Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

Г. М. Макаренко

Д. А. Антонович

ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ

Пособие

В четырех частях

Часть 1

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Новополоцк
ПГУ
2010

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73
М15

Рекомендовано к изданию методической комиссией
геодезического факультета в качестве
пособия (протокол № 2 от 14.10.2009)

Рецензенты:

канд. физ.-мат. наук, проф. каф. высшей математики
УО «Полоцкий государственный университет» И. Е. АНДРУШКЕВИЧ;
канд. техн. наук, доц. каф. физики УО «Полоцкий
государственный университет» Н. В. ОЩЕПКОВА;
канд. физ.-мат. наук, доц. каф. физики, декан радиотехнического факультета
УО «Полоцкий государственный университет» С. А. ВАБИЩЕВИЧ

Макаренко, Г. М.

М15 Задачи по физике: пособие. В. 4 ч. Ч. 1: Физические основы механики / Г. М. Макаренко, Д. А. Антонович. – Новополоцк : ПГУ, 2010. – 212 с.

ISBN 978-985-531-044-1.

Приведены решения более 150 задач, используемых при изучении общей физики (раздел «Механика»). По каждой теме дан перечень основных формул.

Предназначен для студентов высших учебных заведений технических специальностей.

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73

ISBN 978-985-531-044-1 (Ч. 1)
ISBN 978-985-531-043-4

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие разработано в соответствии с программой курса общей физики для студентов вузов, для которых физика не является профилирующей дисциплиной.

Пособие призвано помочь студентам технических вузов (особенно обучающимся без отрыва от производства) самостоятельно научиться решать задачи по физике.

Физика является одной из тех наук, знание которой необходимо для успешного изучения общенаучных и специальных дисциплин. При изучении курса физики студенты должны прочно усвоить основные законы и теории, овладеть необходимыми приемами умственной деятельности, важным компонентом которой является умение решать задачи по физике.

Хорошо известно, что единственный способ научиться решать задачи – пытаться решать их самостоятельно. Отсюда вытекает диалектичность процесса обучения – знание теории приобретается одновременно с ее использованием для решения задач. Абстрактные поначалу законы, уравнения, определения понятий и физических величин (эта абстрактность и является главным камнем преткновения при изучении физики) в процессе их практического применения для описания конкретных физических явлений (т.е. при решении физических задач) начинают постепенно наполняться конкретным содержанием, и только тогда приходит понимание теории. Недаром известный итальянский физик Энрико Ферми утверждал, что «знать физику – означает умение решать задачи». Другими словами, уровень подготовки по физике определяется уровнем сложности задач, которые студент может решить.

Основная цель пособия – оказать студентам методическую помощь в выполнении самостоятельных и контрольных работ; ознакомить их с некоторыми методами решения физических задач; привить навыки и культуру решения, обратить внимание на наиболее распространенные ошибки.

В пособии рассмотрены типовые задачи, подобные тем, которые наиболее часто используются при изучении общей физики в техническом вузе.

Задачи объединены в разделы, разделенные по темам. В начале каждой темы приведены основные законы, уравнения и формулы, используемые для решения задач.

Решения задач выполнены по одной схеме: составлены необходимые уравнения, приведено решение их в общем виде, подставлены числовые данные, приведен ответ.

Методические указания к решению задач

При решении задач рекомендуется определенная последовательность:

1. Изучите по учебникам [3, 9, 11, 13, 17, 19] теоретический материал соответствующего раздела курса, запомните законы и основные формулы, а также единицы измерения величин, входящих в них.
2. Несколько раз внимательно прочитайте условие задачи. Сделайте сокращенную запись данных и искомых физических величин, предварительно представив их в системе СИ.

В условиях и при решении задач часто используются множители и приставки СИ для образования десятичных и дольных единиц.

3. Вникните в смысл задачи. Представьте физическое явление, о котором идет речь; введите упрощающие предположения, которые можно сделать при решении. Для этого необходимо использовать такие модели, как материальная точка, абсолютно твердое тело, точечный заряд, луч света и т.д.
4. Если позволяет условие задачи, выполните схематический чертеж, поясняющий содержание и решение.
5. С помощью физических законов установите количественные связи между заданными и искомыми величинами, т.е. составьте замкнутую систему уравнений, в которой число уравнений равнялось бы числу неизвестных.
6. Найдите решение полученной системы уравнений в виде расчетной формулы, отвечающей на вопрос задачи.
7. Проверьте правильность полученного решения, используя правило размерностей. Размерности правой и левой частей уравнения должны совпадать. Хотя равенство размерностей не является достаточным подтверждением правильности решения задачи, рекомендуемый метод проверки очень полезен.
8. Подставьте в полученную формулу числовые значения физических величин и проведите вычисления. Обратите внимание на точность численного ответа, которая не может быть больше точности исходных величин.
9. Получив численный ответ, оцените его правдоподобность.

Заметим, что при решении задач возможны отступления от вышеизложенной схемы.

В этом сборнике не проводится проверка размерностей в некоторых задачах, в которых она очевидна.

Для уменьшения объема подстановка численных значений в некоторых заданиях не проводится.

1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

1.1. Кинематика материальной точки. Основные формулы

Положение материальной точки в пространстве определяется радиус-вектором

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – координаты точки в пространстве; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы направлений (орты); t – время.

Средняя скорость движения материальной точки

$$\langle \vec{\upsilon} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t},$$

где $\Delta \vec{r}$ – элементарное перемещение точки за промежуток времени Δt; $\vec{r}$ – радиус-вектор точки.

Средняя путевая скорость движения

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

где Δs – путь, пройденный точкой за промежуток времени Δt.

Мгновенная скорость

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \upsilon_x \vec{i} + \upsilon_y \vec{j} + \upsilon_z \vec{k},$$

где $\upsilon_x = \dfrac{dx}{dt}$, $\upsilon_y = \dfrac{dy}{dt}$, $\upsilon_z = \dfrac{dz}{dt}$ – проекции вектора скорости $\vec{\upsilon}$ на соответствующие оси координат.

Модуль вектора полной скорости

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}.$$

Кинематическое уравнение равномерного движения ($\vec{\upsilon} = \mathrm{const}$, $\vec{a} = 0$) точки вдоль оси OX:

$$x = x_0 \pm \upsilon t,$$

где x_0 – начальная координата точки; t – время движения. Знак «плюс» берется при совпадении направления вектора скорости с выбранным положительным направлением оси OX.

Правило сложения скоростей в классической механике:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{\upsilon}_0,$$

где $\vec{\upsilon}$ – скорость материальной точки относительно неподвижной системы отсчета; $\vec{\upsilon}'$ – скорость материальной точки относительно подвижной системы отсчета; $\vec{\upsilon}_0$ – скорость подвижной системы отсчета относительно неподвижной системы отсчета.

Среднее ускорение материальной точки

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}.$$

Мгновенное ускорение материальной точки

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

где $a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$. $a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$, $a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$ – проекции вектора ускорения $\vec{a}$ на соответствующие оси координат.

Модуль вектора полного ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Полное ускорение при криволинейном движении

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,$$

где $a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}$ – тангенциальная (касательная к траектории) составляющая ускорения; $a_n = \frac{\upsilon^2}{R}$ – нормальная (центростремительная) составляющая ускорения, R – радиус кривизны траектории в данной точке.

Модуль вектора полного ускорения при криволинейном движении

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Кинематическое уравнение равнопеременного движения ($\vec{a} = \text{const}$) вдоль оси X:

$$x = x_0 \pm \upsilon_0 t \pm \frac{at^2}{2}.$$

Скорость точки при равнопеременном движении

$$\upsilon = \upsilon_0 \pm at,$$

где υ_0 – скорость движения в начальный момент времени $t = 0$ (начальная скорость).

При равноускоренном движении ускорение a берется со знаком «плюс», при равнозамедленном – со знаком «минус».

Связь между ускорением и перемещением может быть определена выражением

$$S = \frac{\left|\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right|}{2a}.$$

Для тела, брошенного с земли под углом α к горизонту со скоростью υ_0 (без учета сопротивления воздуха),

время полета

$$t = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g};$$

дальность полета

$$S = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g};$$

максимальная высота

$$h_{\max} = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

При вращательном движении положение твердого тела определяется углом поворота (угловым перемещением) $d\varphi$ при указанном положении оси вращения.

Угловая скорость тела

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Угловая скорость равномерного вращательного движения

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu,$$

где $\Delta\varphi$ – угол поворота произвольного радиуса от начального положения; Δt – промежуток времени, за который произошел данный поворот; T – период вращения; $\nu = \dfrac{N}{t}$ – частота вращения; N – число оборотов за время t.

Угловое ускорение

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Кинематическое уравнение равномерного вращения ($\vec{\omega} = \text{const}$, $\varepsilon = 0$):

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t,$$

где φ_0 – угол поворота в момент времени $t = 0$ (начальный момент времени).

Кинематическое уравнение равнопеременного вращательного движения ($\varepsilon = \text{const}$):

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Угловая скорость тела при равнопеременном вращении

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t,$$

где ω_0 – угловая скорость в начальный момент времени $t = 0$ (начальная угловая скорость).

При равноускоренном вращении тела угловое ускорение ε берется со знаком «плюс», при равнозамедленном – со знаком «минус».

Угловое ускорение ε связано с углом поворота за некоторый промежуток времени $\Delta\varphi$ соотношением

$$\Delta\varphi = \frac{\left|\omega_2^2 - \omega_1^2\right|}{2\varepsilon}.$$

Связь между линейными и угловыми величинами при вращательном движении:

$$\Delta S = R\Delta\varphi;$$

$$\upsilon = R\omega;$$

$$a_\tau = \varepsilon R;$$

$$a_n = \omega^2 R.$$

Полное ускорение при вращательном движении

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Задача 1.1

Две трети своего пути мотоциклист проехал со скоростью $\upsilon_1 = 54$ км/ч, остальную часть пути – со скоростью $\upsilon_2 = 72$ км/ч. Найти среднюю путевую скорость мотоциклиста.

Дано: $\upsilon_1 = 54$ км/ч = 15 м/с; $\upsilon_2 = 72$ км/ч = 20 м/с.

Найти: $\langle \upsilon \rangle$.

Решение. Среднюю путевую скорость мотоциклиста можно найти по формуле

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{S}{t},$$

где S – путь, пройденный мотоциклистом за время t.

Представим время t в виде суммы $t = t_1 + t_2$, где t_1 – время, за которое мотоциклист проехал две трети пути, двигаясь со скоростью υ_1, т.е. $t_1 = \frac{2}{3}\frac{S}{\upsilon_1}$; t_2 – время, за которое мотоциклист проехал оставшуюся треть пути, двигаясь со скоростью υ_2, т.е. $t_2 = \frac{1}{3}\frac{S}{\upsilon_2}$.

Тогда

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{S}{t_1 + t_2} = \frac{S}{\left(\frac{2S}{3\upsilon_1} + \frac{S}{3\upsilon_2}\right)} = \frac{3\upsilon_1\upsilon_2}{\upsilon_1 + 2\upsilon_2};$$

$$[\langle \upsilon \rangle] = \frac{\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}}{\frac{\text{м}}{\text{с}}} = \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{3 \cdot 15 \cdot 20}{15 + 2 \cdot 20} = 16{,}4 \text{ м/с}.$$

Ответ задачи может показаться неожиданным, так как в учебниках при выводе формулы пути равноускоренного движения используется выражение $\langle \upsilon \rangle = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2}$, согласно которому средняя скорость должна была бы равняться 17,5 м/с, однако эта формула пригодна только для равноускоренного движения.

Ответ: $\langle \upsilon \rangle \approx 16{,}4$ м/с.

Задача 1.2

Два автомобиля, выехав одновременно из одного пункта, движутся прямолинейно в одном направлении. Зависимость пройденного ими пути задается уравнениями $S_1 = At + Bt^2$ и $S_2 = Ct + Dt^2 + Ft^3$. Определить относительную скорость автомобилей через 5 с, если $A = 5$ м/с, $B = 6$ м/с^2, $C = 1$ м/с, $D = 1$ м/с^2, $F = 1$ м/с^3.

Дано: $S_1 = At + Bt^2$; $A = 5$ м/с; $B = 6$ м/с^2; $S_2 = Ct + Dt^2 + Ft^3$; $C = 1$ м/с; $D = 1$ м/с^2; $F = 1$ м/с^3; $t = 5$ с.

Найти: υ'.

Решение. Зная зависимость пройденного пути от времени, можно найти скорости первого и второго автомобиля:

$$\upsilon_1 = \frac{dS_1}{dt} = A + 2Bt; \quad \upsilon_2 = \frac{dS_2}{dt} = C + 2Dt + 3Ft^2.$$

Для определения скорости первого автомобиля относительно второго (подвижная система отсчета) воспользуемся правилом сложения скоростей:

$$\vec{\upsilon}' = \vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2,$$

где υ' – скорость первого автомобиля относительно второго.

Это векторное уравнение. Если ось координат направить по ходу движения автомобилей, то в проекции на эту ось получим:

$$\upsilon' = \upsilon_1 - \upsilon_2;$$

$$\upsilon' = A + 2Bt - C - 2Dt - 3Ft^2;$$

$$\upsilon' = (A - C) + 2(B - D)t - 3Ft^2;$$

$$\upsilon' = (5 - 1) + 2(6 - 1)5 - 3\cdot 1\cdot 25 = -21 \text{ м/с}.$$

Знак «минус» говорит о том, что первый автомобиль удаляется от второго назад со скоростью 21 м/с.

Ответ: $\upsilon' = -21$ м/с.

Задача 1.3

Движение материальной точки, перемещающейся по прямой, задано уравнением $S = 4t^3 + 2t + 1$. В интервале времени от 1 до 2 с найти мгновенные скорости и ускорения в начале и конце интервала, среднюю скорость движения.

Дано: $S = 4t^3 + 2t + 1$; $t_1 = 1$ с; $t_2 = 2$ с.

Найти: υ_1; υ_2; a_1; a_2; $\langle\upsilon\rangle$.

Решение. Мгновенная скорость – первая производная от координаты по времени:

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} = 12t^2 + 2.$$

Скорости в начале и конце интервала равны:

$$\upsilon_1 = 12t_1^2 + 2 = 12\cdot 1^2 + 2 = 14 \text{ (м/с)};$$

$$\upsilon_2 = 12t_2^2 + 2 = 12\cdot 2^2 + 2 = 50 \text{ (м/с)}.$$

Ускорение – это первая производная от скорости по времени:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = 24t.$$

В начале и конце интервала ускорения равны:

$$a_1 = 24t_1 = 24 \text{ (м/с}^2\text{)};\quad a_2 = 24t_2 = 48 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Средняя скорость $\langle\upsilon\rangle$ движения точки определяется как отношение пути S, пройденного точкой за заданный интервал времени t, к этому интервалу:

$$\langle\upsilon\rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1};$$

$$\langle\upsilon\rangle = \frac{4t_2^3 + 2t_2 + 1 - 4t_1^3 - 2t_1 - 1}{t_2 - t_1} = \frac{4\left(t_2^3 - t_1^3\right) + 2\,(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1};$$

$$\langle\upsilon\rangle = \frac{4\left(2^3 - 1\right) + 2(2 - 1)}{2 - 1} = 30 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\upsilon_1 = 14$ м/с; $\upsilon_2 = 50$ м/с; $a_1 = 24$ м/с^2; $a_2 = 48$ м/с^2; $\langle\upsilon\rangle = 30$ м/с.

Задача 1.4

Материальная точка движется по прямой. Уравнение ее движения $S = t^4 + 2t^2 + 5$. Определить мгновенную скорость и ускорение точки в конце второй секунды от начала движения, среднюю скорость и путь, пройденный за это время.

Дано: $S = t^4 + 2t^2 + 5$; $t = 2$ с.

Найти: υ; a; $\langle\upsilon\rangle$; s.

Решение. Мгновенная скорость – это первая производная от координаты по времени:

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} = 4t^3 + 4t = 4(2^3 + 2) = 40 \text{ (м/с)}.$$

Мгновенное ускорение – это первая производная от скорости по времени:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = 12t^2 + 4 = 12\cdot 2^2 + 4 = 52 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Средняя скорость точки $\langle\upsilon\rangle$ за время $\Delta t = t - t_0$ определяется по формуле

$$\langle\upsilon\rangle = \frac{dS}{dt} = \frac{S(t) - S(0)}{t - t_0}.$$

Так как $t_0 = 0$, то

$$\langle\upsilon\rangle = \frac{t^4 + 2t^2 + 5 - 5}{t} = t^3 + 2t = 12 \text{ м/с}.$$

Путь, пройденный точкой за время $t = 2$ с, будет равен

$$S = S(t) - S(0) = t^4 + 2t^2 + 5 - 5 = 2^4 + 2\cdot 2^2 = 24 \text{ м}.$$

Ответ: $\upsilon = 40$ м/с; $a = 52$ м/с^2; $\langle\upsilon\rangle = 12$ м/с; $S = 24$ м.

Задача 1.5

Заданы уравнения движения двух материальных точек: $x_1 = A_1 + B_1 t + C_1 t^2$, $x_2 = A_2 + B_2 t + C_2 t^2$, где $A_1 = 18$ м; $A_2 = 2$ м; $B_1 = B_2 = 3$ м/с; $C_1 = -3$ м/с^2; $C_2 = 1$ м/с^2. Найти момент времени, когда скорости движения точек будут одинаковы. Определить скорости υ_1 и υ_2 и ускорения a_1 и a_2 точек в этот момент времени.

Дано: $A_1 = 18$ м; $A_2 = 2$ м; $B_1 = B_2 = 3$ м/с; $C_1 = -3$ м/с^2; $C_2 = 1$ м/с^2.

Найти: υ_1; υ_2; a_1; a_2; t.

Решение. Материальные точки движутся по прямой (ось OX). Заданы кинематические уравнения движения в координатной форме. Скорость точки в произвольный момент времени найдем, дифференцируя координату по времени, т.е.

$$\upsilon_1 = \frac{dX_1}{dt} = \frac{d}{dt}\,(A_1 + B_1t + C_1t^2) = B_1 + 2C_1t;$$

$$\upsilon_2 = \frac{dX_2}{dt} = \frac{d}{dt}\,(A_2 + B_2t + C_2t^2) = B_2 + 2C_2t.$$

По условию задачи $\upsilon_1 = \upsilon_2$ в момент времени t, т.е.

$$B_1 + 2C_1t = B_2 + 2C_2t,$$

откуда

$$t = \frac{B_1 - B_2}{2C_2 - 2C_1}, \quad t = 0.$$

Значит, $\upsilon_1 = \upsilon_2 = B_1 = B_2$; $\upsilon_1 = \upsilon_2 = 3$ м/с.

Ускорение в произвольный момент времени найдем, взяв вторую производную от координаты X по времени, т.е.

$$a_1 = \frac{d^2X_1}{dt^2} = \frac{d\upsilon_1}{dt} = \frac{d}{dt}(B_1 + 2C_1t) = 2C_1; \quad a_1 = -6 \text{ м/с}^2;$$

$$a_2 = \frac{d^2X_2}{dt^2} = \frac{d\upsilon_2}{dt} = \frac{d}{dt}(B_2 + 2C_2t) = 2C_2; \quad a_2 = 2 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $t = 0$; $\upsilon_1 = \upsilon_2 = 3$ м/с; $a_1 = -6$ м/с^2; $a_2 = 2$ м/с^2.

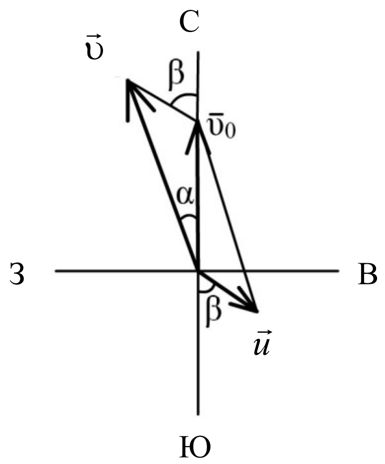
Задача 1.6

С какой скоростью и по какому курсу должен лететь самолет, чтобы за 2 часа пролететь точно на север 720 км, если во время полета дует постоянный северо-западный ветер под углом 30° к меридиану со скоростью 36 км/ч?

Дано: $t = 2$ ч; $S = 720$ км; $\beta = 30°$; $u = 36$ км/ч.

Найти: υ, α.

Решение. Скорость будем измерять в км/ч, как это делает летчик, определяя ее по приборам. Чтобы попасть в пункт назначения, самолету необходимо лететь под углом α к меридиану, отклоняясь на запад (см. рисунок). Обозначим искомую относительную скорость как $\vec{\upsilon}$, а результирующую абсолютную скорость, направленную вдоль меридиана, как $\vec{\upsilon}_0$. Ее модуль $\left|\vec{\upsilon}_0\right| = \dfrac{S}{t}$.



Из рисунка видно, что $\vec{\upsilon}_0 = \vec{\upsilon} + \vec{u}$. Модуль вектора скорости $\left|\vec{\upsilon}\right|$ найдем из векторного треугольника скоростей, используя теорему косинусов:

$$\left|\vec{\upsilon}\right| = \sqrt{\upsilon_0^2 + u^2 - 2\upsilon_0 u \cos\left(180^\circ - \beta\right)};$$

$$[\upsilon] = \sqrt{\frac{\text{км}^2}{\text{ч}^2}} = \frac{\text{км}}{\text{ч}}; \quad \upsilon \approx 392 \text{ км/ч}.$$

Таким образом, скорость полета самолета больше υ_0. Угол α можно найти по теореме синусов:

$$\frac{u}{\sin\alpha} = \frac{\upsilon}{\sin(180 - \beta)}, \quad \text{откуда } \alpha = 4{,}5^\circ.$$

Ответ: $\upsilon \approx 392$ км/ч; $\alpha = 4{,}5^\circ$.

