z_r\rangle=2{,}39\cdot 10^{-8}\,\text{с}^{-1}$.

Задача 2.55

Найти среднее число соударений z в течение t = 1 с, испытываемых молекулой водорода при нормальных условиях.

Дано:
$d = 0{,}23\cdot 10^{-9}$ м
$t = 1$ с
$T = 273$ К
$P = 10^5$ Па
$M = 2\cdot 10^{-3}$ кг/моль

$\langle z\rangle$ – ?

Решение

Среднее число соударений в единицу времени одной молекулы определяется отношением

$$\langle z\rangle=\frac{\langle \upsilon\rangle}{\langle\lambda\rangle},$$

где $\langle \upsilon\rangle=\sqrt{\dfrac{8RT}{\pi M}}$ – средняя арифметическая скорость молекул.

Средняя длина свободного пробега молекул

$$\langle\lambda\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}=\frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 P}.$$

Тогда

$$\langle z\rangle=\frac{\sqrt{\dfrac{8RT}{\pi M}}}{\dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 P}}=\frac{4d^2P}{k}\sqrt{\frac{\pi R}{MT}};$$

$$\left[\langle z\rangle\right]=\frac{\text{м}^2\cdot\text{Па}\cdot\text{К}}{\text{Дж}}\sqrt{\frac{\text{Дж}\cdot\text{моль}}{\text{моль}\cdot\text{К}\cdot\text{кг}\cdot\text{К}}}=\frac{\text{м}^2\cdot\text{Н}}{\text{м}^2\cdot\text{Н}\cdot\text{м}}\sqrt{\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{кг}}}=\frac{1}{\text{м}}\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{кг}}}=$$

$$=\frac{1}{\text{м}}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}}=\frac{1}{\text{с}}=\text{с}^{-1};$$

$$\langle z\rangle = \frac{4\cdot 0,23\cdot 10^{-9}\cdot 10^{5}}{1,38\cdot 10^{-23}}\sqrt{\frac{8,31\cdot 3,14}{2\cdot 10^{-3}\cdot 273}} = 1,1\cdot 10^{10}\,\text{с}^{-1}.$$

Ответ: $\langle z\rangle = 1,1\cdot 10^{10}\,\text{с}^{-1}$.

Задача 2.56

Найти число z всех столкновений, которые происходят в единицу времени между всеми молекулами кислорода, занимающего объем V = 5 л при нормальных условиях.

Дано:
$d = 0,3\cdot 10^{-9}$ м
T = 273 К
$P = 10^{5}$ Па
$M = 32\cdot 10^{-3}$ кг/моль
$V = 5\cdot 10^{-3}$ м^{3}

z – ?

Решение

Среднее число столкновений за единицу времени, испытываемых одной молекулой,

$$\langle z\rangle = \sqrt{2}\pi d^{2} n\langle \upsilon\rangle,$$

где $\langle \upsilon\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$ – средняя арифметическая скорость; $n = \frac{N}{V}$ – концентрация молекул.

Общее число столкновений

$$z = \frac{N\langle z\rangle}{2}.$$

Так как при столкновении участвуют одновременно две молекулы, то берется $\frac{1}{2}N$.

Таким образом,

$$z = \frac{V}{2}\sqrt{2}\pi d^{2} n^{2}\langle \upsilon\rangle = \frac{V}{\sqrt{2}}\pi d^{2} n^{2}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \qquad (1)$$

Из уравнения состояния $P = nkT$ определим концентрацию молекул:

$$n = \frac{P}{kT}\ . \qquad (2)$$

Подставив уравнение (2) в (1), получим:

$$z = \frac{V\pi d^{2} P^{2}}{\sqrt{2}k^{2}T^{2}}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}};$$

$$[z]=\frac{м^3\cdot м^2\cdot Па^2\cdot К^2}{Дж^2\cdot К^2}\sqrt{\frac{Дж\cdot К\cdot моль}{моль\cdot К\cdot кг}}=\frac{м^5\cdot Н^2}{м^6\cdot Н^2}\sqrt{\frac{Н\cdot м}{кг}}=\frac{1}{м}\sqrt{\frac{кг\cdot м\cdot м}{с^2\cdot кг}}=$$

$$=\frac{м}{м\cdot с}=\frac{1}{с}=с^{-1};$$

$$z=\frac{5\cdot 10^{-3}\cdot 3{,}14\cdot\left(0{,}3\cdot 10^{-9}\right)^2\cdot\left(10^5\right)^2}{1{,}41\cdot\left(1{,}38\cdot 10^{-23}\right)^2\cdot 273^2}\sqrt{\frac{8\cdot 8{,}31\cdot 273}{3{,}14\cdot 32\cdot 10^{-3}}}=3\cdot 10^{32}\,с^{-1}.$$

Ответ: $z=3\cdot 10^{32}\,с^{-1}$.

Задача 2.57

Для исследования плазмы тлеющего разряда применяется цилиндрическая газоразрядная трубка, в которой находится неон при температуре T = 300 К и давлении P = 1 Па. Найти число молекул неона N, ударяющихся в единицу времени о катод, имеющий форму диска площадью $S = 1$ см^2.

Дано:
T = 300 К
P = 1 Па
$S = 10^{-4}$ м^2
$M = 20\cdot 10^{-3}$ кг/моль
N – ?

Решение

Среднее число ударов молекул о единицу поверхности в единицу времени

$$\nu=\frac{1}{4}n\langle\upsilon\rangle, \qquad (1)$$

где n – число молекул в единице объема.

Число молекул в единице объема можно определить из уравнения состояния:

$$n=\frac{P}{kT}. \qquad (2)$$

Средняя арифметическая скорость

$$\langle\upsilon\rangle=\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \qquad (3)$$

Число молекул неона N, ударяющихся о катод в единицу времени, $N=\nu S$, или с учетом выражений (1) – (3)

$$N=\frac{SP}{4k}\sqrt{\frac{8R}{\pi MT}};$$

$$[N]=\frac{м^2\cdot Па\cdot К}{Дж}\sqrt{\frac{Дж\cdot моль}{моль\cdot К\cdot кг\cdot К}}=\frac{м^2\cdot Н\cdot К}{м^2\cdot Н\cdot м\cdot К}\sqrt{\frac{Дж}{кг}}=\frac{1}{м}\sqrt{\frac{Н\cdot м}{кг}}=$$

$$=\frac{1}{м}\sqrt{\frac{кг\cdot м\cdot м}{с^2\cdot кг}}=\frac{м}{м\cdot с}=с^{-1};$$

$$N=\frac{10^{-4}\cdot 1}{4\cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}}\sqrt{\frac{8{,}31\cdot 8}{3{,}14\cdot 20\cdot 10^{-3}\cdot 300}}=3{,}4\cdot 10^{18}\,с^{-1}.$$

Ответ: $N=3{,}4\cdot 10^{18}\,с^{-1}$.

Задача 2.58

Средняя длина свободного пробега $\langle l\rangle$ молекулы углекислого газа при нормальных условиях равна 40 нм. Определить среднюю арифметическую скорость $\langle \upsilon\rangle$ молекул и число z соударений, которые испытывает молекула в 1 с.

Дано:
$\langle l\rangle = 40\cdot 10^{-9}$ м
$t = 1$ с

$\langle \upsilon\rangle$; $\langle z\rangle$ – ?

Решение

Средняя арифметическая скорость молекул определяется по формуле

$$\langle \upsilon\rangle=\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}},$$

где M – молярная масса вещества ($M = 44\cdot 10^{-3}$ кг/моль);

$$[\langle \upsilon\rangle]=\sqrt{\frac{Дж\cdot К\cdot моль}{моль\cdot К\cdot Дж}}=\sqrt{\frac{Дж}{кг}}=\sqrt{\frac{Н\cdot м}{кг}}=\sqrt{\frac{кг\cdot м\cdot м}{кг\cdot с^2}}=\frac{м}{с};$$

$$\langle \upsilon\rangle=\sqrt{\frac{8\cdot 8{,}31\cdot 273}{3{,}14\cdot 44\cdot 10^{-3}}}=362\ м/с.$$

Среднее число $\langle z\rangle$ соударений молекулы в 1с определяется отношением средней скорости $\langle \upsilon\rangle$ молекулы к средней длине ее свободного пробега $\langle l\rangle$:

$$\langle z\rangle=\frac{\langle \upsilon\rangle}{\langle l\rangle};\qquad z=\frac{362}{40\cdot 10^{-9}}=9{,}05\cdot 10^{9}\,с^{-1}.$$

Ответ: $\langle \upsilon\rangle=362$ м/с; $\langle z\rangle=9{,}05\cdot 10^{9}\,с^{-1}$.

Задача 2.59

Определить коэффициент внутреннего трения для водорода, имеющего температуру t = 27 °C.

Дано:
$M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$T = 300$ К
$d = 2{,}3 \cdot 10^{-10}$ м

η – ?

Решение

Согласно молекулярно-кинетической теории газов коэффициент внутреннего трения

$$\eta = \frac{\rho \langle \upsilon \rangle \langle \lambda \rangle}{3}, \qquad (1)$$

где ρ – плотность газа; $\langle \upsilon \rangle$ – средняя арифметическая скорость молекул; $\langle \lambda \rangle$ – средняя длина свободного пробега.

Плотность из уравнения Менделеева – Клапейрона равна

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT}, \qquad (2)$$

где m, V, P и T – масса, объем, давление и температура газа; μ – молярная масса водорода; R – молярная газовая постоянная.

Средняя арифметическая скорость молекул

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \qquad (3)$$

Средняя длина свободного пробега

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_0},$$

где d – эффективный диаметр молекулы водорода; n_0 – число молекул водорода в 1 м^3.

Давление и температура газа связаны отношением

$$P = n_0 kT,$$

откуда

$$n_0 = \frac{P}{kT},$$

где $k = \dfrac{R}{N_A}$ (N_A – постоянная Авогадро).

Тогда

$$\langle \lambda \rangle = \frac{RT}{\sqrt{2}\pi d^2 P N_A}. \qquad (4)$$

Подставляя (2), (3) и (4) в уравнение (1), получим:

$$\eta = \frac{1}{3}\frac{PM}{RT}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}\frac{RT}{\sqrt{2}\pi d^2 PN_A} = \frac{\sqrt{8MRT}}{3\sqrt{2\pi^3}d^2 N_A};$$

$$[\eta] = \frac{\sqrt{\dfrac{\text{кг}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{моль}\cdot\text{моль}\cdot\text{К}}}\cdot\text{моль}}{\text{м}^2} = \frac{\sqrt{\dfrac{\text{кг}\cdot\text{Н}\cdot\text{К}\cdot\text{м}}{\text{моль}\cdot\text{моль}\cdot\text{К}}}\cdot\text{моль}}{\text{м}^2} = \frac{\sqrt{\dfrac{\text{кг}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}}}{\text{м}^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{м}\cdot\text{с}};$$

$$\eta = \frac{\sqrt{8\cdot 2\cdot 10^{-3}\cdot 8{,}31\cdot 300}}{3\sqrt{2\cdot 3{,}14^2}\cdot 2{,}3\cdot 10^{-10}\cdot 6{,}02\cdot 10^{23}} = 8{,}4\cdot 10^{-6}\,\frac{\text{кг}}{\text{м}\cdot\text{с}}.$$

Ответ: $= 8{,}4\cdot 10^{-6}\ \dfrac{\text{кг}}{\text{м}\cdot\text{с}}$.

Задача 2.60

Кислород находится при нормальных условиях. Известно, что средняя длина свободного пробега молекул $\langle\lambda\rangle = 0{,}1$ мкм. Найти коэффициент диффузии D.

Дано:
T = 273 К
P = 10^5 Па
M = $32\cdot 10^{-3}$ кг/моль
$\langle\lambda\rangle = 10^{-7}$ м

D – ?

Решение

Коэффициент диффузии определяется по формуле

$$D = \frac{\langle\upsilon\rangle\langle\lambda\rangle}{3},$$

где $\langle\upsilon\rangle = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi M}}$ – средняя арифметическая скорость.

В итоге

$$D = \frac{\langle\lambda\rangle}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}};$$

$$[D] = \text{м}\cdot\sqrt{\frac{\text{Дж}\cdot\text{К}\cdot\text{моль}}{\text{моль}\cdot\text{К}\cdot\text{кг}}} = \text{м}\cdot\sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}} = \text{м}\cdot\sqrt{\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{кг}}} = \text{м}\cdot\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{кг}}} = \frac{\text{м}^2}{\text{с}};$$

$$D=\frac{10^{-7}}{3}\sqrt{\frac{8\cdot 8{,}31\cdot 273}{3{,}14\cdot 32\cdot 10^{-3}}}=14\cdot 10^{-6}\,\frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

Ответ: $D=14\cdot 10^{-6}\ \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$.

Задача 2.61

Найти, во сколько раз отличается коэффициент диффузии D_1 кислорода от коэффициента диффузии D_2 гелия, если оба газа находятся в нормальных условиях.

Дано:
T = 273 К
P = 10^5 Па
M_1 = $32\cdot10^{-3}$ кг/моль
M_2 = $4\cdot10^{-3}$ кг/моль
$d_1 = 3\cdot 10^{-10}$ м
$d_2 = 2\cdot 10^{-10}$ м

$\frac{D_1}{D_2}$ – ?

Решение

Коэффициент диффузии определяется по формуле

$$D=\frac{\langle\upsilon\rangle\langle\lambda\rangle}{3},$$

где $\langle\upsilon\rangle=\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$ – средняя арифметическая скорость.

Среднюю длину свободного пробега определим по формуле

$$\langle\lambda\rangle=\frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 P}.$$

Таким образом,

$$D=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}\frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 P}.$$

Отношение коэффициентов диффузии

$$\frac{D_1}{D_2}=\sqrt{\frac{M_2}{M_1}}\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2;$$

$$\frac{D_1}{D_2}=\sqrt{\frac{4\cdot 10^{-3}}{32\cdot 10^{-3}}}\left(\frac{2\cdot 10^{-10}}{3\cdot 10^{-10}}\right)^2=0{,}16.$$

Ответ: $\frac{D_1}{D_2}=0{,}16$.

Задача 2.62

Коэффициент диффузии водорода при нормальных условиях $D = 9\cdot 10^{-5}\ \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$. Найти динамическую вязкость водорода при тех же условиях.

Дано:
T = 273 К
P = 10^5 Па
M = $2\cdot10^{-3}$ кг/моль
$D = 9\cdot 10^{-5}\text{м}^2/\text{с}$
η – ?

Решение

Коэффициент диффузии и коэффициент внутреннего трения определяются по формулам

$$D = \frac{\langle \upsilon\rangle\langle\lambda\rangle}{3};\qquad \eta = \frac{\rho\langle \upsilon\rangle\langle\lambda\rangle}{3}.$$

Из сравнения коэффициентов D и η видно, что

$$\eta = \rho D, \tag{1}$$

где ρ – плотность газа.

Плотность газа ρ определим, используя уравнение Менделеева – Клапейрона:

$$\rho = \frac{MP}{RT}. \tag{2}$$

Из уравнений (1) и (2) находим динамическую вязкость:

$$\eta = \frac{MP}{RT}D;$$

$$[\eta] = \frac{\text{кг}\cdot\text{Па}\cdot\text{моль}\cdot\text{К}\cdot\text{м}^2}{\text{моль}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}\cdot\text{с}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{Па}\cdot\text{м}^2}{\text{Дж}\cdot\text{с}} = \frac{\text{Па}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^2}{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}\cdot\text{с}} = \text{Па}\cdot\text{с};$$

$$\eta = \frac{2\cdot10^{-3}\cdot10^{5}\cdot9\cdot10^{-5}}{8{,}31\cdot273} = 8\cdot10^{-6}\ \text{Па}\cdot\text{с}.$$

Ответ: $\eta = 8\cdot10^{-6}\ \text{Па}\cdot\text{с}$.

Задача 2.63

Определить, во сколько раз отличаются коэффициенты динамической вязкости кислорода η_1 и азота η_2, если температуры газов одинаковы. Эффективные диаметры молекул кислорода и азота соответственно равны $d_1 = 0{,}36$ нм и $d_2 = 0{,}38$ нм.

Дано:
$M_1 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$M_2 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$d_1 = 0{,}36 \cdot 10^{-9}$ м
$d_2 = 0{,}38 \cdot 10^{-9}$ м
$T_1 = T_2 = T$

$\frac{\eta_1}{\eta_2}$ – ?

Решение

Коэффициент динамической вязкости газа

$$\eta = \frac{\rho \langle \upsilon \rangle \langle \lambda \rangle}{3}, \qquad (1)$$

где плотность газа (из уравнения Менделеева – Клапейрона $pV = \frac{m}{M} RT$)

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT}. \qquad (2)$$

Средняя скорость молекул

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \qquad (3)$$

Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 P} \qquad (4)$$

(давление P газа и концентрация n молекул связаны формулой $P = nkT$).

Подставляя выражения (2) – (4) в формулу (1), получим:

$$\eta = \frac{2}{3} \frac{k}{\pi d^2} \sqrt{\frac{MT}{\pi R}}. \qquad (5)$$

Согласно формуле (5) и учитывая условие задачи ($T_1 = T_2$), получаем искомое отношение коэффициентов динамической вязкости

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 \sqrt{\frac{M_1}{M_2}};$$

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \left(\frac{0{,}38 \cdot 10^{-9}}{0{,}36 \cdot 10^{-9}} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{32 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}}} = 1{,}19.$$

Ответ: $\frac{\eta_1}{\eta_2} = 1{,}19$.

Задача 2.64

Вязкость гелия при нормальных условиях $\eta = 13$ мкПа $\cdot$ с. Найти среднюю длину свободного пробега молекул гелия $\langle \lambda \rangle$ при тех же условиях.

Дано:	**Решение**
$T = 273$ К $P = 10^5$ Па $M = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль $\eta = 13 \cdot 10^{-6}$ Па $\cdot$ с $\langle \lambda \rangle$ – ?	Коэффициент динамической вязкости газа $$\eta = \frac{\rho \langle \upsilon \rangle \langle \lambda \rangle}{3},$$ откуда $$\langle \lambda \rangle = \frac{3\eta}{\rho \langle \upsilon \rangle}. \quad (1)$$

Из уравнения Менделеева – Клапейрона определим плотность газа:

$$\rho = \frac{MP}{RT}. \quad (2)$$

Средняя арифметическая скорость молекул газа

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \quad (3)$$

Из уравнений (1) – (3) находим:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{3\eta}{P} \sqrt{\frac{\pi RT}{8M}};$$

$$[\lambda] = \frac{\text{Па} \cdot \text{с}}{\text{Па}} \sqrt{\frac{\text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{кг}}} = \text{с} \cdot \sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}} = \text{с} \cdot \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}}} = \text{м};$$

$$\langle \lambda \rangle = \frac{3 \cdot 13 \cdot 10^{-6}}{10^5} \sqrt{\frac{3{,}14 \cdot 8{,}31 \cdot 273}{8 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}} = 184 \cdot 10^{-9} \text{м}.$$

Ответ: $\langle \lambda \rangle = 184 \cdot 10^{-9}$м.

Задача 2.65

Вязкость водорода $\eta = 8{,}6$ мкПа $\cdot$ с. Определить коэффициент теплопроводности γ водорода при тех же условиях.

Дано:	**Решение**
$M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль $\eta = 86 \cdot 10^{-7}$ Па $\cdot$ с $i = 5$ γ – ?	Коэффициент теплопроводности определяется по формуле $$\gamma = \frac{c_V \rho \langle \upsilon \rangle \langle \lambda \rangle}{3},$$

а коэффициент вязкости – по формуле

$$\eta = \frac{\rho\langle \upsilon \rangle \langle \lambda \rangle}{3}.$$

Таким образом, коэффициенты теплопроводности и вязкости связаны соотношением

$$\gamma = c_V \eta,$$

где $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{M}$ – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; i – число степеней свободы, для двухатомного газа $i = 5$.

Тогда

$$\gamma = \frac{5R}{2M}\eta;$$

$$[\gamma] = \frac{\text{Дж}\cdot\text{Па}\cdot\text{с}\cdot\text{моль}}{\text{моль}\cdot\text{К}\cdot\text{кг}} = \frac{\text{Дж}\cdot\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{м}^2\cdot\text{К}\cdot\text{кг}} = \frac{\text{Дж}\cdot\text{кг}\cdot\text{с}\cdot\text{м}}{\text{м}^2\cdot\text{К}\cdot\text{кг}\cdot\text{с}^2} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}};$$

$$\gamma = \frac{5\cdot 8{,}31\cdot 86\cdot 10^{-7}}{2\cdot 2\cdot 10^{-3}} = 89{,}3\cdot 10^{-3}\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}} = 89{,}3\,\frac{\text{мВт}}{\text{м}\cdot\text{К}}.$$

Ответ: $89{,}3\,\frac{\text{мВт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$.

Задача 2.66

Температура наружной поверхности кирпичной стены площадью 25 м^2 и толщиной 37 см 259 К, а внутренней поверхности – 293 К. Помещение отапливается электрическим обогревателем. Определить мощность обогревателя, если температура в помещении поддерживается постоянной. Теплопроводность кирпича $\gamma = 0{,}4$ Вт/(м · К).

Дано:
S = 25 м^2
d = 0,37 м
$T_1 = 259$ К
$T_2 = 293$ К
$\gamma = 0{,}4$ Вт/(м·К)

N – ?

Решение

Количество теплоты, прошедшее через наружную стену за интервал времени t, определим по закону Фурье:

$$\Delta Q = \gamma \frac{T_2 - T_1}{d} St. \quad (1)$$

За это время электрообогреватель должен выделить такое же количество теплоты

$$Q = Nt. \quad (2)$$

Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем

$$Nt = \gamma \frac{T_2 - T_1}{d} St,$$

откуда

$$N = \gamma \frac{T_2 - T_1}{d} S;$$

$$[N] = \frac{\text{Вт} \cdot \text{К} \cdot \text{м}^2}{\text{м} \cdot \text{К} \cdot \text{м}} = \text{Вт};$$

$$N = 0,4 \frac{293 - 259}{0,37} \cdot 25 = 9,2 \cdot 10^2 \text{ Вт} = 0,92 \text{ кВт}.$$

Ответ: $N = 0,92$ кВт.

Задача 2.67

Вычислить количество льда, которое образуется в течение часа в бассейне, площадь которого 10 м^2. Толщина льда 15 см, температура воздуха –10 °С, коэффициент теплопроводности льда $\gamma = 2,1$ Вт/(м · К).

Дано:	**Решение**
$S = 10 \text{ м}^2$ $\Delta x = 0,15$ м; $t_1 = -10$ °С $t_2 = 0$ °С $\gamma = 2,1$ Вт/(м · К) $r = 3,35 \cdot 10^5$ Дж/к $t = 3600$ с m – ?	Считаем процесс установившимся, температуру нижней поверхности льда равной 0 °С, а верхней – температуре воздуха. Через слой льда от воды отводится тепло. Количество тепла Q, передаваемое через лед толщиной Δx, пропорционально градиенту температуры $\Delta t / \Delta x$, площади передающей поверхности S и времени t и определяется уравнением теплопроводности Фурье

$$\Delta Q = \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x} S\tau.$$

Массу m образующегося льда определяем из уравнения для теплоты плавления Q льда, численно равной теплоте, отводимой от воды в процессе замораживания,

$$Q = mr,$$

где r – удельная теплота плавления льда.