Задача 1.7

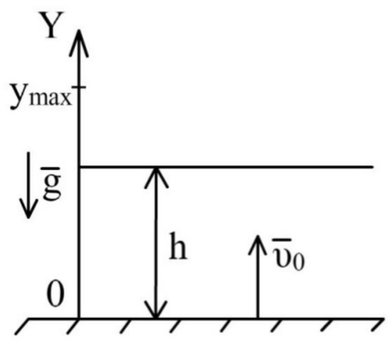
Стрела пущена из лука вертикально вверх с начальной скоростью $\upsilon_0 = 40$ м/с.

Определить: 1) через какое время и с какой скоростью стрела упадет на землю; какой путь будет пройден ею за это время; 2) через какое время она окажется на высоте $h = 35$ м.

Дано: $\upsilon_0 = 40$ м/с; $h = 35$ м.

Найти: 1) $t_{пол}$; υ_y; S; 2) t.

Решение. В системе отсчета, связанной с Землей, ось ординат направим вертикально вверх, начало отсчета совместим с точкой бросания (см. рисунок). Считая, что движение стрелы прямолинейное и равнозамедленное, уравнения движения в проекциях на ось OY будут иметь вид:



$$y = \upsilon_0 t - \frac{gt^2}{2}; \qquad (1)$$

$$\upsilon_y = \upsilon_0 - gt. \qquad (2)$$

1. В момент падения на землю $t = t_{пол}$, $y = 0$. Из уравнения (1) найдем время полета:

$$t_{пол} = \frac{2\upsilon_0}{g}; \quad t_{пол} = \frac{2 \cdot 40}{9{,}8} = 8 \text{ с}.$$

Подставив $t_{пол}$ в уравнение (2), определим скорость падения стрелы:

$$\upsilon_y = \upsilon_0 - g\frac{2\upsilon_0}{g} = -\upsilon_0.$$

Скорость падения равна по модулю начальной скорости и противоположна ей по направлению.

В верхней точке траектории $\upsilon_y = 0$, из уравнения (2) найдем время подъема:

$$t_{под} = \frac{\upsilon_0}{g}; \quad [t_{под}] = \frac{\text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с} \cdot \text{м}} = \text{с}.$$

Путь, пройденный стрелой за время движения, равен $S = 2Y_{\max}$. Значение $Y_{\max}$ определим из уравнения (1), подставив в него $t_{под}$ (время подъема).

$$Y_{max} = \frac{\upsilon_0^2}{2g}, \text{ тогда } S = \frac{\upsilon_0^2}{g}; \quad [S] = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{м}} = \text{м}; \quad S = \frac{40^2}{9{,}8} \approx 160 \text{ м}.$$

2. Время подъема на высоту h определим, подставив в уравнение (1) значение $y = h$, тогда $35 = 40t - 5t^2$. Решая квадратное уравнение, получим $t_1 = 1$ с; $t_2 = 7$ с. Два значения для t указывают на то, что стрела на этой высоте побывает дважды: через 1 с (на подъеме) и через 7 с от начала движения (на спуске).

Ответ: $t = 8$ с; $S = 160$ м; $t_1 = 1$ с; $t_2 = 7$ с.

Задача 1.8

Мяч брошен вертикально вверх. На высоте h = 6 м он побывал дважды с интервалом Δt = 3 с. Определить начальную скорость мяча.

Дано: h = 3 м; Δt = 3 с.

Найти: υ_0.

Решение. В системе отсчета, связанной с Землей, ось ординат направим вверх, а начало отсчета совместим с поверхностью Земли в точке бросания (см. рис. к задаче 1.7).

Запишем уравнения движения мяча для моментов t и $t + \Delta t$:

$$y_1 = h = \upsilon_0 t - \frac{gt^2}{2}; \tag{1}$$

$$y_2 = h = \upsilon_0 (t + \Delta t) - \frac{g\left(t + \Delta t\right)^2}{2}. \tag{2}$$

Приравняв правые части уравнений (1) и (2), получим

$$\mathrm{t} = \frac{2\upsilon_0 - g\Delta t}{2g}.$$

Подставив значение t в уравнение (2), найдем:

$$\upsilon_0 = \frac{1}{2}\sqrt{8gh + g^2\Delta t^2};$$

$$\left[\upsilon_0\right] = \sqrt{\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} + \frac{\text{м}^2}{\text{с}^4} \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\upsilon_0 = \frac{1}{2}\sqrt{8 \cdot 9{,}8 \cdot 6 + 9{,}8^2 \cdot 3^2} = 18 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\upsilon_0 = 18$ м/с.

Задача 1.9

Кинематическое уравнение движения материальной точки по прямой (ось x) имеет вид $x(t) = A + Bt + Ct^2$, где A = 5 м, B = 4 м/с, C = –1 м/с^2.

Необходимо:

1. Построить графики зависимости координаты x и пути S от времени.
2. Определить среднюю скорость $\langle \upsilon_x \rangle$ за интервал времени от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 6$ с.
3. Найти среднюю путевую скорость $\langle \upsilon \rangle$ за тот же интервал времени.

Дано: $x(t) = A + Bt + Ct^2$; $A = 5$ м; $B = 4$ м/с; $C = -1$ м/с^2; $t_1 = 1$ с; $t_2 = 6$ с.

Найти: $X(t)$; $S(t)$; $\langle \upsilon_x \rangle$; $\langle \upsilon \rangle$.

Решение

1. Для построения графика зависимости координаты точки от времени найдем характерные значения координаты – начальное и максимальное и моменты времени, соответствующие указанным координатам и координате, равной нулю.

Начальная координата соответствует моменту $t = 0$. Ее значение равно $x_0 = x(0) = A = 5$ м. Координата x сначала увеличивается, а потом уменьшается. Максимального значения координата достигает в тот момент, когда точка начинает двигаться обратно (скорость меняет знак).

Этот момент времени найдем, приравняв нулю первую производную от координаты по времени:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = B + 2Ct = 0,$$

откуда

$$t = -\frac{B}{2C} = 2 \text{ с}.$$

Максимальная координата

$$x_{\text{мах}} = x(2) = 9 \text{ м}.$$

Момент времени t, когда координата $x = 0$, найдем из выражения

$$x = A + Bt + Ct^2 = 0.$$

Решим полученное квадратное уравнение относительно t:

$$t = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}.$$

Подставим значения A, B, C и произведем вычисления: $t = (2 \pm 3)$ с.

Таким образом, получаем два значения времени: $t' = 5$ с и $t'' = -1$ с.

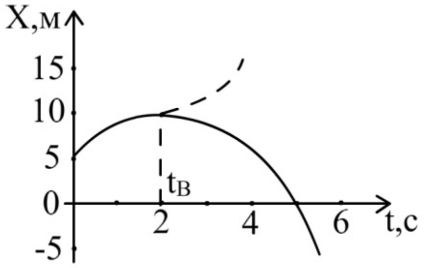
Второе значение времени отбрасываем, так как оно не удовлетворяет условию задачи ($t \geq 0$).

График зависимости координаты точки от времени представляет собой кривую второго порядка. Для его построения необходимо иметь пять точек, так как уравнение кривой второго порядка содержит пять коэффициентов. Поэтому кроме трех вычисленных ранее характерных значений координаты найдем еще два значения координаты, соответствующие моментам $t_1 = 1$ с и $t_2 = 6$ с:

$$x_1 = A + Bt_1 + Ct_1^2 = 8 \text{ м}; \quad x_2 = A + Bt_2 + Ct_2^2 = -7 \text{ м}.$$

Полученные данные представим в виде таблицы.

Время, с	$t_0 = 0$	$t_1 = 1$	$t_B = 2$	$t' = 5$	$t_2 = 6$
Координата, м	$x_0 = A = 5$	$x_1 = 8$	$x_{max} = 9$	$x = 0$	$x_2 = -7$



Используя данные таблицы, чертим график зависимости координаты от времени (см. рисунок). График пути (штриховая линия) построим, исходя из следующих соображений: 1) путь и координаты до момента изменения знака скорости совпадают; 2) начиная с момента возврата (t_B) точка движется в обратном направлении и, следовательно, координата ее убывает, а путь продолжает возрастать по тому же закону, по которому убывает координата.

Следовательно, график пути до момента времени $t_B = 2$ с совпадает с графиком координаты, а начиная с этого момента является зеркальным отображением графика координаты.

2. Средняя скорость $\langle \upsilon_x \rangle$ за интервал времени $t_2 - t_1$ определяется выражением

$$\langle \upsilon_x \rangle = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

Подставим значения x_1, x_2, t_1, t_2 из таблицы и произведем вычисления:

$$\langle \upsilon_x \rangle = \frac{-7-8}{6-1}\,\frac{\text{м}}{\text{с}} = -3\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

3. Среднюю путевую скорость $\langle \upsilon \rangle$ находим из выражения

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{S}{t_2 - t_1},$$

где S – путь, пройденный точкой за интервал времени $t_2 - t_1$.

Из графика (см. рис.) видно, что этот путь складывается из двух отрезков пути: $S_1 = x_{max} - x_1$, который точка прошла за интервал времени $t_B - t_1$, и $S_2 = x_{max} + |x_2|$, который она прошла за интервал $t_2 - t_B$. Таким образом, путь $S = S_1 + S_2 = (x_{max} - x_1) + (x_{max} + |x_2|) = 2x_{max} + |x_2| - x_1$.

Подставим в это выражение значения x_1, $|x_2|$, x_{max} и произведем вычисления:

$$\langle S\rangle = 2\cdot 9 + 7 - 8 = 17 \text{ м}.$$

Тогда искомая средняя путевая скорость

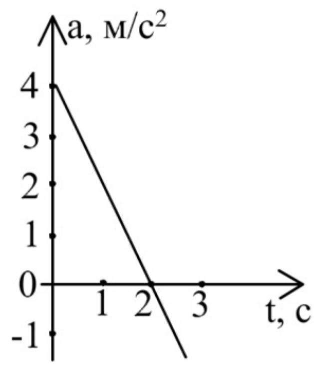
$$\langle \upsilon \rangle = \frac{17}{6-1}\ \frac{\text{м}}{\text{с}} = 3{,}4 \text{ м/с}.$$

Заметим, что средняя путевая скорость всегда положительна.

Ответ: $\langle \upsilon_x \rangle = -3$ м/с; $\langle \upsilon \rangle = 3{,}4$ м/с.

Задача 1.10

На рисунке представлена зависимость ускорения a от времени t для материальной точки, движущейся прямолинейно. Определить скорость υ и координату x точки через $t = 3$ с после начала движения. В какой момент времени t_1 точка изменит направление движения?



Дано: $t = 3$ с.

Найти: υ; x; t_1.

Решение. Из графика следует, что зависимость ускорения от времени можно представить в виде

$$a(t) = A - Bt, \tag{1}$$

где $A = 4$ м/с^2; $B = 2$ м/с^3.

В случае прямолинейного движения скорость материальной точки при $\upsilon_0 = 0$ (условие задачи)

$$\upsilon = \int_0^t a\,dt. \tag{2}$$

Подставив в формулу (2) выражение (1) и проинтегрировав, получим искомую скорость:

$$\upsilon = At - \frac{Bt^2}{2};$$

$$[\upsilon] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{с} - \frac{\text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с}^3} = \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\upsilon = 4 \cdot 3 - \frac{2 \cdot 9}{2} = 12 - 9 = 3 \text{ м/с}.$$

Искомая координата

$$x = \int_0^t \upsilon dt = \int_0^t \left(At - \frac{Bt^2}{2} \right) dt = \frac{At^2}{2} - \frac{Bt^3}{6};$$

$$[x] = \frac{\text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2} - \frac{\text{м} \cdot \text{с}^3}{\text{с}^3} = \text{м};$$

$$x = \frac{4 \cdot 9}{2} - \frac{2 \cdot 27}{6} = 18 - 9 = 9 \text{ м}.$$

Точка изменяет направление движения в момент, когда скорость $\upsilon = 0$, т.е.

$$At - \frac{Bt^2}{2} = 0,$$

откуда

$$t = \frac{2A}{B};$$

$$[t] = \frac{\text{м} \cdot \text{с}^3}{\text{с}^2 \cdot \text{м}} = \text{с};$$

$$t_1 = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4 \text{ с}.$$

Ответ: $\upsilon = 3$ м/с; $x = 9$ м; $t_1 = 4$ с.

Задача 1.11

Тело брошено под углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить этот угол, если максимальная высота подъема h_{max} меньше дальности полета S в $n = 2{,}4$ раза.

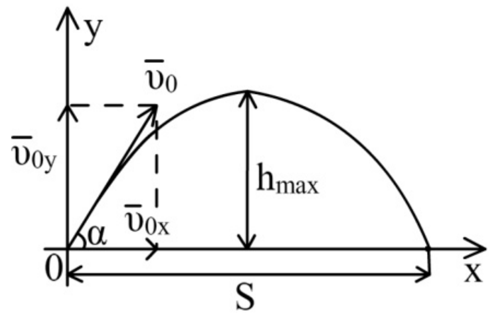
Дано: $h_{max} = S/n$; $n = 2{,}4$.

Найти: α.

Решение. Кинематические уравнения движения тела в векторной форме:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}; \quad \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{g}t; \quad \vec{a} = \vec{g},$$

где $\vec{r}_0$ – радиус-вектор, определяющий начальное положение тела в выбранной системе отсчета; $\vec{\upsilon}_0$ – начальная скорость тела; $\vec{g}$ – ускорение свободного падения.



Направив оси координат (см. рисунок) из точки начала движения ($\vec{r}_0 = 0$), получим уравнения движения в проекциях на оси X и Y:

$$x = \upsilon_{0x}t; \quad \upsilon_x = \upsilon_{0x}; \quad a_x = 0; \tag{1}$$

$$y = \upsilon_{0y}t - \frac{gt^2}{2}; \quad \upsilon_y = \upsilon_{0y} - gt; \quad a_y = g. \tag{2}$$

Из рисунка следует, что

$$\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha; \quad \upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha. \tag{3}$$

Поскольку при $y = h_{max}$ (в высшей точке траектории) $\upsilon_y = 0$, из второго соотношения (2) время подъема

$$t_1 = \frac{\upsilon_{0y}}{g}. \tag{4}$$

Подставив формулу (4) в первое соотношение (2), найдем максимальную высоту подъема:

$$h_{max} = \frac{\upsilon_{0y}^2}{2g}. \tag{5}$$

В момент падения тела $y(t) = 0$, поэтому общее время движения из первого соотношения (2)

$$t = \frac{2\upsilon_{0y}}{g}.$$

Из первого соотношения (1), используя формулу (4), дальность полета

$$S = \frac{2\upsilon_{0y}\upsilon_{0x}}{g}. \qquad (6)$$

Разделив (5) на (6) и учитывая (3), найдем

$$\frac{h_{\max}}{S} = \frac{tg\alpha}{4}. \qquad (7)$$

Согласно условию задачи $h_{\max} = \frac{S}{n}$, поэтому из выражения (7)

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{4}{n} = \frac{4}{2,4} = 1,66,$$

откуда искомый угол

$$\alpha = \mathrm{arctg}1,66; \;\; \alpha = 59°.$$

Ответ: $\alpha = 59°$.

Задача 1.12

С башни горизонтально брошено тело со скоростью υ_0 = 25 м/с. Найти скорость тела υ, тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения тела в конце третьей секунды, а также радиус кривизны траектории R в точке, соответствующей этому времени. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Дано: υ_0 = 25 м/с; t = 3 с.

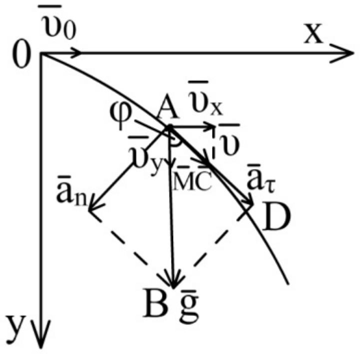
Найти: a; a_τ; a_n; υ; R.

Решение. Тело, брошенное с башни горизонтально, будет двигаться по параболе. Пусть за 3 секунды движения тело оказалось в точке A (см. рисунок). Построим параллелограмм скоростей и ускорений для данной точки. Скорость $\vec{\upsilon}$ направлена по касательной к траектории, ее проекции: $\vec{\upsilon}_x$ направлена по горизонтали, а $\vec{\upsilon}_y$ – по вертикали. Ускорение $\vec{a}_\tau$ направлено по касательной к траектории, а $\vec{a}_n$ – перпендикулярно к $\vec{a}_\tau$.

Полное ускорение

$$\vec{a}_n + \vec{a}_\tau = \vec{g}.$$

Треугольники *AMC* и *ABD* подобны, так как все углы одного треугольника равны углам второго. Из подобия треугольников запишем отношения сторон:



$$\cos\varphi = \frac{\upsilon_y}{\upsilon} = \frac{a_\tau}{g}; \qquad a_\tau = \frac{\upsilon_y g}{\upsilon}; \qquad (1)$$

$$\sin\varphi = \frac{\upsilon_x}{\upsilon} = \frac{a_n}{g}; \qquad a_n = \frac{\upsilon_x g}{\upsilon}. \qquad (2)$$

Поскольку $\upsilon_x = \upsilon_0$, а $\upsilon_y = gt$, то

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\upsilon_0^2 + g^2 t^2}; \qquad (3).$$

$$[\upsilon] = \sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} + \frac{\text{м}^2}{\text{с}^4} \cdot \text{с}^2} = \text{м/с};$$

$$\upsilon = \sqrt{25^2 + 9{,}8^2 \cdot 3^2} = 39 \text{ м/с}.$$

Подставив уравнение (3) в (1) и (2), получим:

$$a_\tau = \frac{g^2 t}{\sqrt{\upsilon_0^2 + g^2 t^2}}; \quad a_\tau = 7{,}7 \text{ м/с}^2;$$

$$a_n = \frac{\upsilon_0 g}{\sqrt{\upsilon_0^2 + g^2 t^2}}; \quad a_n = 6{,}4 \text{ м/с}^2;$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}; \qquad a = 10 \text{ м/с}.$$

Так как $a_n = \dfrac{\upsilon^2}{R}$, то радиус кривизны траектории в точке *A* равен:

$$R = \frac{\upsilon^2}{a_n}; \qquad R = 238 \text{ м}.$$

Проверим размерности:

$$[a_\tau] = \frac{\text{с} \cdot \dfrac{\text{м}^2}{\text{с}^4}}{\sqrt{\dfrac{\text{м}^2}{\text{с}^2} + \dfrac{\text{м}^2}{\text{с}^4} \cdot \text{с}^2}} = \frac{\text{с} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}}{\text{с}^4 \cdot \text{м}} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$[a_n] = \frac{\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{\sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} + \frac{\text{м}^2}{\text{с}^4} \cdot \text{с}^2}} = \frac{\text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{с} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м}} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$[a] = \sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^4} + \frac{\text{м}^2}{\text{с}^4}} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$[\text{R}] = \frac{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}}{\frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = \text{м}.$$

Ответ: $\upsilon = 39$ м/с; $a_\tau = 7{,}7$ м/с^2; $a_n = 6{,}4$ м/с^2; $a = 10$ м/с; $R = 238$ м.

Задача 1.13

Тело брошено вверх с высоты 12 м под углом 30° к горизонту с начальной скоростью 12 м/с. Определить продолжительность полета тела до точки *A* и до точки *B* (см. рисунок); максимальную высоту, которой достигает тело, дальность полета тела. Сопротивление воздуха не учитывать.

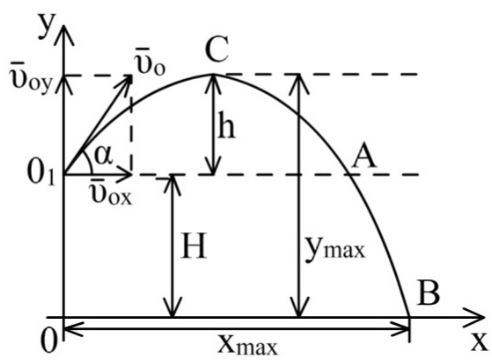
Дано: $H = 12$ м; $\upsilon_0 = 12$ м/с; $\alpha = 30°$.

Найти: t_A; t_B; $H_{\max}$; $x_{\max}$.

Решение. В обозначенной на рисунке системе координат составляющие скорости

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\alpha; \tag{1}$$

$$\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha - gt. \tag{2}$$



Координаты тела с течением времени меняются в соответствии с уравнением равнопеременного движения:

$$y = H + \upsilon_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}; \tag{3}$$

$$x = \upsilon_0 t \cos\alpha. \tag{4}$$

Время подъема тела найдем из условия, что в наивысшей точке подъема тела скорость $\upsilon_y = 0$. Тогда из уравнения (2)

$$t_{подъема} = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g}. \quad (5)$$

Время спуска тела от точки C до точки A равно времени подъема, поэтому продолжительность полета из точки O_1 до точки A равна:

$$t_A = 2t_{подъема} = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}. \quad (6)$$

Максимальную высоту подъема найдём из уравнения (3), подставив в него время подъема из уравнения (5):

$$y_{\max} = H_{\max} = H + \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g}. \quad (7)$$

Время полета до точки B найдем из уравнения (3), приравняв координату y к нулю ($y = 0$):

$$t_B = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{2H}{g}}. \quad (8)$$

Дальность полета найдем из уравнения (4), подставив в него время движения из уравнения (8):

$$x_{\max} = \upsilon_0 t_B \cos\alpha. \quad (9)$$

Проведем вычисления по формуле (6):

$$t_A = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g};$$

$$t_A = \frac{2 \cdot 12 \cdot 0{,}5}{9{,}81} = 1{,}22 \text{ с};$$

$$[t_A] = \frac{\text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с} \cdot \text{м}} = \text{с};$$

по формуле (8):

$$t_B = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{2H}{g}};$$

$$t_B = \frac{12 \cdot 0,5}{9,81} + \sqrt{\left(\frac{12 \cdot 0,5}{9,81}\right)^2 + \frac{2 \cdot 12}{9,81}} \approx 2,29 \text{ с};$$

$$[t_B] = \frac{\text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с} \cdot \text{м}} + \sqrt{\left(\frac{\text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с} \cdot \text{м}}\right)^2 + \frac{\text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{м}}} = \text{с} + \text{с} = \text{с};$$

по формуле (7):

$$H_{\max} = H + \frac{\upsilon_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 12 + \frac{12^2 \cdot 0,5^2}{2 \cdot 9,81} \approx 12 + 1,83 = 13,83 \text{ м};$$

$$[H_{\max}] = \text{м} + \frac{\text{м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{м}} = \text{м} + \text{м} = \text{м};$$

по формуле (9):

$$x_{\max} = \upsilon_0 t_B \cos\alpha;$$

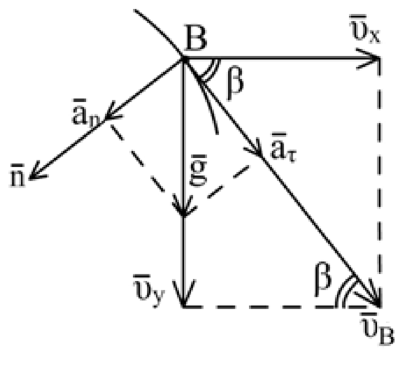
$$x_{\max} = 12 \cdot 0,866 \cdot 2,29 = 23,8 \text{ м};$$

$$[x_{\max}] = \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \text{с} = \text{м}.$$

Ответ: t_A = 1,22 с; t_B = 2,29 с ; $H_{\max}$ = 13,83 м ; $x_{\max}$ = 23,8 м.

Задача 1.14

По условию задачи 1.13 найти в момент приземления тела следующие величины: скорость и угол падения тела, тангенциальное и нормальное ускорение тела и радиус кривизны траектории.



Дано: H = 12 м; α = 30º; υ_0 = 12 м/с.

Найти: υ_B; β; a_τ; a_n; R.

Решение. Результирующая или мгновенная скорость в точке B (см. рисунок) находится как векторная сумма составляющих $\vec{\upsilon}_x$ и $\vec{\upsilon}_y$:

$$\vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon}_x + \vec{\upsilon}_y \quad \text{или} \quad \upsilon_B = \sqrt{\upsilon_0^2 \cos^2 \alpha + \upsilon_y^2}\ .$$

Составляющую υ_y в точке B найдем из уравнения (2) предыдущей задачи, подставив в него время движения t_B из уравнения (8):

$$\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha - gt_B = \sqrt{(\upsilon_0 \sin\alpha)^2 + 2gH}.$$

Тогда скорость в точке B

$$\upsilon_B = \sqrt{(\upsilon_0 \cos\alpha)^2 + (\upsilon_0 \sin\alpha)^2 + 2gH} = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gH};$$

$$\upsilon_B = \sqrt{12^2 + 2\cdot 9{,}81\cdot 12} \approx 19{,}48 \text{ м/с};$$

$$[\upsilon_B] = \sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} + \frac{\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}} = \frac{\text{м}}{\text{с}} + \frac{\text{м}}{\text{с}} = \text{ м/с}.$$

Для определения угла β, который составляет вектор скорости $\vec{\upsilon}_B$ с горизонтальной осью X, воспользуемся треугольником скоростей (см. рис.)

$$\sin\beta = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_B} = \frac{\sqrt{(\upsilon_0 \sin\alpha)^2 + 2gH}}{\sqrt{\upsilon_0^2 + 2gH}};$$

$$\sin\beta = \frac{16{,}48}{19{,}48} = 0{,}846;$$

$$\beta = \arcsin 0{,}846 = 57°46'.$$

Построим в точке B треугольник ускорений. Тангенциальная составляющая ускорения $\vec{a}_\tau$ направлена вдоль вектора мгновенной скорости в данной точке, т.е. по касательной к траектории. Нормальная составляющая ускорения $\vec{a}_n$ направлена перпендикулярно к вектору мгновенной скорости $\vec{\upsilon}_B$.

Их векторная сумма

$$\vec{a}_n + \vec{a}_\tau = \vec{g}.$$

Тогда из рисунка находим:

$$a_\tau = g\sin\beta = g\frac{\upsilon_y}{\upsilon_B}; \quad a_\tau = g\sin\beta = 9{,}81\cdot 0{,}846 = 8{,}3 \text{ м/с}^2.$$

$$[a_\tau] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\frac{\frac{\text{м}}{\text{с}}}{\frac{\text{м}}{\text{с}}} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a_n = g\cos\beta = g\frac{\upsilon_x}{\upsilon_B}; \quad a_n = g\cos\beta = 9{,}81\cdot 0{,}533 = 5{,}23 \text{ м/с}^2;$$

$$[a_n] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\frac{\frac{\text{м}}{\text{с}}}{\frac{\text{м}}{\text{с}}} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Радиус кривизны траектории в точке приземления определяем из уравнения

$$a_n = \frac{\upsilon_B^2}{R},$$

откуда

$$R = \frac{\upsilon_B^2}{a_n} = \frac{19{,}48^2}{5{,}23} = 72{,}56 \text{ м};$$

$$R = \frac{\text{м}^2\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{м}} = \text{ м}.$$

Ответ: υ_B = 19,48 м/с; β = 57º46′; a_τ = 8,3 м/с^2; a_n = 5,23 м/с^2; R = 72,56 м.

Задача 1.15

Материальная точка движется по закону $\vec{r}(t) = A\sin(5t)\vec{i} + B\cos^2(5t)\vec{j}$, где A = 2 м, B = 3 м. Определить вектор скорости, вектор ускорения и траекторию движения точки.

Дано: A = 2 м; B = 3 м.

Найти: $\vec{\upsilon}(t)$; $\vec{a}(t)$; $y(x)$.

Решение. По условию задачи движение материальной точки задается изменением радиус-вектора с течением времени:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \quad (1)$$

Сравнивая уравнение (1) с заданным, запишем движение точки координатным способом:

$$\begin{cases} x(t) = A\sin(5t); \\ y(t) = B\cos^2(5t); \\ z(t) = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Определим проекции вектора скорости на оси координат:

$$\begin{cases} \upsilon_x = \dfrac{dx}{dt} = 5A\cos(5t); \\ \upsilon_y = \dfrac{dy}{dt} = -5B\cdot 2\cos(5t)\sin(5t) = -5B\sin(10t); \\ \upsilon_z = \dfrac{dz}{dt} = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Согласно выражению для мгновенной скорости

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k}$$

выражение для вектора скорости будет иметь вид:

$$\vec{\upsilon}(t) = 5A\cos(5t)\vec{i} + \left(-5B\sin(10t)\right)\vec{j}. \qquad (4)$$

Определим проекции вектора ускорения на координатные оси:

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{d\upsilon_x}{dt} = -25A\sin(5t); \\ a_y = \dfrac{d\upsilon_y}{dt} = -50\cos(10t); \\ a_z = \dfrac{d\upsilon_z}{dt} = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Согласно выражению для мгновенного ускорения

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

запишем выражение для вектора ускорения:

$$\vec{a}(t) = -25A\sin(5t)\vec{i} - 50B\cos(10t)\vec{j}. \qquad (6)$$

Для определения траектории движения точки исключим из системы уравнений (2) время. Для этого представим систему в виде

$$\begin{cases} \sin(5t) = \dfrac{x}{A}; \\ \cos^2(5t) = \dfrac{y}{B}. \end{cases} \qquad (7)$$

Возведя в квадрат левую и правую части первого уравнения в системе (7) и просуммировав уравнения, получим:

$$\sin^2(5t)+\cos^2(5t)=\frac{x^2}{A^2}+\frac{y}{B}. \tag{8}$$

Левая часть уравнения (8) равна 1, тогда

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y}{B}=1. \tag{9}$$

Выражение (9) является уравнением параболы:

$$y=\frac{A^2B-Bx^2}{A^2}. \tag{10}$$

Подставив в (10) данные из условия задачи, найдем траекторию движения точки:

$$y=3-\frac{3}{4}x^2.$$

Из полученного уравнения следует, что при $y \geq 0$ траектория имеет вид параболы, расположенной выше оси x, по которой точка совершает колебательное движение.

Ответ: $\vec{\upsilon}(t)=10\cos(5t)\vec{i}-15\sin(10t)\vec{j}$; $\vec{a}(t)=-50\sin(5t)\vec{i}-150\cos(10t)\vec{j}$; $y=3-\frac{3}{4}x^2$.

Задача 1.16

Найти модули скорости и ускорения точки в момент времени t = 2 с, если точка движется по закону $\vec{r}(t)=(A+Bt)\vec{i}+\left(Ct+Dt^2\right)\vec{j}$, где A = –9 м, B = 3 м/с, C = 4 м/с, D = –1 м/с^2.

Дано: t = 2 с; A = –9 м; B = 3 м/с; C = 4 м/с; D = –1 м/с^2.

Найти: υ; a.

Решение. В условии задачи движение материальной точки описывается векторным способом. Используя прямоугольную систему координат, заданное уравнение представим в виде

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}. \qquad (1)$$

Движение точки происходит в плоскости *XOY*.

Сравнивая (1) с законом движения, данным в условии задачи, можно описать движение точки координатным способом:

$$\begin{cases} x(t) = A + Bt; \\ y(t) = Ct + Dt^2. \end{cases} \qquad (2)$$

Проекции вектора скорости $\vec{\upsilon}$ на координатные оси *OX* и *OУ* определяются соотношениями

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}; \quad \upsilon_y = \frac{dy}{dt}.$$

Дифференцируя по времени уравнения (2), найдем эти проекции:

$$\upsilon_x = B; \quad \upsilon_y = C + 2Dt. \qquad (3)$$

Модуль вектора скорости равен:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{B^2 + (C + 2Dt)^2};$$

$$\upsilon = \sqrt{3^2 + (4 + 2\cdot(-1)\cdot 2)^2} = 9\ \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$[\upsilon] = \sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} + \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Проекции вектора ускорения $\vec{a}$ на координатные оси определяются соотношениями

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\upsilon_x}{dt}; \qquad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d\upsilon_y}{dt}. \qquad (4)$$

Используя выражения (3) и (4), получим: $a_x = 0,\ a_y = 2D$.

Модуль вектора ускорения равен:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2D;$$

$$[a]=\sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^4}+\frac{\text{м}^2}{\text{с}^4}}=\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a=-2\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Ответ: $\upsilon=9\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; $a=-2\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Задача 1.17

Радиус-вектор материальной точки, движущейся в поле тяготения Земли, описывается уравнением $\vec{r}=\upsilon_0 t\vec{i}-\frac{gt^2}{2}\vec{j}$, где $\upsilon_0=76\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; g – ускорение свободного падения; $\vec{i}$, $\vec{j}$ – орты координатных осей X и Y. Определить момент времени t_1 после начала движения, когда вектор скорости $\vec{\upsilon}$ точки направлен под углом $\alpha = 35^\circ$ к горизонту. Чему равна скорость υ в этот момент времени?

Дано: $\vec{r}=\upsilon_0 t\vec{i}-\frac{gt^2}{2}\vec{j}$; $\upsilon_0=76\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; $\alpha = 35^\circ$.

Найти: t_1; υ.

Решение. Согласно условию задачи

$$\vec{r}=\upsilon_0 t\vec{i}-\frac{gt^2}{2}\vec{j}, \qquad (1)$$

откуда следует, что в начальный момент времени радиус-вектор $\vec{r_0}=0$.

Запишем, согласно уравнению (1), координаты точки (проекции радиус-вектора):

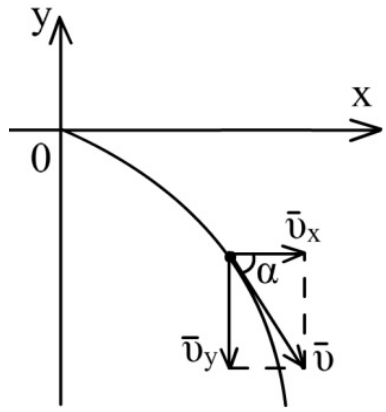
$$r_x=\upsilon_0 t; \qquad r_y=-\frac{gt^2}{2}.$$

При этом ось Y направлена вертикально вверх.

Учитывая, что $\upsilon_x=\frac{dr_x}{dt}$, $\upsilon_y=\frac{dr_y}{dt}$, получаем:

$$\upsilon_x=\upsilon_0; \qquad \upsilon_y=-gt, \qquad (2)$$

откуда следует, что здесь мы имеем дело с движением тела, брошенного горизонтально (см. рисунок).



Из рисунка следует, что

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{|\upsilon_y|}{|\upsilon_x|}.$$

С учетом формул (2) $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{gt_1}{\upsilon_0}$, откуда искомый момент времени

$$t_1 = \frac{\upsilon_0 \mathrm{tg}\alpha}{g};$$

$$[t_1] = \frac{\text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с} \cdot \text{м}} = \text{с};$$

$$t_1 = \frac{76 \cdot 0{,}7}{9{,}8} = 5{,}42 \text{ с}.$$

Искомая скорость

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \upsilon_0 \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha};$$

$$\upsilon = 76\sqrt{1 + (0{,}7)^2} = 92{,}8 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $t_1 = 5{,}42$ с; $\upsilon = 92{,}8 \ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 1.18

Точка начала двигаться по окружности радиусом 0,6 м с тангенциальным ускорением 0,1 м/с^2. Чему равно нормальное и полное ускорение в конце третьей секунды после начала движения? Чему равен угол между векторами полного и нормального ускорения в этот момент?

Дано: r = 0,6 м; a_τ = 0,1 м/с^2; t = 3 с.

Найти: a_n; a; α.

Решение. К моменту времени t точка, двигаясь равноускоренно с ускорением a_τ, приобретает скорость υ, определяемую по формуле $\upsilon = a_\tau t$.

Нормальное ускорение a_n точки при этом:

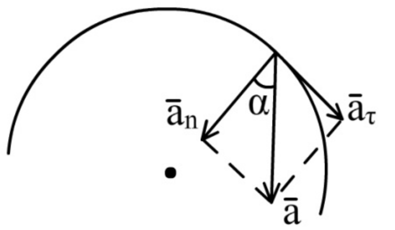
$$a_n = \frac{\upsilon^2}{r} = \frac{a_\tau^2 t^2}{r};$$

$$[a_n] = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{с}^4 \cdot \text{м}} = \text{м/с}^2; \quad a_n = \frac{1 \cdot 10^{-2} \cdot 9}{0,6} = 0,15 \text{ м/с}^2.$$

Полное ускорение $\vec{a}$ равно геометрической сумме тангенциального и нормального ускорения: $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$.

Угол между векторами $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ всегда равен π/2, поэтому

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2};$$



$$a = \sqrt{0,1^2 + 0,15^2} \approx 0,18 \text{ м/с}^2.$$

Из рисунка видно, что $\sin\alpha$ угла между векторами $\vec{a}_n$ и $\vec{a}$ будет равен:

$$\sin\alpha = \frac{a_\tau}{a} = \frac{0,1}{0,18} = 0,556.$$

Угол α = arcsin 0,556 ≈ 33º25′.

Ответ: a_n = 0,15 м/с^2; a = 0,18 м/с^2; α = 33º25′.

Задача 1.19

Диск радиусом 10 см вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота диска от времени задается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где B = 1 рад/с, C = 1 рад/с^2, D = 0,5 рад/с^3. Определить для точек на ободе диска к концу второй секунды после начала движения: 1) угловую скорость; 2) угловое ускорение; 3) среднюю угловую скорость за этот промежуток времени; 4) среднее угловое ускорение за этот промежуток времени; 5) тангенциальное ускорение a_τ; 6) нормальное ускорение a_n; 7) полное ускорение a.

Дано: $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$; B = 1 рад/с; C = 1 рад/с^2; D = 0,5 рад/с^3; t = 2 с; R = 0,1 м.

Найти: ω; ε; ‹ω›; ‹ε›; a_n; a_τ; a.

Решение

1. Угловую скорость можно найти, продифференцировав по времени уравнение угла поворота $\varphi = f(t)$ диска:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct + 3Dt^2;$$

$$\omega = 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 0,5 \cdot 2^2 = 11 \text{ рад/с}.$$

2. Угловое ускорение можно найти, продифференцировав уравнение угловой скорости в зависимости от времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2C + 6Dt;$$

$$\varepsilon = 2 \cdot 1 + 6 \cdot 0,5 \cdot 2 = 8 \text{ рад/с}^2.$$

3. Средняя угловая скорость

$$\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$

где $\Delta\varphi$ – угол, на который поворачивается радиус за время от $t_0 = 0$ до $t = 2$ с;

$$\langle\omega\rangle = \frac{A + Bt + Ct^2 + Dt^3 - A}{t} = BtCt + Dt^2;$$

$$\langle\omega\rangle = 1 + 1 \cdot 2 + 0,5 \cdot 2^2 = 5 \text{ рад/с}.$$

4. Среднее угловое ускорение

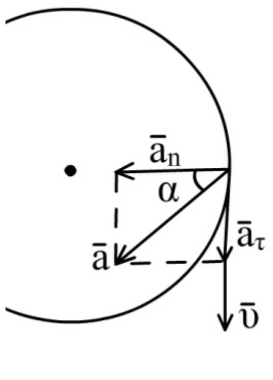
$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{\Delta\omega}{\Delta t},$$

где $\Delta\omega$ – измерение скорости за время от $t_0 = 0$ до $t = 2$ с.

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{B + 2Ct + 3Dt^2 - B}{t} = 2C + 3Dt;$$

$$\langle\varepsilon\rangle = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0,5 \cdot 2 = 5 \text{ рад/с}^2.$$

На рисунке показан вектор линейной скорости в момент времени $t = 2$ с. Направление тангенциального ускорения $\vec{a}_\tau$ совпадает с вектором скорости υ, а вектор $\vec{a}_n$ направлен по радиусу к центру диска.



5. Тангенциальное ускорение выражает изменение линейной скорости по модулю, $a_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt}$, и может быть найдено как

$$a_\tau = \varepsilon R = 8 \cdot 0,1 = 0,8 \text{ м/с}^2.$$

6. Нормальное ускорение показывает изменение скорости по направлению,

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R;$$

$$a_n = 11^2 \cdot 0{,}1 = 12{,}1 \text{ м/с}^2.$$

7. Полное ускорение

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2};$$

$$a = \sqrt{12{,}1^2 + 0{,}8^2} = 12{,}13 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: ω = 11 рад/с; ε = 8 рад/с^2; $\langle\omega\rangle$ = 5 рад/с; $\langle\varepsilon\rangle$ = 5 рад/с^2; a_τ = 0,8 м/с^2; a_n = 12,1 м/с^2; a = 12,13 м/с^2.

Задача 1.20

Маховик, вращавшийся с постоянной частотой n_0 = 10 об/с, при торможении начал вращаться равнозамедленно. Когда торможение прекратилось, вращение маховика снова сделалось равномерным, но уже с частотой n = 6 об/с. Определить угловое ускорение ε маховика и время торможения t, если за время торможения маховик сделал N = 50 оборотов.

Дано: n_0 = 10 об/с; n = 6 об/с; N = 50.

Найти: ε, t.

Решение. Воспользуемся соотношением углового ускорения ε с начальной ω_0 и конечной скоростью ω:

$$\omega^2 - \omega_0{}^2 = 2\varepsilon\varphi.$$

Так как $\omega = 2\pi n$; $\varphi = 2\pi N$, получим:

$$\varepsilon = \frac{4\pi^2(n^2 - n_0^2)}{2 \cdot 2\pi N} = \frac{\pi(n^2 - n_0^2)}{N};$$

$$[\varepsilon] = \frac{1}{\text{с}^2};$$

$$\varepsilon = \frac{3{,}14(36 - 100)}{50} = -4{,}02 \text{ рад/с}^2.$$

Знак «минус» для углового ускорения говорит о том, что движение равнозамедленное.

Для нахождения времени торможения воспользуемся уравнением угловой скорости для вращательного движения:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t;$$

$$2\pi n = 2\pi n_0 + \varepsilon t;$$

$$t = \frac{2\pi\,(n - n_0)}{\varepsilon}; \quad t = \frac{2 \cdot 3{,}14(6 - 10)}{-4{,}02} = 6{,}25 \text{ с.}$$

Ответ: $\varepsilon = -4{,}02$ рад/с^2; $t = 6{,}25$ с.

Задача 1.21

Точка вращающегося тела, двигаясь по окружности радиусом $R = 20$ см с постоянным тангенциальным ускорением, к концу третьего оборота после начала движения приобрела линейную скорость $\upsilon = 20$ см/с. Найти нормальное ускорение точки за $t = 10$ с вращения.

Дано: $R = 0{,}2$ м; $\upsilon = 0{,}2$ м/с; $t = 10$ с; $N = 3$; $a_\tau = \text{const}$.

Найти: a_n.