Тогда

$$m=\frac{Q}{r}=\frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{\gamma}{r}S\tau;$$

$$[m]=\frac{\text{К}}{\text{м}}\frac{\text{Вт}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}}{\text{м}\cdot\text{К}\cdot\text{Дж}}=\frac{\text{Вт}\cdot\text{кг}\cdot\text{с}}{\text{Дж}}=\frac{\text{Дж}\cdot\text{кг}\cdot\text{с}}{\text{с}\cdot\text{Дж}}=\text{кг};$$

$$m=\frac{10\cdot 2{,}1\cdot 10\cdot 3{,}6\cdot 10^3}{0{,}15\cdot 3{,}35\cdot 10^5}\approx 15\ \text{кг}.$$

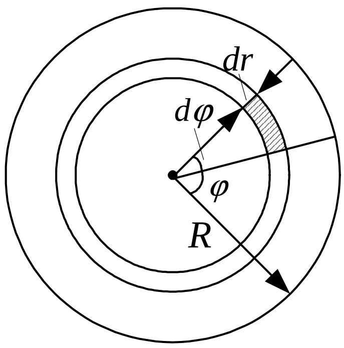
Ответ: $m=15$ кг.

Задача 2.68

Два диска радиусом R = 0,2 м каждый расположены горизонтально друг над другом на расстоянии d = 0,5 см так, что их оси совпадают. Верхний диск неподвижен, а нижний вращается относительно своей оси с частотой $n=10\ \text{с}^{-1}$. Найти вращающий момент M, действующий на верхний диск, если динамическая вязкость воздуха, в котором находятся диски, $\eta=8{,}6$ мкПа · с.

Дано:	Решение
R = 0,2 м $\eta=86\cdot10^{-7}$ Па·с $d=5\cdot10^{-3}$ м $n=10\ \text{с}^{-1}$	Выделим на верхнем диске участок (заштрихованный на рисунке) толщиной dr, расположенный на расстоянии r от центра диска.
M – ?	Его площадь

$$dS=rdrd\varphi$$



По закону Ньютона $\left(F=\eta\frac{d\upsilon}{dz}\Delta S\right)$ на этот участок действует сила внутреннего трения

$$dF=\eta\frac{d\upsilon}{dz}dS=\eta\frac{d\upsilon}{dz}rdrd\varphi,$$

где η –динамическая вязкость газа; $\frac{d\upsilon}{dz}$ – градиент скорости слоев воздуха.

Вращающий момент dM, действующий на выделенный участок,

$$dM=rdF=\eta\frac{d\upsilon}{dz}r^2drd\varphi.$$

Так как $\frac{d\upsilon}{dz}=\frac{\upsilon}{d}$, а $\upsilon=\omega r=2\pi nr$, то

$$dM=\eta\frac{2\pi n}{d}r^3drd\varphi.$$

Полный вращающий момент, действующий на верхний диск, найдем методом интегрирования:

$$M=\iint dM=\int_0^{2\pi}\int_0^R\eta\frac{2\pi n}{d}r^3drd\varphi=\eta\frac{2\pi n}{d}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R r^3dr=\eta\frac{2\pi n}{d}\frac{R^4}{4}2\pi=\frac{\pi^2 n\eta R^4}{d};$$

$$[M]=\frac{\text{Па}\cdot\text{с}\cdot\text{м}^4}{\text{с}\cdot\text{м}}=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^3}{\text{м}^2}=\text{Н}\cdot\text{м};$$

$$M=\frac{3{,}14^2\cdot10\cdot86\cdot10^{-7}\cdot0{,}2^4}{5\cdot10^{-3}}=0{,}54\cdot10^{-3}\text{Н}\cdot\text{м}=0{,}54\ \text{мН}\cdot\text{м}.$$

Ответ: $M=0{,}54\ \text{мН}\cdot\text{м}$.

Задача 2.69

Два тонкостенных коаксиальных цилиндра длиной $l=10$ см могут свободно вращаться вокруг общей оси z. Радиус R большого цилиндра равен 5 см. Между цилиндрами имеется зазор размером d = 2 мм. Оба цилиндра находятся в воздухе при нормальных условиях. Внутренний цилиндр приводят во вращение с постоянной частотой $n_1=20\ \text{с}^{-1}$. Внешний цилиндр заторможен. Определить, через какой промежуток времени с момента освобождения внешнего цилиндра он приобретет частоту вращения $n_2=1\ \text{с}^{-1}$. При расчетах изменением относительной скорости цилиндров пренебречь. Масса m внешнего цилиндра равна 100 г.

Дано:
$l=0{,}1$ м
R = 0,05 м
$d=2\cdot10^{-3}$м
$n_1=20\ \text{с}^{-1}$
$n_2=1\ \text{с}^{-1}$
$m=0{,}1$ кг

Δt – ?

Решение

При вращении внутреннего цилиндра слой воздуха увлекается им и начинает участвовать во вращательном движении. Вблизи поверхности этого цилиндра слой воздуха приобретает со временем практически такую же линейную скорость, как и скорость точек на поверхности цилиндра, т.е.

$$\upsilon=2\pi n_1(R-d).$$

Так как $d \ll R$, то приближенно можно считать

$$\upsilon\approx2\pi n_1 R. \qquad (1)$$

Вследствие внутреннего трения момент импульса передается соседним слоям газа и в конечном счете – внешнему цилиндру. За интервал времени Δt внешний цилиндр приобретает момент импульса

$$L = PR,$$

где P – импульс, полученный за время Δt внешним цилиндром.

Отсюда

$$P = \frac{L}{R}. \tag{2}$$

С другой стороны,

$$P = \eta \frac{d\upsilon}{dz} S\Delta t, \tag{3}$$

где η – динамическая вязкость газа; $\frac{d\upsilon}{dz}$ – градиент скорости; S – площадь поверхности цилиндра ($S = 2\pi Rl$).

Приравняв правые части выражений (2) и (3) и выразив из полученного равенства искомый интервал Δt, получим

$$\Delta t = \frac{L}{\eta R \frac{d\upsilon}{dz} S}. \tag{4}$$

Найдем входящие в эту формулу величины L, $\frac{d\upsilon}{dz}$ и S.

Момент импульса

$$L = I\omega_2,$$

где I – момент инерции тонкостенного цилиндра ($I = mR^2$); m – его масса; ω_2 – угловая скорость внешнего цилиндра ($\omega_2 = 2\pi n_2$).

С учетом этого запишем:

$$L = mR^2 \cdot 2\pi n_2 = 2\pi m R^2 n_2.$$

Градиент скорости

$$\frac{d\upsilon}{dz} = \frac{\upsilon}{z} = \frac{\upsilon}{d}.$$

Площадь цилиндра

$$S = 2\pi Rl.$$

Подставив в (4) выражения L, $\frac{d\upsilon}{dz}$, S, получим

$$\Delta t = \frac{mdn_2}{\eta \upsilon l}.$$

Подставив υ, согласно (1) найдем

$$\Delta t = \frac{mdn_2}{2\pi n_1 R l \eta}. \qquad (5)$$

Динамическая вязкость воздуха $\eta = 17,2$ мкПа · с $= 1,72 \cdot 10^{-5}$ Па · с;

$$[\Delta t] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{с} \cdot \text{Па} \cdot \text{с} \cdot \text{м} \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг}}{\text{Па} \cdot \text{с} \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{м}} = \text{с};$$

$$\Delta t = \frac{100 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}72 \cdot 10^{-5} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 10 \cdot 10^{-2} \cdot 20} = 18{,}5 \text{ с}.$$

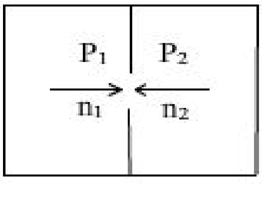
Ответ: $\Delta t = 18{,}5$ с.

Задача 2.70

Сосуд с азотом делится перегородкой на две части, в которых поддерживается различное давление газа: $P_1 = 5 \cdot 10^{-3}$Па и $P_2 = 1 \cdot 10^{-3}$Па. Перегородка имеет отверстие диаметром d = 1 см (см. рисунок). Определить массу азота, протекающего в единицу времени через отверстие при температуре газа T = 300 К. Газ разряжен, длина свободного пробега молекул $\lambda \gg d$.

Дано:
$d = 10^{-2}$ м
$P_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ Па
$P_2 = 5 \cdot 10^{-3}$ Па
$T = 300$ К
$M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$\frac{m}{\Delta t}$ – ?



Решение

Число N молекул, проходящих через отверстие в единицу времени,

$$N = N_1 - N_2, \qquad (1)$$

где $N_1 -$ число молекул, движущихся слева направо; $N_2 -$ число молекул, движущихся справа налево.

Принимая любое из напрвлений движения молекул равновероятным, считаем, что по направлению к перегородке движется 1/4 от общего числа молекул. Тогда среднее число ударов молекул о единицу поверхности в единицу времени выражается формулой

$$\nu = \frac{1}{4} n \langle \upsilon \rangle,$$

можем записать:

$$N_1 = \frac{1}{4} n_1 \langle \upsilon \rangle; \quad N_2 = \frac{1}{4} n_2 \langle \upsilon \rangle, \tag{2}$$

где n_1 и n_2 – концентрация молекул; $\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$ – средняя арифметическая скорость движения молекул.

Концентрацию молекул найдем из уравнения состояния газа ($P = nkT$):

$$n_1 = \frac{P_1}{kT}; \; n_2 = \frac{P_2}{kT}. \tag{3}$$

Из выражений (1) – (3) получим

$$N = \frac{1}{4} \langle \upsilon \rangle \frac{P_1 - P_2}{kT} = \frac{1}{4} \frac{P_1 - P_2}{kT} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \tag{4}$$

Формула (4) позволяет определить число молекул, проходящих в единицу времени через единицу площади отверстия. Найдем число молекул, проходящих через отверстие в единицу времени,

$$N \cdot S = \frac{\pi d^2}{4} \frac{1}{4} \frac{P_1 - P_2}{kT} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \tag{5}$$

где $S = \frac{\pi d^2}{4}$ – площадь отверстия.

Масса газа, протекающего через отверстие за одну секунду,

$$m = m_0 NS, \tag{6}$$

где $m_0 = \frac{M}{N_A}$ – масса одной молекулы; N_A – постоянная Авогадро.

Тогда из (5) и (6) окончательно получим:

$$\frac{m}{\Delta t} = \frac{M}{N_A} \frac{\pi d^2}{16} \frac{P_1 - P_2}{kT} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \frac{d^2}{8} (P_1 - P_2) \sqrt{\frac{2\pi M}{RT}};$$

$$\left[\frac{m}{\Delta t}\right] = \text{м}^2 \cdot \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}}{\text{моль} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К}}} = \text{Н} \cdot \sqrt{\frac{\text{кг}}{\text{Н} \cdot \text{м}}} = \text{Н} \cdot \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}} = \text{Н} \cdot \frac{\text{с}}{\text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг}}{\text{с}};$$

$$\frac{m}{\Delta t} = \frac{\left(10^{-2}\right)^2}{8} \left(5 \cdot 10^{-3} - 1 \cdot 10^{-3}\right) \sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \cdot 300}} = 4 \cdot 10^{-10} \; \frac{\text{кг}}{\text{с}};$$

Ответ: $\frac{m}{\Delta t} = 4 \cdot 10^{-10} \; \frac{\text{кг}}{\text{с}}.$

2.4. Основы термодинамики

Основные теоретические сведения

Теплоемкость – отношение элементарного количества теплоты dQ, сообщенного телу (системе) при бесконечно малом изменении его состояния в каком-либо процессе, к соответствующему изменению dT абсолютной температуры этого тела:

$$C_T = \frac{dQ}{dT}.$$

Удельные теплоемкости газа при постоянном объеме (c_V) и при постоянном давлении (c_p)

$$c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{M}; \quad c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{M},$$

где i – число степеней свободы; R – молярная газовая постоянная.

Связь между молярной и удельной теплоемкостью:

$$C_M = cM .$$

Молярные теплоемкости при постоянном объеме (C_V) и постоянном давлении (C_P)

$$C_V = \frac{i}{2}R; \quad C_p = \frac{i+2}{2}R.$$

Связь между молярными теплоемкостями при постоянном объеме и постоянном давлении (при изобарном и изохорном процессах) выражается уравнением Майера:

$$C_p - C_V = R.$$

Удельная теплоемкость смеси газов определяется отношением теплоемкости $C_{см}$ к массе этой смеси $m_{см}$:

$$c_{см} = \frac{C_{см}}{m_{см}}.$$

Внутренняя энергия идеального газа

$$U = \frac{i}{2}\frac{m}{M}RT = \frac{m}{M}C_V T,$$

где i – число степеней свободы молекулы; для одноатомной молекулы $i = 3$ (поступательное движение описывается тремя координатами); для двухатомной $i = 5$ ($i_{пост.} = 3$ для поступательного движения, $i_{вр.} = 2$ для вращательного движения); для трехатомной и более $i = 6$ ($i_{пост.} = 3$ для поступательного движения, $i_{вр.} = 3$ для вращательного движения).

Первое начало термодинамики:

$$Q = \Delta U + A,$$

где Q – количество теплоты, сообщенное системе или отданное ею; ΔU – изменение ее внутренней энергии; A – работа системы против внешних сил.

Первое начало термодинамики в дифференциальной форме:

$$\delta Q = dU + \delta A.$$

Элементарная работа, совершаемая газом при изменении его объема,

$$dA = pdV.$$

Полная работа при изменении объема газа

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV,$$

где V_1 и V_2 – соответственно начальный и конечный объемы газа.

Работа газа

при изобарном процессе

$$A = p\left(V_2 - V_1\right) = \frac{m}{M} R\left(T_2 - T_1\right);$$

при изотермическом процессе

$$A = \frac{m}{M} RT \ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln\frac{p_1}{p_2};$$

при изохорном процессе

$$A = 0.$$

В условиях теплоизоляции системы реализуется *адиабатный* процесс, которым можно считать также процесс, протекающий столь быстро, что за время его осуществления не успевает произойти существенный теплообмен с внешней средой. Из первого начала термодинамики следует, что в адиабатном процессе работа совершается за счет изменения внутренней энергии: $\delta A = -dU$, т.е. если газ расширяется, то его температура понижается, а при резком сжатии – возрастает.

Уравнение Пуассона, связывающее параметры идеального газа при адиабатическом процессе:

$$pV^{\gamma} = \text{const}; \quad TV^{\gamma-1} = \text{const}; \quad T^{\gamma} p^{1-\gamma} = \text{const},$$

где $\gamma = \dfrac{C_p}{C_V} = \dfrac{i+2}{i}$ – показатель адиабаты.

Связь между начальными и конечными параметрами состояний газа при адиабатическом процессе:

$$\frac{p_2}{p_1}=\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma}; \qquad \frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}; \qquad \frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Работа в случае адиабатного процесса:

$$A=\frac{m}{M}C_V\left(T_1-T_2\right) \quad \text{или} \quad A=\frac{RT_1}{\gamma-1}\frac{m}{M}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]=\frac{p_1V_1}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right],$$

где T_1, T_2 и V_1, V_2 – соответственно начальные и конечные температура и объем газа.

Изохорный процесс: $V=\text{const}$; $dA=0$. Количество теплоты, переданное газу, идет на увеличение внутренней энергии газа: $dQ=dU$.

Изобарный процесс: $p=\text{const}$; $dA=pdV$. Количество теплоты, переданное газу, идет на увеличение его внутренней энергии и на совершение им работы: $dQ=dU+dA$.

Изотермический процесс: $T=\text{const}$; $dU=0$. Количество теплоты, переданное газу, идет на совершение им работы при изотермическом расширении: $dQ=dA$.

Адиабатный процесс идет без теплообмена с окружающей средой, поэтому $dQ=0$. Газ при расширении совершает работу за счет уменьшения его внутренней энергии: $dU=-dA$, при этом газ охлаждается.

Политропическими называются процессы, при которых теплоемкость тела остается постоянной. Для идеального газа уравнение политропы имеет вид:

$$pV^n=\text{const},$$

где n – показатель политропы,

$$n=\frac{C-C_p}{C-C_V}.$$

При $C=0$, $n=\gamma$ получается уравнение адиабаты; при $C=\infty$, $n=1$ – уравнение изотермы; при $C=C_p$, $n=0$ – уравнение изобары; при $C=C_V$, $n=\pm\infty$ – уравнение изохоры.

Круговым процессом называется термодинамический процесс, в итоге которого система возвращается в исходное состояние. Круговые процессы изображаются в диаграммах $p - V$, $p - T$ и др. в виде замкнутых контуров, образуемых графиками (рис. 1).

Круговые процессы лежат в основе действия всех *тепловых машин* – устройств, которые превращают внутреннюю энергию в механическую.

Основные части тепловой машины – нагреватель, рабочее тело и холодильник. Рабочее тело (обычно газ) получает количество теплоты Q_1 от нагревателя, совершает работу A за цикл, отдает холодильнику количество теплоты Q_2. На pV-диаграмме (см. рис. 1) работа равна площади фигуры $1a2\acute{a}1$, ограниченной графиками процессов $1a2$ и $2\acute{a}1$. Изменение внутренней энергии в круговом процессе равно нулю. Работа, совершаемая за цикл, равна $A = Q_1 - Q_2$.

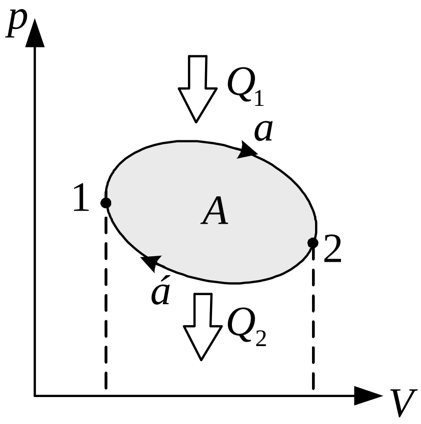


Рис. 1

Среди всех круговых процессов большое значение имеет процесс, составленный из четырех процессов: двух изотерм и двух адиабат – *цикл Карно* (рис. 2).

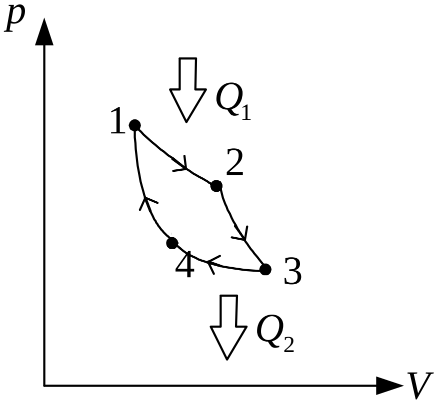


Рис. 2

Эффективность тепловой машины определяется термическим коэффициентом полезного действия (кпд) для кругового процесса (цикла):

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \le \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где знак равенства относится к *циклу Карно*, A – работа, совершенная рабочим веществом в течение цикла (полезная работа); Q_1 – количество теплоты, полученное от нагревателя рабочим веществом; Q_2 – количество теплоты, отданное при этом холодильнику; T_1 и T_2 – температуры нагревателя и холодильника.

Приведенная теплота $\left(\frac{Q}{T}\right)$ для любых изотермических переходов между двумя адиабатами есть величина постоянная:

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}; \quad \frac{Q}{T} = \text{const}.$$

Функция, характеризующая направление протекания самопроизвольных процессов в замкнутой термодинамической системе, называется *энтропией:*

$$\frac{\delta Q}{T} = dS .$$

Изменение энтропии тела в любом обратимом процессе, переводящем его из состояния 1 в состояние 2,

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T},$$

где dQ – элементарное количество теплоты, полученное телом при температуре T.

Второе начало термодинамики: энтропия замкнутой системы при любых происходящих в ней процессах не уменьшается – она возрастает при необратимых процессах и остается постоянной в случае обратимых процессов, т.е. $\Delta S \geq 0$.

Если система совершает равновесный переход из состояния 1 в состояние 2, то изменение энтропии

$$\Delta S_{12} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{dU + dA}{T},$$

где подынтегральное выражение и пределы интегрирования надо выразить через величины, характеризующие исследуемый процесс.

Изменение энтропии в процессах идеального газа:

$$\Delta S_{12} = S_2 - S_1 = \frac{m}{M}\left(C_V \ln\frac{T_2}{T_1} + R\ln\frac{V_2}{V_1} \right);$$

для *адиабатического* процесса $\Delta S = 0$, т.е. процесс протекает при постоянной энтропии, $S = \text{const}$;

для *изотермического* ($T = \text{const}$, т.е. $T_1 = T_2$) процесса

$$\Delta S_{12} = \frac{m}{M} R\ln\frac{V_2}{V_1};$$

для *изохорического* ($V = \text{const}$, т.е. $V_1 = V_2$) процесса

$$\Delta S_{12} = \frac{m}{M} C_V \ln\frac{T_2}{T_1}.$$

Примеры решения задач

Задача 2.71

Вычислить удельные теплоемкости неона и водорода при постоянных объеме (c_V) и давлении (c_P), принимая эти газы за идеальные.

Дано:

$i_1 = 3$

$M_1 = 20 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$i_2 = 5$

$M_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$c_V; c_p$ – ?

Решение

Удельная теплоемкость идеальных газов выражается формулами

$$c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{M}; \tag{1}$$

$$c_P = \frac{i+2}{2}\frac{R}{M}; \tag{2}$$

$$[c] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{кг}} = \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Для неона (одноатомный газ) i = 3,

$$c_{V1} = \frac{3}{2}\frac{8,31}{20 \cdot 10^{-3}} = 624\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}};$$

$$c_{P1} = \frac{5}{2}\frac{8,31}{20 \cdot 10^{-3}} = 1,04\ \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Для водорода (двухатомный газ) i = 5,

$$c_{V2} = \frac{5}{2}\frac{8,31}{2 \cdot 10^{-3}} = 10,4\ \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}};$$

$$c_{P2} = \frac{7}{2}\frac{8,31}{2 \cdot 10^{-3}} = 14,6\ \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Ответ: $c_{V1} = 624\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$; $c_{P1} = 1,04\ \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$; $c_{V2} = 10,4\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$; $c_{P2} = 14,6\ \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$.

Задача 2.72

Вычислить удельную теплоемкость $c_{V\,см}$ смеси двух газов (гелия массой $m_1 = 6$ г и азота массой $m_2 = 10$ г) при постоянном объеме.

Дано:

$m_1 = 6 \cdot 10^{-3}$ кг

$m_2 = 1 \cdot 10^{-2}$ кг

$i_1 = 3$

$i_2 = 5$

$M_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$M_2 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$c_{V\,см}$ – ?

Решение

Удельная теплоемкость смеси газов определяется отношением теплоемкости $C_{см}$ к массе $m_{см}$ этой смеси:

$$c_{см} = \frac{C_{см}}{m_{см}}.$$

Теплоемкость вещества – величина аддитивная, поэтому для двух газов можно записать:

$$c_{V\,см} = \frac{C_1 + C_2}{m_1 + m_2},$$

где C_1 и C_2 – теплоемкость газов; m_1 и m_2 – их массы.

Теплоемкость газов при постоянном объеме определяется соотношениями

$$C_{V1} = \frac{m_1}{M_1}\frac{i_1 R}{2} \quad \text{и} \quad C_{V2} = \frac{m_2}{M_2}\frac{i_2 R}{2},$$

где M_1 и M_2 – молярные массы газов; i_1 и i_2 – числа степеней свободы; R – молярная газовая постоянная.

Тогда

$$c_{V\,см} = \frac{i_1\dfrac{m_1}{M_1} + i_2\dfrac{m_2}{M_2}}{m_1 + m_2}\frac{R}{2};$$

$$c_{V\,см} = \frac{3\dfrac{6 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-3}} + 5\dfrac{10^{-2}}{28 \cdot 10^{-3}}}{6 \cdot 10^{-3} + 10^{-2}}\frac{8{,}31}{2} = 1{,}63 \cdot 10^3\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} = 1{,}63\ \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Ответ: $c_{V\,см} = 1{,}63\ \dfrac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$.

Задача 2.73

Найти работу A расширения двухатомного идеального газа, которому при постоянном давлении сообщено количество теплоты $Q = 4{,}9$ кДж.

Дано:	**Решение**
$i = 5$ $Q = 4{,}9 \cdot 10^3$ Дж $P = \text{const}$	Работа газа при изобарическом процессе ($P = \text{const}$) определяется формулой
$A - ?$	

$$A = P\left(V_2 - V_1\right), \tag{1}$$

где V_1 и V_2 – начальный и конечный объемы газа.