Решение. При вращении тела линейная скорость υ точки с $a_\tau = \text{const}$ изменяется по закону: $\upsilon = a_\tau t$. Угловое ускорение точки ε связано с ее тангенциальным ускорением соотношением $\varepsilon = a_\tau/R$, поэтому

$$\upsilon = a_\tau t = \varepsilon R t. \tag{1}$$

Угол поворота тела при равноускоренном вращении из состояния покоя

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}. \tag{2}$$

Число оборотов, которое совершает точка за время t,

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\varepsilon t^2}{4\pi}. \tag{3}$$

Из уравнений (1), (2), исключив время t, выразим угловое ускорение:

$$\varepsilon = \frac{\upsilon^2}{4\pi N R^2}. \tag{4}$$

Нормальное ускорение $a_n = \omega^2 R$, где $\omega = \varepsilon t$, отсюда

$$a_n = \varepsilon^2 t^2 R. \qquad (5)$$

Подставив уравнение (4) в (5), получим:

$$a_n = \frac{\upsilon^4 t^2}{16\pi^2 N^2 R^3};$$

$$[a_n] = \frac{\text{м}^4}{\text{с}^4} \cdot \text{с}^2 \cdot \frac{1}{\text{м}^3} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; \quad a_n = \frac{0{,}2^4 \cdot 10^2}{16 \cdot 3{,}14^2 \cdot 3^2 \cdot 0{,}2^3} = 0{,}03 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a_n = 0{,}03$ м/с^2.

Задача 1.22

Раскручиваясь в течение t = 2 мин, маховик набирает частоту n = 900 об/мин. Найти угловое ускорение ε маховика и число оборотов N, которое он совершил за это время.

Дано: t = 120 с; n = 15 с$^{-1}$.

Найти: ε; N.

Решение. Запишем угловую скорость вращения маховика через угловое ускорение

$$\omega = \varepsilon t \qquad (1)$$

и частоту вращения n:

$$\omega = 2\pi n. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) находим угловое ускорение:

$$\varepsilon = \frac{2\pi n}{t}; \qquad (3)$$

$$[\varepsilon] = \frac{\text{рад}}{\text{с} \cdot \text{с}} = \text{рад/с}^2; \quad \varepsilon = 0{,}78 \text{ рад/с}^2.$$

Угол поворота маховика

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}; \qquad (4)$$

$$\varphi = 2\pi N. \qquad (5)$$

Из уравнений (3) – (5) определяется число оборотов N:

$$2\pi N = \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{2\pi n}{2t} t^2 = \pi n t;$$

$$N = \frac{nt}{2};$$

$$[N] = \frac{1}{\text{с}} \cdot \text{с}; \qquad N = \frac{15 \cdot 120}{2} = 900.$$

Ответ: ε = 0,78 рад/с^2; N = 900.

Задача 1.23

Маховик вращается равноускоренно. Найти угол α, который составляет вектор полного ускорения $\vec{a}$ любой точки маховика с радиусом в момент, когда маховик совершит первые два оборота.

Дано: ε = const; $t_0 = 0$; $N = 2$.

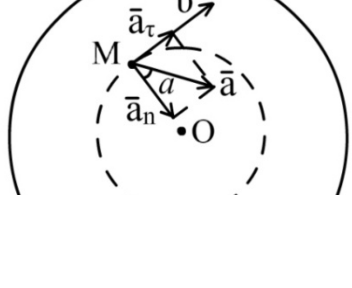
Найти: $\alpha = (\vec{a}_n \wedge \vec{a})$.

Решение. Возьмем произвольную точку M (см. рисунок) на маховике: $\vec{a}_\tau$ направлено по вектору линейной скорости в этой точке, $\vec{a}_n$ направлено по радиусу к центру вращения, полное ускорение $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$ составляет угол α с радиусом:

$$\text{tg}\alpha = \frac{a_\tau}{a_n};$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\varepsilon r}{\omega^2 r} = \frac{\varepsilon}{\omega^2},$$

где ε – угловое ускорение, которое остается постоянным, так как вращение равноускоренное; ω – конечная угловая скорость после двух оборотов, начальная угловая скорость равна нулю; r – радиус окружности, по которой вращается точка M.



Воспользуемся связью между ω, ε и углом поворота φ:

$$\omega^2 - \omega_0{}^2 = 2\varepsilon\varphi;$$

$$\varphi = 2\pi N;$$

$$\omega^2 = 2\varepsilon 2\pi N.$$

Тогда

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\varepsilon}{4\varepsilon\pi N} = \frac{1}{4\pi N} = 0{,}04\,; \quad \alpha = 2^\circ 17'.$$

Угол α для всех точек не зависит от времени, а зависит только от угла поворота. В начальный момент времени $N = 0$, $\mathrm{tg}\alpha \to \infty$, $\alpha \to \pi/2$, при возрастании N угол $\alpha \to 0$.

Ответ: $\alpha = 2^\circ 17'$.

Задача 1.24

По горизонтальной поверхности катится колесо радиусом R с угловой скоростью ω. Найти траекторию, описываемую точкой A, лежащей на ободе колеса (см. рисунок). Начальные условия: при $t = 0$ $x_A = 0$, $y_A = 0$, $\varphi = 0$.

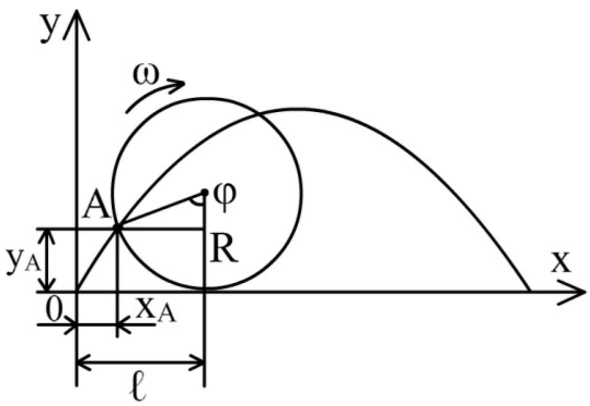
Дано: R; ω; x; y.

Найти: $x(y)$.

Решение. Считая, что колесо катится без скольжения, из рисунка находим:

$$x_A = l - R\sin\varphi; \tag{1}$$

$$x_y = R - R\cos\varphi. \tag{2}$$



Поскольку $l = R\varphi$, а $\varphi = \omega t$, то уравнения (1), (2) примут вид:

$$x_A = R(\omega t - \sin\omega t)\,; \tag{3}$$

$$y_A = R(1 - \cos\omega t)\,, \tag{4}$$

где t – время движения колеса.

Исключив из выражения (3) и (4) время, получим уравнения траектории.

Для этого из (4) найдем:

$$\cos\omega t = \frac{R-y}{R},$$

откуда

$$\omega t = \arccos\frac{R-y}{R}. \qquad (5)$$

Выполним преобразования:

$$\sin\omega t = \sqrt{1-\cos^2\omega t} = \sqrt{1-\left(\frac{R-y}{R}\right)^2} = \sqrt{\frac{y(2R-y)}{R}}. \qquad (6)$$

Выражения (5) и (6) подставляем в (3):

$$x + \sqrt{y(2R-y)} = R\arccos\frac{R-y}{R}.$$

Получим уравнение циклоиды.

Ответ: траекторией точки *A* является циклоида.

Задача 1.25

Зависимость пути S от времени t для вращающейся по окружности радиусом R = 6 м точки M дается в виде уравнения $S = At^3$, где A = 0,2 м/с^3. Определить тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорение для момента времени, когда линейная скорость точки υ = 0,6 м/с, а также угол φ между векторами $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}$.

Дано: $S = At^3$; A = 0,2 м/с^3; R = 6 м; υ = 0,6 м/с.

Найти: a_n; a_τ; a; α.

Решение. Линейная скорость точки изменяется по закону

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} = 3At^2.$$

Найдем момент времени t, когда линейная скорость υ = 0,6 м/с:

$$t = \sqrt{\frac{\upsilon}{3A}};$$

$$[t] = \sqrt{\frac{\text{м} \cdot \text{с}^3}{\text{с} \cdot \text{м}}} = \text{с}, \quad t = 1 \text{ с}.$$

Тангенциальное ускорение точки

$$a_\tau = \frac{d^2S}{dt^2} = 6At;$$

$$\left[a_\tau\right] = \frac{\text{м}}{\text{с}^3} \cdot \text{с} = \text{ м/с}^2; \quad a_\tau = 1{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Нормальное ускорение

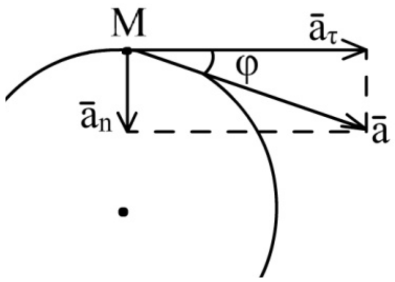
$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R};$$

$$[a_n] = \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{м}} = \text{ м/с}^2;$$

$$a_n = 0{,}06 \text{ м/с}^2.$$

Полное ускорение

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2};$$



$$\left[a\right] = \sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^4}} = \text{м/с}^2; \quad a = 1{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$ направлено по касательной к окружности, а нормальное ускорение $\vec{a}_n$ – перпендикулярно к $\vec{a}_\tau$ (см. рисунок).

Полное ускорение $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$, тогда tgφ = $\dfrac{a_n}{a_\tau}$; φ = 3°.

Ответ: $a_\tau = 1{,}2$ м/с^2; $a_n = 0{,}06$ м/с^2; $a = 1{,}2$ м/с^2; φ = 3°.

Задача 1.26

Тело вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость зависит от угла поворота φ по закону $\omega = \omega_0 - \alpha\,\varphi$, где $\omega_0 = 3$ рад/с, $\alpha = 0{,}1$ с$^{-1}$. В момент времени $t_0 = 0$ угол $\varphi_0 = 0$. Найти угловую скорость вращения тела для момента времени $t = 2$ с.

Дано: $\omega = \omega_0 - \alpha\varphi$; $\omega_0 = 3$ рад/с; $t = 2$ с; $\alpha = 0{,}1$ с$^{-1}$; $t_0 = 0$; $\varphi_0 = 0$.

Найти: ω.

Решение. Согласно определению угловая скорость

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Тогда по условию задачи

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 - \alpha\varphi. \tag{1}$$

Разделим переменные в уравнении (1) и проинтегрируем полученное выражение:

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\omega_0 - \alpha\varphi} = \int_0^t dt. \tag{2}$$

Пределы интегрирования берутся из условия задачи:

$$-\frac{1}{\alpha}\int_0^{\varphi} \frac{d\ (\omega_0 - \alpha\varphi)}{\omega_0 - \alpha\varphi} = \int_0^t dt\,;$$

$$-\frac{1}{\alpha}\ln\left(\omega_0 - \alpha t\right)\Big|_0^{\varphi} = t;$$

$$\ln(\omega_0 - \ \alpha\varphi)\Big|_0^{\varphi} = -\alpha t\,;$$

$$\ln\frac{\omega_0 - \alpha\varphi}{\omega_0} = -\alpha t. \tag{3}$$

Потенцируем уравнение (3):

$$\frac{\omega_0 - \alpha\varphi}{\omega_0} = e^{-\alpha t}. \tag{4}$$

Из (4) находится выражение для угла поворота:

$$\varphi = \frac{\omega_0}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}). \tag{5}$$

Подставив (5) в заданный закон изменения угловой скорости, получим:

$$\omega = \omega_0 e^{-\alpha t};$$

$$[\omega] = \text{рад/с}; \quad \omega = 2{,}46 \text{ рад/с}.$$

Ответ: $\omega = 2{,}46$ рад/с.

Задача 1.27

Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\varepsilon = \alpha t$, где $\alpha = 0{,}02$ рад/с^3. Через какое время после начала вращения вектор полного ускорения произвольной точки тела будет составлять угол $\varphi = 60^o$ с ее вектором скорости?

Дано: $\varepsilon = \alpha t$; $\alpha = 0{,}02$ рад/с^3; $\varphi = 60^o$.

Найти: t.

Решение. Разложим вектор полного ускорения $\vec{a}$ (см. рисунок) на составляющие $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$. Тогда

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{|\vec{a}_n|}{|\vec{a}_\tau|}. \qquad (1)$$

Используя уравнение $a_\tau = \varepsilon R$, запишем:

$$a_\tau = \varepsilon R = \alpha t R. \qquad (2)$$

С другой стороны, по определению

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}. \qquad (3)$$

Из уравнений (2) и (3) найдем:

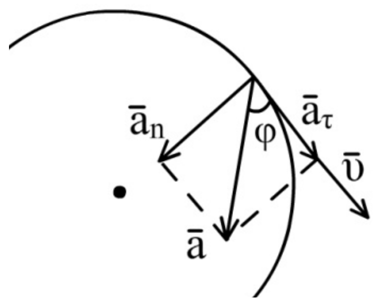
$$\alpha t R = \frac{d\upsilon}{dt}. \qquad (4)$$

Разделим переменные в уравнении (4) и проинтегрируем его:

$$\alpha t R dt = d\upsilon;$$

$$\int_0^t \alpha t R dt = \int_0^\upsilon d\upsilon;$$

$$\upsilon = \alpha R \frac{t^2}{2}. \qquad (5)$$



Нормальное ускорение с учетом выражения (5) запишется в виде

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{\alpha^2 R t^4}{4}. \qquad (6)$$

Подставим в формулу (1) уравнения (2) и (6):

$$tg\varphi = \frac{\alpha t^3}{4}. \tag{7}$$

Из уравнения (7) найдем искомое время вращения тела:

$$t = \sqrt[3]{\frac{4\mathrm{tg}\varphi}{\alpha}};$$

$$[t] = \sqrt[3]{\text{с}^3} = \text{с};$$

$$t = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 1{,}732}{0{,}02}} = 7 \text{ с}.$$

Ответ: $t = 7$ с.

1.2. Динамика. Законы сохранения. Элементы теории поля. Основные формулы

Импульс, количество движения – мера механического движения, равная для материальной точки произведению ее массы m на вектор ее скорости $\vec{\upsilon}$:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}.$$

Импульс механической системы равен векторной сумме импульсов всех n материальных точек системы или произведению массы всей системы m на скорость ее центра масс $\vec{\upsilon}_c$:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i = m\vec{\upsilon}_c.$$

Скорость центра масс системы материальных точек

$$\vec{\upsilon}_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{m} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i}{m},$$

где m_i и $\vec{r}_i$ – соответственно масса и радиус-вектор i-той материальной точки; n – число материальных точек в системе, m – масса всей системы.

Координаты центра масс системы материальных точек:

радиус-вектор:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m};$$

в координатной форме:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m}; \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m}; \qquad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{m},$$

где m_i, $\vec{r}_i$, x_i, y_i, z_i – соответственно масса, радиус-вектор и координата i-той материальной точки; n – число материальных точек в системе, m – масса всей системы.

Закон сохранения импульса для замкнутой системы:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i = \text{const}.$$

Второй закон Ньютона (основное уравнение динамики материальной точки):

$$\sum_{i=1}^{k} \vec{F}_i = m\vec{a} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\left(m\vec{\upsilon}\right)}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

где $\sum_{i=1}^{k} \vec{F}_i$ – векторная сумма сил, действующих на тело массой m; k – число действующих сих. В проекциях на касательную и нормаль к траектории точки это же уравнение будет иметь вид:

$$F_\tau = ma_\tau = m\frac{d\upsilon}{dt}; \qquad F_n = ma_n = \frac{m\upsilon^2}{R} = m\omega^2 R.$$

Силы, рассматриваемые в механике:

сила тяжести

$$F_m = mg,$$

где g – ускорение свободного падения;

сила упругости

$$F_y = -kx$$

где k – коэффициент упругости (жесткости); x – абсолютная деформация;

сила трения скольжения

$$F_{тр} = \mu N,$$

где μ – коэффициент трения скольжения; N – сила реакции опоры (сила нормального давления на опору). Сила трения покоя меняется от нуля до силы трения скольжения $F_{тр}$;

сила трения качения

$$F = \frac{\mu_k N}{r},$$

где μ_k – коэффициент трения качения; r – радиус катящегося тела.

сила гравитационного притяжения

$$F_T = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где G = 6,67·10^{-11} м^3/кг·с^2 – гравитационная постоянная; m_1 и m_2 – массы взаимодействующих объектов; r – расстояние между объектами;

сила Архимеда

$$F_A = \rho g V,$$

где ρ – плотность жидкости или газа; V – объем погруженной в жидкость или газ части тела.

Уравнение движения тела переменной массы (уравнение Мещерского);

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_p,$$

где $\vec{F}_p = -\vec{u}\frac{dm}{dt}$ – реактивная сила ($\vec{u}$ – скорость истечения газов из ракеты).

Работа постоянной силы

$$\Delta A = \vec{F}\Delta\vec{r} = F\Delta S\cos(\alpha),$$

где α – угол между векторами силы $\vec{F}$ и перемещения $\Delta\vec{r}$; $\Delta S = |\Delta\vec{r}|$ – элементарный путь.

Работа, совершаемая переменной силой на пути s,

$$A = \int_S \vec{F}d\vec{r}\int_S F_s ds = \int_S F\cos\alpha ds,$$

где $\vec{F}_S$ – проекция вектора силы на вектор перемещения; $dS = |d\vec{r}|$ – модуль вектора перемещения.

Средняя мощность за промежуток времени Δt:

$$\langle N\rangle = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

Мгновенная мощность

$$N = \frac{dA}{dt} \quad \text{или} \quad N = \vec{F}\vec{\upsilon} = F_s\upsilon = F\upsilon\cos\alpha\,.$$

Кинетическая энергия тела, движущегося поступательно,

$$E_K = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{p^2}{2m}\,.$$

Потенциальная энергия

упругих сил:

$$E_П = \frac{kx^2}{2}\,,$$

где k – коэффициент упругости, x – абсолютная деформация;

гравитационного взаимодействия двух тел:

$$E_П = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\,;$$

тела, находящегося в однородном гравитационном поле:

$$E_П = mgh\,,$$

где h – высота над уровнем, принимаемым за нулевой (для консервативной системы).

Связь между силой, действующей на тело в данной точке поля, и потенциальной энергией тела:

$$\vec{F} = -gradE_{\text{П}} = -(\frac{\partial E_{\text{П}}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_{\text{П}}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_{\text{П}}}{\partial z}\vec{k})\,,$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы координатных осей.

Если в замкнутой системе действуют только консервативные силы, то механическая энергия сохраняется:

$$E = E_K + E_П = \text{const}.$$

Если кроме консервативных сил действуют неконсервативные, то изменение полной механической энергии равно работе неконсервативных сил:

$$E_2 - E_1 = A\,.$$

Скорость движения тел массами m_1 и m_2, движущихся до удара со скоростями $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ соответственно, после абсолютно упругого центрального удара

$$\vec{\upsilon}_1 = \frac{(m_1 - m_2)\vec{\upsilon}_1 + 2m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}; \qquad \vec{\upsilon}_2 = \frac{(m_2 - m_1)\vec{\upsilon}_2 + 2m_1\vec{\upsilon}_1}{m_1 + m_2}.$$

Скорость движения тел массами m_1 и m_2, движущихся соответственно со скоростями $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$, после абсолютно неупругого центрального удара

$$\upsilon = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}.$$

Закон всемирного тяготения:

$$F_T = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где F – сила всемирного тяготения (гравитационная сила) двух тел массами m_1 и m_2, движущихся соответственно со скоростями $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$; r – расстояние между точками.

Напряженность поля тяготения

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m},$$

где F – сила тяготения, действующая на тело массой m, помещенное в данную точку поля.

Работа в поле тяготения по перемещению тела

$$A = GmM\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right).$$

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух тел массами m_1 и m_2, находящихся на расстоянии r друг от друга,

$$E_П = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Потенциал поля тяготения

$$\varphi = \frac{E_П}{m},$$

где $E_П$ – потенциальная энергия материальной точки массой m, помещенной в данную точку поля.

Потенциал поля тяготения, создаваемый телом массой М,

$$\varphi_П = -\frac{GM}{R},$$

где R – расстояние от центра тела до рассматриваемой точки.

Связь между потенциалом поля тяготения и его напряженностью:

$$g = -grad\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi_П}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi_П}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi_П}{\partial z}\vec{k}\right).$$

Знак «минус» в формуле показывает, что вектор напряженности $\vec{g}$ направлен в сторону убывания потенциала.

Третий закон Кеплера:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3},$$

где T_1 и T_2 – периоды обращения планет вокруг Солнца; R_1 и R_2 – большие полуоси орбит этих планет.

Первая космическая скорость

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{GM_З}{r}} = \sqrt{gR_З} = 7{,}9 \cdot 10^3 \text{ м/с},$$

где $M_З$, $R_З$ – соответственно масса и радиус Земли; r – радиус круговой орбиты; G – гравитационная постоянная.

Вторая космическая скорость

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2GM_З}{r}} = \sqrt{2gR_з} = 11{,}2 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Основной закон динамики для неинерциальных систем отсчета:

$$m\vec{a}' = m\vec{a} + \vec{F}_{ин},$$

где $\vec{a}$ и $\vec{a}'$ – соответственно ускорения тела в инерциальной и неинерциальной системах отсчета; $\vec{F}_{ин}$ – силы инерции.

Силы инерции

$$\vec{F}_{ин} = \vec{F}_и + \vec{F}_ц + \vec{F}_к,$$

где $\vec{F}_и$ – силы инерции, проявляющиеся при поступательном движении системы отсчета с ускорением $\vec{a}_0$,

$$F_и = -ma_0;$$

$\vec{F}_ц$ – центробежные силы инерции (силы инерции, действующие во вращающейся системе отсчета на тела, удаленные от оси вращения на конечное расстояние R),

$$F_ц = -m\omega^2 R;$$

$\vec{F}_к$ – сила Кориолиса (сила инерции, действующие на тело, движущееся со скоростью υ' во вращающейся системе отсчета),

$$F_к = 2m\left[\vec{\upsilon}', \vec{\omega}\right].$$

Задача 1.28

Движение материальной точки массой m = 0,25 кг описывается уравнением $\vec{r} = A\sin\omega t\vec{i} + A\cos\omega t\vec{j}$, где A = 2 м; ω = 0,7 $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – орты координатных осей x и y. Определить путь S, пройденный точкой за время t_1 = 8 с, и силу F, действующую на точку в конце указанного промежутка времени.

Дано: m = 0,25 кг; $\vec{r} = A\sin\omega t\vec{i} + A\cos\omega t\vec{j}$; A = 2 м; ω = 0,7 $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$; t_1 = 8 с.

Найти: S; F.

Решение. Выбрав прямоугольную систему координат с началом в точке t = 0 и учитывая условие задачи, можем записать:

$$x = A\sin\omega t; \quad y = A\cos\omega t.$$

Согласно этим уравнениям траекторией тела является окружность радиусом A с центром в начале координат.

Учитывая, что линейная скорость тела $\upsilon = \omega A$ (A – радиус окружности), искомый путь (длина пути), пройденный телом за время t_1,

$$S = \upsilon t_1 = \omega A t_1; \quad [S] = \frac{\text{м} \cdot \text{с}}{\text{с}} = \text{ м};$$

$$S = 0{,}7 \cdot 2 \cdot 8 = 11{,}2 \text{ м}.$$

Скорость и ускорение материальной точки:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = A\omega\cos\omega t\vec{i} - A\omega\sin\omega t\vec{j};$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -A\omega^2\sin\omega t\vec{i} - A\omega^2\cos\omega t\vec{j}. \qquad (1)$$

Поскольку $\vec{F} = m\vec{a}$, с учетом выражения (1) получаем:

$$\vec{F} = -mA\omega^2\left(\sin\omega t\vec{i} + \cos\omega t\vec{j}\right),$$

откуда модуль силы

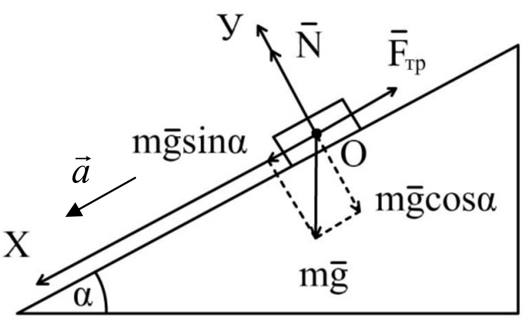
$$F = mA\omega^2; \quad [F] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н};$$

$$F = 0{,}25 \cdot 2 \cdot 0{,}49 = 0{,}245\ \text{Н}$$

(не зависящая от времени постоянная величина).

Ответ: S = 11,2 м ; F = 0,245 Н.

Задача 1.29



Тело движется вниз равноускоренно по наклонной плоскости, и зависимость пройденного пути от времени задается уравнением $S = 2t + 1{,}6t^2$.

Найти коэффициент трения μ тела о плоскость, если угол наклона плоскости к горизонту равен 30º.

Дано: $S = 2t + 1{,}6t^2$; $\alpha = 30^\circ$.

Найти: μ.

Решение. Коэффициент трения μ определяет силу трения при движении тел. Для нахождения μ рассмотрим, под действием каких сил находится тело. В данном случае на тело действуют следующие силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр} = \mu\vec{N}$.

Выберем систему координат так, чтобы ось OX была параллельна наклонной плоскости (см. рисунок). Тогда, согласно второму закону Ньютона, запишем проекции сил на оси:

на OY:

$$mg\cos\alpha = N;$$

на OX:

$$ma = mg\sin\alpha - mg\mu\cos\alpha.$$

Преобразовывая эти выражения, можно найти коэффициент трения:

$$\mu = \frac{g\sin\alpha - a}{g\cos\alpha}.$$

Определим величину ускорения a:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}\,; \quad a = 2\cdot 1{,}6 = 3{,}2\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right).$$

Подставив в формулу для μ численные значения входящих в нее величин, получим коэффициент трения:

$$\mu = \frac{9{,}81\cdot 0{,}5 - 3{,}2}{9{,}81\cdot 0{,}866} = 0{,}2; \quad [\mu] = \frac{\frac{\text{м}}{\text{с}^2} - \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{\frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = \frac{\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{\frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = 1.$$

Ответ: $\mu = 0{,}2$.

Задача 1.30

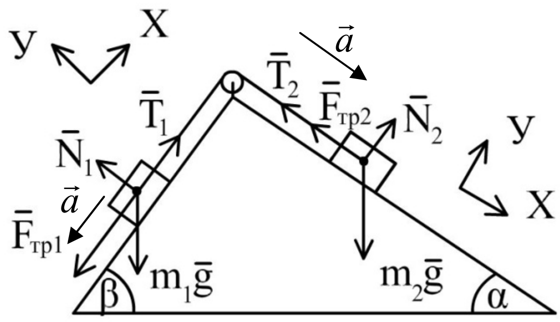
На вершине двух наклонных плоскостей, образующих с горизонтом углы $\alpha = 30^\circ$ и $\beta = 45^\circ$, укреплен блок. Грузы $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг соединены нитью, перекинутой через блок. Определить ускорение a, с которым начнут двигаться грузы вдоль наклонной плоскости, и силу натяжения нити T. Коэффициенты трения грузов о плоскости равны между собой: $\mu_1 = \mu_2 = \mu = 0{,}1$. Блок и нить невесомы.

Дано: $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 45^\circ$; $m_1 = 1$ кг; $m_2 = 2$ кг; $\mu = 0{,}1$; $g = 9{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Найти: a; T.

Решение. На каждый из грузов действуют четыре силы: сила тяжести $m\vec{g}$, силы реакции опоры $\vec{N}$, сила натяжения $\vec{T}$ и сила трения скольжения $\vec{F}_{тр}$ (см. рисунок). Мы не знаем направления силы трения. Сила трения скольжения направлена всегда в сторону, противоположную скорости движущегося тела. Сила трения не может изменить направления движения. При отсутствии силы трения ускорение грузов определяется разностью составляющих сил тяжести, направленных вдоль наклонных плоскостей.

Так как $m_1 g \sin\beta < m_2 g \sin\alpha$ (1·9,8·0,71< 9,8·0,5), то груз m_1 будет двигаться вверх по наклонной плоскости, а груз m_2 − вниз. При наличии силы трения грузы будут двигаться так же.



Так как блок невесомый, то сила натяжения нити

$$T_1 = T_2 = T.$$

Запишем основное уравнение динамики для поступательного движения в векторной форме:

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T} + \vec{F}_{тр1} = m_1\vec{a}; \\ m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{T} + \vec{F}_{тр2} = m_2\vec{a}. \end{cases}$$

Запишем для грузов уравнения в проекциях на выбранные оси координат.

Оси выберем так, чтобы ось X совпадала с ускорением. Ускорения тел $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = |\vec{a}|$, так как нить нерастяжима.

$$\begin{cases} -m_1 g \sin\beta - F_{тр1} + T = m_1 a; \\ N_1 - m_1 g \cos\beta = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} m_2 g \sin\alpha - F_{тр2} - T = m_2 a; \\ N_2 - m_2 g \cos\alpha = 0. \end{cases}$$

Сила трения $F_{тр} = \mu N$, тогда

$$\begin{cases} -m_1 g \sin\beta - \mu m_1 g \cos\beta + T = m_1 a; \\ m_2 g \sin\alpha - \mu m_2 g \cos\alpha - T = m_2 a. \end{cases}$$

Складывая уравнения, получим:

$$a = \frac{m_2 g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right) - m_1 g\left(\sin\beta + \mu\cos\beta\right)}{m_1 + m_2}; \quad [a] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{кг}\cdot\text{с}^2} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a = \frac{2\cdot 9{,}8\left(0{,}5 - 0{,}1\cdot 0{,}86\right) - 1\cdot 9{,}8(0{,}71 + 0{,}1\cdot 0{,}71)}{3} = 0{,}15\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

$$T = m_2\left(g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right) - a\right);$$

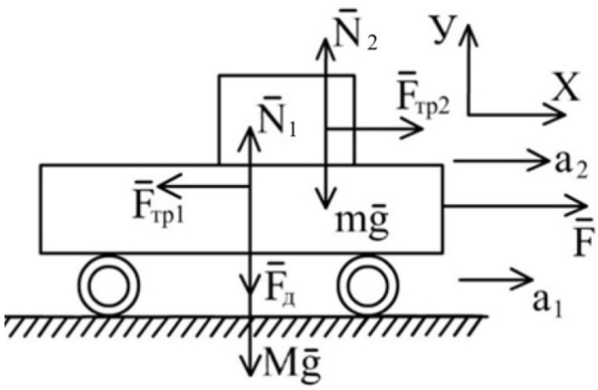
$$T = 2(9{,}8(0{,}5 - 0{,}1\cdot 0{,}87) - 0{,}15) = 7{,}8\ \text{Н};$$

$$\left[T\right] = \text{кг}\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} - \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right) = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}\,.$$

Ответ: $a = 0{,}15\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $T = 7{,}8$ Н.

Задача 1.31

Тело массой $M = 20$ кг может скользить по горизонтальной поверхности без трения. На теле лежит груз массой $m = 10$ кг. Тело массой M тянут с силой F, направленной горизонтально. Коэффициент трения между грузом и тележкой $\mu = 0{,}1$ (см. рисунок).



Найти ускорение тела a_1 и груза a_2, а также силу трения между грузом и телом, если: 1) $F_1 = 20$ Н; 2) $F_2 = 60$ Н.

Дано: $M = 20$ кг; $m = 10$ кг; $\mu = 0{,}1$; $F_1 = 20$ Н; $F_2 = 60$ Н.

Найти: a_1; a_2; $F_{тр}$.

Решение. Рассмотрим силы, действующие на тело массой m:

$$\vec{N}_2 + \vec{F}_{тр2} + m\vec{g} = m\vec{a}_2\,.$$

Сила трения $\vec{F}_{тр2}$ направлена в сторону действия силы $\vec{F}$. Груз m давит на тело массой M с силой $\vec{F}_д$, которая по третьему закону Ньютона равна реакции опоры $\vec{N}_2$.

В проекции на выбранные оси

$$\begin{cases} F_{тр2} = ma_2; \\ N_2 - mg = 0. \end{cases}$$

На тело массой M действуют силы

$$\vec{F} + \vec{N}_1 + M\vec{g} + \vec{F}_{тр2} + \vec{F}_{тр1} = M\vec{a}_1.$$

Сила $\vec{F}_{тр1}$ направлена в сторону, противоположную движению тела, и по третьему закону Ньютона

$$\left|\vec{F}_{тр2}\right| = \left|\vec{F}_{тр1}\right| = \left|\vec{F}_{тр}\right|.$$

Проецируя силы на выбранные оси, получим:

$$\begin{cases} F - F_{тр} = Ma_1; \\ N_1 - F_д - Mg = 0. \end{cases}$$

Если тело выскальзывает из-под груза, то между ними действует сила трения скольжения $\left(F_{тр} = \mu N_2\right)$. Так как $N_2 = mg$, то

$$F_{тр} = \mu mg;\ F_{тр} = \frac{кг \cdot м}{с^2} = Н;\ F_{тр} = 0{,}1 \cdot 10 \cdot 9{,}8 = 9{,}8\ Н.$$

Если же тело и груз двигаются как одно целое, то между ними действует сила трения покоя $F_{пок}$, и в этом случае ускорения равны: $a_1 = a_2 = a$, тогда

$$\begin{cases} F - F_{пок} = Ma; \\ F_{пок} = ma. \end{cases} \quad a = \frac{F}{M+m}; \quad F_{пок} = \frac{Fm}{M+m}.$$

Сила трения покоя $F_{пок}$ не должна превышать силу трения скольжения $F_{тр}$:

$$F_{пок} < F_{тр}.$$

1. При $F_1 = 20$ Н

$$F_{пок} = \frac{20 \cdot 10}{30} = 6{,}7\ Н.$$

Следовательно, между телами действует сила трения покоя и тела движутся как одно целое с ускорением

$$a = \frac{20}{30} = 0{,}67\ \frac{м}{с^2}.$$

2. При $F_2 = 60$ Н

$$F_{пок} = \frac{60 \cdot 10}{30} = 20 \text{ Н}, \text{ что невозможно.}$$

Значит, в этом случае между телами действует сила трения скольжения, равная $F_{тр} = 9{,}8$ Н;

$$a_1 = \frac{F - F_{тр}}{M}; \; a_1 = \frac{60 - 9{,}8}{20} = 2{,}51 \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a_2 = \frac{F_{тр}}{m}; \; a_2 = \frac{9{,}8}{10} = 0{,}98 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Ответ: 1) $a = 0{,}67 \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $F_{пок} = 6{,}7$ Н; 2) $a_1 = 2{,}51 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $a_2 = 0{,}98 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $F_{тр} = 9{,}8$ Н.

Задача 1.32

Шар массой m = 500 кг, падая с высоты h = 1 м, ударяется о металлическую плиту. Определить среднее значение силы удара $\langle F \rangle$, если его длительность t = 0,01 с. Удар считать абсолютно упругим.

Дано: m = 500 кг; h = 1 м; t = 0,01 с.

Найти: $\langle F \rangle$.

Решение. Среднее значение силы удара

$$\langle F \rangle = \frac{|\vec{p}_2 - \vec{p}_1|}{t},$$

где $\vec{p}_2$ и $\vec{p}_1$ − импульсы шара после удара и перед ним.

После удара шара о плиту $\vec{p}_2 = 0$, так как скорость шара равна нулю. Импульс шара до удара $\vec{p}_1 = m\vec{\upsilon}_1$, где $\vec{\upsilon}_1$ − скорость шара перед ударом.

Используя закон сохранения энергии в механике, найдем υ_1:

$$mgh = \frac{m\upsilon_1^2}{2}; \qquad \upsilon_1 = \sqrt{2gh}.$$

Тогда

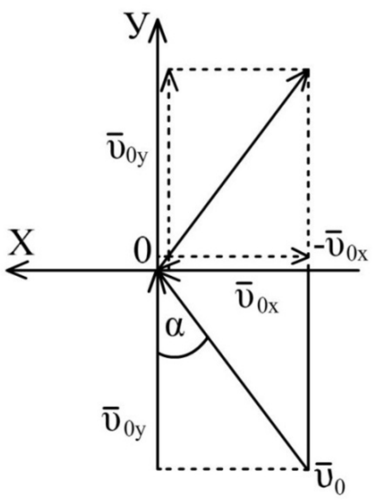
$$F = \frac{m\sqrt{2gh}}{t}; \quad [F] = \frac{кг\sqrt{\frac{м \cdot м}{с^2}}}{с} = \frac{кг \cdot м}{с^2} = Н;$$

$$F = \frac{500\sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1}}{0,01} = 221 \cdot 10^3 \text{ Н} = 221 \text{ кН}.$$

Ответ: $\langle F \rangle = 221$ кН.

Задача 1.33

Найти импульс ΔP, полученный плоской поверхностью в результате абсолютно упругого удара о нее шара массой m = 0,5 кг, если перед ударом шар имел скорость $\upsilon_0 = 5 \, \frac{м}{с}$, направленную под углом α = 30° к поверхности.



Дано: m = 0,5 кг; $\upsilon_0 = 5 \, \frac{м}{с}$; α = 30°.

Найти: ΔP.

Решение. При ударе о плоскость (см. рисунок) шар сообщает ей импульс, численно равный изменению импульса шара при ударе. При абсолютно упругом ударе проекция импульса шара на ось OY не изменяется, а проекция импульса шара на ось OX изменяет свое направление на противоположное, не изменяясь по абсолютной величине. Поэтому изменение импульса шара при ударе равно

$$\Delta P_ш = m\Delta\upsilon_x = -m\upsilon_0 \sin\alpha - m\upsilon_0 \sin\alpha = -2m\upsilon_0 \sin\alpha.$$

Импульс, получаемый стенкой,

$$\Delta P = -\Delta P_ш = 2m\upsilon_0 \sin\alpha; \quad [\Delta P] = \frac{кг \cdot м}{с};$$

$$\Delta P = 2 \cdot 0,5 \cdot 5 \cdot 0,5 = 2,5 \, \frac{кг \cdot м}{с} \, .$$

Ответ: $\Delta P = 2,5 \, \frac{кг \cdot м}{с}$.

Задача 1.34

Тело массой m = 1 кг, двигаясь равномерно, описывает три четверти окружности радиусом R = 2 м за время t = 6 с. Найти изменение модуля импульса ΔP.

Дано: m = 1 кг; R = 2 м; t = 6 с.

Найти: ΔP.

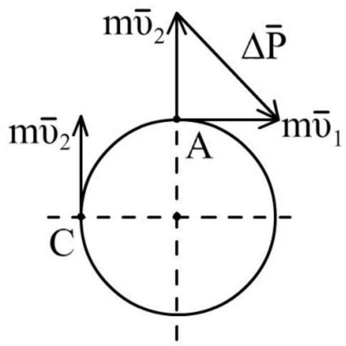
Решение. Пусть тело переместилось из точки A в точку C (см. рисунок). Скорость тела $\vec{\upsilon}$ по модулю не изменилась, но изменилось направление скорости, следовательно, изменился и импульс. Перенесем вектор импульса $\vec{P}_2 = m\vec{\upsilon}_2$ из точки C в точку A и по теореме Пифагора найдем модуль изменения импульса ΔP.

По условию задачи вращение тела равномерное, поэтому линейную скорость найдем, поделив длину окружности на время одного оборота (период):

$$\upsilon = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi R}{\frac{4}{3}t}.$$

Импульс тела

$$P = m\upsilon = \frac{3\pi Rm}{2t}.$$



Изменение модуля импульса

$$\Delta P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} = \sqrt{2P^2} = P\sqrt{2} = \frac{3\pi Rm}{\sqrt{2}t};$$

$$\left[\Delta P\right] = \frac{\text{м}\cdot\text{кг}}{\text{с}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}; \quad \Delta P = \frac{3\cdot 3{,}14\cdot 2\cdot 1}{\sqrt{2}\cdot 6} = 1{,}57\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\Delta P = 1{,}57\ \dfrac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}$.

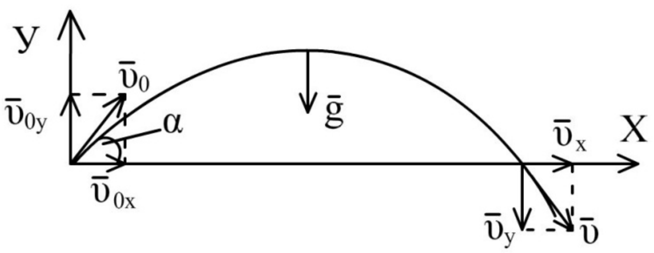
Задача 1.35

Снаряд массой m = 100 кг вылетел из орудия под углом α = 30º к горизонту с начальной скоростью $\upsilon_0 = 600\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Найти: 1) импульс силы, действующей на снаряд во время полета; 2) изменение модуля импульса снаряда ΔP за время его полета.

Дано: m = 100 кг; α = 30º; $\upsilon_0 = 600\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Найти: $F{\cdot}t$; ΔP.



Решение. Если пренебречь сопротивлением воздуха, то траекторией движения снаряда является парабола (см. рисунок).

Снаряд движется с ускорением $\vec{g}$.

1. Проекции вектора скорости в момент времени t определяются выражениями

$$\begin{cases} \upsilon_x = \upsilon_0 \cos\alpha; \\ \upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha - gt. \end{cases} \tag{1}$$

Движение снаряда вдоль оси OY описывается уравнением

$$y = \upsilon_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \tag{2}$$

В момент падения снаряда на землю координата y = 0. С учетом этого из уравнения (2) определим время полета:

$$t = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}. \tag{3}$$

При полете на снаряд действует сила тяжести. Найдем импульс силы тяжести за время полета (в проекции на OY):

$$Ft = -mg\frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g} = -2m\upsilon_0 \sin\alpha;$$

$$Ft = -2 \cdot 100 \cdot 600 \cdot 0{,}5 = -6 \cdot 10^4\ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

2. Проекция скорости υ_y в момент времени падения снаряда на землю определяется при подстановке выражения (3) в (1):

$$\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha - gt = -\upsilon_0 \sin\alpha.$$

Заметим, что $\upsilon_x = \upsilon_{0x}$, т.е. остается постоянной. Тогда изменение модуля импульса снаряда за время его полета

$$\Delta P = m\left(\upsilon_y - \upsilon_{0y}\right) = m\left(-\upsilon_0 \sin\alpha - \upsilon_0 \sin\alpha\right) = -2m\upsilon_0 \sin\alpha = Ft;$$

$$\left[\Delta P\right] = \text{Н} \cdot \text{с} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}; \quad \Delta \text{P} = -6 \cdot 10^4 \ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

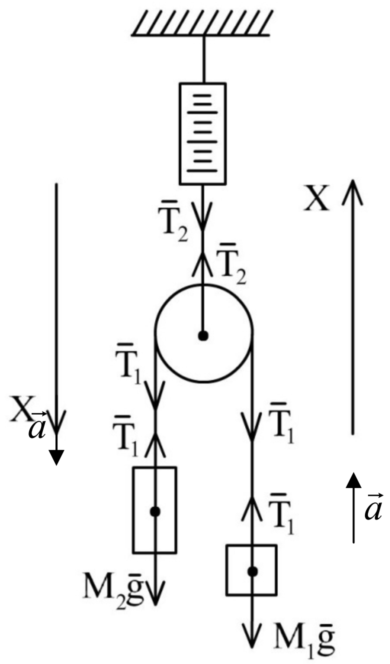
Ответ: $\Delta P = Ft = -6 \cdot 10^4 \dfrac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$

Задача 1.36

На рисунке показан блок пренебрежимо малой массы, подвешенный к пружинным весам. К концам нити, переброшенной через блок, прикреплены грузы M_1 = 1 кг и M_2 = 5 кг. Грузы движутся с ускорением под действием силы тяжести. Трение в блоке отсутствует. Что покажут весы?