Для двух состояний газа (до и после сообщения газу количества теплоты Q) запишем уравнения Менделеева – Клапейрона:

$$PV_1 = \nu RT_1; \tag{2}$$

$$PV_2 = \nu RT_2, \tag{3}$$

где T_1 и T_2 – температуры газа до и после нагревания.

Вычтем из уравнения (3) уравнение (2):

$$P\left(V_2 - V_1\right) = \nu R\left(T_2 - T_1\right).$$

Тогда из (1) следует:

$$A = \nu R\left(T_2 - T_1\right). \tag{4}$$

Найдем по формуле

$$U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT = \frac{m}{M}C_V T$$

изменение внутренней энергии газа ΔU:

$$\Delta U = \frac{i}{2}\nu R\left(T_2 - T_1\right), \tag{5}$$

где i – число степеней свободы молекулы газа, $i = 5$ для двухатомного газа.

Из сравнения выражений (4) и (5) видно, что

$$\Delta U = \frac{i}{2}A. \tag{6}$$

Согласно первому началу термодинамики теплота, сообщенная телу,

$$Q = \Delta U + A. \tag{7}$$

Подставив (6) в (7), получим:

$$Q = \frac{i}{2}A + A = \frac{i+2}{2}A,$$

откуда

$$A = \frac{2}{i+2}Q;$$

$$A = \frac{2}{5+2}4{,}9 \cdot 10^3 = 1{,}4 \cdot 10^3 \text{Дж} = 1{,}4 \text{ кДж}.$$

Ответ: $A = 1{,}4$ кДж.

Задача 2.74

Идеальный газ, занимавший объем $V_1 = 10$ л при давлении $P = 10^5$ Па и температуре $T_1 = 300$ К, был нагрет при постоянном давлении до температуры $T_2 = 510$ К. Найти работу расширения газа.

Дано:

$V_1 = 10^{-2}$ м^3

$P = 10^5$ Па

$T_1 = 300$ К

$T_2 = 510$ К

$A - ?$

Решение

Работа газа при изобарном процессе определяется формулой

$$A = P\left(V_2 - V_1\right), \tag{1}$$

где V_1 и V_2 – начальный и конечный объемы газа.

Согласно закону Гей-Люссака $\frac{V}{T} = \text{const}$, или для двух состояний газа имеем:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2},$$

откуда

$$V_2 = V_1\frac{T_2}{T_1}. \tag{2}$$

Подставив (2) в (1), получим:

$$A = P\left(V_1\frac{T_2}{T_1} - V_1\right) = \frac{PV_1}{T_1}\left(T_2 - T_1\right);$$

$$[A]=\frac{\text{Па}\cdot\text{м}^3\cdot\text{К}}{\text{К}}=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^3}{\text{м}^2}=\text{Н}\cdot\text{м}=\text{Дж};$$

$$A=\frac{10^5\cdot10^{-2}}{300}(510-300)=700\ \text{Дж}=0,7\ \text{кДж}.$$

Ответ: $A=0,7$ кДж.

Задача 2.75

Азот массой $m=100$ г нагрет при постоянном давлении на $\Delta T=50$ К. Найти работу расширения газа и приращение ΔU его внутренней энергии.

Дано:
$m=0,1$ кг
$T=50$ К
$A;\ \Delta U_P-?$

Решение

Работа, совершаемая газом при $P=\text{const}$,

$$A=P\left(V_2-V_1\right)=P\Delta V,$$

где ΔV – увеличение объема газа.

Используя уравнение состояния, запишем:

$$P\Delta V=\frac{m}{M}R\Delta T,$$

следовательно,

$$A=\frac{m}{M}R\Delta T;$$

$$[A]=\frac{\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{К}}=\text{Дж};$$

$$A=\frac{0,1\cdot8,31\cdot50}{28\cdot10^{-3}}=14800\ \text{Дж}=14,8\ \text{кДж}.$$

Изменение внутренней энергии газа можно определить по формуле

$$\Delta U=\frac{m}{M}\frac{i}{2}R\Delta T;$$

$$[\Delta U]=\frac{\text{кг}\cdot\text{моль}}{\text{кг}}\cdot\frac{\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{моль}\cdot\text{К}}=\text{Дж};$$

$$\Delta U=\frac{5}{2}\frac{0,1\cdot8,31\cdot50}{28\cdot10^{-3}}=37\cdot10^3\ \text{Дж}=37\ \text{кДж}.$$

Ответ: $A=14,8$ кДж; $\Delta U=37$ кДж.

Задача 2.76

Найти работу, совершаемую при изотермическом расширении кислорода массой $m = 20$ г, находящегося при температуре $t = -20$ °С, если его давление изменяется от $P_1 = 500$ кПа до $P_2 = 50$ кПа.

Дано:
$m = 20 \cdot 10^{-3}$ кг
$M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$T = 235$ К
$P_1 = 5 \cdot 10^5$ Па
$P_2 = 5 \cdot 10^4$ Па

A – ?

Решение

Работа газа при изотермическом процессе $(T = \text{const})$ определяется по формуле

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \qquad (1)$$

Для изотермического процесса справедлив закон Бойля – Мариотта:

$$P_1 V_1 = P_2 V_2,$$

откуда

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_2}. \qquad (2)$$

Подставив выражение (2) в (1), получим:

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{P_1}{P_2}; \qquad [A] = \frac{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}} = \text{Дж};$$

$$A = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot 8{,}31 \cdot 253 \ln \frac{5 \cdot 10^5}{5 \cdot 10^4} = 3 \cdot 10^3 \text{Дж} = 3 \text{ кДж}.$$

Ответ: $A = 3$ кДж.

Задача 2.77

Баллон емкостью $V = 20$ л с кислородом при давлении $P_1 = 10$ МПа и температуре $t_1 = 7$ °С нагревается до $t_2 = 27$ °С. Какое количество теплоты при этом поглощает газ?

Дано:
$V = 2 \cdot 10^{-2}$ м^3;
$P_1 = 10^7$ Па;
$T_1 = 280$ К;
$T_2 = 300$ К;
$M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

Q – ?

Решение

Если объем газа не изменяется, то процесс изохорический, первое начало термодинамики запишется так: $dQ = dU$, то есть все тепло идет на приращение внутренней энергии;

$$Q = \Delta U = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R \Delta T;$$

где $i = 5$ (число степеней свободы для двухатомной молекулы);

$$\Delta T = T_2 - T_1.$$

Из уравнения газового состояния найдем число молей газа:

$$P_1 V = \frac{m}{M} RT_1;$$

$$\frac{m}{M} = \frac{P_1 V}{RT_1};$$

$$Q = \frac{i}{2}\frac{P_1 V}{RT_1} R\left(T_2 - T_1\right) = \frac{i}{2}\frac{P_1 V}{T_1}\left(T_2 - T_1\right);$$

$$\left[Q\right] = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{К}}{\text{К}} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \cdot \text{м}^3 = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж};$$

$$Q = \frac{5 \cdot 10^7 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 20}{2 \cdot 280} = 357 \text{ кДж}.$$

Ответ: $Q = 357$ кДж.

Задача 2.78

Найти среднюю квадратичную скорость молекул идеального газа, если известна работа его изотермического расширения от объема V_1 до $V_2 = 4V_1$, равная $A = 600$ Дж. Масса газа $m = 20$ г.

Дано:
$V_2 = 4V_1$
$A = 600$ Дж
$m = 20 \cdot 10^{-3}$ кг

$\langle \upsilon_{кв} \rangle - ?$

Решение

Работа изотермического расширения газа определяется по формуле

$$A = \frac{m}{M} RT \ln\frac{V_2}{V_1},$$

откуда

$$T = \frac{AM}{mR\ln\frac{V_2}{V_1}}.$$

Средняя квадратичная скорость молекул газа

$$\langle \upsilon_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3A}{m\ln\frac{V_2}{V_1}}};$$

$$[\upsilon_{кв}] = \sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{кг}\cdot\text{с}^2}} = \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\langle\upsilon_{кв}\rangle = \sqrt{\frac{3\cdot 600}{20\cdot 10^{-3}\ln 4}} = 255 \text{ м/с}$$

Ответ: $\langle\upsilon_{кв}\rangle$ = 255 м/с.

Задача 2.79

Определить количество теплоты, поглощаемое водородом массой $m = 0,2$ кг при нагревании его от температуры $t_1 = 0\,°\text{C}$ до температуры $t_2 = 100\,°\text{C}$ при постоянном давлении. Найти также изменение внутренней энергии газа и совершаемую им работу.

Дано:
$m = 0,2$ кг
$t_1 = 0°\,\text{C}$
$t_2 = 100°\,\text{C}$
P = const

$Q;\ \Delta U;\ A\ -?$

Решение

Количество теплоты Q, поглощаемое газом при изобарном нагревании, определяется по формуле

$$Q = mc_P\Delta T, \qquad (1)$$

где $m-$ масса нагреваемого газа; c_P- его удельная теплоемкость при постоянном давлении; $\Delta T-$ изменение температуры газа.

Как известно,

$$c_P = \frac{i+2}{2}\frac{R}{M}.$$

Подставив это выражение c_P в формулу (1), получим

$$Q = m\frac{i+2}{2}\frac{R}{M}\Delta T;$$

$$[Q] = \frac{\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{К}} = \text{Дж};$$

$$Q = 0,2\frac{7}{2}\frac{8,31}{2\cdot 10^{-3}}100 = 291\cdot 10^3\,\text{Дж} = 291 \text{ кДж}.$$

Внутренняя энергия выражается формулой

$$U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT,$$

а изменение внутренней энергии

$$\Delta U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R\Delta T;$$

$$[\Delta U] = \frac{\text{кг}\cdot\text{моль}}{\text{кг}}\cdot\frac{\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{моль}\cdot\text{К}} = \text{Дж};$$

$$\Delta U = \frac{5}{2}\cdot\frac{0,2\cdot 8,31\cdot 100}{2\cdot 10^{-3}} = 208\ \text{кДж}.$$

Работу расширения газа определим по формуле, выражающей первое начало термодинамики: $Q = \Delta U + A$, откуда

$$A = Q - \Delta U;$$

$$A = 291\ \text{кДж} - 208\ \text{кДж} = 83\ \text{кДж}.$$

Ответ: $Q = 291$ кДж; $\Delta U = 208$ кДж; $A = 83$ кДж.

Задача 2.80

Кислород массой $m = 2$ кг при температуре $T_1 = 293$ К сжимается адиабатически. Найти конечную температуру газа T_2, если в процессе сжатия была совершена работа $A = 200$ кДж.

Дано:
$m = 2$ кг
$T = 293$ К
$A = 200$ кДж

T_2 – ?

Решение

Работа адиабатического сжатия газа определяется по формуле

$$A = \frac{RT_1}{\gamma-1}\frac{m}{M}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] = \frac{m}{M}\frac{R}{\gamma-1}(T_1-T_2) = \frac{m}{M}\frac{R}{\gamma-1}\Delta T,$$

где $\gamma = \dfrac{c_P}{c_V}$ – показатель адиабаты; $c_P = \dfrac{(i+2)R}{2}$ – молярная теплоемкость при постоянном давлении; $c_V = \dfrac{iR}{2}$ – молярная теплоемкость при постоянном объеме.

Тогда

$$\gamma=\frac{c_P}{c_V}=\frac{i+2}{i}=\frac{7}{5}=1{,}4.$$

Так как для двухатомного газа число степеней свободы молекулы $i=5$, из выражения работы найдем ΔT :

$$\Delta T=\frac{AM(\gamma-1)}{mR};$$

$$T_2=T_1+\Delta T=T_1+\frac{AM(\gamma-1)}{mR};$$

$$[T_2]=K+\frac{\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{Дж}}=\text{К};$$

$$T_2=293+\frac{2\cdot10^5\cdot32\cdot10^{-3}\cdot0{,}4}{2\cdot8{,}31}=447\ \text{К}.$$

Ответ: $T_2=447$ К.

Задача 2.81

Температура кислорода массой $m=40$ г в процессе адиабатического расширения понизилась на $\Delta T=20$ К . Найти работу расширения газа.

Дано:
$m=40\cdot10^{-3}$ кг
$M=32\cdot10^{-3}$ кг/моль
$\Delta T=20$ К
A – ?

Решение

Работа газа в адиабатическом процессе совершается за счет уменьшения внутренней энергии газа, т.е. $A=-\Delta U$, с учетом формулы

$$\Delta U=\frac{m}{M}C_V\Delta T$$

получаем:

$$A=-\frac{m}{M}C_V\Delta T,$$

где $C_V=\dfrac{iR}{2}$ – молярная теплоемкость при постоянном объеме.

Для двухатомного газа $i=5$, тогда

$$A=-\frac{m}{M}\frac{iR}{2}\Delta T;$$

$$[A]=\frac{\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{К}}=\text{Дж};$$

$$A=-\frac{40\cdot10^{-3}}{32\cdot10^{-3}}\cdot\frac{5\cdot8{,}31}{2}\cdot20=-519\ \text{Дж}.$$

Ответ: $A=-519$ Дж.

Задача 2.82

Азот массой $m=20$ г при температуре $T_1=293$ К был сжат адиабатически. Объем газа уменьшился в $n=5$ раз. Найти температуру газа T_2 после сжатия.

Дано:	**Решение**
$m=20\cdot10^{-3}$ кг $T_1=293$ К $n=\frac{V_1}{V_2}=5$	Связь между начальными и конечными значениями температуры T и объема V газа при адиабатическом процессе устанавливается уравнением Пуассона
T_2 – ?	

$$\frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\quad\text{или}\quad\frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{nV_1}{V_1}\right)^{\gamma-1}=n^{\gamma-1},$$

где $\gamma=\frac{c_P}{c_V}=\frac{i+2}{i}$.

Так как газ двухатомный, то $i=5$ и $\gamma=\frac{i+2}{2}$ = 1,4.

Тогда

$$T_2=T_1n^{0,4};$$

$$T_2=293\cdot5^{0,4}=558\ \text{К}.$$

Ответ: $T_2=558$ К.

Задача 2.83

Азот, занимавший объем V_1 = 6 л, адиабатически сжимался до объема $V_2=3$ л. При этом давление повысилось до $P_2=1{,}5$ МПа. Найти давление газа до сжатия.

Дано:	Решение
$V_1 = 6 \cdot 10^{-3}$ м^3 $V_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ м^3 $P_2 = 1{,}5 \cdot 10^6$ Па	Согласно уравнению Пуассона
P_1 – ?	

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma},$$

где $\gamma = \dfrac{c_P}{c_V} = \dfrac{i+2}{i} = 1{,}4$ для двухатомного газа.

Тогда

$$P_1 = P_2 \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma};$$

$$P_1 = 1{,}5 \cdot 10^6 \left(\frac{3 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-3}}\right)^{1{,}4} = 0{,}57 \cdot 10^6 \text{Па} = 0{,}57 \text{ МПа}.$$

Ответ: $P_1 = 0{,}57$ МПа.

Задача 2.84

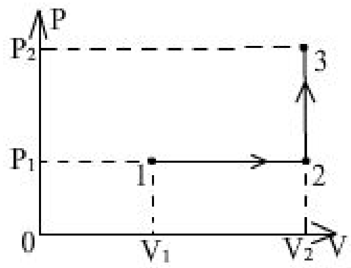
Кислород занимает объем $V_1 = 1$ м^3 и находится под давлением $P_1 = 200$ кПа. Газ нагрели сначала при постоянном давлении до объема $V_2 = 3$ м^3, а затем при постоянном объеме – до давления $P_2 = 500$ кПа. Построить график процесса и найти: 1) изменение ΔU внутренней энергии газа; 2) совершенную им работу A; 3) количество теплоты Q, переданное газу.

Дано:	Решение
$V_1 = 1$ м^3 $P_1 = 200$ кПа $V_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ м^3 $P_2 = 500$ кПа	Построим график процесса (см. рисунок). На графике точками 1, 2, 3 обозначены состояния газа, характеризуемые параметрами ($P_1V_1T_1$), ($P_1V_2T_2$), ($P_2V_2T_3$). 1. Изменение внутренней энергии газа при переходе его из состояния 1 в состояние 3 выражается формулой
Q; ΔU; A – ?	

$$\Delta U = c_V m \Delta T,$$

где c_V – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; m– масса газа; ΔT – разность температур, соответствующих конечному 3 и начальному 1 состояниям, т.е. $\Delta T = T_3 - T_1$.

Так как $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{M}$, где M – молярная масса газа, то



$$\Delta U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R\left(T_3 - T_1\right), \qquad (1)$$

где $i = 5$.

Температуры T_1 и T_3 выразим из уравнения Менделеева – Клапейрона:

$$PV = \frac{m}{M}RT;$$

$$T_1 = \frac{MP_1V_1}{mR}; \quad T_3 = \frac{MP_2V_2}{mR}.$$

С учетом этого равенство (1) перепишем в виде

$$\Delta U = \frac{i}{2}\left(P_2V_2 - P_1V_1\right);$$

$$\left[\Delta U\right] = \text{Па} \cdot \text{м}^3 = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^2} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж};$$

$$\Delta U = \frac{5}{2}\left(5 \cdot 10^5 \cdot 3 - 2 \cdot 10^5 \cdot 1\right) = 3{,}25 \cdot 10^6 \text{Дж} = 3{,}25\ \text{МДж}.$$

2. Полная работа, совершенная газом, $A = A_1 + A_2$, где A_1 – работа на участке 1-2; A_2 – работа на участке 2-3. На участке 1-2 давление постоянно $\left(P = \text{const}\right)$. Работа в этом случае выражается формулой $A_1 = P_1\Delta V = P_1\left(V_2 - V_1\right)$. На участке 2-3 объем газа не изменяется, и, следовательно, работа газа на этом участке равна нулю ($A_2 = 0$).

Таким образом,

$$A = A_1 = P_1\left(V_2 - V_1\right);$$

$$\left[A\right] = \text{Па} \cdot \text{м}^3 = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^2} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж};$$

$$A = 2 \cdot 10^5 \cdot 2 = 4 \cdot 10^5 \text{Па} = 0{,}4\ \text{МДж}.$$

3. Согласно первому началу термодинамики количество теплоты Q, переданное газу, равно сумме работы A, совершенной газом, и изменения ΔU внутренней энергии:

$$Q = \Delta U + A;$$

$$Q = 0{,}4\ \text{МДж} + 3{,}25\ \text{МДж} = 3{,}65\ \text{МДж}.$$

Ответ: $\Delta U = 3{,}25$ МДж; $A = 0{,}4$ МДж; $Q = 3{,}65$ МДж.

Задача 2.85

Газ, занимавший объем 20 л при нормальных условиях, был изобарически нагрет до $80\,^\circ$С. Определить работу расширения газа.

Дано:
$V_1 = 2\cdot 10^{-2}$ м^3
$P_1 = P_2 = 1{,}01\cdot 10^5$ Па
$T_1 = 273$ К
$T_2 = 353$ К

A – ?

Решение

Работа расширения газа A при изобарическом процессе определяется по следующей формуле:

$$A = \frac{m}{M}R\Delta T.$$

Число молей газа $\frac{m}{M}$ определим из уравнения Менделеева – Клапейрона:

$$P_1V_1 = \frac{m}{M}RT_1 \quad \text{или} \quad \frac{m}{M} = \frac{P_1V_1}{RT_1}.$$

Тогда

$$A = \frac{P_1V_1}{T_1}\Delta T; \qquad [A] = \frac{\text{Па}\cdot\text{м}^3\cdot\text{К}}{\text{К}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^3}{\text{м}^2} = \text{Н}\cdot\text{м} = \text{Дж};$$

$$A = \frac{1{,}01\cdot 10^5\cdot 2\cdot 10^{-2}\cdot 80}{273} = 592 \text{ Дж}.$$

Ответ: $A = 592$ Дж.

Задача 2.86

Определить скорость вылета поршня массой 4 кг из цилиндра при адиабатическом расширении воздуха в 40 раз, если начальное давление воздуха 10^7 Па, а объем 0,3 л.

Дано:
$m = 4$ кг
$\frac{V_2}{V_1} = 40$
$P_1 = 10^7$ Па
$V_1 = 3\cdot 10^{-4}$ м^3

υ – ?

Решение

Работа A, совершаемая адиабатически расширяющимся воздухом, в данном случае идет на увеличение кинетической энергии поршня, т.е.

$$A = \frac{m\upsilon^2}{2},$$

где m и υ – масса и скорость поршня.

Для подсчета работы адиабатически расширяющегося газа воспользуемся формулой

$$A=\frac{P_1V_1}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right],$$

где $\gamma-$ отношение теплоемкостей газа при постоянном давлении и постоянном объеме, $\gamma=\frac{c_P}{c_V}=\frac{i+2}{i}=\frac{7}{5}=1{,}4$;

$$A=\frac{10^7\cdot 0{,}3\cdot 10^{-3}}{0{,}4}[1-0{,}22]=5{,}85\cdot 10^3\text{Дж}.$$

Так как

$$A=\frac{m\upsilon^2}{2},\quad \text{то}\quad \upsilon=\sqrt{\frac{2A}{m}};$$

$$\upsilon=\sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}}=\sqrt{\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{кг}}}=\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{кг}}}=\sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}}=\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\upsilon=\sqrt{\frac{2\cdot 5{,}85\cdot 10^3}{4}}=54\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\upsilon=54\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 2.87

Молекулярный пучок кислорода ударяется о неподвижную стенку. После соударения молекулы отражаются от стенки с той же по модулю скоростью. Определить давление пучка на стенку, если скорость молекул $500\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ и концентрация молекул в пучке $5\cdot 10^{24}\text{м}^{-3}$.

Дано:
$n_0=5\cdot 10^{24}\ \text{м}^{-3}$
$\upsilon=500\ \text{м/с}$
$P\ -?$

Решение

Давление определяется по формуле

$$P=\frac{F}{S},\qquad (1)$$

где $F-$ сила давления; $S-$ площадь.

Силу давления найдем из второго закона Ньютона:

$$Ft = m\Delta\upsilon, \qquad (2)$$

где m – масса кислорода, ударившегося о стенку за время t, $\Delta\upsilon$ – изменение скорости молекул при ударе.

Массу одной молекулы кислорода найдем из закона Авогадро:

$$m_1 = \frac{M}{N_A}, \qquad (3)$$

где $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса кислорода; $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$моль$^{-1}$ – постоянная Авагадро.

За время t о стенку ударяются молекулы, находящиеся в объеме $V = S\upsilon t$, масса которых

$$m = m_1 n_0 S\upsilon t. \qquad (4)$$

Изменение скорости при соударении

$$\Delta\upsilon = \upsilon - (-\upsilon) = 2\upsilon. \qquad (5)$$

Подставляя выражения (3) – (5) в (2), находим:

$$Ft = \frac{Mn_0 S\upsilon t 2\upsilon}{N_A} = \frac{2Mn_0\upsilon^2 tS}{N_A},$$

откуда

$$P = \frac{F}{S} = \frac{2Mn_0\upsilon^2}{N_A};$$

$$[P] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па};$$

$$P = \frac{2 \cdot 32 \cdot 10^{-3} \cdot 25 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^{24}}{6{,}02 \cdot 10^{23}} = 1{,}33 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Ответ: $P = 1{,}33 \cdot 10^5$ Па.

Задача 2.88

В цилиндре под поршнем находится водород, который имеет массу 0,02 кг и начальную температуру $27\,^\circ$C. Водород сначала расширился адиабатически, увеличив свой объем в 5 раз, а затем был сжат изотермически, причем объем газа уменьшился в 5 раз. Найти температуру в конце адиабатического расширения и работу, совершенную газом. Изобразить процесс графически.

Дано:

$m = 0{,}02$ кг

$T_1 = 300$ К

$M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$\dfrac{V_2}{V_1} = 5$

$i = 5$

T_2; A – ?

Решение

При адиабатном процессе температура и объем газа связаны соотношением

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1},$$

где $\gamma = \dfrac{c_P}{c_V}$ – отношение теплоемкостей газа при постоянном давлении и постоянном объеме.

Для водорода $\gamma = 1{,}4$.

Отсюда выражение для конечной температуры T_2 :

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = 300\left(\frac{1}{5}\right)^{0,4} = 157 \text{ К}.$$

Работу A_1 газа при адиабатном расширении можно определить по формуле

$$A = \frac{m}{M}C_V\left(T_1 - T_2\right) = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R\left(T_1 - T_2\right);$$

$$[A] = \frac{\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{К}} = \text{Дж};$$

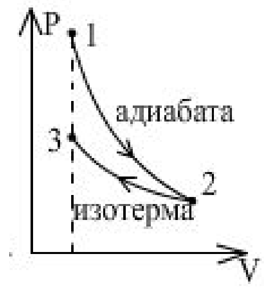
$$A = \frac{0{,}02\cdot 5\cdot 8{,}31}{2\cdot 2\cdot 10^{-3}}\left(300 - 157\right) = 2{,}97\cdot 10^4\,\text{Дж}.$$

Работа A_2 газа при изотермическом процессе может быть выражена в виде:

$$A = RT_2\frac{m}{M}\ln\frac{V_2}{V_1};$$

$$[A] = \frac{\text{Дж}\cdot\text{К}\cdot\text{кг}\cdot\text{моль}}{\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{К}} = \text{Дж};$$

$$A = \frac{0{,}02\cdot 157\cdot 8{,}31}{2\cdot 10^{-3}}\ln\frac{1}{5} = -2{,}1\cdot 10^4\,\text{Дж}.$$



Знак «минус» показывает, что при сжатии газа работа совершается над газом внешними силами.

Полная работа, совершенная газом при описанных процессах,

$$A = 2{,}97\cdot 10^4 - 2{,}1\cdot 10^4 = 8{,}7\cdot 10^3\,\text{Дж}.$$

График процесса приведен на рисунке.

Ответ: $T_2 = 157$ К; $A = 8{,}7\cdot 10^3$ Дж.

Задача 2.89

Азот массой $m = 10$ г, находящийся при нормальных условиях, сжимается до объема $V_2 = 1{,}4$ л. Найти давление P_2, температуру T_2 и работу сжатия A, если азот сжимается: 1) изотермически; 2) адиабатически.

Дано:
$m = 0{,}01$ кг
$V_2 = 1{,}4 \cdot 10^{-3}$ м$^{-3}$
$M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$P_1 = 10^5$ Па
$T_1 = 273$ К

P_2; T_2; A – ?

Решение

1. При изотермическом сжатии газа $T = \text{const}$, поэтому $T_2 = T_1 = 273$ К.

Из уравнения Менделеева – Клапейрона $P_2 V_2 = \dfrac{m}{M} R T_2$ найдем давление газа:

$$P_2 = \frac{mRT_2}{MV_2};$$

$$[P_2] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^3} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па};$$

$$P_2 = \frac{0{,}01 \cdot 8{,}31 \cdot 273}{28 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-3}} = 5{,}78 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Работа при изотермическом сжатии определяется формулой

$$A = RT_1 \frac{m}{M} \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

По закону Бойля – Мариотта запишем: $P_1 V_1 = P_2 V_2$, откуда найдем соотношение

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{V_2}{V_1}.$$

Тогда

$$A = RT_1 \frac{m}{M} \ln \frac{P_1}{P_2};$$

$$[A] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{кг} \cdot \text{моль}}{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}} = \text{Дж};$$

$$A = \frac{0{,}01 \cdot 273 \cdot 8{,}31}{28 \cdot 10^{-3}} \ln \frac{1}{6} = -1{,}42 \cdot 10^3 \text{ Дж} = -1{,}42 \text{ кДж}.$$

2. Поскольку азот – двухатомный газ, то $\gamma = 1{,}4$ (см. предыдущие задачи). Из уравнения Пуассона для адиабатического сжатия запишем:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} \qquad (1)$$

или

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}. \qquad (2)$$

Поделив уравнение (1) на (2), получим:

$$\frac{P_1 T_2}{P_2 T_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\left[\gamma-(\gamma-1)\right]} = \frac{V_2}{V_1},$$

откуда

$$V_1 = \frac{V_2 P_2 T_1}{P_1 T_2}.$$

Согласно уравнению Менделеева – Клапейрона

$$P_1 V_1 = \frac{m}{M} R T_1,$$

тогда

$$V_1 = \frac{m}{M}\frac{R T_1}{P_1}. \qquad (3)$$

Подставив выражение (3) в (1), получим:

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{V_2 M P_1}{m R T_1}\right)^{\gamma},$$

откуда

$$P_2 = \frac{P_1}{\left(\frac{V_2 M P_1}{m R T_1}\right)^{\gamma}};$$

$$\left[P_2\right] = \frac{\text{Па} \cdot \text{кг} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{Па}} = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^3 \cdot \text{Н}} = \text{Па};$$

$$P_2 = \frac{10^5}{\left(\dfrac{1{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot 28 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5}{0{,}01 \cdot 273 \cdot 8{,}31}\right)^{1{,}4}} = 11{,}6 \cdot 10^5 \text{Па}.$$

Подставив (3) в (2), получим:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2 M P_1}{mRT_1}\right)^{\gamma - 1},$$

откуда

$$T_2 = \frac{T_1}{\left(\dfrac{V_2 M P_1}{mRT_1}\right)^{\gamma-1}};$$

$$[T_2] = \frac{\text{К} \cdot \text{кг} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{Па}} = \frac{\text{К} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^3 \cdot \text{Н}} = \text{К};$$

$$T_2 = \frac{273}{\left(\dfrac{1{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot 28 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5}{0{,}01 \cdot 273 \cdot 8{,}31}\right)^{0{,}4}} = 545 \text{К}.$$

Работу адиабатического сжатия определим по формуле

$$A = \frac{mT_1}{M}\frac{R}{\gamma - 1}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right);$$

$$[A] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{кг} \cdot \text{моль}}{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}} = \text{Дж};$$

$$A = \frac{0{,}01 \cdot 273 \cdot 8{,}31}{28 \cdot 10^{-3}(1{,}4 - 1)}\left(1 - \frac{545}{273}\right) = -2{,}02 \cdot 10^3 \text{Дж} = -2{,}02 \text{ кДж}.$$

Ответ: 1) $P_1 = 5{,}78 \cdot 10^5$ Па; $T_2 = 273$ К; $A = -1{,}42$ кДж;

2) $P_2 = 11{,}6 \cdot 10^5$ Па; $T_2 = 545$ К; $A = -2{,}02$ кДж.

Задача 2.90

Объем газа при адиабатическом расширении увеличился в два раза, а температура уменьшилась в 1,32 раза. Найти число степеней свободы молекул этого газа.

Дано:	**Решение**
$\frac{V_2}{V_1}=2$ $\frac{T_1}{T_2}=1{,}32$ $i\ \ -?$	Показатель адиабаты равен $\gamma=\frac{i+2}{i}$. Запишем уравнение Пуассона:

$$\frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}.$$

По условию $\frac{T_1}{T_2}$ =1,32, а $\frac{V_2}{V_1}$ = 2, тогда

$$2^{\gamma-1}=1{,}32 \quad \text{или} \quad \left(\frac{i+2}{i}-1\right)\ln 2=\ln 1{,}32,$$

отсюда

$$\frac{i+2-i}{i}=\frac{2}{i}=\frac{\ln 1{,}32}{\ln 2}=0{,}4$$

или

$$\Delta P=-2\cdot 500\cdot\frac{32\cdot 10^{-3}}{6{,}02\cdot 10^{23}}=-5{,}3^{-23}\,\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $i=5$.

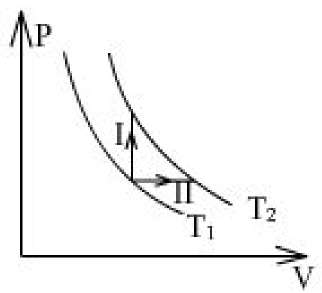
Задача 2.91

Кислород нагревают от $t_1=50\,°\text{C}$ до $t_2=60\,°\text{C}$. Масса кислорода $m=160$ г. Найти количество поглощенной теплоты и изменение внутренней энергии при изохорическом и изобарическом процессах. Начальное давление близко к атмосферному.

Дано:	**Решение**
$M=32\cdot 10^{-3}$ кг/моль $m=0{,}16$ кг $T_1=323$ К $T_2=333$ К $P_1=10^5$ Па $P=\text{const}$ $V=\text{const}$ $Q;\ \Delta U_V;\ \ \Delta U_P\ \ -?$	При давлении, близком к атмосферному, газ можно считать идеальным. Графики изохорного (I) и изобарного (II) процессов (см. рисунок) лежат между одними и теми же изотермами, следовательно, изменение внутренней энергии газа должно быть одинаковым:

$$\Delta U_P=\Delta U_V=\frac{m}{M}\frac{i}{2}R\Delta T=1037{,}5\text{ Дж},$$

где i = 5 (число степеней свободы двухатомной молекулы кислорода O_2).



Количество поглощенной теплоты характеризуется молярной теплоемкостью.

Для изохорического процесса (см. рис.)

$$Q_V = \frac{m}{M} C_V \left(T_2 - T_1\right),$$

где C_V – молярная теплоемкость при постоянном объеме;

$$C_V = \frac{iR}{2}.$$

Первое начало термодинамики для изохорического процесса ($V = \text{const};\ \Delta V = 0;\ A = 0$):

$$Q_V = \Delta U_V = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R \Delta T;$$

$$\left[Q_V\right] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{кг} \cdot \text{моль}}{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}} = \text{Дж};$$

$$Q_V = \frac{0{,}16}{32 \cdot 10^{-3}} \frac{5}{2} 8{,}31 \cdot 10 = 1037{,}5 \text{ Дж}.$$

Для изобарического процесса

$$Q_P = \frac{m}{M} C_P \left(T_2 - T_1\right),$$

где C_P – молярная теплоемкость при постоянном давлении, по уравнению Майера

$$C_P = C_V + R; \quad C_P = \frac{iR}{2} + R = \frac{(i+2)R}{2};$$

$$Q_P = \frac{m}{M} \frac{(i+2)R}{2} \left(T_2 - T_1\right);$$

$$\left[Q_P\right] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{кг} \cdot \text{моль}}{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}} = \text{Дж};$$

$$Q_P = \frac{0{,}16}{32 \cdot 10^{-3}} \frac{(5+2)}{2} 8{,}31 \cdot 10 = 1452{,}5 \text{ Дж};$$

$Q_P > Q_V$ – количество теплоты для нагревания при изобарическом процессе больше, чем при изохорическом процессе, так как часть энергии идет на совершение работы при увеличении объема, очевидно, разность $(Q_P - \Delta U_P)$ равна работе, совершаемой газом при изобарическом нагревании.

Ответ: $\Delta U_P = \Delta U_V = 1037{,}5$ Дж ; $Q_V = 1037{,}5$ Дж ; $Q_P = 1452{,}5$ Дж.

Задача 2.92

Азот, занимавший при давлении $P = 10^5$ Па объем $V_1 = 10$ л, расширился вдвое: $V_2 = 2V_1$. Найти конечное давление и работу, совершаемую газом, при следующих процессах: 1) изобарном (1-1′); 2) изотермическом (1-2); 3) адиабатном (1-3) (см. рисунок).

Дано:
$P = 10^5$ Па
$V_1 = 0{,}01$ м^3
$V_2 = 2V_1$
1) $P = \text{const}$;
2) $T = \text{const}$;
3) $dQ = 0$.

A; P_2 – ?

Решение

Полная работа

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P dV,$$

совершаемая газом при расширении от объема V_1 до объема V_2, определяется площадью, ограниченной осью абсцисс, кривой $P = f(V)$ и прямыми V_1 и V_2 (см. рис.).

Следовательно, наибольшая работа будет совершена при изобарном процессе (1-1′), наименьшая – при адиабатном (1-3), так как работа совершается только за счет убыли внутренней энергии.

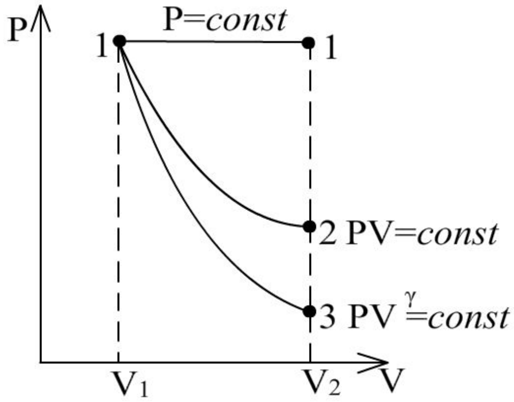
1. При изобарном процессе $P = \text{const}$;

$$P_2 = P_1 = 10^5 \text{Па};$$

$$A_{1-1'} = P_1(V_2 - V_1);$$

$$A_{1-1'} = P_2(2V_1 - V_1) = P_1V_1;$$

$$A_{1-1'} = 10^5 \cdot 10^{-2} = 10^3 \text{Дж}.$$



2. При изотермическом процессе $T = \text{const}$;

$$P_1V_1 = P_2V_2;$$

$$P_2 = \frac{P_1V_1}{V_2} = \frac{P_1V_1}{2V_1} = \frac{P_1}{2};$$

$$P_2 = \frac{10^5}{2} = 0,5 \cdot 10^5 \text{ Па};$$

$$A_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} PdV;$$

$$P = \frac{P_1V_1}{V};$$

$$A_{1-2} = P_1V_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = P_1V_1 \ln \frac{V_2}{V_1};$$

$$A_{1-2} = 10^5 \cdot 10^{-2} \ln 2 = 10^3 \cdot 0,69 = 690 \text{ Дж}.$$

3. При адиабатном процессе $PV^{\gamma} = \text{const}$;

$$P_1V_1^{\gamma} = P_2V_2^{\gamma}.$$

Конечное давление

$$P_2 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma},$$

где $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$ — показатель адиабаты;

$$\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{5+2}{5} = 1,4.$$

Азот N_2, молекула двухатомная. Чисто степеней свободы $i = 5$;

$$P_2 = 10^5 \left(\frac{1}{2} \right)^{1,4} = 0,38 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

При адиабатном процессе нет теплообмена с окружающей средой, $\Delta Q = 0$; первое начало термодинамики запишется так:

$$0 = \Delta U + A_{1-3};$$

$$A_{1-3} = -\Delta U.$$

Газ расширяется за счет убыли внутренней энергии:

$$A_{1-3} = -\frac{m}{M}\frac{i}{2}R\left(T_2 - T_1\right).$$

Из уравнения газового состояния для первого состояния

$$P_1V_1 = \frac{m}{M}RT_1; \qquad T_1 = \frac{P_1V_1}{\frac{m}{M}R}.$$

Для второго состояния

$$P_2V_2 = \frac{m}{M}RT_2; \qquad T_2 = \frac{P_2V_2}{\frac{m}{M}R}.$$

Подставляем в формулу работы:

$$A_{1-3} = -\frac{i}{2}\left(P_2V_2 - P_1V_1\right);$$

$$\left[A_{1-3}\right] = \text{Па}\cdot\text{м}^3 = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}\cdot\text{м}^3 = \text{Н}\cdot\text{м} = \text{Дж};$$

$$A_{1-3} = -\frac{5}{2}\left(0,38\cdot10^5\cdot2\cdot10^{-2} - 10^5\cdot10^{-2}\right) = -\frac{5}{2}10^3\left(0,76-1\right) = 600\ \text{Дж}.$$

Ответ: 1) $P = 10^5\,\text{Па};\ A = 1000\ \text{Дж}$; 2) $P = 0,5\cdot10^5\,\text{Па};\ A = 690\ \text{Дж}$; 3) $P = 0,38\cdot10^5\,\text{Па};\ A = 600\ \text{Дж}$.

Задача 2.93

Двухатомный идеальный газ, занимавший при давлении $P_1 = 3\cdot10^5\,\text{Па}$ объем $V_1 = 4$ л, расширяют до объема $V_3 = 6$ л, при этом давление падает до значения $P_3 = 10^5\,\text{Па}$. Процесс происходит сначала по адиабате, затем по изохоре. Определить работу сил давления газа, изменение его внутренней энергии и количество теплоты, поглощенной при этом переходе.

Дано:

$i = 5$

$P_1 = 3 \cdot 10^5$ Па

$P_3 = 10^5$ Па;

$V_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ м^3;

$V_3 = 6 \cdot 10^{-3}$ м^3;

(1-2) $PV^{\gamma} = \mathrm{const}$;

(2-3) $V = \mathrm{const}$.

$A,\ Q,\ \Delta U$ – ?

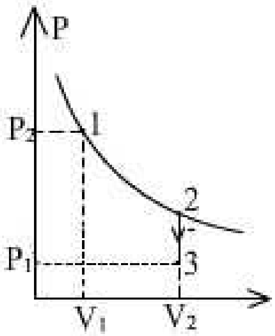
Решение

Газ участвует в двух процессах: 1) адиабатное расширение (1-2), где объем полностью переходит в конечное состояние; 2) изохорный процесс (2-3), который приводит газ к давлению в конечном состоянии (см. рисунок).

Чтобы определить, как проходит изохорный процесс, при нагревании или при охлаждении, надо найти промежуточное давление P_2.

Согласно уравнению адиабаты

$$P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}; \qquad P_2 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma}.$$



$$[P_2] = \text{Па}.$$

Газ двухатомный, следовательно,

$$\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{5+2}{5} = 1{,}4;$$

$$P_2 = 3 \cdot 10^5 \left(\frac{4}{6} \right)^{1,4} = 1{,}7 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Это больше, чем $P_3 = 10^5$ Па.

Из этого следует, что при изохорическом переходе давление уменьшается; так как $\dfrac{P}{T} = \mathrm{const}$, то газ должен охлаждаться.

Чтобы найти работу A_{1-3} и количество поглощенной теплоты Q_{1-3} при переходе из состояния 1 в состояние 3, надо рассмотреть каждый из процессов отдельно.

При этом $A_{1-3} = A_{1-2} + A_{2-3}$; $Q_{1-3} = Q_{1-2} + Q_{2-3}$.

Работа сил давления газа для изохорного процесса (2-3) равна нулю, а для адиабатического процесса (1-2)

$$A_{1-2} = -\Delta U_{1-2};$$

$$A_{1-2} = -\frac{m}{M} \frac{i}{2} R (T_2 - T_1).$$

Из уравнения газового состояния Менделеева – Клапейрона выразим T_2 и T_1:

$$P_1V_1 = \frac{m}{M}RT_1; \qquad T_1 = \frac{P_1V_1}{\frac{m}{M}R}.$$

$$P_2V_2 = \frac{m}{M}RT_2; \qquad T_2 = \frac{P_2V_2}{\frac{m}{M}R}.$$

Тогда

$$A_{1-2} = -\frac{i}{2}\left(P_2V_2 - P_1V_1\right);$$

$$\left[A_{1-2}\right] = \text{Па}\cdot\text{м}^3 = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}\cdot\text{м}^3 = \text{Н}\cdot\text{м} = \text{Дж};$$

$$A_{1-2} = -\frac{5}{2}\left(1{,}7\cdot10^5\cdot6\cdot10^{-3} - 3\cdot10^5\cdot4\cdot10^{-3}\right) = 450\ \text{Дж}.$$

Следовательно, $A_{1-3} = 450$ Дж.

Количество теплоты для адиабатного процесса $Q_{1-2} = 0$, для изохорного процесса

$$Q_{2-3} = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R\left(T_3 - T_2\right).$$

Используя уравнение Менделеева – Клапейрона, для состояний 2 и 3 получим:

$$Q_{1-3} = Q_{2-3} = \frac{i}{2}\left(P_3V_3 - P_2V_3\right);$$

$$Q_{2-3} = \frac{5}{2}\left(10^5 - 1{,}7\cdot10^5\right)\cdot6\cdot10^{-3} = -1050\ \text{Дж}.$$

Общее количество теплоты

$$Q_{1-3} = -1050\ \text{Дж}.$$

Знак «минус» показывает, что газ отдал теплоту окружающим телам.

Изменение внутренней энергии

$$\Delta U_{1-3} = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R\left(T_3 - T_1\right).$$

Используя уравнение Менделеева – Клапейрона, можно записать:

$$\Delta U_{1-3} = \frac{i}{2}\left(P_3V_3 - P_1V_1\right);$$

$$[\Delta U_{1-3}] = \text{Па} \cdot \text{м}^3 = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \cdot \text{м}^3 = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж};$$

$$\Delta U_{1-3} = \frac{5}{2}\left(10^5 \cdot 6 \cdot 10^{-3} - 3 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-3}\right) = -1500 \text{ Дж}.$$

Внутренняя энергия уменьшается, газ охлаждается.

Ответ: $P_2 = 1{,}7 \cdot 10^5$ Па; $A_{1-2} = 450$ Дж; $Q_{1-3} = -1050$ Дж; $\Delta U_{1-3} = -1500$ Дж.

Задача 2.94

Двухатомный газ необходимо сжать от объема V_1 = 5 л до объема V_2 = 2,5 л. Определить, во сколько раз и как выгоднее сжимать газ, адиабатно или изотермически.

Дано:
$i = 5$
$V_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ м^3
$V_2 = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ м^3
$V_2 = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ м^3;
$Q = 0$
$T = \text{const}$

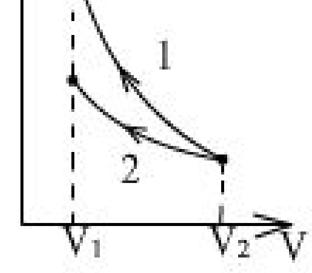
$\frac{A_1}{A_2}$ – ?

Решение

Диаграммы обоих процессов – адиабата (кривая 1) и изотерма (кривая 2) в координатах P,V представляют собой гиперболы (см. рисунок), но адиабата $\left(PV^{\gamma} = \text{const}\right)$ – более крутая, чем изотерма $\left(PV = \text{const}\right)$.

Поскольку работа в обоих процессах численно равна площади, ограниченной осью абсцисс, прямыми V_1 и V_2 и, соответственно, адиабатой и изотермой, из рисунка следует, что газ изотермически сжимать выгоднее (при сжатии газа работа совершается внешними силами).

Подтвердим этот вывод вычислениями. Работа при адиабатическом сжатии



$$A_1 = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\frac{m}{M}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right], \qquad (1)$$

где $\gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{i+2}{i}$; $i = 5$; γ = 1,4; T_1 – начальная температура газа; V_1 и V_2 – начальный и конечный объемы газа соответственно.

Работа газа при изотермическом сжатии

$$A_2 = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) следует, что

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}}{(\gamma - 1)\ln \frac{V_2}{V_1}}$$

(учли, что $T = T_1$);

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{1 - \left(\frac{5 \cdot 10^{-3}}{2,5 \cdot 10^{-3}}\right)^{0,4}}{(1,4 - 1)\ln 0,5} = 1,15.$$

Изотермически сжимать газ выгоднее.

Ответ: $\frac{A_1}{A_2}$ = 1,15 – изотермически сжимать газ выгоднее.

Задача 2.95

Некоторый двухатомный газ подвергают политропному сжатию, в результате чего давление газа возросло от $P_1 = 10$ кПа до $P_2 = 30$ кПа, а объем газа уменьшился от V_1= 2,5 л до V_2 = 1 л.

Определить: 1) показатель политропы n; 2) изменение внутренней энергии ΔU газа.

Дано:
$i = 5$;
$P_1 = 10^4$ Па;
$P_2 = 3 \cdot 10^4$ Па;
$V_1 = 2,5 \cdot 10^{-3}$ м^3;
$V_2 = 10^{-3}$ м^3

1) n; 2) ΔU – ?