Дано: M_1= 1 кг; M_2= 5 кг.

Найти: T_2.



Решение. Рассмотрим все силы, приложенные к телам M_1 и M_2, блоку, пружинным весам. Условие отсутствия трения в блоке позволяет считать равными силы натяжения нити в любом ее сечении.

Выберем направление координатной оси X и запишем уравнения движения каждого из тел:

$$\begin{cases} M_2 g - T_1 = M_2 a; \\ T_1 - M_1 g = M_1 a; \\ 2T_1 - T_2 = 0. \end{cases}$$

Весом тела называют силу, которая в положении равновесия растягивает пружину, если к ней подвесить тело. В нашем случае эта величина, равная T_2.

Из системы уравнений находим:

$$a=\frac{M_2-M_1}{M_1+M_2}g;\quad T_1=M_1 g+M_1\frac{M_2-M_1}{M_1+M_2}g;$$

$$[T_1]=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}+\frac{\text{кг}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{кг}\cdot\text{с}^2}=\text{Н};$$

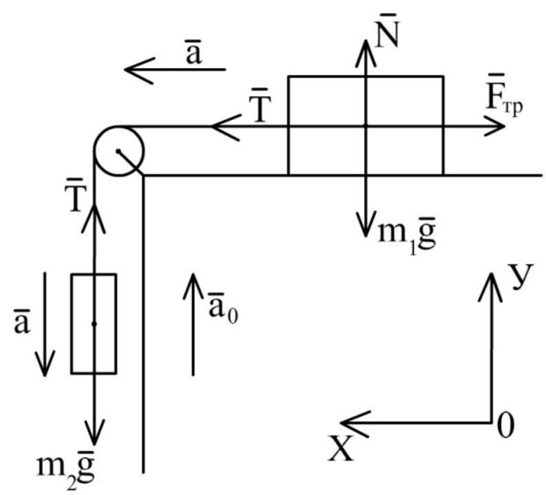
$$T_1=1\cdot 9{,}8+1\frac{5-1}{1+5}9{,}8\approx 16\ \text{Н};\quad \text{T}_2=2\text{T}_1=32\ \text{Н}.$$

Такая сила соответствует массе тела m = 3,2 кг. Таким образом, пружинные весы показывают 3,2 кг, т.е. меньше, чем сумма масс обоих тел, равная 6 кг.

Ответ: $T_2=32$ Н.

Задача 1.37

Система грузов $m_1=0{,}5$ кг и $m_2=0{,}6$ кг находится в лифте, движущемся вверх с ускорением $a_0=4{,}9\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ (см. рисунок). Определить силу натяжения нити, если коэффициент трения между грузом m_1 и опорой μ = 0,1 и ускорение груза m_2 относительно неподвижной системы отсчета.



Дано: $m_1=0{,}5$ кг; $m_2=0{,}6$ кг; $a_0=4{,}9\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; μ = 0,1; g = 9,8 $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Найти: T, a'.

Решение. Блок, через который перекинута нить, невесомый, следовательно, сила натяжения нити со стороны грузов m_1 и m_2 будет одинакова и равна *T*. Нить нерастяжима, поэтому ускорения грузов m_1 и m_2 будут одинаковы относительно лифта:

$$|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = |\vec{a}|.$$

Относительно неподвижной системы отсчета уравнения для грузов m_1 и m_2 запишутся в векторной форме так:

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = m_1(\vec{a}_0 + \vec{a}); \\ m_2\vec{g} + \vec{T} = m_2(\vec{a}_0 + \vec{a}). \end{cases}$$

В проекции на оси координат

$$\begin{cases} N - m_1 g = m_1 a_0; \\ T - m_2 g = m_2(a_0 - a); \\ T - F_{тр} = m_1 a, \end{cases}$$

где $F_{тр} = \mu N$; $N = m_1(g - a_0)$; $F_{тр} = \mu m_1(g - a_0)$.

Решаем совместно уравнения

$$\begin{cases} T - m_2 g = m_2 a_0 - m_2 a; \\ T - F_{тр} = m_1 a; \end{cases} \left| \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix} \right. ; \quad T m_1 - m_1 m_2 g + T\, m_2 - F_{тр} m_2 = m_1 m_2 a_0;$$

$$T = \frac{m_1 m_2 g + \mu m_1 m_2 (g - a_0) + m_1 m_2 a_0}{m_1 + m_2};$$

$$T = \frac{m_1 m_2 \left(g + \mu(g - a_0) + a_0\right)}{m_1 + m_2}; \quad [T] = \frac{кг \cdot кг \cdot \dfrac{м}{с^2}}{кг} = \frac{кг \cdot м}{с^2} = \text{Н};$$

$$T = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot (9{,}8 + 0{,}1(9{,}8 - 4{,}9) + 4{,}9}{0{,}5 + 0{,}6} = 4{,}14\,\text{Н}.$$

Ускорение груза m_2 относительно лифта найдем из уравнения

$$T - m_2 g = m_2 a_0 - m_2 a;$$

$$a = \frac{m_2(a_0 + g) - T}{m_2}; \quad [a] = \frac{кг \cdot \dfrac{м}{с^2} - \dfrac{кг \cdot м}{с^2}}{кг} = \frac{\dfrac{кг \cdot м}{с^2}}{кг} = \frac{м}{с^2};.$$

$$a = \frac{0,6(4,9+9,8)-4,14}{0,6} = 6,13\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Относительно неподвижной системы отсчета оно будет равно

$$\vec{a}' = \vec{a}_0 + \vec{a};$$

$$a' = a_0 - a;$$

$$a' = 4,9 - 6,13 = -1,23\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\ \text{и направлено вниз.}$$

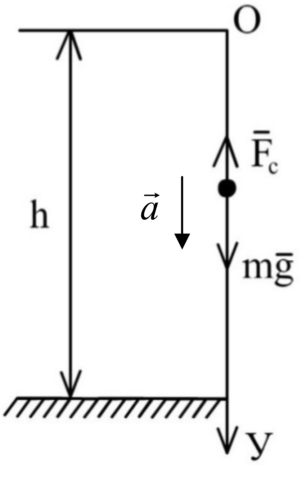
Ответ: $T = 4,14\ \text{Н}$; $a' = -1,23\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Задача 1.38

Парашютист массой m = 90 кг делает затяжной прыжок. Найти скорость парашютиста в момент раскрытия парашюта, если сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости движения: $\vec{F}_c = -r\vec{\upsilon}$, где r = 15 кг/с. Начальную скорость υ_0 принять равной нулю. Раскрытие парашюта произошло через 9 с свободного полета.

Дано: m = 90 кг; $\vec{F}_c = -r\vec{\upsilon}$; r = 15 кг/с; υ_0 = 0; t = 9 с.

Найти: υ.



Решение. Рассмотрим движение в системе отсчета, связанной с Землей. Начало координат совместим с точкой, из которой начинается движение (точка O на рисунке), ось $OУ$ направим по вертикали к Земле. Считая высоту h малой по сравнению с радиусом Земли, примем ускорение свободного падения $g = 9,8\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. На парашютиста действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила сопротивления воздуха $\vec{F}_c = -r\vec{\upsilon}$.

По второму закону Ньютона запишем:

$$ma = mg - F_c \quad \text{или} \quad m\frac{d\upsilon}{dt} = mg - r\upsilon. \qquad (1)$$

Разделим переменные в уравнении (1):

$$\frac{d\upsilon}{g - \frac{r}{m}\upsilon} = dt. \qquad (2)$$

Проинтегрируем выражение (2). Пределы интегрирования определяются условием задачи: при $t_0 = 0$ скорость υ_0 = 0, в момент времени t скорость равна υ:

$$-\frac{m}{r}\int_0^{\upsilon}\frac{d\left(g - \frac{r}{m}\upsilon\right)}{g - \frac{r}{m}\upsilon} = \int_0^t dt; \quad \ln\left[\frac{g - \frac{r}{m}\upsilon}{g}\right] = -\frac{r}{m}t;$$

$$\upsilon = \frac{m}{r}g\left(1 - e^{-\frac{r}{m}t}\right); \quad \left[\frac{r}{m}t\right] = \frac{\text{кг}\cdot\text{с}}{\text{с}\cdot\text{кг}} = 1;$$

$$[\upsilon] = \frac{\text{кг}\cdot\text{с}\cdot\text{м}}{\text{кг}\cdot\text{с}^2} = \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad \upsilon = 45{,}7\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\upsilon = 45{,}7\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 1.39

Ракета начальной массой m_0 = 500 г выбрасывает непрерывную струю газа с постоянной относительно нее скоростью υ_0 = 400 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Расход газа q = 150 $\frac{\text{г}}{\text{с}}$. Пренебрегая сопротивлением воздуха и внешним силовым полем, определить, какую скорость относительно Земли приобретает ракета через время t = 2 с после начала движения.

Дано: $m_0 = 0{,}5$ кг; $\upsilon_0 = 400\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$; $q = 0{,}15\ \dfrac{\text{кг}}{\text{с}}$; $t = 2$ с.

Найти: υ **.**

Решение. На основании закона сохранения импульса для системы «ракета – струя» запишем:

$$d\vec{P}_1 + d\vec{P}_2 = 0, \tag{1}$$

где $d\vec{P}_1$ – изменение импульса ракеты за промежуток времени dt; $d\vec{P}_2$ – изменение импульса порции газа, истекающей из ракеты за промежуток времени dt,

$$d\vec{P}_1 = \left(m_0 - qt\right)d\vec{\upsilon}, \tag{2}$$

где $\left(m_0 - qt\right)$ – масса ракеты в момент времени t, когда скорость ракеты $\vec{\upsilon}$; $d\vec{\upsilon}$ – изменение скорости за время dt (за счет реактивного действия выбрасываемой струи газа).

Порция газа qdt, двигаясь вместе с ракетой, обладает скоростью $\vec{\upsilon}$. Покинув ракету, эта же масса газа за время dt приобретает относительно Земли скорость $\vec{\upsilon} + \vec{\upsilon}_0$. Таким образом, импульс порции газа, выброшенной из ракеты, изменится на величину

$$d\vec{P}_2 = q\left(\vec{\upsilon} + \vec{\upsilon}_0\right)dt - q\vec{\upsilon}dt = q\vec{\upsilon}_0 dt;$$

$$d\vec{P}_2 = q\vec{\upsilon}_0 dt, \tag{3}$$

где qdt – масса выбрасываемой порции газа.

Подставив формулы (2) и (3) в выражение (1), получим:

$$\left(m_0 - qt\right)d\vec{\upsilon} + q\vec{\upsilon}_0 dt = 0. \tag{4}$$

Выбрав ось X по направлению скорости ракеты $\vec{\upsilon}$, в проекции на эту ось уравнение (4) запишем в виде:

$$\left(m_0 - qt\right)d\upsilon - q\upsilon_0 dt = 0$$

(учли, что $\upsilon_x = -\upsilon_0$).

Тогда

$$d\upsilon = \frac{q\upsilon_0}{m_0 - qt}dt. \tag{5}$$

Скорость υ как функцию времени найдем, интегрируя выражение (5) в пределах от 0 до t. При $t = 0$ $\upsilon = 0$, следовательно,

$$\int_0^{\upsilon} d\upsilon = \upsilon_0 \int_0^t \frac{q dt}{m_0 - qt},$$

откуда

$$\upsilon = \upsilon_0 \ln \frac{m_0}{m_0 - qt}; \quad [\upsilon] = \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad \upsilon = 365 \, \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\upsilon = 365 \, \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 1.40

Моторная лодка массой m = 400 кг, двигаясь по озеру, за t = 10 с достигает скорости υ = 36 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Найти силу тяги мотора F_m, считая ее постоянной, если сила сопротивления движению $\vec{F}_c = k\vec{\upsilon}$, где k = 120 кг/с.

Дано: m = 400 кг; t = 10 с; υ = 10 м/с; k = 120 кг/с.

Найти: F_m.

Решение. Из условия задачи следует, что сила сопротивления

$$\vec{F}_c = k\vec{\upsilon}.$$

По второму закону Ньютона

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F_m - F_c}{m} = \frac{F_m - k\upsilon}{m}. \tag{1}$$

С другой стороны, по определению ускорение $a = \frac{d\upsilon}{dt}$, тогда уравнение (1) перепишем в виде

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{F_m - k\upsilon}{m}$$

После разделения переменных получим:

$$d\upsilon = \frac{F_m - k\upsilon}{m}dt \quad \text{или} \quad \frac{d\upsilon}{\upsilon - \frac{F_m}{k}} = -\frac{k}{m}dt. \qquad (2)$$

Интегрируем уравнение (2):

$$\ln\left|\upsilon - \frac{F_m}{k}\right| = -\frac{k}{m}t + C, \qquad (3)$$

где C – постоянная интегрирования.

Для определения скорости υ потенцируем выражение (3):

$$\upsilon - \frac{F_m}{k} = e^{-\frac{k}{m}t} \cdot e^c \quad \text{или} \quad \upsilon = \frac{F_m}{k} + e^{-\frac{k}{m}t} \cdot e^c. \qquad (4)$$

Из граничных условий известно, что при $t = 0$ скорость $\upsilon = 0$, отсюда находится постоянная интегрирования C:

$$0 = \frac{F_m}{k} + e^{-\frac{k}{m}0} \cdot e^c,$$

откуда

$$e^c = -\frac{F_m}{k}.$$

Тогда уравнение (4) примет вид:

$$\upsilon = \frac{F_m}{k} - e^{-\frac{k}{m}t} \cdot \frac{F_m}{k} = \frac{F_m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right). \qquad (5)$$

Из уравнения (5) найдем силу тяги мотора:

$$F_m = \frac{k\upsilon}{1 - e^{-\frac{k}{m}t}}; \quad [F_m] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с} \cdot \text{с}} = \text{Н}; \quad F_m = 1260 \text{ Н}.$$

Ответ: $F_m = 1260$ Н.

Задача 1.41

Скорость пули массой m = 9 г при движении в воздухе за t = 1 с уменьшилась с $\upsilon_0 = 900$ м/с до $\upsilon = 200$ м/с. Найти коэффициент сопротивления k, считая силу сопротивления воздуха пропорциональной квадрату скорости: $F_c = k\upsilon^2$.

Дано: $m = 9\cdot 10^{-3}$ кг; $t = 1$ с; $\upsilon_0 = 900$ м / с; $\upsilon = 200$ м / с; $F_c = k\upsilon^2$.

Найти: k.

Решение. По второму закону Ньютона

$$F = ma = m\frac{d\upsilon}{dt}. \quad (1)$$

Из условия задачи сила сопротивления

$$F_c = -k\upsilon^2. \quad (2)$$

Знак «минус» в уравнении (2) берется потому, что сила сопротивления противоположна скорости пули.

Из уравнений (1) и (2) запишем дифференциальное уравнение полета пули, из которого определим коэффициент сопротивления:

$$k\upsilon^2 = -m\frac{d\upsilon}{dt}.$$

Разделив переменные, получим:

$$\frac{d\upsilon}{\upsilon^2} = -\frac{k}{m}dt. \quad (3)$$

Интегрируем выражение (3):

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon^2} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt; \qquad \frac{1}{\upsilon} - \frac{1}{\upsilon_0} = \frac{kt}{m},$$

откуда

$$k = \frac{m(\upsilon - \upsilon_0)}{\upsilon\upsilon_0 t};$$

$$[k] = \frac{\text{кг}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}}}{\frac{\text{м}}{\text{с}}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}}\cdot\text{с}} = \frac{\text{кг}}{\text{м}}; \quad k = \frac{9\cdot 10^{-3}(900-200)}{200\cdot 900\cdot 1} = 3{,}5\cdot 10^{-5}\ \frac{\text{кг}}{\text{м}}.$$

Ответ: $k = 3{,}5\cdot 10^{-5}\ \dfrac{\text{кг}}{\text{м}}$.

Задача 1.42

Однородная цепочка длиной l = 1,5 м и массой m = 3 кг лежит на столе. Если часть цепочки длиной $l_0 = 0{,}2$ м спустить со стола, то она начнет скользить вниз. Коэффициент трения цепочки о стол μ = 0,1. Найти работу, совершаемую против силы трения при соскальзывании всей цепочки.

Дано: l = 1,5 м; $l_0 = 0{,}2$ м; m = 3 кг; μ = 0,1.

Найти: A.

Решение. На часть цепочки длиной x, лежащей на столе, действует сила трения

$$F_{mp} = \mu \frac{mg}{l} x, \qquad (1)$$

где $\dfrac{m}{l}$ – масса единицы длины цепочки.

Сила трения зависит от длины цепочки, находящейся на столе. При скольжении цепочки сила трения уменьшается, т.е. в задаче требуется определить работу переменной силы.

Для бесконечно малого перемещения dx силу трения можно считать постоянной. Тогда элементарная работа, совершаемая при этом против силы трения, равна

$$dA = -F_{mp} dx,$$

или с учетом (1)

$$dA = -\mu \frac{mg}{l} x dx. \qquad (2)$$

По условию задачи скольжение цепочки начинается, когда ее часть длиной l_0 свесится со стола. Следовательно, работа совершается при изменении длины части цепочки, находящейся на столе, от $(l - l_0)$ до 0. Учитывая эти граничные условия и выражение (2), на основании формулы работы переменной силы

$$\left(A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 F dS \cos\alpha = \int_1^2 F_S dS \right)$$

запишем:

$$A = -\int\limits_{l-l_0}^{0} \mu \frac{mg}{l} x dx = \mu \frac{mg}{2l}\left(l - l_0\right)^2; \; \left[A\right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}} \cdot \text{м}^2 = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж};$$

$$A = 0{,}1\frac{3 \cdot 9{,}8}{2 \cdot 1{,}5}\left(1{,}5 - 0{,}2\right)^2 = 1{,}69 \text{ Дж}.$$

Ответ: $A = 1{,}69$ Дж.

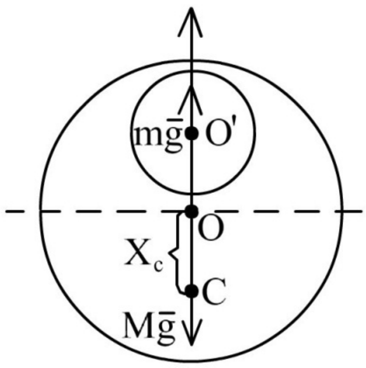
Задача 1.43

Однородная тонкая пластинка имеет форму круга (радиус R = 60 см), в котором вырезано круглое отверстие (радиус r = 25 см), с центром, лежащим на середине вертикального радиуса пластинки (см. рисунок). Определить положение центра масс этой фигуры.

Дано: R = 0,6 м; r = 0,25 м; OO' = R/2.

Найти: x_c.

Решение. Представим, что круглое отверстие заполнено тем же материалом, из которого сделана круглая пластинка. Тогда центр масс, к которому приложена сила тяжести $M\vec{g}$, будет находиться в центре круга (точка O на рисунке). Чтобы скомпенсировать эффект заполнения отверстия, приложена сила $m\vec{g}$, направленная вертикально вверх.



Из соображений симметрии очевидно, что центр масс фигуры находится на вертикальной оси, проходящей через точки O и O'. Помещая начало вертикальной оси X в точку O, запишем выражение для центра масс:

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i},$$

где m_i − масса i-того тела; x_i − координата центра масс i-того тела.

Учитывая условие задачи и данные рассуждения, можем записать:

$$x_c = \frac{-m\dfrac{R}{2}}{M-m}. \qquad (1)$$

Если плотность пластинки ρ, толщина h, то $M = \rho\pi R^2 h$, $m = \rho\pi r^2 h$. Подставляя эти выражения в формулу (1), найдем искомое положение центра масс:

$$x_c = -\frac{r^2 R}{2\left(R^2 - r^2\right)}; \quad \left[x_c\right] = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{м}}{\text{м}^2} = \text{м};$$

$$x_c = -\frac{0{,}25^2 \cdot 0{,}6}{2\left(0{,}6^2 - 0{,}25^2\right)} = -6{,}3 \text{ см}.$$

Знак «минус» означает, что центр масс находится ниже центра пластинки O.

Ответ: $x_c = -6{,}3$ см.

Задача 1.44

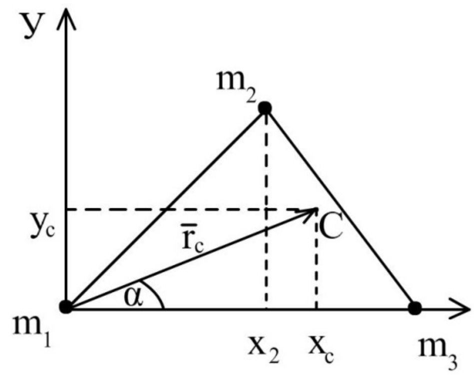
Определить положение центра масс (радиус-вектор центра масс $\vec{r}_c$ и его модуль $\left|\vec{r}_c\right|$) системы, состоящей из трех материальных точек массами $m_1 = 1{,}4$ кг, $m_2 = 1{,}2\,кг$ и $m_3 = 1{,}8$ кг, находящихся в вершинах равностороннего треугольника со стороной a = 0,6 м. Определить также угол α (см. рисунок).

Дано: $m_1 = 1{,}4$ кг; $m_2 = 1{,}2$ кг; $m_3 = 1{,}8$ кг; a = 0,6 м.