Решение

1. Уравнение политропного процесса для двух состояний газа (начального 1 и конечного 2) можно записать в виде

$$P_1 V_1^n = P_2 V_2^n,$$

где n – показатель политропы.

Возможна другая форма записи:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^n,$$

или, учитывая условие задачи, $\frac{P_2}{P_1}$ = 3 и $\frac{V_1}{V_2}$ = 2,5, получим:

$$3 = (2,5)^n,$$

откуда искомый показатель политропы $n = 1,2$.

2. Внутренняя энергия газа – однозначная функция состояния, при всех процессах изменение внутренней энергии одинаково и равно

$$\Delta U = \nu C_V (T_2 - T_1), \tag{1}$$

где ν – количество вещества; $C_V = \frac{iR}{2}$ – молярная теплоемкость при постоянном объеме.

Записав уравнение Менделеева – Клапейрона для двух состояний газа $P_1V_1 = \nu RT_1$; $P_2V_2 = \nu RT_2$, найдем температуры T_2 и T_1:

$$T_1 = \frac{P_1V_1}{\nu R}; \quad T_2 = \frac{P_2V_2}{\nu R}. \tag{2}$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), получим:

$$\Delta U = \frac{C_V}{R}(P_2V_2 - P_1V_1) = \frac{i}{2}(3P_1 \cdot 3V_1 - P_1V_1) = \frac{8i}{2}P_1V_1 = 20P_1V_1;$$

$$[\Delta U] = \text{Па} \cdot \text{м}^3 = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \cdot \text{м}^3 = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж};$$

$$\Delta U = 20 \cdot 10^4 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} = 200 \text{ Дж}.$$

Ответ: 1) $n = 1,2$; 2) $\Delta U = 200$ Дж.

Задача 2.96

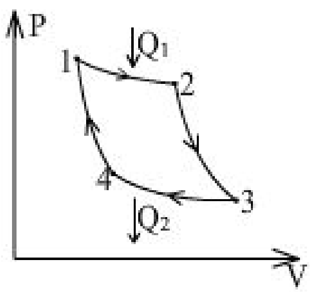
Температура пара, поступающего в паровую машину, $t_1 = 127\,^\circ\text{C}$; температура в холодильнике $t_2 = 27\,^\circ\text{C}$. Определить теоретически максимальную работу при затрате количества теплоты $Q_1 = 4,2$ кДж.

Дано:
$T_1 = 400$ К
$T_2 = 300$ К
$Q_1 = 4,2 \cdot 10^3$ Дж
$A - ?$

Решение

Для того чтобы работа, совершаемая тепловой машиной (тепловым двигателем), была максимальной, необходимо, чтобы цикл, по которому работает двигатель, был обратимым.

При наличии нагревателя с температурой T_1 и холодильника с температурой T_2 возможен только один обратимый цикл – цикл Карно, состоящий из двух изотерм и двух адиабат (см. рисунок).



Коэффициент полезного действия этого цикла

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Коэффициент полезного действия любого теплового двигателя

$$\eta = \frac{A}{Q_1},$$

где $A -$ полезная работа, совершаемая двигателем; $Q_1 -$ количество теплоты, полученное рабочим телом от нагревателя.

Приравнивая правые части

$$\frac{A}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

найдем полезную работу, совершаемую тепловой машиной:

$$A = Q_1\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right);$$

$$[A] = \text{Дж} \cdot \frac{\text{К}}{\text{К}} = \text{Дж};$$

$$A = 4,2 \cdot 10^3\left(1 - \frac{300}{400}\right) = 1,05 \cdot 10^3 \text{Дж} = 1,05 \text{ кДж}.$$

Ответ: $A = 1,05$ кДж.

Задача 2.97

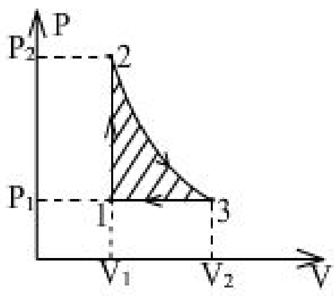
Идеальный двухатомный газ, содержащий количество вещества $\nu = 1$ моль, находится под давлением $P_1 = 250$ кПа и занимает объем $V_1 = 10$ л. Сначала газ изохорно нагревают до температуры $T_2 =$ 400 К. Далее, изотермически расширяя, доводят его до первоначального давления. После этого путем изобарного сжатия возвращают газ в начальное состояние. Определить термический кпд цикла.

Дано:
$\nu = 1$ моль
$P_1 = 25 \cdot 10^4$ Па
$V_1 = 10 \cdot 10^{-3}$ м^3
$T_2 = 400$ К

η – ?

Решение

Для наглядности построим сначала график цикла, который состоит из изохоры, изотермы и изобары. В координатах P, V этот цикл имеет вид, представленный на рисунке. Характерные точки цикла обозначим 1, 2, 3.



Для любого цикла кпд определяется выражением

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad \text{или} \quad \eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}, \qquad (1)$$

где Q_1 – количество теплоты, полученное газом за цикл от нагревателя; Q_2 – количество теплоты, отданное газом за цикл холодильнику.

Заметим, что разность количества теплоты $Q_1 - Q_2$ равна работе A, совершаемой газом за цикл. Эта работа на графике в координатах P, V (см. рис.) изображается площадью цикла (площадь цикла заштрихована).

Рабочее вещество (газ) получает количество теплоты Q_1 на двух участках: Q_{12} на участке 1-2 (изохорный процесс) и Q_{23} на участке 2-3 (изотермический процесс). Таким образом, $Q_1 = Q_{12} + Q_{23}$. Количество теплоты, полученное газом при изохорном процессе,

$$Q_{12} = \nu C_V \left(T_2 - T_1\right),$$

где ν – количество вещества; C_V – молярная теплоемкость при постоянном объеме.

Температуру T_1 начального состояния газа найдем, воспользовавшись уравнением Менделеева – Клапейрона:

$$T_1 = \frac{P_1 V_1}{\nu R};$$

$$\left[T_1\right] = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{моль} \cdot \text{К}}{\text{моль} \cdot \text{Дж}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{К}}{\text{м}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{м}} = \text{К};$$

$$T_1 = \frac{250 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 8,31} = 300 \text{ К}.$$

Количество теплоты, полученное газом при изотермическом процессе,

$$Q_{23} = \nu R T_2 \ln \frac{V_2}{V_1},$$

где V_2 – объем, занимаемый газом при температуре T_2 и давлении P_1 (точка 3 на графике).

На участке 3-1 газ отдает количество теплоты Q_2, равное

$$Q_2 = Q_{31} = \nu C_P \left(T_2 - T_1\right),$$

где C_P – молярная теплоемкость при изобарном процессе.

Подставим найденные значения Q_1 и Q_2 в формулу (1):

$$\eta = 1 - \frac{\nu C_P \left(T_2 - T_1\right)}{\nu C_V \left(T_2 - T_1\right) + \nu R T_2 \ln \frac{V_2}{V_1}}.$$

В полученном выражении заменим отношение $\frac{V_2}{V_1}$, согласно закону Гей-Люссака, отношением температур $\left(\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}\right)$ и выразим C_P и C_V через число степеней свободы молекулы: $C_V = \frac{iR}{2}$, $C_P = \frac{(i+2)R}{2}$.

Тогда после сокращения на ν и $\frac{R}{2}$ получим:

$$\eta = 1 - \frac{(i+2)\left(T_2 - T_1\right)}{i\left(T_2 - T_1\right) + 2T_2 \ln \frac{T_2}{T_1}};$$

$$\eta = 1 - \frac{(5+2)\left(400 - 300\right)}{5\left(400 - 300\right) + 2 \cdot 400 \ln \frac{400}{300}} = 0,041 = 4,1\,\%.$$

Ответ: $\eta = 4,1$ %.

Задача 2.98

Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, совершает за один цикл работу $1,5\cdot 10^5$ Дж. Температура нагревателя 400 К, температура холодильника 260 К. Найти кпд машины, количество теплоты, получаемое машиной за один цикл от нагревателя, и количество теплоты, отдаваемое за один цикл холодильнику.

Дано:
$A=1,5\cdot 10^5$ Дж
$T_1=400$ К
$T_2=260$ К
$\eta;\ Q_1;\ Q_2\ -?$

Решение

Для цикла Карно кпд определяется формулой

$$\eta=\frac{T_1-T_2}{T_1}. \qquad (1)$$

С другой стороны, термический кпд выражается так:

$$\eta=\frac{A}{Q_1}, \qquad (2)$$

где $A-$ работа, совершенная рабочим телом тепловой машины; Q_1- теплота, полученная от нагревателя.

Из (1) и (2) имеем:

$$Q_1=\frac{A}{\eta}=\frac{AT_1}{T_1-T_2}. \qquad (3)$$

Работа, совершенная рабочим телом машины, определяется разностью полученной от нагревателя теплоты Q_1 и отданной холодильнику теплоты Q_2:

$$A=Q_1-Q_2.$$

Отсюда $Q_2=Q_1-A$ или с учетом (3)

$$Q_2=\frac{AT_1}{T_1-T_2}-A=\frac{AT_2}{T_1-T_2}. \qquad (4)$$

Проверим размерность равенств (1), (3) и (4):

$$[\eta]=\frac{\text{К}}{\text{К}}=1;$$

$$[Q_1]=\frac{\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{К}}=\text{Дж};$$

$$[Q_2]=\frac{\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{К}}=\text{Дж};$$

$$\eta = \frac{400 - 260}{400} = 0,35 = 35\,\%;$$

$$Q_1 = \frac{1,5 \cdot 10^5 \cdot 400}{400 - 260} = 429 \text{ Дж};$$

$$Q_2 = \frac{1,5 \cdot 10^5 \cdot 260}{400 - 260} = 279 \text{ Дж}.$$

Ответ: $\eta = 35\,\%$; $Q_1 = 429$ Дж; $Q_2 = 279$ Дж.

Задача 2.99

Температура нагревателя тепловой машины 500 К. Температура холодильника 400 К. Определить кпд тепловой машины, работающей по циклу Карно, и полезную мощность машины, если нагреватель ежесекундно передает ей 1675 Дж теплоты.

Дано:
$T_1 = 500$ К
$T_2 = 400$ К
$Q = 1675$ Дж

η, N – ?

Решение

Коэффициент полезного действия машины определяется по формуле

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad \text{или} \quad \eta = \frac{A}{Q_1}.$$

Из этих выражений находим:

$$A = \eta Q_1 = Q_1 \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Произведем вычисления:

$$\eta = \frac{500 - 400}{500} = 0,2;$$

$$A = 0,2 \cdot 1675 = 335 \text{ Дж}.$$

Эта работа совершается за 1 с, следовательно, полезная мощность машины

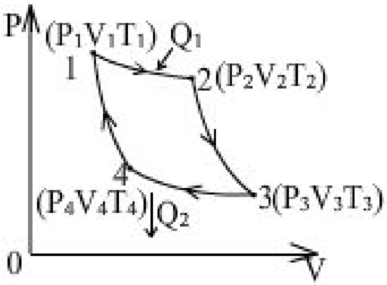
$$N = \frac{A}{t} = 335 \ \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = 335 \text{ Вт}.$$

Ответ: $N = 335$ Вт; $\eta = 20\,\%$.

Задача 2.100

Кислород массой 1 кг совершает цикл Карно. При изотермическом расширении газа его объем увеличивается в 2 раза, а при последующем адиабатическом расширении совершается работа 3000 Дж. Определить работу, совершенную за цикл.

Дано:
$i = 5$
$V_2 = 2V_1$
$A_{23} = 3000$ Дж
$A - ?$



Решение

Идеальный цикл Карно состоит из двух изотерм и двух адиабат (см. рисунок). На рисунке участок 1-2 соответствует изотермическому расширению газа $(T_1 = T_2)$, участок 2-3 – адиабатическому расширению газа, участок 3-4 – изотермическому сжатию $(T_3 = T_4)$ и участок 4-1 – адиабатическому сжатию. При изотермическом расширении внутренняя энергия идеального газа остается постоянной, следовательно, все подводимое тепло Q_1 идет на работу по расширению газа на участке 1-2, т.е.

$$Q_1 = A_{12} = \frac{m}{M} RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1}. \tag{1}$$

При изотермическом сжатии на участке 3-4 тепло отдается холодильнику (Q_2), и это количество теплоты определяется работой, затраченной на сжатие газа:

$$Q_2 = A_{34} = \frac{m}{M} RT_3 \ln\frac{V_4}{V_3}. \tag{2}$$

Состояния 2 и 3 лежат на одной адиабате, поэтому можно записать:

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1}. \tag{3}$$

Для состояний 4 и 1, которые отвечают одной адиабате, имеем:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_4 V_4^{\gamma-1}. \tag{4}$$

Поделив выражения (3) на (4), получим

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}. \tag{5}$$

Так как $T_1 = T_2$ и $T_3 = T_4$, работа при адиабатическом расширении на участке 2-3 равна

$$A_{23} = -\Delta U_{23} = -\frac{m}{M}\frac{i}{2}R\left(T_2 - T_3\right). \tag{6}$$

Работа при адиабатическом сжатии на участке 4-1

$$A_{41} = -\Delta U_{41} = -\frac{m}{M}\frac{i}{2}R\left(T_1 - T_4\right).$$

Так как

$$T_1 = T_2, \quad \text{а} \quad T_3 = T_4, \quad \text{то} \ A_{23} = -A_{41},$$

т.е. полная работа по адиабатическому сжатию и расширению равна нулю.

Следовательно, работа цикла

$$A = A_{12} - A_{34}.$$

Из уравнений (1), (2) и (5) получим:

$$A = \frac{m}{M}R\left(T_1 - T_4\right)\ln\frac{V_2}{V_1}. \tag{7}$$

Из уравнения (6) выразим разность температур $T_2 - T_3$, равную $T_1 - T_4$, и подставим в выражение (7):

$$A = \frac{2}{i}A_{23}\ln\frac{V_2}{V_1};$$

$$A = \frac{2}{5}\cdot 3000\cdot 0{,}693 = 831{,}6 \text{ Дж}.$$

Ответ: $A = 831{,}6$ Дж.

Задача 2.101

При давлении 10^5 Па 0,2 моля двухатомного газа занимает объем 10 л. Газ изобарно сжимают до объема 4 л, затем сжимают адиабатно, после чего газ изотермически расширяют до начального объема и давления. Построить график процесса в координатах *P*, *V*. Найти работу, совершенную газом за один цикл; температуру, давление и объем в характерных точках процесса; количество теплоты, полученное газом от нагревателя и отданное газом холодильнику, а также термический кпд цикла.

Дано:
$\nu = 0{,}2$ моль
$P_1 = 10^5$ Па
$V_1 = 10^{-2}$ м^3
$V_2 = 4 \cdot 10^{-3}$ м^3
$T_3 = T_1$
$P_1 = P_2$ К
$i = 5$

A; T_1; T_2; P_3; V_3;
Q_1; Q_2; η – ?

Решение

Из уравнения Менделеева – Клапейрона $PV_1 = \nu RT_1$ находим:

$$T_1 = \frac{P_1V_1}{\nu R};$$

$$[T_1] = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{моль} \cdot \text{К}}{\text{моль} \cdot \text{Дж}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{К}}{\text{м}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{м}} = \text{К};$$

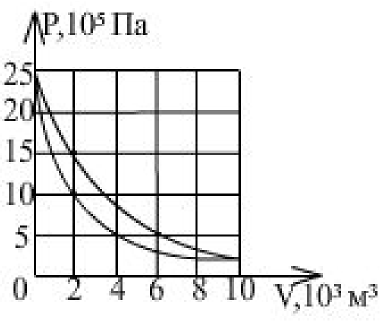
$$T_1 = \frac{10^5 \cdot 10^{-2}}{0{,}2 \cdot 8{,}31} = 602 \text{ К}.$$

Из уравнения изобарного процесса $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$ находим:

$$T_2 = \frac{T_1V_2}{V_1}. \qquad [T_2] = \frac{\text{К} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^3} = \text{К}; \qquad T_2 = \frac{602 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{10^{-2}} = 241 \text{ К}.$$

Найдем координаты точки пересечения адиабаты и изотермы. Из уравнения адиабатического процесса $T_2V_2^{\gamma-1} = T_1V_3^{\gamma-1}$ (γ = 1,4 для двухатомного газа), откуда

$$V_3 = V_2\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}; \qquad [V_3] = \text{м}^3 \cdot \frac{\text{К}}{\text{К}} = \text{м}^3; \qquad V_3 = 4 \cdot 10^{-3}\left(\frac{241}{602}\right)^{\frac{1}{0{,}4}} = 4{,}05 \cdot 10^{-4}\text{м}^3.$$



Из уравнения изотермического процесса $P_3V_3 = P_1V_1$

$$P_3 = \frac{P_1V_1}{V_3}; \qquad [P_3] = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^3} = \text{Па};$$

$$P_3 = \frac{10^5 \cdot 10^{-2}}{4{,}05 \cdot 10^{-4}} = 2{,}47 \cdot 10^6 \text{Па}.$$

Зная координаты точек пересечения изотермы и адиабаты между собой и с изобарой, строим график процесса (см. рисунок). Количество теплоты, полученное газом от нагревателя, определим по первому закону термодинамики:

$$dQ = \nu C_V dT + PdV.$$

При изотермическом процессе $dU = \nu C_V dT = 0$ и $dQ = PdV$ (работа расширения), следовательно,

$$Q_1 = \frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_1}{V_3};$$

$$Q_1 = \frac{\text{моль} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{моль} \cdot \text{К}} = \text{Дж};$$

$$Q_1 = 0,2 \cdot 8,31 \cdot 602 \cdot 3,2 = 3,2 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 3,2 \text{ кДж}.$$

Количество теплоты, отданное газом холодильнику при изобарном процессе,

$$Q_2 = \nu C_P \left(T_1 - T_2 \right);$$

$$Q_2 = \frac{\text{моль} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{моль} \cdot \text{К}} = \text{Дж};$$

$$Q_2 = 0,2 \cdot \frac{7}{2} \cdot 8,31 \cdot (602 - 241) = 2,1 \cdot 10^3 \text{Дж} = 2,1 \text{ кДж}.$$

Работа, совершенная газом,

$$A = Q_1 - Q_2;$$

$$A = 3,2 - 2,1 = 1,1 \text{ кДж}.$$

Находим кпд цикла:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad \text{или} \quad \eta = \frac{A}{Q_1};$$

$$\eta = \frac{1,1}{3,2} = 0,344 = 34,4\ \%.$$

Ответ: $A = 1,1$ кДж; $T_1 = 602$ К; $T_2 = 241$ К; $P_3 = 2,47 \cdot 10^6$ Па; $\eta = 34,4$ %; $Q_1 = 3,2$ кДж; $Q_2 = 2,1$ кДж; $V_3 = 4,05 \cdot 10^{-4}$ м^3.

Задача 2.102

Холодильная машина работает по обратимому циклу Карно в интервале температур $t_1 = 27\,°\text{C}$ и $t_2 = -3\,°\text{C}$. Рабочее тело – азот, масса которого $m = 0,2$ кг. Найти количество теплоты, отбираемое от охлажденного тела, и работу внешних сил за цикл, если максимальный объем больше минимального в 5 раз. Вычислить холодильный коэффициент.

Дано:

$M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$m = 0,2$ кг

$T_1 = 300$ К

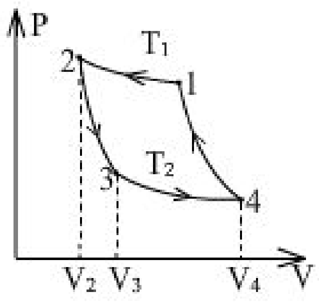
$T_1 = 270$ К

$\dfrac{V_4}{V_1} = 5$ К

$Q_2; A; \varepsilon$ – ?

Решение

Холодильная машина – это машина, которая за счет работы внешних сил отнимает теплоту от охлаждаемого тела и передает ее более нагретой окружающей среде. Если холодильная машина работает по циклу Карно, то изотермическое сжатие рабочего тела (1-2), сопровождаемое работой внешних сил, происходит при более высокой температуре T_1. При этом рабочее тело отдает в окружающую среду, играющую роль термостата, количество теплоты $Q_1 = Q_{21}$ (см. рисунок).



На участке (3-4) при более низкой температуре T_2 $(T_1 > T_2)$ происходит изотермическое расширение рабочего тела, при этом от охлаждаемого тела (термостат при температуре T_2) отбирается количество теплоты $Q_2 = Q_{34}$. При изотермическом расширении $Q_{34} = A_{34}$,

$$Q_{34} = \frac{m}{M} R T_2 \ln \frac{V_4}{V_3}.$$

Второе и третье состояния лежат на одной адиабате, проведенной в интервале температур от T_1 к T_2.

Следовательно,

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1}; \quad \frac{V_2}{V_3} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}; \quad V_3 = V_2 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}};$$

$$Q_{34} = \frac{m}{M} R T_2 \ln \frac{V_4}{V_2 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}};$$

$$Q_{34} = \frac{m}{M} R T_2 \left(\ln \frac{V_4}{V_2} + \frac{1}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2}{T_1} \right),$$

где $\gamma = \dfrac{i+2}{2} = 1,4$;

$$Q_{34} = \frac{0,2}{28 \cdot 10^{-3}} 8,31 \cdot 270 \left(\ln 5 + \frac{1}{1,4-1} \ln \frac{270}{300} \right) = 21,6 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 21,6 \text{ кДж}.$$

Поскольку в задаче рассматривается обратимый цикл Карно, то для него справедливо соотношение

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad \text{или} \quad \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}.$$

Согласно первому закону термодинамики работа за цикл равна полному количеству теплоты, полученному и отдаваемому за цикл: $A = -Q_1 + Q_2$

Из графика видно, что работа газа за цикл при указанном направлении процесса отрицательна. Следовательно, работа внешних сил за цикл

$$A^* = -A = Q_1 + Q_2;$$

$$A^* = Q_2 \frac{T_1}{T_2} - Q_2 = Q_2\left(\frac{T_1}{T_2} - 1\right) = Q_2\left(\frac{T_1 - T_2}{T_2}\right);$$

$$A^* = 21{,}6 \cdot 10^3 \left(\frac{300 - 270}{270}\right) = 2{,}4 \cdot 10^3 \text{Дж} = 2{,}4 \text{ кДж}.$$

Холодильный коэффициент ε равен отношению количества теплоты, отбираемого от охлаждаемого тела, к работе внешних сил, затраченной на этот цикл:

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{A^*} = \frac{Q_2}{Q_2\left(\dfrac{T_1 - T_2}{T_2}\right)} = \frac{T_2}{T_1 - T_2};$$

$$\varepsilon = \frac{270}{300 - 270} = 9.$$

Ответ: $Q_2 = 21{,}6$ кДж; $A^* = 2{,}4$ кДж; $\varepsilon = 9$.

Задача 2.103

Тепловая машина работает по циклу Карно. При изотермическом расширении двухатомного газа его объем увеличивается в 3 раза, а при последующем адиабатическом расширении – в 5 раз. Определить кпд цикла. Какую работу совершает 1 кмоль газа за один цикл, если температура нагревателя 300 К? Какое количество теплоты получит от холодильника машина, если она будет совершать тот же цикл в обратном направлении, и какое количество теплоты будет передано нагревателю?

Дано:

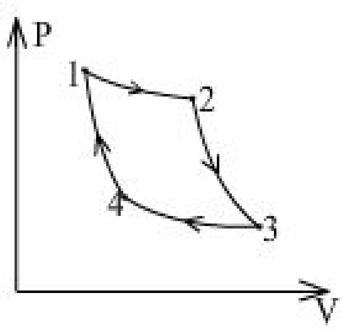
$\frac{V_2}{V_1} = k = 3$

$\frac{V_3}{V_2} = n = 5$

$\nu = 10^3$ моль

$T_1 = 300$ К

$A; Q_1; Q_2; \eta$ – ?



Решение

Для цикла Карно кпд определяется формулой

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \tag{1}$$

где T_1 – температура нагревателя; T_2 – температура холодильника.

При адиабатическом процессе 2-3 (см. рисунок)

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}, \tag{2}$$

где $\gamma = 1{,}4$ – показатель степени адиабаты (для двухатомного газа $i = 5$).

Из равенства (2) находим

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1} = T_1 n^{1-\gamma}.$$

Из равенства (1) получаем

$$\eta = \frac{T_1 - T_1 n^{1-\gamma}}{T_1} = 1 - n^{1-\gamma},$$

где $n^{1-\gamma} = 5^{1-1,4} = 0{,}525.$

Следовательно,

$$\eta = 1 - 0{,}525 = 0{,}475;$$

$$\eta = 47{,}5\ \%.$$

Работа в цикле Карно определяется разностью количества теплоты Q_1, полученного в процессе 1-2, и Q_2, отданного в процессе 3-4:

$$A = Q_1 - Q_2. \tag{3}$$

При изотермическом процессе

$$Q_1 = \nu R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = \nu R T_1 \ln k. \tag{4}$$

Так как $\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1}$, то $Q_2 = \nu R T_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -\nu R T_2 \ln k$, где знак «минус» показывает, что теплота отдается холодильнику.

Следовательно,

$$A = \nu R \ln k \left(T_1 - T_2\right) = \nu R \ln k \Delta T, \qquad (5)$$

где $\Delta T = T_1 - T_2 = T_1 - T_1 n^{1-\gamma} = T_1\left(1 - n^{1-\gamma}\right) = T_1\eta$;

$$\Delta T = 300 \cdot 0,475 = 142,5 \text{ К},$$

тогда

$$T_2 = 157,5 \text{ К};$$

$$A = 10^3 \cdot 8,31 \cdot 1,1 \cdot 142,5 = 1,3 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 1,3 \text{ МДж}.$$

При обратном цикле Карно газ расширяется по адиабате 1-4, затем по изотерме 4-3, получая при этом от холодильника количество теплоты Q_2; далее газ сжимается по адиабате 3-2, затем по изотерме 2-1, отдавая при этом количество теплоты Q_1. По формуле (4) находим:

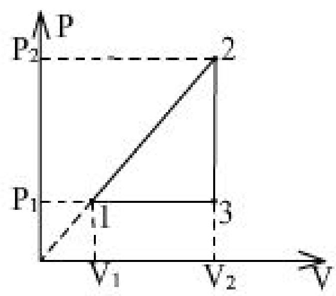
$$Q_1 = 10^3 \cdot 8,31 \cdot 1,1 \cdot 300 = 2,74 \text{ МДж};$$

$$Q_2 = 10^3 \cdot 8,31 \cdot 1,1 \cdot 156 = 1,44 \text{ МДж}.$$

Ответ: $\eta = 47,5\ \%$; $A = 1,3$ МДж; $Q_1 = 2,74$ МДж; $Q_2 = 1,44$ МДж.

Задача 2.104

Гелий массой m = 4 г совершает цикл, изображенный на рисунке. Найти работу A, совершенную газом за один цикл, а также количество теплоты, принятое от нагревателя Q_1 и переданное холодильнику Q_2 за цикл, если $P_1 = 200$ кПа, $P_2 = 600$ кПа; $V_1 = 1$ л, $V_2 = 3$ л.



Дано:

$i = 3$

$m = 4 \cdot 10^{-3}$ кг

$P_1 = 2 \cdot 10^5$ Па

$P_2 = 6 \cdot 10^5$ Па

$V_1 = 10^{-3}$ м^3

$V_1 = 3 \cdot 10^{-3}$ м^3

A; Q_1; Q_2; – ?

Решение

Из условия следует, что количество гелия – 1 моль. На участке 1-2 давление P пропорционально объему:

$$P = kV,$$

где $k = \dfrac{P_1 - P_2}{V_2 - V_1}$, а $P_1 V_2 = P_2 V_1$.

Работу на участке 1-2 определим по формуле

$$A_{12}=\int\limits_{V_1}^{V_2}PdV=k\int\limits_{V_1}^{V_2}VdV=k\frac{V^2}{2}\Bigg|_{V_1}^{V_2}=\frac{k}{2}\left(V_2{}^2-V_1{}^2\right)=\frac{1}{2}\left(P_2-P_1\right)\left(V_2+V_1\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(P_2V_2-P_1V_1\right).$$

В последнем равенстве учтено, что $P_1V_2=P_2V_1$.

На участке 2-3 $V=\mathrm{const}$, следовательно, $A_{23}=0$.

На участке 3-1 $P=\mathrm{const}$, поэтому $A_{31}=P_1\left(V_1-V_2\right)$.

Работа, совершенная газом за цикл,

$$A=A_{12}+A_{31}=\frac{1}{2}\left(P_2V_2+P_1V_1\right)-P_1V_2;$$

$$\left[A\right]=\text{Па}\cdot\text{м}^3=\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}\cdot\text{м}^3=\text{Н}\cdot\text{м}=\text{Дж};$$

$$A=\frac{1}{2}\left(6\cdot10^5\cdot3\cdot10^{-3}+2\cdot10^5\cdot10^{-3}\right)-2\cdot10^5\cdot3\cdot10^{-3}=400\ \text{Дж}.$$

Для нахождения Q_1 и Q_2 определим изменение внутренней энергии по формуле $\Delta U=\frac{3}{2}R\Delta T$ с учетом того, что $P_1V_1=RT_1$, $P_2V_2=RT_2$, $P_1V_2=RT_3$.

Тогда

$$Q_1=Q_{12}=A_{12}+\Delta U_{12};$$

$$Q_1=\frac{1}{2}\left(P_2V_2+P_1V_1\right)+\frac{3}{2}R\left(T_2-T_1\right)=\frac{1}{2}\left(P_2V_2+P_1V_1\right)+\frac{3}{2}\left(P_2V_2-P_1V_1\right)=$$

$$=2\left(P_2V_2-P_1V_1\right);$$

$$Q_1=2\left(6\cdot10^5\cdot3\cdot10^{-3}-2\cdot10^5\cdot10^{-3}\right)=3200\ \text{Дж};$$

$$Q_2=Q_{23}+Q_{31}=\Delta U_{23}+\Delta U_{31}+A_{31}=\frac{3}{2}R\left(T_3-T_2\right)+\frac{3}{2}R\left(T_1-T_3\right)+P_1\left(V_1-V_2\right)=$$

$$=\frac{3}{2}R\left(T_2-T_1\right)+P_1\left(V_1-V_2\right)=\frac{3}{2}P_2V_2-\frac{3}{2}P_1V_1+P_1V_1+P_1V_2=\frac{3}{2}P_2V_2+P_1\left(V_2-V_1\right);$$

$$Q_2=\frac{3}{2}6\cdot10^5\cdot3\cdot10^{-3}+2\cdot10^5\left(3\cdot10^{-3}-10^{-3}\right)=2300\ \text{Дж}.$$

Ответ: $A=400$ Дж; $Q_1=3200$ Дж; $Q_2=2300$ Дж.

Задача 2.105

Кислород массой m = 20 г нагревается от температуры t_1 = 20 °С до температуры t_2 = 220 °С. Найти изменение энтропии ΔS, если нагревание происходит: 1) изохорически; 2) изобарически.

Дано:
$m = 2 \cdot 10^{-2}$ кг
$T_1 = 293$ К
$T_1 = 493$ К
$M = 32 \cdot 10^{-3}$кг/моль
ΔS – ?

Решение

1. При изохорическом нагревании A = 0 и количество теплоты, согласно первому началу термодинамики $(Q = \Delta U + A)$, равно

$$dQ = dU = \frac{m}{M} C_V dT,$$

где $C_V = \dfrac{iR}{2}$ – молярная теплоемкость.

Изменение энтропии $\Delta S = \int\limits_A^B \dfrac{dQ}{T}$ равно:

$$\Delta S = \int\limits_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{m}{M} C_V \int\limits_1^2 \frac{dT}{T} = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R \ln \frac{T_2}{T_1};$$

$$[\Delta S] = \frac{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Для кислорода число степеней свободы $i = 5$,

$$\Delta S = \frac{5}{2} \frac{2 \cdot 10^{-2}}{32 \cdot 10^{-3}} 8{,}31 \ln \frac{493}{293} = 6{,}75 \ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

2. При изобарическом процессе количество теплоты, согласно первому началу термодинамики,

$$dQ = dU + A = \frac{m}{M} C_V dT + \frac{m}{M} R dT = \frac{m}{M} C_P dT,$$

и изменение энтропии

$$\Delta S = \int\limits_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{m}{M} C_P \int\limits_1^2 \frac{dT}{T};$$

$$[\Delta S] = \frac{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Так как $C_P = C_V + R$ (по уравнению Майера), то

$$C_P = \frac{5}{2}R + R = \frac{7}{2}R \quad \text{и} \quad \Delta S = \frac{7}{2}\frac{m}{M}R\ln\frac{T_2}{T_1};$$

$$\Delta S = \frac{7}{2}\frac{2 \cdot 10^{-2}}{32 \cdot 10^{-3}} 8{,}31 \ln\frac{493}{293} = 9{,}45\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Ответ: 1) $\Delta S = 6{,}75\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$; 2) $\Delta S = 9{,}45\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

Задача 2.106

Определить изменение ΔS энтропии при изотермическом расширении кислорода массой $m = 10$ г от объема $V_1 = 25$ л до объема $V_2 = 100$ л.

Дано:
$i = 5$
$m = 10^{-2}$ кг
$V_1 = 25 \cdot 10^{-3}$ м^3
$V_1 = 100 \cdot 10^{-3}$ м^3
ΔS – ?

Решение

Так как процесс изотермический (T = const), то в выражении для энтропии

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

можно вынести температуру за знак интеграла. Выполнив это, получим

$$\Delta S = \frac{1}{T}\int_1^2 dQ = \frac{Q}{T}. \qquad (1)$$

Количество теплоты Q, полученное газом, найдем по первому началу термодинамики: $Q = \Delta U + A$.

Для изотермического процесса $\Delta U = 0$, следовательно,

$$Q = A, \qquad (2)$$

и работа A для этого процесса определяется по формуле

$$A = \frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1}. \qquad (3)$$

С учетом (2) и (3) равенство (1) примет вид

$$\Delta S = \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1};$$

$$[\Delta S] = \frac{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Дж}}{\text{К}};$$

$$\Delta S = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} 8{,}31 \ln \frac{100 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-3}} = 3{,}6 \ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Ответ: $\Delta S = 3{,}6\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

Задача 2.107

В результате адиабатического процесса один моль двухатомного идеального газа перешел из состояния 1 с температурой T_1 в состояние 2 с температурой T_2. Определить изменение энтропии газа при этом процессе.

Дано:	**Решение**
$i = 5$	Изменение энтропии
T_1, T_2	
ΔS – ?	

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

По первому закону термодинамики $dQ = dU + A$, тогда

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \left(\frac{dU}{T} + \frac{dA}{T} \right).$$

Рассчитаем отдельно оба интеграла. Изменение внутренней энергии одного моля двухатомного идеального газа $dU = \frac{5}{2} RdT$, следовательно,

$$\int_1^2 \frac{dU}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{5}{2} R \frac{dT}{T} = \frac{5}{2} R \ln \Big|_{T_1}^{T_2} = \frac{5}{2} R \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Поскольку работа $dA = PdV$, то

$$\int_1^2 \frac{dA}{T} = \int_1^2 \frac{PdV}{T}.$$

Используя формулу адиабатического процесса, выразим P и T через V. Пусть давление и температура в состоянии 1 равны соответственно P_1 и T_1. Тогда из соотношений $PV^{\gamma} = \text{const}$, $TV^{\gamma-1} = \text{const}$ получаем $P_1V_1^{\gamma} = PV^{\gamma}$ и $T_1V_1^{\gamma-1} = TV^{\gamma-1}$, где P, T и V – текущие термодинамические параметры системы. Из двух последних равенств следует:

$$P = \frac{P_1V_1^{\gamma}}{V^{\gamma}} \quad \text{и} \quad T = \frac{T_1V_1^{\gamma-1}}{V^{\gamma-1}}.$$

Подставляя эти значения в подынтегральное выражение, получаем

$$\int_1^2 \frac{PdV}{T} = \int_1^2 \frac{P_1V_1^{\gamma}V^{\gamma-1}dV}{V^{\gamma}T_1V_1^{\gamma-1}} = \frac{P_1V_1}{T_1}\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = R\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

В последнем преобразовании воспользовались уравнением Менделеева – Клапейрона для $\nu = 1$: $P_1V_1 = RT_1$.

Используя соотношение $T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$, получим

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Следовательно,

$$\int_1^2 \frac{PdV}{T} = \frac{R}{\gamma-1}\ln\frac{T_2}{T_1}.$$

Окончательно получаем:

$$\Delta S = \frac{5}{2}R\ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{R}{\gamma-1}\ln\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{\gamma-1}\right)R\ln\frac{T_2}{T_1}.$$

Ответ: $\Delta S = \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{\gamma-1}\right)R\ln\frac{T_2}{T_1}.$

Задача 2.108

Кислород, масса которого m = 200 г, нагревают от температуры t_1 = 27 °С до t_2 = 127 °С. Найти изменение энтропии, если известно, что начальное и конечное давление одинаково и близко к атмосферному.

Дано:
m = 0,2 кг
T_1 = 300 К
T_2 = 400 К
$M = 32\cdot10^{-3}$ кг/моль
$i = 5$
$P_1 = P_2 = 10^5$ Па

ΔS – ?

Решение

Так как давление близко к атмосферному, то можно считать газ идеальным. Характер процесса неизвестен. Так как энтропия является функцией состояния системы, то изменение энтропии определяется только параметрами этих состояний и не зависит от характера процесса.

Найти изменение энтропии можно, рассмотрев произвольный обратимый процесс, в результате которого идеальный газ можно перевести из состояния 1 в состояние 2 (см. рисунок). Из рисунка видно, что возможны два таких процесса: 1) изобарный 1-2; 2) изотермический процесс 1-3 с последующим нагреванием 3-2.

Для процесса 1-2

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ_P}{T},$$

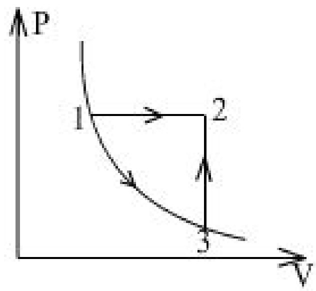
где $dQ_P = \frac{m}{M} C_P dT$; $C_P = \frac{(i+2)R}{2}$.

Тогда

$$\Delta S = \frac{m}{M}\frac{(i+2)R}{2}\int_1^2 \frac{dT}{T} = \frac{m}{M}\frac{(i+2)R}{2}\ln\frac{T_2}{T_1};$$

$$[\Delta S] = \frac{\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{К}} = \frac{\text{Дж}}{\text{К}};$$

$$\Delta S = \frac{0,2}{32\cdot10^{-3}}\frac{5+2}{2}8,31\ln\frac{400}{300} = 52\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$



Проверим, изменяется ли результат при переходе 1-3-2:

$$\Delta S = \frac{1}{T}\int_1^3 dQ_T + \int_3^2 \frac{dQ_V}{T},$$

где dQ_T – количество тепла, полученное при изотермическом процессе $(T = \text{const};\ dT = 0;\ dU = 0)$.

Из первого начала термодинамики $dQ_T = dA = PdV$.

Из уравнения Менделеева – Клапейрона

$$PV = \frac{m}{M}RT;\quad P = \frac{m}{M}\frac{RT}{V};\quad dQ_V = \frac{m}{M}RT\frac{dV}{V},$$

где dQ_V – количество тепла, полученное при изохронном процессе;

$$dQ_V = \frac{m}{M} C_V dT; \quad C_V = \frac{iR}{2}.$$

Тогда изменение энтропии при переходе 1-3-2 будет равно:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{1}{T}\frac{m}{M} RT \int_1^3 \frac{dV}{V} + \frac{i}{2}\frac{m}{M} R \int_3^2 \frac{dT}{T};$$

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{m}{M} R \left(\ln\frac{V_3}{V_1} + \frac{i}{2}\ln\frac{T_2}{T_3} \right).$$

Учитывая, что $T_1 = T_3$ (изотермический процесс); $V_3 = V_2$ (изохорный процесс); $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$ (изобарный процесс); $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$, получим:

$$\Delta S = \frac{m}{M} R \left(\ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{i}{2}\ln\frac{T_2}{T_1} \right);$$

$$\Delta S = \frac{m}{M}\frac{(i+2)R}{2}\ln\frac{T_2}{T_1}.$$

Мы получили то же выражение, что и для 1-2.

Ответ: $\Delta S = 52 \ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$

Задача 2.109

Теплоизолированный сосуд разделен на две равные части перегородкой. В одной половине сосуда содержится m = 10 г водорода. Вторая половина откачана до высокого вакуума. Перегородку убирают, и газ заполняет весь объем. Считая газ идеальным, найти приращение его энтропии.

Дано:
$m = 10^{-2}$ кг
$M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

ΔS – ?

Решение

Расширение газа здесь является процессом необратимым. Поэтому формула

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$$

напрямую здесь неприменима.

Если сосуд теплоизолирован, то $dQ = 0$ и $dS = 0$, что в действительности, как это следует из второго начала термодинамики, невозможно. Энтропия при необратимом расширении должна увеличиваться.

Воспользуемся тем, что энтропия – функция состояния и ее изменение полностью определяется начальным и конечным состояниями системы, независимо от того процесса, в ходе которого система перешла из начального состояния 1 в конечное 2. Поэтому представим такой процесс расширения газа, который переводил бы его в то же самое конечное состояние 2, но являлся бы обратимым процессом.

Так как данный газ изолирован от окружающей среды $(Q = 0;\ A = 0)$, то его внутренняя энергия, как это следует из первого начала термодинамики, должна оставаться постоянной. При этом будет постоянной температура идеального газа во время его расширения,

$$U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT.$$

Значит, в качестве обратимого процесса, переводящего газ в то же конечное состояние, что и данный процесс, можно рассматривать процесс обратимого изотермического расширения, в ходе которого объем увеличивается в 2 раза. Так как в этом процессе $T = \text{const};\ \Delta U = 0$, следовательно, работа расширения будет равна поступающему количеству теплоты $(Q = A)$,

$$S_2 - S_1 = \frac{1}{T}\int_1^2 dQ = \frac{Q}{T} = \frac{1}{T}\frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1};$$

$$S_2 - S_1 = \frac{m}{M}R\ln 2;$$

$$S_2 - S_1 = \frac{10^{-2}\cdot 8,31\cdot 0,69}{2\cdot 10^{-3}} = 28,6\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Ответ: $\Delta S = 28,6\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$

Задача 2.110

Лед массой 2 кг, находящийся при температуре $t_1 = -10$ °C, нагрели и превратили в пар. Определить изменение энтропии.

Дано:	**Решение**
$m = 2$ кг $T_1 = 263$ К $T_2 = 273$ К $T_3 = 373$ К $C_1 = 2{,}1 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К) $C_2 = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К) $\lambda = 3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг $r = 2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг ΔS – ?	Изменение энтропии определяется по формуле $$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$ Общее изменение энтропии равно сумме $\sum \Delta S_i$, где ΔS_i – изменение энтропии, происходящее на отдельных этапах процесса; $$\Delta S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i.$$

Изменение энтропии ΔS_1 происходит при нагревании льда от начальной температуры $T_1 = 263$ К до температуры плавления $T_2 = 273$ К;

$$\Delta S_1 = \int_1^2 \frac{dQ_1}{T};$$

так как $dQ_1 = mc_1 dT$, то

$$\Delta S_1 = mc_1 \ln \frac{T_2}{T_1},$$

где m – масса льда; c_1 – удельная теплоемкость льда.

Изменение энтропии ΔS_2 происходит при плавлении льда. В этом случае $dQ_2 = m$, тогда

$$\Delta S_2 = \frac{m\lambda}{T_2},$$

где T_2– температура плавления льда; λ – удельная теплота плавления.

Изменение энтропии ΔS_3 происходит при нагревании воды от температуры T_2 до температуры кипения $T_3 = 373$ К. Величина вычисляется аналогично ΔS_1:

$$\Delta S_3 = mc_2 \ln \frac{T_3}{T_2},$$

где c_2 – удельная теплоемкость воды.

Изменение энтропии ΔS_4 происходит при испарении воды; так как $dQ = mr$,то

$$\Delta S_4 = \frac{mr}{T_3},$$

где r – удельная теплота парообразования.

Общее изменение энтропии

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4 = m\left(c_1 \ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{\lambda}{T_2} + c_2 \ln\frac{T_3}{T_2} + \frac{r}{T_3}\right);$$

$$\Delta S = 2\left(2{,}1\cdot 10^3 \ln\frac{273}{263} + \frac{3{,}35\cdot 10^5}{273} + 4{,}19\cdot 10^3 \ln\frac{373}{273} + \frac{2{,}26\cdot 10^6}{373}\right) =$$

$$= 1{,}73\cdot 10^4\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Ответ: $\Delta S = 1{,}73\cdot 10^4\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

Задача 2.111

Определить изменение энтропии ΔS при изотермическом расширении азота массой $m = 10$ г, если давление газа уменьшилось от $P_1 = 0{,}1$ МПа до $P_2 = 50$ кПа.

Дано:
$m = 10^{-2}$ кг
$M = 28\cdot 10^{-3}$ кг/моль
$P_1 = 10^5$ Па
$P_2 = 4\cdot 10^4$ Па
ΔS – ?

Решение

Изменение энтропии, учитывая, что процесс изотермический,

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\int_1^2 dQ = \frac{Q}{T}. \qquad (1)$$

Согласно первому началу термодинамики количество теплоты, полученное газом, $Q = \Delta U + A$. Для изотермического процесса $\Delta U = 0$, поэтому $Q = A$.

Работа газа в изотермическом процессе

$$A = \frac{m}{M} RT \ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln\frac{P_1}{P_2}. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), найдем искомое изменение энтропии:

$$\Delta S = \frac{m}{M} RT \ln\frac{P_1}{P_2};$$

$$[\Delta S] = \frac{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Дж}}{\text{К}};$$

$$\Delta S = \frac{10^{-2} \cdot 8,31}{28 \cdot 10^{-3}} \ln \frac{10^5}{5 \cdot 10^4} = 2,06\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Ответ: $\Delta S = 2,06\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

Задача 2.112

Азот массой $m = 100$ г был изобарно нагрет так, что его объем увеличился в 2 раза, а затем был изохорно охлажден так, что его давление уменьшилось в 2 раза. Определить изменение энтропии ΔS в ходе указанных процессов.

Дано:	**Решение**
$m = 10^{-1}$ кг $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль $\frac{V_2}{V_1} = 2 \quad \frac{P_1}{P_3} = 2$	Энтропия – величина аддитивная, поэтому общее изменение энтропии складывается из изменений ее в рассматриваемых процессах – изобарном 1-2 и изохорном 2-3 (см. рисунок):
ΔS – ?	$$\Delta S = \Delta S_{12} + \Delta S_{23}. \quad (1)$$

Изменение энтропии в изобарном процессе 1-2

$$\Delta S_{12} = \int_1^2 \frac{dQ_{12}}{T} = \frac{m}{M} C_P \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \frac{m}{M} C_P \ln \frac{T_2}{T_1}; \quad (2)$$

учли, что $dQ_{12} = \frac{m}{M} C_P dT$, где C_P – молярная теплоемкость при постоянном давлении.