Найти: $\vec{r}_c$, r_c, α.

Решение. Начало координат поместим в точку расположения массы m_1, а ось X направим вдоль прямой, соединяющей материальные точки массами m_1 и m_3 (см. рисунок).

Тогда координаты соответствующих материальных точек массами m_1, m_2 и m_3:



$$x_1 = 0;\ y_1 = 0;$$

$$x_2 = a\sin\pi/6;\ y_2 = a\cos\pi/6;$$

$$x_3 = a;\ y_3 = 0.$$

Учитывая выражение для координат центра масс системы материальных точек,

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i};\qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},$$

где x_i, y_i – координаты i-той точки; m_i – масса i-той точки; n – число материальных точек системы.

Для нашей задачи можем записать:

$$x_c = \frac{m_2 a\sin\frac{\pi}{6} + m_3 a}{m_1 + m_2 + m_3};$$

$$y_c = \frac{m_2 a\cos\frac{\pi}{6}}{m_1 + m_2 + m_3}. \tag{1}$$

Искомый радиус-вектор центра масс системы материальных точек

$$\vec{r}_c = x_c\vec{i} + y_c\vec{j} = \frac{m_2 a\sin\frac{\pi}{6} + m_3 a}{m_1 + m_2 + m_3}\vec{i} + \frac{m_2 a\cos\frac{\pi}{6}}{m_1 + m_2 + m_3}\vec{j};\quad \left[\vec{r}_c\right] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{кг}} = \text{м};$$

$$\vec{r}_c = \left(32{,}7\vec{i} + 14\vec{j}\right)\ \text{см}.$$

Модуль радиус-вектора центра масс системы материальных точек

$$\left|\vec{r}_c\right| = \sqrt{x_c^{\,2} + y_c^{\,2}} = \frac{a\sqrt{\left(m_2\sin\frac{\pi}{6} + m_3\right)^2 + \left(m_2\cos\frac{\pi}{6}\right)^2}}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$\left[r_c\right] = \frac{\text{м}\sqrt{\text{кг}^2}}{\text{кг}} = \text{м};\quad r_c = 35{,}7\ \text{см}.$$

Искомый угол (см. рисунок)

$$\alpha = \mathrm{arctg}\frac{m_2\cos\frac{\pi}{6}}{m_2\sin\frac{\pi}{6}+m_3}; \quad \alpha = \frac{\text{кг}}{\text{кг}} = 1; \quad \alpha = \mathrm{arctg}\frac{1,2\cdot 0,866}{1,2\cdot 0,5+1,8} = 23°25'.$$

Ответ: $\vec{r}_c = \left(32,7\vec{i} + 14\vec{j}\right)$ см; $r_c = 35,7$ см; $\alpha = 23°25'$.

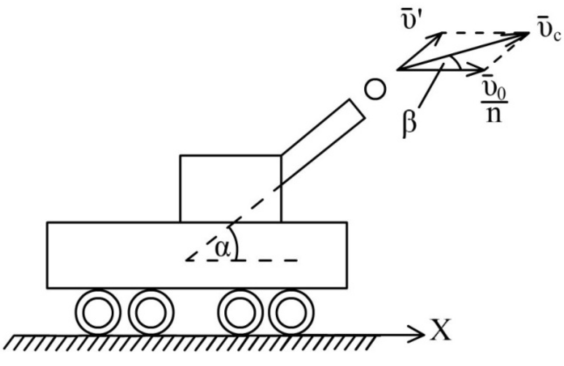
Задача 1.45

На железнодорожной платформе, движущейся со скоростью $\upsilon_0 = 3,6$ км/ч, укреплено орудие (см. рисунок). Масса платформы с орудием M = 1 т. Ствол орудия направлен в сторону движения платформы и приподнят над горизонтом на угол $\alpha = 60°$. Найти скорость снаряда υ' (m = 10 кг) относительно платформы, если после выстрела скорость платформы уменьшилась в n = 2 раза.

Дано: $\upsilon_0 = 1$ м/с; $M = 10^3$ кг; $\alpha = 60°$; m = 10 кг.

Найти: υ'.

Решение. Система состоит из двух тел – платформы и снаряда. Силы, действующие на систему ($m\vec{g}$ и $\vec{N}$), направлены по вертикали. По оси X $\sum\vec{F} = 0$, следовательно, $\Delta\sum m\upsilon_x = 0$, т.е. импульс по оси X сохраняется до и после выстрела. Относительно неподвижной системы отсчета, связанной с Землей, можно записать:



$$\left(M+m\right)\upsilon_0 = M\frac{\upsilon_0}{n} + m\upsilon_c\cos\beta,$$

где υ_c – скорость снаряда относительно Земли.

$$\vec{\upsilon}_c = \vec{\upsilon}' + \frac{\vec{\upsilon}_0}{n}.$$

Спроектируем на ось X:

$$\upsilon_c\cos\beta = \upsilon'\cos\alpha + \frac{\upsilon_0}{n};$$

$$\left(M+m\right)\upsilon_0 = M\frac{\upsilon_0}{n} + m\left(\upsilon'\cos\alpha + \frac{\upsilon_0}{n}\right);$$

$$\left(M+m\right)\upsilon_0 = M\frac{\upsilon_0}{n} + m\upsilon'\cos\alpha + \frac{m\upsilon_0}{n};$$

$$\upsilon' = \frac{\upsilon_0\left(M+m-\dfrac{M}{n}-\dfrac{m}{n}\right)}{m\cos\alpha} = \frac{\upsilon_0\left(n-1\right)\left(M+m\right)}{nm\cos\alpha};$$

$$\left[\upsilon'\right] = \frac{\text{м}\cdot\text{кг}}{\text{с}\cdot\text{кг}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad \upsilon' = \frac{1\cdot 1\cdot(10^3+10)}{2\cdot 10\cdot 0{,}5} = 101 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\upsilon' = 101 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

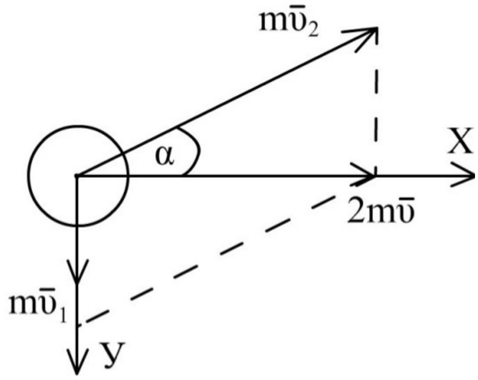
Задача 1.46

Снаряд, летящий на высоте H = 40 м горизонтально со скоростью υ = 100 м/с, разрывается на две равные части. Одна часть снаряда спустя время t = 1 с падает на землю точно под местом взрыва. Определить скорость другой части снаряда сразу после взрыва.

Дано: H = 40 м; υ = 100 м/с; g = 10 м/с^2; t = 1 с.

Найти: υ_2.

Решение. Пусть вектор $\vec{\upsilon}$ лежит в плоскости XY и направлен по оси X. На снаряд действует внешняя сила тяжести, направленная по оси Y. Поэтому при выбранном направлении $\vec{\upsilon}$ сохраняется проекция импульса по оси X (см. рисунок),



$$2m\upsilon = m\upsilon_2\cos\alpha.$$

Из треугольника

$$\text{tg}\alpha = \frac{\upsilon_1}{2\upsilon},$$

υ_1 определяется из условия

$$H = \upsilon_1 t + \frac{gt^2}{2};\ \ \upsilon_1 = \frac{H}{t} - gt\ ;$$

$$[\upsilon_1] = \frac{\text{м}}{\text{с}} - \frac{\text{м}\cdot\text{с}}{\text{с}^2} = \frac{\text{м}}{\text{с}};\quad \upsilon_1 = 30\ \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\upsilon_2 = \frac{2\upsilon}{\cos\alpha};\quad H\text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha};\quad \frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\upsilon_1}{2\upsilon} = \frac{30}{200} = 0{,}15;\quad \upsilon_2 = 200\sqrt{1+0{,}15^2} \approx 202\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\upsilon_2 \approx 202\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 1.47

Тело скользит по наклонной плоскости, составляющей угол α = 60º с горизонтом. Зависимость пути S от времени t задается уравнением $S = A + Bt + Ct^2$, где A = 5 м; B = −1 м/с; C = 1,5 м/с^2. Найти коэффициент трения μ тела о плоскость.

Дано: α = 60º; $S = A + Bt + Ct^2$; A = 5 м; B = −1 м/с; C = 1,5 м/с^2.

Найти: μ.

Решение. Дифференцируя дважды заданное уравнение движения тела по времени, найдем ускорение:

$$a = \frac{d^2S}{dt^2} = 2\ \text{с}. \tag{1}$$

На рисунке показаны силы, действующие на тело.

Применим второй закон Ньютона для данного тела:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{тр} + \vec{N}\ . \tag{2}$$

Запишем уравнение (2) в проекциях на координатные оси:

OX :

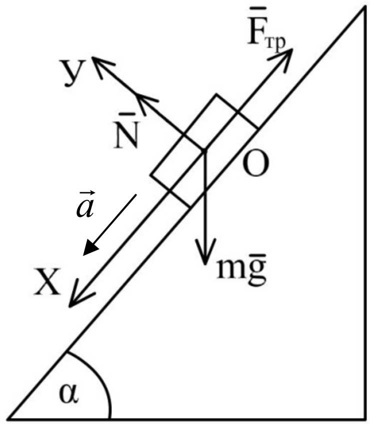
$$ma = -F_{тр} + mg\sin\alpha; \qquad (3)$$

OY :

$$0 = N - mg\cos\alpha\ . \qquad (4)$$

Из уравнения (4) найдем реакцию опоры:

$$N = mg\cos\alpha.$$



Сила трения

$$F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha. \qquad (5)$$

Подставив уравнение (5) в (3), получим:

$$ma = -\mu mg\cos\alpha + mg\sin\alpha,$$

откуда $a = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha$, согласно выражению (1) $a = 2C$, тогда

$$g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha = 2C$$

и

$$\mu = \frac{g\sin\alpha - 2C}{g\cos\alpha}; \quad [\mu] = \frac{\left(\frac{м}{с^2} - \frac{м}{с^2}\right)}{\frac{м}{с^2}} = 1;$$

$$\mu = \frac{9{,}8\cdot 0{,}866 - 2\cdot 1{,}5}{9{,}8\cdot 0{,}5} = 1{,}1.$$

Ответ: $\mu = 1{,}1$.

Задача 1.48

На краю наклонной плоскости с углом наклона α лежит тело. Плоскость равномерно вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Расстояние от тела до оси вращения *R* (см. рисунок).

Определить наименьший коэффициент трения μ_0, при котором тело удерживается на вращающейся наклонной плоскости.

Рассмотреть два предельных случая: 1) тело находится на горизонтальной плоскости, которая равномерно вращается вокруг вертикальной оси; 2) тело лежит на неподвижной наклонной плоскости.

Дано: α; $\vec{\omega}$; R.

Найти: μ_0; 1) α, μ_0; 2) $\vec{\omega}$, μ_0.

Решение. При решении задачи вспомним, что кроме трения скольжения существует также трение покоя, которое характеризует силу сопротивления при любых попытках сдвинуть тело. Сила трения покоя определяется выражением $F_{тр} = \mu_n N$, где μ_n − коэффициент трения покоя.

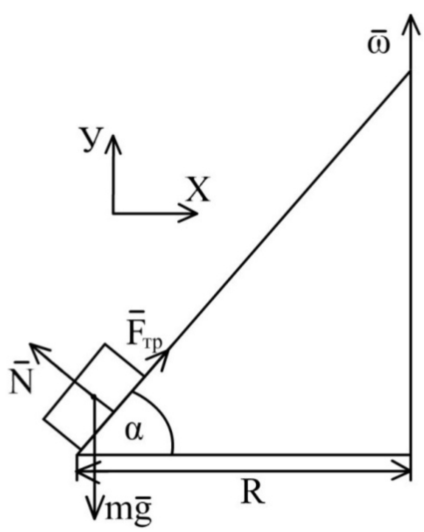
Поскольку сила трения покоя изменяется от нуля до этого максимального значения, можно записать: $F_{тр} \le \mu_n N$. Почти всегда μ_n превосходит $\mu_{ск}$ (коэффициент трения скольжения) и никогда не может быть меньше.

Рассмотрим силы, действующие на тело: сила тяжести $M\vec{g}$, сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$, так как относительно наклонной плоскости тело покоится, сила реакции опоры $\vec{N}$.

Запишем второй закон Ньютона в векторной форме, учитывая тот факт, что тело вращается вместе с наклонной плоскостью:

$$\vec{F}_{тр} + \vec{N} + M\vec{g} = M\vec{a}.$$

Выберем направления координатных осей, как показано на рисунке, и запишем уравнение движения нашего тела в скалярной форме:



$$X: \quad F_{тр}\cos\alpha - N\sin\alpha = M\omega^2 R;$$

$$Y: \quad N\cos\alpha + F_{тр}\sin\alpha - Mg = 0$$

$$F_{тр} = \mu_0 N.$$

Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \mu_0 N\cos\alpha - N\sin\alpha = M\omega^2 R; \\ N\cos\alpha + \mu_0 N\sin\alpha = Mg, \end{cases}$$

делим правые и левые части:

$$\frac{\mu_0\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \mu_0\sin\alpha} = \frac{\omega^2 R}{g};$$

$$g\mu_0\cos\alpha - g\sin\alpha = \omega^2 R\cos\alpha + \mu_0\omega^2 R\sin\alpha;$$

$$\mu_0\left(g\cos\alpha-\omega^2R\sin\alpha\right)=\omega^2R\cos\alpha+g\sin\alpha;$$

получаем:

$$\mu_0=\frac{\omega^2R\cos\alpha+g\sin\alpha}{g\cos\alpha-\omega^2R\sin\alpha}.$$

Проанализируем ответ: $\mu_0>0$, следовательно, $g\cos\alpha-\omega^2R\sin\alpha>0$, т.е. $\mathrm{tg}\alpha<\dfrac{g}{\omega^2R}$. Если это условие не выполнено, то никакая сила трения не в силах удержать тело на вращающейся наклонной плоскости.

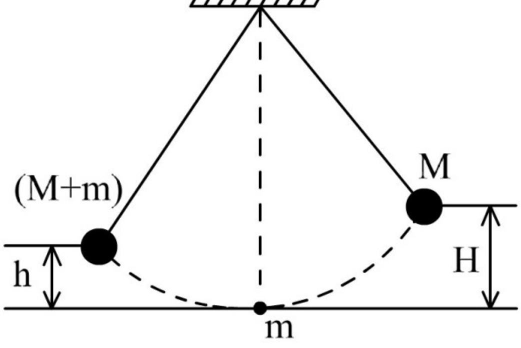
Предельные случаи:

1) $\alpha=0$; $\mu_0=\dfrac{\omega^2R}{g}$; 2) $\omega=0$; $\mu_0=\mathrm{tg}\alpha$.

Ответ: $\mu_0=\dfrac{\omega^2R\cos\alpha+g\sin\alpha}{g\cos\alpha-\omega^2R\sin\alpha}$; 1) $\alpha=0$; $\mu_0=\dfrac{\omega^2R}{g}$; 2) $\omega=0$; $\mu_0=tg\alpha$.

Задача 1.49

Маятник с грузиком массой *M* подняли на высоту *H* и отпустили. В нижней точке своей траектории грузик налетает на кусочек пластилина массой *m* (см. рисунок). До какой высоты *h* поднимется грузик с налипшим на нем пластилином? Какая часть механической энергии при этом ударе перейдет во внутреннюю энергию *W*?



Дано: *M*; *H*; *m*.

Найти: *h*, *W*.

Решение. В данном случае мы имеем дело с абсолютно неупругим ударом. Физические явления при неупругом столкновении тел довольно сложны. Сталкивающиеся тела деформируются, возникают упругие силы, силы трения и т.д., иначе говоря, во время столкновения в системе действуют диссипативные силы, уменьшающие кинетическую энергию макроскопического движения. Поэтому применять закон сохранения механической энергии к процессам, происходящим во время неупругого удара, нельзя. Но после того как удар закончился и сталкивающиеся тела соединились в одно тело, законом сохранения механической энергии пользоваться можно (если в дальнейшем не действуют диссипативные силы).

Мы считаем, что процесс столкновения происходит настолько быстро, что за время столкновения система не успевает отклониться на заметный угол. Задача заключается в том, чтобы найти скорость этого движения непосредственно после удара. Систему маятник – пластилин во время удара можно считать замкнутой и применять к ней закон сохранения импульса $\left(\vec{p} = \text{const, если } \vec{F}_{внеш} = 0\right)$:

$$M\upsilon = \left(M + m\right)u\ , \tag{1}$$

где υ − скорость маятника до удара; u − скорость системы маятник – пластилин после удара.

Чтобы найти скорость υ, воспользуемся законом сохранения механической энергии:

$$MgH = \frac{M\upsilon^2}{2}\ . \tag{2}$$

Для определения потерь кинетической энергии W в этом ударе воспользуемся общим законом сохранения энергии:

$$MgH = \frac{\left(M + m\right)u^2}{2} + W. \tag{3}$$

Найдем теперь из уравнения (2) скорость υ, подставим ее значение в (1) и получим скорость нашей системы после удара:

$$\upsilon = \sqrt{2gH}\ ; \quad u = \frac{M\sqrt{2gH}}{M + m}. \tag{4}$$

Как было сказано выше, после удара можно опять воспользоваться законом сохранения механической энергии, чтобы найти, на какую высоту h поднимется грузик с пластилином:

$$\frac{\left(M + m\right)u^2}{2} = \left(M + m\right)gh, \tag{5}$$

отсюда получаем:

$$h = \frac{u^2}{2g} = \frac{M}{M + m}H. \tag{6}$$

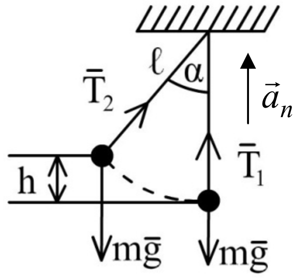
Подставляя (4) в (3), определяем:

$$W = MgH\frac{m}{M+m}.$$

Ответ: $h = \frac{M}{M+m}H$; $W = MgH\frac{m}{M+m}$.

Задача 1.50

Шарик массой m = 0,2 кг, подвешенный на нити длиной l = 1 м, совершает колебания в вертикальной плоскости. Найти угол α отклонения нити от вертикали, при котором кинетическая энергия шарика в его нижнем положении $E_к = 1{,}6$ Дж. Чему равно отношение сил натяжения нити в нижнем и верхнем положениях?



Дано: m = 0,2 кг; l = 1 м; $E_к = 1{,}6$ Дж.

Найти: α; $\frac{T_1}{T_2}$.

Решение. Из закона сохранения энергии найдем угол α: потенциальная энергия шарика, находящегося на высоте $h = l(1 - \cos\alpha)$ (см. рисунок), переходит в кинетическую энергию этого шарика в нижней точке траектории:

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2} = mgh\ ;\ \ mgl\left(1-\cos\alpha\right) = E_к,$$

откуда

$$\cos\alpha = 1 - \frac{E_к}{mgl} = 0{,}4;\ \ \alpha = \arccos(0{,}4) \approx 66{,}5°.$$

В нижней точке траектории нормальное ускорение шарика

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{l} = \frac{m\upsilon^2}{2}\cdot\frac{2}{ml} = \frac{2E_к}{ml}.$$

По второму закону Ньютона для нижней точки траектории запишем:

$$ma_n = T_1 - mg,$$

откуда

$$T_1 = m\left(a_n + g\right) = m\left(\frac{2E_к}{ml} + g\right); \qquad (1)$$

$$\left[T_1\right] = кг\left(\frac{Дж}{кг \cdot м} + \frac{м}{с^2}\right) = кг\left(\frac{кг \cdot м^2}{с^2 \cdot кг \cdot м} + \frac{м}{с^2}\right) = \frac{кг \cdot м}{с^2} = Н.$$

В верхней точке траектории скорость шарика и его нормальное ускорении равны нулю, поэтому

$$T_2 - mg\cos\alpha = 0; \quad T_2 = mg\cos\alpha = m\left(g - \frac{E_к}{ml}\right). \qquad (2)$$

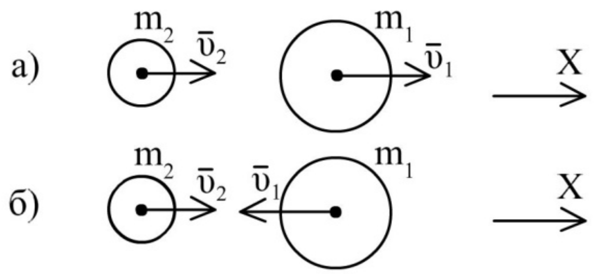
Из уравнений (1) и (2) найдем отношение сил натяжения нити:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{m\left(\frac{2E_к}{ml} + g\right)}{m\left(g - \frac{E_к}{ml}\right)} = \frac{2E_к + gml}{gml - E_к}; \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{2 \cdot 1{,}6 + 9{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 1}{9{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 1 - 1{,}6} = 13{,}5.$$

Ответ: $\alpha = \arccos(0{,}4) \approx 66{,}5°$; $\frac{T_1}{T_2} = 13{,}5.$

Задача 1.51

Два шара массами $m_1 = 6$ кг и $m_2 = 4$ кг движутся со скоростями $\upsilon_1 = 5$ м/с и $\upsilon_2 = 12$ м/с и сталкиваются друг с другом. Найти скорость шаров после удара, считая удар прямым и неупругим, в случаях, когда: 1) второй шар догоняет первый; 2) шары движутся навстречу друг другу.