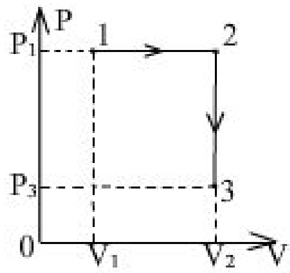
Изменение энтропии в изохорном процессе 2-3

$$\Delta S_{23} = \int_2^3 \frac{dQ_{23}}{T} = \frac{m}{M} C_V \int_{T_2}^{T_3} \frac{dT}{T} = \frac{m}{M} C_V \ln \frac{T_3}{T_2}; \quad (3)$$

учли, что $dQ_{23} = \frac{m}{M} C_V dT$, где C_V – молярная теплоемкость при постоянном объеме.

Для изобарного процесса 1-2 ($P = \text{const}$)

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}, \quad \text{откуда} \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_1} = 2.$$



Для изохорного процесса 2-3 ($V = \text{const}$)

$$\frac{P_1}{T_2} = \frac{P_3}{T_3}, \quad \text{откуда} \quad \frac{T_3}{T_2} = \frac{P_3}{P_1} = \frac{1}{2}.$$

Подставив полученные значения в формулы (2) и (3), которые, в свою очередь, подставим в выражение (1), получаем искомое изменение энтропии в ходе указанных процессов:

$$\Delta S = \frac{m}{M} C_P \ln 2 + \frac{m}{M} C_V \ln \frac{1}{2} = \frac{m}{M} \left(C_P - C_V \right) \ln 2 = \frac{m}{M} R \ln 2;$$

$$\left[\Delta S \right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Дж}}{\text{К}};$$

$$\Delta S = \frac{10^{-1} \cdot 8{,}31}{28 \cdot 10^{-3}} \ln 2 = 20{,}6 \ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Ответ: $\Delta S = 20{,}6 \ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$

2.5. Реальные газы, жидкости и твердые тела

Основные теоретические сведения

2.5.1. Реальные газы

Уравнение состояния реального газа (уравнение Ван-дер-Ваальса) для одного моля газа:

$$\left(p+\frac{a}{V_m^2}\right)(V_m-b)=\nu RT\ ,$$

где V_m – молярный объем; a и b – постоянные Ван-дер-Ваальса, различные для разных газов.

Уравнение Ван-дер-Ваальса для произвольной массы газа:

$$\left(p+\frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V-b\nu)=\nu RT\ ,$$

где $\nu=\dfrac{m}{M}$ – количество вещества; $V=\nu V_m$.

Внутреннее давление газа, обусловленное силами взаимодействия молекул,

$$p'=\frac{a}{V_m^2}.$$

где a – постоянная Ван-дер-Ваальса, характеризующая силы межмолекулярного притяжения.

Критические параметры – объем $V_к$, давление $p_к$ и температура $T_к$ связаны с постоянными a и b Ван-дер-Ваальса соотношениями

$$V_к=3b;\quad p_к=\frac{a}{27b^2};\quad T_к=\frac{8a}{27Rb},$$

где R – молярная газовая постоянная.

Внутренняя энергия реального газа

одного моля

$$U_m=C_V T-\frac{a}{V_m};$$

произвольной массы

$$U_m = \frac{m}{M}\left(C_V T - \frac{a}{V_m}\right),$$

где C_V – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме.

Уравнение ***Клапейрона-Клаузиуса***, позволяющее определить изменение температуры фазового перехода в зависимости от изменения давления при равновесно протекающем процессе:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T\left(V_2 - V_1\right)},$$

где L – теплота фазового перехода; $(V_2 - V_1)$ – изменение объема вещества при переходе его из первой фазы во вторую; T – температура перехода (процесс изотермический).

2.5.2. Жидкости

Поверхностное натяжение

$$\sigma = \frac{F}{l} \quad \text{либо} \quad \sigma = \frac{\Delta E}{\Delta S},$$

где F – сила поверхностного натяжения, действующая на контур l, ограничивающий поверхность жидкости; ΔE – изменение свободной энергии поверхностной пленки жидкости, связанное с изменением площади ΔS поверхности этой пленки.

Формула ***Лапласа***, позволяющая определить избыточное давление для произвольной поверхности жидкости двоякой кривизны:

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

где R_1 и R_2 – радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных нормальных сечений поверхности жидкости; радиус кривизны положителен, если центр кривизны находится внутри жидкости (выпуклый мениск), и отрицателен, если центр кривизны находится вне жидкости (вогнутый мениск). В случае сферической поверхности

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}.$$

Высота подъема жидкости в капиллярной трубке

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r},$$

где θ – краевой угол; r – радиус капилляра; ρ – плотность жидкости; g – ускорение свободного падения.

Высота подъема жидкости между двумя близкими и параллельными плоскостями

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g d},$$

где d – расстояние между плоскостями.

2.5.3. Твердые тела

Закон Дюлонга и Пти:

$$C_V = 3R,$$

где C_V – молярная (атомная) теплоемкость химически простого твердого тела.

При повышении температуры длина твердых тел возрастает в первом приближении линейно с температурой, т.е.

$$l_1 = l_0(1 + at),$$

где l_1 – длина тела при температуре t, l_0 – его длина при температуре 0 °C, a – коэффициент линейного теплового расширения.

Для твердых изотропных тел $a = \frac{1}{3}b$, где b – коэффициент объемного теплового расширения.

Относительное изменение длины стержня по закону Гука в случае деформации продольного растяжения (или одностороннего сжатия) стержня

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha p_н = \frac{1}{E} p_н,$$

где $p_н$ – удельная нагрузка, $p_н = \frac{F}{S}$, где F – растягивающая (сжимающая) сила, S – площадь поперечного сечения; α – коэффициент упругости, $E = \frac{1}{\alpha}$ – модуль упругости (модуль Юнга).

Относительное изменение толщины стержня при продольном растяжении

$$\frac{\Delta d}{d}=\beta p_н,$$

где β – коэффициент поперечного сжатия.

Коэффициент Пуассона

$$\sigma=\frac{\beta}{\alpha}.$$

Для закручивания стержня (проволоки) на некоторый угол φ необходимо приложить момент пары сил

$$M=\frac{\pi N r^4 \varphi}{2l},$$

где l – длина проволоки, r – ее радиус; N – модуль сдвига материала проволоки.

Примеры решения задач

Задача 2.113

Углекислый газ массой $m=10$ г находится в сосуде вместимостью $V=1$ л. Определить: 1) собственный объем V' молекул газа; 2) внутреннее давление P' газа. Поправки Ван-дер-Ваальса: $a=0,361$ Н$\cdot$м^4 / моль^2 и $b=4,28\cdot 10^{-5}$ м^3/моль^2.

Дано:

$M = 44\cdot 10^{-3}$ кг/моль

$m = 10^{-2}$ кг

$V = 10^{-3}$ м^3

$a=0,361$ Н$\cdot$м^4 / моль^2

$b=4,28\cdot 10^{-5}$ м^3/моль^2

V'; P' – ?

Решение

Уравнение Ван-дер-Ваальса – уравнение состояния реальных газов

$$\left(P+\frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V-\nu b)=\nu RT, \qquad (1)$$

где $\nu=\dfrac{m}{M}$ – количество вещества; a и b – поправки Ван-дер-Ваальса; R – молярная газовая постоянная.

В уравнении (1) поправка b определяет учетверенный объем молекул всего газа, т.е. $\nu b = 4V'$, откуда искомый собственный объем молекул газа

$$V' = \frac{\nu b}{4} = \frac{mb}{4M}; \qquad [V'] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{кг}} = \text{м}^3;$$

$$V' = 2,43\ \text{см}^3.$$

Как следует из уравнения (1), внутреннее давление газа

$$P' = \frac{\nu^2 a}{V^2} = \frac{m^2 a}{M^2 V^2}; \qquad [P'] = \frac{\text{кг}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{м}^4 \cdot \text{моль}^2}{\text{моль}^2 \cdot \text{кг}^2 \cdot \text{м}^6} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па};$$

$$P' = 18,6\ \text{кПа}.$$

Ответ: 1) $V' = 2,43\ \text{см}^3$; 2) $P' = 18,6$ кПа.

Задача 2.114

Давление P кислорода равно 8 МПа, его плотность $\rho = 100$ кг/м^3. Определить температуру газа, если: 1) газ идеальный (T_1); 2) газ реальный (T). Поправки Ван-дер-Ваальса: $a = 0,136\ \text{Н} \cdot \text{м}^4/\text{моль}$ и $b = 3,17 \cdot 10^{-5}\ \text{м}^3/\text{моль}^2$.

Дано:
$M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$P = 8 \cdot 10^6$ Па;
$\rho = 100$ кг/м^3
$a = 0,136\ \text{Н} \cdot \text{м}^4/\text{моль}$
$b = 3,17 \cdot 10^{-5}\ \text{м}^3/\text{моль}^2$

T_1, T – ?

Решение

Идеальный газ подчиняется уравнению Клапейрона – Менделеева

$$PV = \frac{m}{M} R T_1, \qquad (1)$$

где m – масса газа; M – молярная масса; R – молярная газовая постоянная.

Учитывая, что плотность газа $\rho = \dfrac{m}{V}$, из уравнения (1) найдем искомую температуру T_1:

$$T_1 = \frac{PM}{\rho R};$$

$$[T_1] = \frac{\text{Н} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}{\text{м}^2 \cdot \text{моль} \cdot \text{кг} \cdot \text{Дж}} = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{Дж}} = \text{К};$$

$$T_1 = \frac{8 \cdot 10^6 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{100 \cdot 8,31} = 308\ \text{К}.$$

Реальный газ подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса

$$\left(P+\frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V-\nu b)=\nu RT, \qquad (2)$$

где ν – количество вещества; a и b – поправки Ван-дер-Ваальса.

Подставим $\nu=\frac{m}{M}=\frac{\rho V}{M}$ в уравнение (2) и после его преобразования получим:

$$\left(P+\frac{\rho^2 a}{M^2}\right)(M-\rho b)=\rho RT,$$

откуда искомая температура

$$T=\left(P+\frac{\rho^2 a}{M^2}\right)(M-\rho b)/\rho R;$$

$$[T]=\frac{\left(\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}+\frac{\text{кг}^2\cdot\text{Н}\cdot\text{м}^4\cdot\text{моль}^2}{\text{м}^6\cdot\text{моль}^2\cdot\text{кг}^2}\right)\left(\frac{\text{кг}}{\text{моль}}-\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^3}{\text{м}^3\cdot\text{моль}}\right)}{\frac{\text{кг}\cdot\text{Дж}}{\text{м}^3\cdot\text{моль}\cdot\text{К}}}=\frac{\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}\cdot\frac{\text{кг}}{\text{моль}}}{\frac{\text{кг}\cdot\text{Дж}}{\text{м}^3\cdot\text{моль}\cdot\text{К}}}=$$

$$=\frac{\text{Н}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^3\cdot\text{К}\cdot\text{моль}}{\text{м}^2\cdot\text{моль}\cdot\text{кг}\cdot\text{Дж}}=\frac{\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{Дж}}=\text{К};$$

$$T=324\ \text{К}.$$

Ответ: $T_1=308$ К; $T=324$ К.

Задача 2.115

Вычислить поправки Ван-дер-Ваальса для кислорода, если критическая температура $T_{кр}$ = 15 К и критическое давление $P_{кр}$ = 5,08 МПа.

Дано:
$T_{кр}=15$ К
$P_{кр}=5,08\cdot10^6$ Па
a, b – ?

Решение

Поправки Ван-дер-Ваальса a и b присутствуют в уравнении состояния реальных газов (уравнении Ван-дер-Ваальса)

$$\left(P+\frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V-\nu b)=\nu RT,$$

где ν – количество вещества.

Это уравнение можно привести к виду

$$PV^3 - (\nu RT + \nu bP)V^2 + \nu^2 aV - \nu^3 ab = 0. \qquad (1)$$

Подставляя в (1) критическую температуру и критическое давление, получим:

$$P_{кр}V^3 - \left(\nu RT_{кр} + \nu bP_{кр}\right)V^2 + \nu^2 aV - \nu^3 ab = 0. \qquad (2)$$

С другой стороны, поскольку в критической точке все три корня полученного уравнения совпадают и равны $V_{кр}$, уравнение (2) можно записать также в виде

$$P_{кр}\left(V - V_{кр}\right)^3 = 0$$

или

$$P_{кр}V^3 - 3P_{кр}V_{кр}V^2 + 3P_{кр}V_{кр}^2 V - P_{кр}V_{кр}^3 = 0. \qquad (3)$$

Так как уравнения (2) и (3) тождественны, в них должны быть равны и коэффициенты при V в соответствующих степенях. Поэтому можно записать:

$$P_{кр}V_{кр}^3 = \nu^3 ab; \quad 3P_{кр}V_{кр}^2 = \nu^2 a; \quad 3P_{кр}V_{кр} = \nu RT_{кр} + \nu bP_{кр}.$$

Решая полученные уравнения, найдем:

$$a = \frac{27R^2T_{кр}^2}{64P_{кр}}; \qquad b = \frac{RT_{кр}}{8P_{кр}}.$$

Ответ: $a = 0{,}138$ Н $\cdot$ м^4/моль^2; $b = 3{,}17 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль^2.

Задача 2.116

Углекислый газ массой $m = 10$ кг адиабатно расширяется в вакуум от $V_1 = 1$ м^3 до $V_2 = 2$ м^3. Принимая поправку Ван-дер-Ваальса $a = 0{,}361$ Н$\cdot$м^4/моль^2, определить понижение температуры ΔT газа при этом расширении.

Дано:

$m = 10$ кг

$M = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$Q = 0$

$i = 6$

$V_1 = 1$ м^3

$V_2 = 2$ м^3

$a = 0{,}361$ Н $\cdot$ м^4/моль^2

ΔT – ?

Решение

Согласно первому началу термодинамики количество теплоты Q, переданное газу, идет на изменение ΔU внутренней энергии газа и работу A газа против внешних сил:

$$Q = \Delta U + A. \qquad (1)$$

Согласно условию задачи газ адиабатно ($Q = 0$) расширяется в вакуум ($A = 0$), поэтому из

(1) следует, что

$$\Delta U = U_2 - U_1 = 0 \qquad \text{и} \qquad U_2 = U_1. \tag{2}$$

Внутреннюю энергию реального газа количеством вещества ν $U = \nu\left(C_V T - \frac{\nu a}{V}\right)$ запишем для двух состояний газа – 1 (до расширения) и 2 (после расширения):

$$U_1 = \nu\left(C_V T_1 - \frac{\nu a}{V_1}\right) \quad \text{и} \quad U_2 = \nu\left(C_V T_2 - \frac{\nu a}{V_2}\right), \tag{2}$$

где C_V – молярная теплоемкость при постоянном объеме; a – постоянная Ван-дер-Ваальса, характеризующая силы межмолекулярного притяжения.

Приравняв, согласно (2), выражения (3), получаем:

$$C_V T_1 - \frac{\nu a}{V_1} = C_V T_2 - \frac{\nu a}{V_2},$$

откуда искомая разность температур

$$\Delta T = T_2 - T_1 = -\frac{\nu a}{C_V}\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) = -\frac{2am}{iMR}\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) = -1{,}65 \text{ К},$$

учли, что $C_V = \frac{iR}{2}$ и $\nu = \frac{m}{M}$.

$$[\Delta T] = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^4 \cdot \text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}{\text{м}^3 \cdot \text{моль}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{Дж}} = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{Дж}} = \text{К}.$$

Ответ: $\Delta T = -1{,}65$ К.

Задача 2.117

В цилиндре под поршнем находится хлор массой $m = 20$ г. Определить изменение ΔU внутренней энергии хлора при изотермическом расширении его от $V_1 =$ 200 см^3 до $V_2 =$ 500 см^3.

Дано:
$m = 20 \cdot 10^{-3}$ кг;
$V_1 = 2 \cdot 10^{-4}$ м^3;
$V_2 = 5 \cdot 10^{-4}$ м^3.

ΔU – ?

Решение

Внутренняя энергия U реального газа определяется выражением

$$U = \nu\left(C_V T - \frac{a}{V_m}\right).$$

Выразив молярный объем V_m через объем V, количества вещества ν $\left(V_m = V / \nu\right)$ и учтя, что $\nu = \dfrac{m}{M}$, получим

$$U = \frac{m}{M}\left(C_V T - \frac{ma}{VM}\right).$$

Изменение ΔU внутренней энергии в результате изотермического расширения найдем как разность двух значений внутренней энергии при объемах V_2 и V_1:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{m^2 a\left(V_2 - V_1\right)}{M^2 V_1 V_2};$$

$$\left[\Delta U\right] = \frac{\text{кг}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{м}^4 \cdot \text{м}^3 \cdot \text{моль}^2}{\text{моль}^2 \cdot \text{кг}^2 \cdot \text{м}^3 \cdot \text{м}^3} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж};$$

$$\Delta U = \frac{\left(20 \cdot 10^{-3}\right)^2 \cdot 0{,}650\left(5-2\right) \cdot 10^{-4}}{\left(71 \cdot 10^{-3}\right) 2 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 154 \text{ Дж}.$$

Ответ: $\Delta U = 154$ Дж.

Задача 2.118

Азот количеством вещества $\nu = 2$ моль, занимавший при температуре $T = 350$ К объем $V_1 = 2 \cdot 10^{-3}\text{м}^3$, расширяется изотермически до объема $V_2 = 3V_1$. Принимая поправки Ван-дер-Ваальса $a = 0{,}136 \text{ Н} \cdot \text{м}^4/\text{моль}^2$ и $b = 3{,}86 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}^2$, определить: 1) работу A расширения газа; 2) изменение внутренней энергии ΔU газа.

Дано:
$\nu = 2$ моль
$T = 350$ К = const
$V_1 = 2 \cdot 10^{-3}\text{м}^3$
$V_2 = 3V_1$
$a = 0{,}136 \text{ Н} \cdot \text{м}^4/\text{моль}^2$
$b = 3{,}86 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}^2$

A; ΔU – ?

Решение

Работа расширения газа от объема V_1 до объема V_2

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P dV, \tag{1}$$

где P – давление, производимое газом на стенки сосуда.

Найдем P из уравнения Ван-дер-Ваальса для произвольного количества вещества ν:

$$\left(P+\frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V-\nu b)=\nu RT,$$

откуда

$$P=\frac{\nu RT}{V-\nu b}-\frac{\nu^2 a}{V^2}. \qquad (2)$$

Выражение (1) после подстановки (2) имеет вид:

$$A=\int_{V_1}^{V_2}\left(\frac{\nu RT}{V-\nu b}-\frac{\nu^2 a}{V^2}\right)dV=\nu RT\ln\frac{V_2-\nu b}{V_1-\nu b}+\nu^2 a\left(\frac{1}{V_2}-\frac{1}{V_1}\right);$$

$$[A]=\frac{\text{моль}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{моль}\cdot\text{К}}+\frac{\text{моль}^2\cdot\text{Н}\cdot\text{м}^4}{\text{моль}^2\cdot\text{м}^3}=\text{Дж}+\text{Дж}=\text{Дж}.$$

Внутренняя энергия реального газа для состояний 1 и 2

$$U_1=\nu\left(C_V T-\frac{\nu a}{V_1}\right) \text{ и } U_2=\nu\left(C_V T-\frac{\nu a}{V_2}\right),$$

учли, что T = const.

Искомое изменение внутренней энергии газа в результате изотермического расширения

$$\Delta U=U_2-U_1=\nu^2 a\left(\frac{1}{V_1}-\frac{1}{V_2}\right);$$

$$[\Delta U]=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^4\cdot\text{моль}^2}{\text{моль}^2\langle\text{м}^3}=\text{Н}\cdot\text{м}=\text{Дж}.$$

Ответ: $A=6{,}36$ кДж; $\Delta U=181$ Дж.

Задача 2.119

Определить, какую силу F следует приложить к горизонтальному медному кольцу высотой $h=15$ мм с внутренним диаметром $d_1=40$ мм и внешним $d_2=42$ мм, чтобы оторвать его от поверхности воды. Плотность меди $\rho=8{,}93$ г/см^3, поверхностное натяжение воды $\sigma=73$ мН/м.

Дано:	**Решение**
$h = 15 \cdot 10^{-3}$ м	Сила, которую следует приложить для отрыва кольца от поверхности воды,
$d_1 = 4 \cdot 10^{-2}$ м	
$d_2 = 4{,}2 \cdot 10^{-2}$ м	
$\rho = 893$ кг/м^3	
$\sigma = 73 \cdot 10^{-3}$ Н/м	
F – ?	

$$F = F_1 + F_2, \tag{1}$$

где F_1 – вес кольца; F_2 – сила поверхностного натяжения.

Вес кольца

$$F_1 = \rho g h \frac{\pi}{4}\left(d_2{}^2 - d_1{}^2\right), \tag{2}$$

где g – ускорение свободного падения.

При отрыве кольца поверхностная пленка разрывается по внутренней и внешней поверхностям кольца, поэтому сила поверхностного натяжения

$$F_2 = \sigma l = \sigma\pi\left(d_1 + d_2\right). \tag{3}$$

Подставив формулы (2) и (3) в равенство (1), получим искомую силу

$$F = \rho g h \frac{\pi}{4}\left(d_2{}^2 - d_1{}^2\right) + \sigma\pi\left(d_1 + d_2\right) = 35{,}7 \cdot 10^{-3} H = 35{,}7 \text{ мН};$$

$$\left[F\right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{м}^2}{\text{м}^3 \cdot \text{с}^2} + \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}} = \text{Н} + \text{Н} = \text{Н}.$$

Ответ: $F = 35{,}7$ мН.

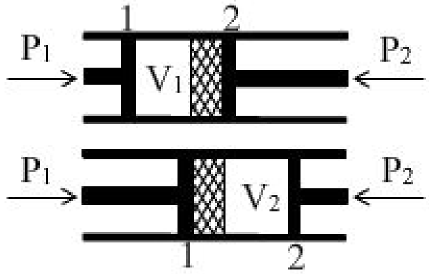
Задача 2.120

Докажите, что эффект Джоуля – Томсона будет всегда положительным, если дросселируется газ, для которого можно пренебречь собственным объемом молекул.

Дано:	**Решение**
$b = 0$	
ΔT – ?	

Эффект Джоуля – Томсона (изменение температуры реального газа в результате его адиабатного дросселирования – медленного прохождения газа (см. рисунок) под действием перепада давлений сквозь дроссель, например, пористую перегородку) принято называть положительным, если газ в процессе дросселирования охлаждается $(\Delta T < 0)$. В случае эффекта Джоуля – Томсона сохраняется (остается неизменной) функция состояния – энтальпия;

$$P_1V_1 + U_1 = P_2V_2 + U_2, \qquad (1)$$



где $P_1, V_1, U_1 -$ давление, объем и внутренняя энергия газа под поршнем 1; $P_2, V_2, U_2 -$ то же, под поршнем 2.

Внутренняя энергия реального газа

$$U_1 = \nu\left(C_V T_1 - \frac{\nu a}{V_1}\right) \quad \text{и} \quad U_2 = \nu\left(C_V T_2 - \frac{\nu a}{V_2}\right), \qquad (2)$$

где ν – количество вещества; $C_V -$ молярная теплоемкость при постоянном объеме; $a-$постоянная Ван-дер-Ваальса, характеризующая силы межмолекулярного притяжения; T_1 и $T_2 -$ температуры газа под поршнями 1 и 2.

Уравнение Ван-дер-Ваальса для произвольного количества вещества

$$\left(P + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{\nu} - b\right) = RT, \qquad (3)$$

где $b-$ поправка Ван-дер-Ваальса, учитывающая собственный объем молекул.

Запишем уравнение (3) для двух состояний газа, приняв, согласно условию задачи, $b = 0$:

$$P_1V_1 + \frac{\nu^2 a}{V_1} = \nu RT_1 \quad \text{и} \quad P_2V_2 + \frac{\nu^2 a}{V_2} = \nu RT_2,$$

откуда

$$P_1V_1 = \nu RT_1 - \frac{\nu^2 a}{V_1} \quad \text{и} \quad P_2V_2 = \nu RT_2 - \frac{\nu^2 a}{V_2}. \qquad (4)$$

Подставив выражения (2) и (4) в равенство (1), имеем:

$$\nu RT_1 - \frac{\nu^2 a}{V_1} + \nu C_V T_1 - \frac{\nu^2 a}{V_1} = \nu RT_2 - \frac{\nu^2 a}{V_2} + \nu C_V T_2 - \frac{\nu^2 a}{V_2},$$

откуда после преобразований получаем искомую разность температур

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{2\nu a}{C_V + R}\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right) < 0,$$

поскольку $V_2 >> V_1$.

Таким образом, расчет показывает, что газ в процессе дросселирования, если пренебречь собственным объемом молекул, охлаждается, т.е. эффект Джоуля – Томсона положительный.

Задача 2.121

Определить изменение свободной энергии ΔE поверхности мыльного пузыря при изотермическом увеличении его объема от $V_1 = 10\ \text{см}^3$ до $V_2 = 2V_1$.

Дано:
$V_1 = 10^{-5}\ \text{м}^3$
$V_2 = 2V_1$
$\sigma = 40 \cdot 10^{-3}$ Н/м
ΔE – ?

Решение

Свободная энергия E поверхности жидкости пропорциональна площади S этой поверхности:

$$E = \sigma S,$$

где σ – поверхностное натяжение.

У мыльного пузыря имеются две поверхности – внешняя и внутренняя, площади которых практически равны из-за малой толщины мыльной пленки. Поэтому свободная энергия поверхности (внешней и внутренней вместе) мыльного пузыря

$$E = 2\sigma S. \qquad (1)$$

Так как по условию задачи процесс изотермический, то поверхностное натяжение, являющееся для данной жидкости функцией только температуры, остается постоянным. Следовательно, по формуле (1) изменение свободной энергии

$$\Delta E = 2\sigma\Delta S, \qquad (2)$$

где ΔS – изменение поверхности пузыря (одной – внутренней или внешней).

Считая, что мыльный пузырь имеет форму сферы, найдем изменение площади поверхности:

$$\Delta S = 4\pi r_2^{\,2} - 4\pi r_1^{\,2}, \qquad (3)$$

где r_1 и r_2 – радиусы сфер, соответствующие начальному V_1 и конечному V_2 объемам:

$$r_1 = \left(\frac{3V_1}{4\pi}\right)^{1/3}; \qquad r_2 = \left(\frac{3V_2}{4\pi}\right)^{1/3}.$$

Теперь формула (3) примет вид:

$$\Delta S = 4\pi\left[\left(\frac{3V_2}{4\pi}\right)^{2/3} - \left(\frac{3V_1}{4\pi}\right)^{2/3}\right].$$

Учитывая, что $V_2 = 2V_1$, получим после вынесения общего члена $\left(\frac{3V_1}{4\pi}\right)^{2/3}$ за скобку:

$$\Delta S = 4\pi\left(\frac{3V_1}{4\pi}\right)^{2/3}\left(2^{2/3} - 1\right).$$

Подставим выражение ΔS в формулу (2):

$$\Delta E = 8\pi\sigma\left(\frac{3V_1}{4\pi}\right)^{2/3}\left(2^{2/3} - 1\right) = 106\cdot 10^{-6}\,\text{Дж}.$$

Ответ: $\Delta E = 106\cdot 10^{-6}$ Дж.

Задача 2.122

Ртуть массой $m = 5$ г помещена между двумя параллельными стеклянными пластинками. Считая, что ртуть стекло не смачивает, определить силу F, которую следует приложить, чтобы расплющить каплю до толщины $h = 0{,}15$ мм. Плотность ртути $\rho = 13{,}6$ г/см^3, а ее поверхностное натяжение $\sigma = 0{,}5$ Н/м.

Дано:
$m = 5\cdot 10^{-3}$ кг
$h = 0{,}15\cdot 10^{-3}$ м
$\rho = 1{,}36\cdot 10^{4}$ кг/м^3
$\sigma = 0{,}5$ Н/м

F – ?

Решение

При помещении капли ртути между двумя стеклянными пластинками капля примет вид тонкого диска с выпуклой боковой поверхностью.

Возникшее из-за кривизны поверхности избыточное давление определяется формулой Лапласа

$$\Delta P = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \tag{1}$$

где $R_1 -$ радиус кривизны поверхности ртути в плоскости, параллельной стеклянным пластинкам (радиус диска); $R_2 = \dfrac{h}{2}$ – радиус кривизны поверхности ртути в плоскости, перпендикулярной к стеклянным пластинкам.

Избыточное давление (1) уравновешивается внешним давлением

$$\Delta P = \frac{F}{S}, \tag{2}$$

где $S -$ площадь соприкосновения капли ртути с пластинкой;

$$S = \frac{V}{h} = \frac{m}{\rho h} = \pi R_1^2, \tag{3}$$

где $V -$ объем ртути.

Тогда

$$R_1 = \sqrt{\frac{m}{\pi \rho h}}. \tag{4}$$

Согласно (2) искомая сила, учитывая (3), (1), (4),

$$F = S\Delta P = \frac{m\sigma}{\rho h}\left(\sqrt{\frac{\pi\rho h}{m}} + \frac{2}{h}\right) = 16,4\ \text{Н};$$

$$[F] = \frac{\text{кг}\cdot\text{Н}\cdot\text{м}^3}{\text{м}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}}\left(\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{м}^3\cdot\text{кг}}} + \frac{1}{\text{м}}\right) = \text{Н}\cdot\text{м}\left(\frac{1}{\text{м}} + \frac{1}{\text{м}}\right) = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{м}} = \text{Н}.$$

Ответ: $F = 16,4$ Н.

Задача 2.123

В сосуд с ртутью опущен открытый капилляр. Разность уровней ртути в сосуде и капилляре $h = 37$ мм. Принимая плотность ртути $\rho = 13,6$ г/см^3, а ее поверхностное натяжение $\sigma = 0,5$ Н/м, определить радиус кривизны R ртутного мениска в капилляре.

Дано:	**Решение**
$h = 3{,}7\cdot10^{-3}$ м	Избыточное давление, вызванное кривизной мениска,
$\rho = 1{,}36\cdot10^{4}$ кг/м^3	
$\sigma = 0{,}5$ Н/м	
R – ?	

$$\Delta P = \frac{2\sigma}{R},$$

где σ – поверхностное натяжение; R – радиус кривизны ртутного мениска.

Ртуть – несмачивающая жидкость, поэтому в капилляре опускается на такую глубину, при которой давление столба жидкости (гидростатическое давление) $\rho g h$ уравновешивается избыточным давлением ΔP, т.е.

$$\frac{2\sigma}{R} = \rho g h,$$

где ρ – плотность ртути; g – ускорение свободного падения.

Откуда искомый радиус кривизны ртутного мениска

$$R = \frac{2\sigma}{\rho g h};$$

$$[R] = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^3\cdot\text{с}^2}{\text{м}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{кг}} = \text{м};$$

$$R = \frac{2\cdot0{,}5}{1{,}36\cdot10^4\cdot9{,}81\cdot3{,}7\cdot10^{-3}} = 2{,}03\cdot10^{-3}\text{м} = 2{,}03 \text{ мм}.$$

Ответ: $R = 2{,}03$ мм

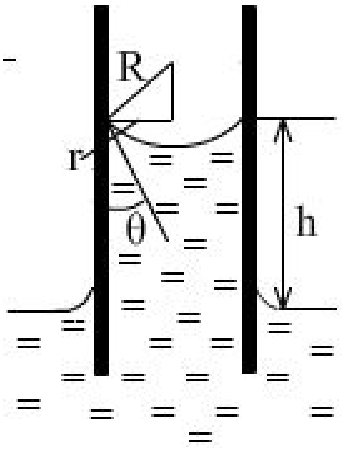
Задача 2.124

Вертикальный капилляр с внутренним диаметром $d = 0{,}04$ см погружен в воду. Определить, на какую высоту h поднимется вода в капилляре, если поверхностное натяжение воды $\sigma = 73$ мН/м, а ее плотность $\rho = 1$ г/см^3. Считать, что вода полностью смачивает стекло.

Дано:	**Решение**
$d = 4\cdot10^{-4}$ м	Жидкость в капилляре поднимется на такую высоту h, при которой давление столба жидкости (гидростатическое давление) $\rho g h$ уравновешивается избыточным давлением ΔP, т.е.
$\rho = 10^3$ кг/м^3	
$\sigma = 73\cdot10^{-3}$ Н/м	
$\theta = 0$	
h – ?	

$$\frac{2\sigma}{R} = \rho g h,$$

где g – ускорение свободного падения; R – радиус свободной поверхности жидкости, имеющей форму полусферы (радиус мениска).



Если r – радиус капилляра, θ – краевой угол, то из рисунка следует, что

$$R = \frac{r}{\cos\theta}.$$

Тогда

$$\rho g h = \frac{2\sigma\cos\theta}{r},$$

откуда высота капиллярного подъема

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r}. \qquad (1)$$

Если считать, что вода полностью смачивает стекло (условие задачи), то $\theta = 0$ и $\cos\theta = 1$. Тогда, согласно (1), искомая высота, на которую поднимется вода в капилляре,

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r} = \frac{4\sigma}{\rho g d};$$

$$[h] = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^3\cdot\text{с}^2}{\text{м}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{кг}} = \text{м};$$

$$h = \frac{4\cdot 73\cdot 10^{-3}}{1000\cdot 9{,}81\cdot 4\cdot 10^{-4}} = 7{,}44\cdot 10^{-2}\,\text{м} = 7{,}44\ \text{см}.$$

Ответ: $h = 7{,}44$ см.

Задача 2.125

Вертикальный стеклянный капилляр с внутренним радиусом $r = 0{,}2$ мм помещен в ртуть, которая опускается в капилляре на глубину $h = 3{,}75$ см (см. рисунок). Определить поверхностное натяжение σ ртути, если ее плотность $\rho = 13{,}6$ г/см^3. Считать, что ртуть не смачивает стекло.

Дано:	**Решение**
$r = 2 \cdot 10^{-4}$ м $\theta = \pi$ $h = 3{,}75 \cdot 10^{-2}$ м $\rho = 1{,}36 \cdot 10^{4}$ кг/м^3 σ – ?	Ртуть в капилляре будет находиться в равновесии, если гидростатическое давление $p = \rho g h$ и давления под искривленной поверхностью $\Delta P = \dfrac{2\sigma\cos\theta}{r}$ будут уравновешивать друг друга:

$$\rho g h = \frac{2\upsilon\cos\theta}{r},$$

где g – ускорение свободного падения; θ – краевой угол; r – радиус капилляра.

Из этого выражения следует, что

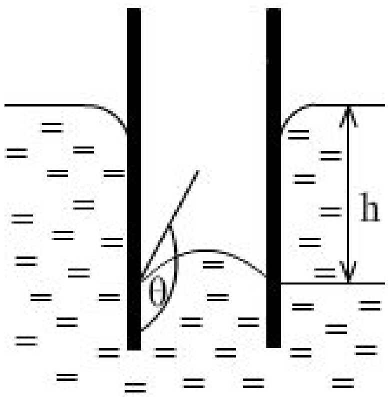
$$\sigma = \frac{\rho g r h}{2\cos\theta}. \qquad (1)$$

Если считать, что ртуть не смачивает стекло (условие задачи), то $\theta = \pi$ и $\cos\theta = -1$. Тогда, согласно (1), искомое поверхностное натяжение ртути

$$\sigma = -\frac{\rho g r h}{2};$$

$$[\sigma] = \frac{\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н}}{\text{м}};$$

$$\sigma = -\frac{1{,}36 \cdot 10^4 \cdot 9{,}81 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 3{,}75 \cdot 10^{-2}}{2} = 0{,}5 \text{ Н/м}.$$



Ответ: $\sigma = 0{,}5$ Н/м.

Задача 2.126

Две одинаковые длинные плоскопараллельные пластины, расстояние между которыми $d = 1$ мм, погружены в воду (см. рисунок). Считая смачивание полным, определить, на какую высоту h поднимется вода в зазоре. Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3, а ее поверхностное натяжение $\sigma = 73$ мН/м.

Дано:
$d = 10^{-3}$ м
$\rho = 10^3$ кг/м^3
$\sigma = 73 \cdot 10^{-3}$ Н/м
$\theta = 0$

h – ?

Решение

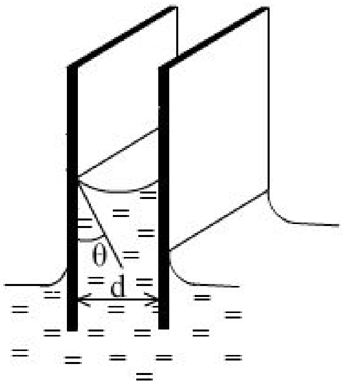
Избыточное давление ΔP уравновешивается давлением столба жидкости (гидростатическим давлением) $\rho g h$, т.е.

$$\Delta P = \rho g h. \qquad (1)$$

Избыточное давление под вогнутой поверхностью жидкости, согласно формуле Лапласа,

$$\Delta P = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \qquad (2)$$

где $R_1 = \dfrac{d}{2\cos\theta}$ (θ – краевой угол); $R_2 = \infty$ (поверхность цилиндрическая).



Подставив R_1 и R_2 в формулу (2), найдем

$$\Delta P = \frac{2\sigma\cos\theta}{d}. \qquad (3)$$

Тогда, согласно (1) и (3),

$$\frac{2\sigma\cos\theta}{d} = \rho g h,$$

откуда искомая высота

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g d};$$

$$[h] = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^3\cdot\text{с}^2}{\text{м}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}^3\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{м}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}} = \text{м};$$

$$h = \frac{2\cdot 73\cdot 10^{-3}\cdot 1}{1000\cdot 9{,}81\cdot 10^{-3}} = 1{,}49\cdot 10^{-2}\,\text{м} = 1{,}49\ \text{см}.$$

Ответ: $h = 1{,}49$ см.

Задача 2.127

Как изменится высота поднятия спирта между двумя пластинками, погруженными в спирт, если расстояние между ними уменьшить с 1 мм до 0,5 мм? Смачивание пластинок считать полным.

Дано:
$r_1 = 10^{-3}$ м
$r_2 = 0,5 \cdot 10^{-3}$ м
$\rho = 0,8 \cdot 10^3$ кг/м^3
$\sigma = 73 \cdot 10^{-3}$ Н/м

Δh – ?

Решение

Поверхность смачивающей жидкости между пластинами принимает вид полуцилиндра (см. рисунок к задаче 2.126).

Лапласовское давление равно

$$P = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

где R_1 и R_2 – радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных нормальных сечений поверхности жидкости.

В этом случае одно из нормальных сечений – сечение, идущее вдоль образующей полуокружности. Для него $R_1 = \infty$. Второе, перпендикулярное к нему сечение, дает окружность радиусом $R_2 = \frac{d}{2}$, где d – расстояние между плоскостями.

Поэтому добавочное давление

$$P = \frac{\sigma}{R_2} = \frac{2\sigma}{d}.$$

Это давление уравновешивает давление столба жидкости высотой h, поэтому

$$\frac{2\sigma}{d} = \rho g h.$$

Отсюда

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g d}.$$

В нашем случае

$$h_1 = \frac{2\sigma}{\rho g d_1}; \qquad h_2 = \frac{2\sigma}{\rho g d_2}.$$

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{2\sigma}{\rho g}\left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right);$$

$$[\Delta h] = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{с}^2}{\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}}\left(\frac{1}{\text{м}} - \frac{1}{\text{м}}\right) = \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}} = \text{м};$$

$$\Delta h = \frac{2 \cdot 0,022}{0,8 \cdot 10^3 \cdot 9,81}\left(\frac{1}{0,5 \cdot 10^{-3}} - \frac{1}{10^{-3}}\right) = 5,61 \cdot 10^{-3}\text{м}.$$

Ответ: $\Delta h = 5,61 \cdot 10^{-3}$м.

Задача 2.128

Из капиллярной трубки с радиусом канала 0,2 мм по капле вытекает жидкость. Масса 100 капель равна 0,282 г. Определить коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Дано:	**Решение**
$r = 2\cdot10^{-4}$ м $m = 2{,}82\cdot10^{-4}$ кг $n = 10$	Капля отрывается в тот момент, когда ее сила тяжести равна силе поверхностного натяжения. Считая радиус шейки капли равным радиусу капилляра, можно записать:
σ – ?	

$$2\pi r\sigma = \frac{mg}{n},$$

откуда

$$\sigma = \frac{mg}{2\pi rn};$$

$$[\sigma] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{м}} = \frac{\text{Н}}{\text{м}};$$

$$\sigma = \frac{2{,}82\cdot10^{-4}\cdot9{,}8}{2\cdot3{,}14\cdot2\cdot10^{-4}\cdot100} = 2{,}2\cdot10^{-2}\,\text{Н/м}.$$

Ответ: $\sigma = 2{,}2\cdot10^{-2}$ Н/м.

Задача 2.129

Найти добавочное давление внутри мыльного пузыря диаметром 10 см. Какую работу нужно совершить, чтобы выдуть этот пузырь?

Дано:	**Решение**
$d = 0{,}1$ м	
$P; A$ – ?	Пленка мыльного пузыря имеет две сферические поверхности – внешнюю и внутреннюю.

Обе поверхности оказывают давление на воздух, заключенный внутри пузыря. Так как толщина пленки чрезвычайно мала, то диаметры обеих поверхностей практически одинаковы.

Поэтому добавочное давление

$$P = 2\frac{2\sigma}{r},$$

где r – радиус пузыря.

Так как $r = \frac{d}{2}$, то

$$P = \frac{8\sigma}{d};$$

$$[P] = \frac{\text{Н}}{\text{м} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}.$$

Коэффициент поверхностного натяжения мыльной воды $\sigma = 40$ мН/м, диаметр пузыря $d = 0{,}1$ м.

Следовательно,

$$P = \frac{8 \cdot 40 \cdot 10^{-3}}{0{,}1} = 3{,}2 \text{ Па}.$$

Работа, которую нужно совершить, чтобы, растягивая пленку, увеличить ее поверхность на ΔS, выражается формулой

$$A = \sigma\Delta S \quad \text{или} \quad A = \sigma\left(S - S_0\right).$$

В данном случае S – общая площадь двух сферических поверхностей пленки мыльного пузыря; S_0 – общая площадь двух поверхностей плоской пленки, затягивающей отверстие трубки до выдувания пузыря.

Пренебрегая S_0, получаем:

$$A \approx \sigma\Delta S = 2\pi d^2\sigma;$$

$$[A] = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{Н}}{\text{м}} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж};$$

$$A = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}1^2 \cdot 40 \cdot 10^{-3} \approx 2{,}5 \cdot 10^{-3} \text{Дж}.$$

Ответ: $A = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ Дж.

Задача 2.130

В сообщающихся капиллярных трубках с диаметрами $d_1 =$ 1 мм и $d_2 =$ 1,5 мм разность уровней ртути $\Delta h = 5$ мм. Определить поверхностное натяжение ртути. Смачивание считать полным.

Дано:

$d_1 = 10^{-3}$м

$d_2 = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$м

$\Delta h = 5 \cdot 10^{-3}$ м

$\rho = 1{,}36 \cdot 10^4$ кг/м^3

$\theta = 0$

σ – ?

Решение

Высота поднятия жидкости в капилляре

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r}.$$

Тогда для каждой трубки

$$h_1 = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r_1} \quad \text{и} \quad h_2 = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r_2}.$$

Так как по условию смачивание полное, то $\theta = 0$, следовательно, $\cos\theta = 1$.

Тогда перепад высот в трубках

$$\Delta h = h_1 - h_2 = \frac{2\sigma}{\rho g}\left(\frac{2}{d_1} - \frac{2}{d_2}\right),$$

откуда

$$\sigma = \frac{\rho g \Delta h d_1 d_2}{4(d_2 - d_1)};$$

$$[\sigma] = \frac{\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м}} = \frac{\text{Н}}{\text{м}};$$

$$\sigma = \frac{1{,}36 \cdot 10^4 \cdot 9{,}81 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3}}{4(1{,}5 \cdot 10^{-3} - 10^{-3})} = 0{,}5 \text{ Н/м}.$$

Ответ: $\sigma = 0{,}5$ Н/м.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антошина, Л.Г. Общая физика. Сборник задач: учеб. пособие / Л.Г. Антошина, С.В. Павлов, Л.А. Скипетрова; под ред. проф. Б.А. Струкова. – М.: ИНФРА-М, 2006. – 336 с.

2. Гладской, В.М. Сборник задач по физике с решениями: пособие для вузов / В.М. Гладской, П.И.Самойленко. – 2-е изд. – М.:Дрофа, 2004. – 288с.: ил.

3. Демков, В.П. Физика. Теория. Методика. Задачи / В.П. Демков, О.Н. Третьякова. – М.: Высш. шк., 2001. – 669 с.: ил.

4. Калашников, Н.П. Основы физики. Упражнения и задачи: учеб. пособие для вузов / Н.П. Калашников, М.А. Смондырев. – М.: Дрофа, 2004. – 464 с.

5. Кириллов, В.М. Решение задач по физике: учеб. пособие / В.М. Кириллов [и др.]. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: КомКнига, 2006. – 248 с.

6. Кирьянов, А.П. Общая физика. Сборник задач: учеб. пособие / А.П. Кирьянов [и др.]; под ред. И.П. Шапкарина. – М.: КНОРУС, 2008. – 304 с.

7. Курс физики: учебник для вузов: В 2 т. / под ред. В.Н. Лозовского. – СПб.: Изд-во «Лань», 2001. – Т. 1. – 576 с.; Т. 2. – 592 с.

8. Макаренко, Г.М. Курс общей физики / Г.М. Макаренко. – Минск: Дизайн ПРО, 2003. – 640 с.

9. Новиков, С.М. Сборник заданий по общей физике: учеб. пособие для студентов вузов / С.М. Новиков. – М.: ООО «Издательство Оникс»; ООО «Издательство “Мир и образование”», 2006. – 512 с.: ил.

10. Решение задач по курсу общей физики: учеб. пособие. – 2-е изд., испр. / под ред. Н.М. Рогачева. – СПб.: Изд-во «Лань», 2008. – 304 с.

11. Трофимова, Т.И. Курс физики / Т.И. Трофимова. – М.: Высш. шк., 1990. – 478 с.

12. Трофимова, Т. И. Курс физики. Задачи и решения: учеб. пособие для втузов / Т.И. Трофимова, А.В. Фирсов. – М.: Изд. центр «Академия», 2004. – 592 с.

13. Чертов, А.Г. Задачник по физике: учеб. пособие для втузов / А.Г Чертов, А.А. Воробьев. – 7-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во физико-математической литературы, 2003. – 640 с.

14. Макаренко, Г.М. Краткий справочник по общей физике / Г.М. Макаренко, Д.А. Антонович, Н.В. Вабищевич. – Новополоцк: ПГУ, 2011. – 128 с.

15. Физика: учеб. пособие. В 2 ч. / В.А. Груздев [и др.]; под ред. В.А. Груздева. – Минск: РИВШ, 2009.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ОБЩАЯ ФИЗИКА

Практикум

В двух частях

Часть первая

МАКАРЕНКО Геннадий Макарович
АНТОНОВИЧ Дмитрий Анатольевич

МЕХАНИКА
МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА
ТЕРМОДИНАМИКА

Редактор *Т. В. Булах*

Дизайн обложки *В. А. Виноградовой*

Подписано в печать 19.03.2012. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 20,88. Уч.-изд. л. 19,8. Тираж 99 экз. Заказ 357.

Издатель и полиграфическое исполнение –
учреждение образования «Полоцкий государственный университет».

ЛИ № 02330/0548568 от 26.06.2009 ЛП № 02330/0494256 от 27.05.2009

Ул. Блохина, 29, 211440, г. Новополоцк.