Дано: $m_1 = 6$ кг; $m_2 = 4$ кг; $\upsilon_1 = 5$ м/с; $\upsilon_2 = 12$ м/с.

Найти: *u*.

Решение. После неупругого удара шары движутся как единое целое, т.е. имеют одну и ту же скорость *u*.

Закон сохранения импульса в проекции на ось *X*, когда второй шар догоняет первый (см. рис., *а*), будет иметь вид:

$$m_2\upsilon_2 + m_1\upsilon_1 = \left(m_1 + m_2\right)u,$$

откуда скорость шаров после удара

$$u=\frac{m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2}{m_1+m_2}\ ;\ \ u=\frac{\text{кг}\cdot\dfrac{\text{м}}{\text{с}}+\text{кг}\cdot\dfrac{\text{м}}{\text{с}}}{\text{кг}+\text{кг}}=\frac{\text{м}}{\text{с}};\ \ u=\frac{6\cdot 5+4\cdot 12}{6+4}=7{,}8\ \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Рассмотрим второй случай, когда шары движутся навстречу друг другу (см. рис., *б*). Предположим, что после удара шары будут двигаться в направлении *X*. Тогда закон сохранения импульса в проекции на ось *X* будет иметь вид

$$m_2\upsilon_2-m_1\upsilon_1=\left(m_1+m_2\right)u,$$

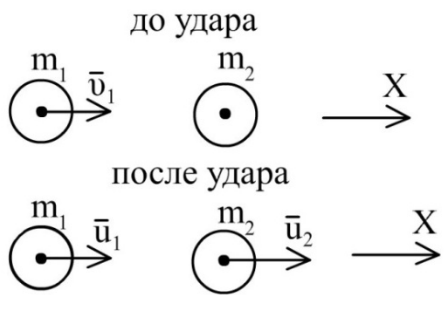
откуда

$$u=\frac{m_1\upsilon_1-m_2\upsilon_2}{m_1+m_2}\ ;\ u=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{кг}\cdot\text{с}}=\frac{\text{м}}{\text{с}};\ u=\frac{4\cdot 12-6\cdot 5}{6+4}=\frac{48-30}{10}=\frac{18}{10}=1{,}8\ \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: 1) $u=7{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; 2) $u=1{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 1.52

Какую часть кинетической энергии передает движущийся шар массой m_1 неподвижному шару массой m_2 при абсолютно упругом центральном ударе, если: а) $m_1=m_2$; б) $m_1=7m_2$.



Дано: m_1; m_2.

Найти: $\dfrac{E'_{к2}}{E_{к1}}$.

Решение. Запишем закон сохранения импульса в проекции на ось *X* (см. рисунок):

$$m_1\upsilon_1=m_1u_1+m_2u_2$$

или

$$m_1(\upsilon_1-u_1)=m_2u_2. \qquad (1)$$

Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2}=\frac{m_1u_1^2}{2}+\frac{m_2u_2^2}{2}$$

или

$$m_1\left(\upsilon_1^2-u_1^2\right)=m_2u_2^2\ ;\quad m_1\left(\upsilon_1-u_1\right)\left(\upsilon_1+u_1\right)=m_2u_2^2. \tag{2}$$

Поделив друг на друга левые и правые части уравнений (1) и (2)

$$\frac{m_1\left(\upsilon_1-u_1\right)\left(\upsilon_1+u_1\right)}{m_1\left(\upsilon_1-u_1\right)}=\frac{m_2u_2^2}{m_2u_2}\ ;\quad \upsilon_1+u_1=u_2 \tag{3}$$

и подставив выражение (3) в (1), получим:

$$u_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1. \tag{4}$$

Найдем

$$u_2=\upsilon_1+u_1=\upsilon_1+\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1=\frac{2m_1\upsilon_1}{m_1+m_2}. \tag{5}$$

Кинетическая энергия первого шара до удара

$$E_{к1}=\frac{m_1\upsilon_1^2}{2}. \tag{6}$$

Кинетическая энергия второго шара после удара

$$E'_{к2}=\frac{m_2u_2^2}{2}=\frac{4m_1^2\,m_2\upsilon_1^2}{2\left(m_1+m_2\right)^2}. \tag{7}$$

Из уравнений (6), (7) найдем отношение

$$\frac{E'_{к2}}{E_{к1}}=\frac{4m_1\,m_2}{\left(m_1+m_2\right)^2}\ ; \tag{8}$$

а) пусть $m_1=m_2$:

$$\frac{E'_{к2}}{E_{к1}}=\frac{4m_1\,m_2}{\left(m_1+m_2\right)^2}=\frac{4m_1^2}{4m_1^2}=1;\quad \left[\frac{E_{к2}}{E_{к1}}\right]=\frac{Дж}{Дж}=1.$$

б) пусть $m_1=7m_2$:

$$\frac{E'_{к2}}{E_{к1}}=\frac{4m_1\,m_2}{\left(m_1+m_2\right)^2}=\frac{28}{68m_2^2};\quad \frac{E_{к2}}{E_{к1}}\approx 0,44.$$

Ответ: а) $\frac{E'_{к2}}{E_{к1}}=1$; б) $\frac{E'_{к2}}{E_{к1}}=0,44$.

Задача 1.53

На тележке, представляющей собой длинную доску с колесами на концах, стоит человек массой M = 70 кг. Определить скорость перемещения доски υ_{∂} относительно земли, если человек будет двигаться вдоль нее со скоростью υ = 2 м/с (относительно доски). Масса доски m = 10 кг. Массой колес и сопротивлением при движении пренебречь.

Дано: M = 70 кг; m = 10 кг; υ = 2 м/с.

Найти: υ_{∂}.

Решение. Поскольку человек движется по доске с постоянной скоростью, то перемещение доски относительно земли также будет равномерным. Скорость перемещения доски найдем, используя закон сохранения импульса:

$$M\upsilon = \left(m+M\right)\upsilon_{\partial},$$

откуда

$$\upsilon_{\partial} = \frac{M\upsilon}{m+M};\quad \left[\upsilon_{\partial}\right] = \frac{\text{кг}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}}}{\text{кг}} = \frac{\text{м}}{\text{с}};\quad \upsilon_{\partial} = \frac{70\cdot 2}{10+70} = 1{,}75\ \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\upsilon_{\partial} = 1{,}75\ \ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 1.54

Груз массой m = 4,5 кг, подвешенный на нити длиной l = 1,6 м, вращается в горизонтальной плоскости с частотой n = 36 об/мин. Найти угол α, образованный нитью с вертикалью, силу натяжения нити T и скорость вращения груза υ.

Дано: m = 4,5 кг; l = 1,6 м; n = 0,6 с^{-1}.

Найти: α; υ.

Решение. Груз движется по окружности с центром в точке O (см. рисунок). На груз действует сила $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$, направленная вдоль нити. Векторная сумма этих сил $\vec{F}_ц$ сообщает грузу центростремительное ускорение,

$$\vec{F}_ц = m\vec{g} + \vec{T};\ F_ц = \frac{m\upsilon^2}{R} = m\omega^2 R, \tag{1}$$

где R − радиус окружности, $\omega = 2\pi n$ – угловая скорость вращения груза.

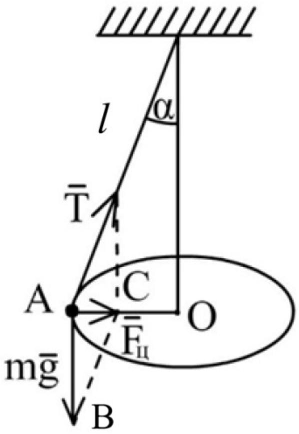
Из рисунка найдем радиус:

$$R = l\sin\alpha.$$

Силу $F_ц$ выразим из треугольника ABC:

$$F_ц = mg\mathrm{tg}\alpha. \tag{2}$$

Из уравнений (1) и (2) получим:



$$4m\pi^2 n^2 l\sin\alpha = mg\mathrm{tg}\alpha,$$

откуда:

$$4\pi^2 n^2 l\cos\alpha = g;\ \cos\alpha = \frac{g}{4\pi^2 n^2 l};$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{g}{4\pi^2 n^2 l}\right);\ \left[\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{n}^2 l}\right] = \frac{\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{м}} = 1;$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{9,81}{4\cdot 3,14^2\cdot 0,6^2\cdot 1,6}\right) = 64°;\ \alpha = 64.$$

Из треугольника ABC найдем силу натяжения нити:

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha};\ [T] = \text{кг}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н};\ T = \frac{4,5\cdot 9,8}{\cos 64°} = 103\ \text{Н}.$$

Линейная скорость груза

$$\upsilon = \omega R = 2\pi n l\sin\alpha;\ [\upsilon] = \frac{1}{\text{с}}\cdot\text{м} = \frac{\text{м}}{\text{с}};\ \upsilon = 2\cdot 3,14\cdot 0,6\cdot 1,6\cdot 0,8988 = 5,1\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\alpha = 64°$; $T = 103$ Н; $\upsilon = 5,1\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

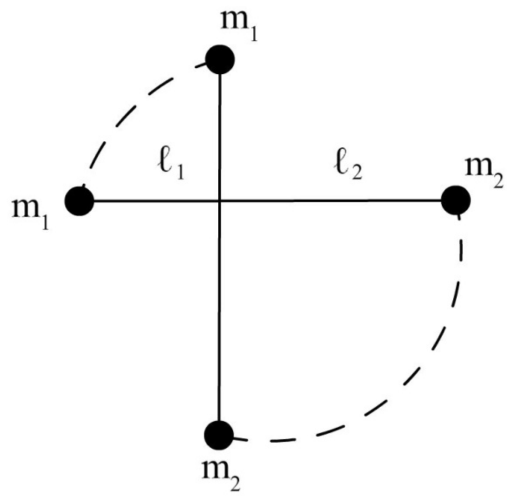
Задача 1.55

Вокруг горизонтальной оси может свободно без трения вращаться легкий рычаг, плечи которого равны l_1 и l_2. На концах рычага укреплены грузы m_1 и m_2. Предоставленный самому себе рычаг переходит из горизонтального положения в вертикальное (см. рисунок). Какую скорость υ_2 будет иметь в нижней точке второй груз?

Дано: l_1; l_2; m_1; m_2.

Найти: υ_2.

Решение. При решении воспользуемся законом сохранения механической энергии $(E_K + E_n = \text{cons})$ и тем фактом, что угловые скорости первого и второго тел при движении будут равны. За нулевой уровень потенциальной энергии возьмем нижнее положение второго груза. Энергия рычага в горизонтальном положении $E_{гор}$ должна быть равна энергии в вертикальном положении $E_{верт}$:



$$E_{гор} = E_{верт},$$

причем

$$E_{гор} = m_1 g l_2 + m_2 g l_2 = g l_2 \left(m_1 + m_2 \right);$$

$$E_{верт} = \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2 \upsilon_2^2}{2} + m_1 g \left(l_1 + l_2 \right).$$

Так как $\omega_1 = \omega_2$, то

$$\frac{\upsilon_1}{l_1} = \frac{\upsilon_2}{l_2}.$$

Тем самым переходим к системе

$$\begin{cases} g l_2 \left(m_1 + m_2 \right) = \dfrac{m_1 \upsilon_1^2}{2} + \dfrac{m_2 \upsilon_2^2}{2} + m_1 g \left(l_1 + l_2 \right); \\ \dfrac{\upsilon_1}{l_1} = \dfrac{\upsilon_2}{l_2}. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем

$$\upsilon_2 = l_2 \sqrt{\frac{2\left(m_2 l_2 - m_1 l_1\right) g}{m_2 l_2^{\ 2} + m_1 l_1^{\ 2}}}.$$

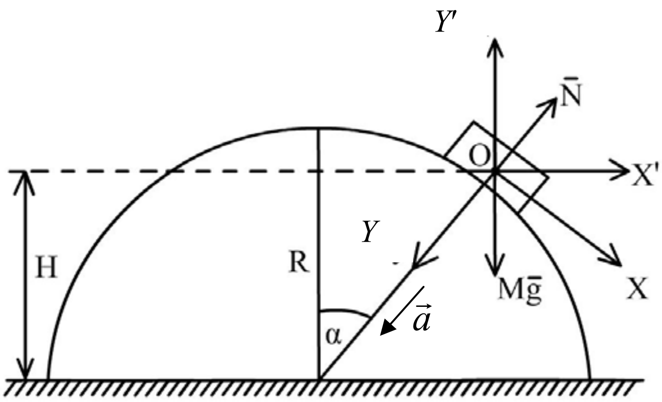
Ответ: $\upsilon_2 = l_2 \sqrt{\frac{2\left(m_2 l_2 - m_1 l_1\right) g}{m_2 l_2^{\ 2} + m_1 l_1^{\ 2}}}$.

Задача 1.56

На горизонтальной поверхности находится неподвижная, абсолютно гладкая полусфера радиусом R = 10 м. С ее верхней точки без начальной скорости соскальзывает малое тело. В некоторой точке оно отрывается и летит свободно. Определить время τ падения с момента отрыва до попадания на горизонтальную поверхность. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

Дано: R = 10 м; g = 10 м/с^2.

Найти: τ.



Решение. На тело действует сила тяжести $M\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$. Уравнение движения имеет вид

$$\vec{N} + M\vec{g} = M\vec{a}.$$

Выберем систему координат XOY (см. рисунок) и запишем это уравнение в проекции на ось Y:

$$Mg\cos\alpha - N = \frac{M\upsilon_0^{\ 2}}{R}. \qquad (1)$$

Из физических соображений ясно, что в момент отрыва $\vec{N}$ = 0. Следовательно, уравнение (1) приобретает вид

$$gR\cos\alpha = \upsilon_0^{\ 2}. \qquad (2)$$

Для того чтобы составить второе уравнение, можно применить закон сохранения механической энергии $(E_K + E_n = \text{cons})$, так как силы трения при движении тела по полусфере отсутствуют,

$$MgR = MgH + \frac{M\upsilon_0^{\ 2}}{R}. \qquad (3)$$

Из рисунка следует, что

$$H = R\cos\alpha. \qquad (4)$$

Решаем совместно уравнения (2) – (4):

$$2gR = 2gR\cos\alpha + gR\cos\alpha$$

и определяем

$$\cos\alpha = \frac{2}{3}. \qquad (5)$$

Подставляем (5) в уравнение (2) и получаем скорость в момент отрыва:

$$\upsilon_0 = \sqrt{\frac{2gR}{3}}.$$

Определим время τ. Выберем новые направления координатных осей $X'OY'$ и рассмотрим движение по оси Y'. Согласно формулам для равноускоренного движения получим:

$\upsilon_{0Y'} = \upsilon_0 \sin\alpha = \sqrt{\dfrac{10Rg}{27}}$ – составляющая начальной скорости вдоль Y'.

Высота отрыва от полусферы

$$H = \upsilon_{0y'} \cdot t + \frac{gt^2}{2} = \frac{2R}{3}.$$

Решаем данную систему уравнений относительно t:

$$t^2 + \frac{2\upsilon_{0y'}}{g}t - \frac{4R}{3g} = 0; \quad t_{1,2} = -\frac{\upsilon_{0y'}}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{\upsilon_{0y'}}{g}\right)^2 + \frac{4R}{3g}}.$$

Так как t – время движения, то $t \geq 0$, и решением задачи является корень:

$$t_1 = -\frac{\upsilon_{0y'}}{g} + \sqrt{\left(\frac{\upsilon_{0y'}}{g}\right)^2 + \frac{4R}{3g}}.$$

Таким образом,

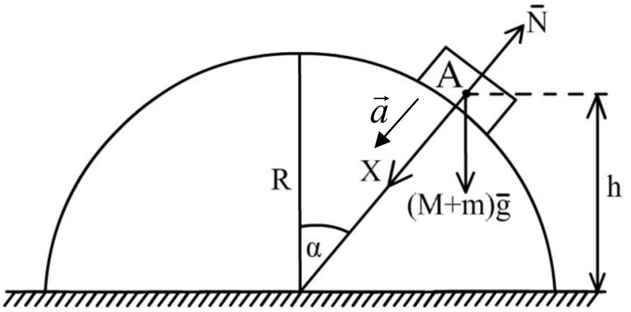
$$\tau = -\sqrt{\frac{10R}{27g}} + \sqrt{\frac{46R}{27g}}; \quad [\tau] = \sqrt{\frac{\text{м}}{\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}} + \sqrt{\frac{\text{м}}{\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}} = \sqrt{\text{с}^2} = \text{с};$$

$$\tau = -\sqrt{\frac{10 \cdot 10}{27 \cdot 10}} + \sqrt{\frac{46 \cdot 10}{27 \cdot 10}} = 0,7 \text{ с}.$$

Ответ: $\tau = 0,7$ с.

Задача 1.57

Небольшое тело массой M лежит на вершине гладкой полусферы радиусом R. В тело попадает пуля массой m, летящая горизонтально со скоростью υ_0, и застревает в нем. Пренебрегая смещением тела во время удара, определить высоту h, на которой тело оторвется от поверхности полусферы. При какой скорости пули тело сразу оторвется от полусферы?



Дано: M; m; R; υ_0.

Найти: h; υ_0'.

Решение. Здесь происходит неупругое взаимодействие, следовательно, чтобы определить скорость системы пуля – тело после удара, можно применить закон сохранения импульса

$$m\upsilon_0 = (M + m)u. \tag{1}$$

Предположим, что отрыв происходит в точке A (см. рисунок). Принимая во внимание показанные на рисунке силы, запишем уравнение движения:

$$\vec{N} + (M + m)\vec{g} = (M + m)\vec{a}. \tag{2}$$

Напишем условие отрыва: $N = 0$. Воспользуемся законом сохранения механической энергии: полная механическая энергия системы пуля – тело после удара равна полной механической энергии этой системы в момент отрыва (трение отсутствует):

$$\frac{(M+m)u^2}{2}+(M+m)gR=\frac{(M+m)\upsilon^2}{2}+(M+m)gh. \qquad (3)$$

Из уравнения (1) определяем:

$$u=\frac{m\upsilon_0}{M+m}.$$

Чтобы от векторного уравнения (2) перейти к скалярным соотношениям, введем в соответствии с рисунком ось X вдоль радиуса полусферы:

$$X:\quad (M+m)g\cos\cos\alpha=(M+m)\frac{\upsilon^2}{R}. \qquad (4)$$

Как видно из рисунка, $h=R\cos\alpha$, следовательно, равенство (4) запишется следующим образом:

$$gh=\upsilon^2. \qquad (5)$$

Подставим (5) и (1) в (3) и определим высоту отрыва:

$$h=\frac{2R}{3}+\frac{1}{3g}\left(\frac{m\upsilon_0}{m+M}\right)^2. \qquad (6)$$

Чтобы определить скорость пули $\upsilon_0{}'$, при которой тело сразу же оторвется от полусферы, достаточно высоту отрыва h в уравнении (6) приравнять к радиусу R и решить уравнение:

$$R=\frac{2R}{3}+\frac{1}{3g}\left(\frac{m\upsilon_0'}{m+M}\right)^2.$$

Получим:

$$\upsilon_0'=\frac{M+m}{m}\sqrt{gR}.$$

Ответ: $h=\dfrac{2R}{3}+\dfrac{1}{3g}\left(\dfrac{m\upsilon_0}{m+M}\right)^2$; $\upsilon_0'=\dfrac{M+m}{m}\sqrt{gR}$.

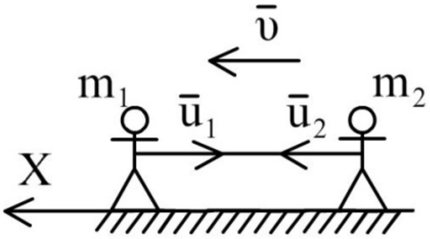
Задача 1.58

Двое спортсменов-фигуристов массами $m_1=70$ кг и $m_2=60$ кг, держась за концы длинного шнура, неподвижно стоят на льду. Один из них начинает укорачивать шнур, выбирая его со скоростью υ = 0,5 м/с. Найти скорости движения u_1 и u_2 фигуристов по льду. Трением пренебречь.

Дано: $m_1 = 70$ кг ; $m_2 = 60$ кг υ = 0,5 м/с.

Найти: u_1, u_2.

Решение. Считая систему, состоящую из двух фигуристов, замкнутой, согласно закону сохранения импульса запишем в проекции на ось X (см. рисунок): $P_1 = P_2$, где $P_1 = 0$ − импульс системы в начальном состоянии, а P_2 − импульс системы после укорачивания шнура, т.к.



$$P_2 = m_2 u_2 - m_1 u_1,$$

$$m_2 u_2 - m_1 u_1 = 0. \qquad (1)$$

Скорость движения второго фигуриста в системе отсчета, связанной с первым, равна скорости укорачивания шнура. Тогда скорость второго фигуриста в системе отсчета, связанной с Землей,

$$u_2 = \upsilon - u_1$$

или

$$u_1 + u_2 = \upsilon. \qquad (2)$$

Решая систему двух уравнений

$$\begin{cases} m_2 u_2 - m_1 u_1 = 0; \\ u_1 + u_2 = \upsilon, \end{cases}$$

получим:

$$u_1 = \frac{m_2 \upsilon}{m_1 + m_2}; \quad [u_1] = \frac{\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}}{\text{кг}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad u_1 = \frac{60 \cdot 0,5}{70 + 60} = \frac{30}{130} = 0,23\ \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$u_2 = \frac{m_1 \upsilon}{m_1 + m_2}; \quad [u_2] = \frac{\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}}{\text{кг}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad u_2 = \frac{70 \cdot 0,5}{130} = \frac{35}{130} = 0,27\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $u_1 = 0,23\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; $u_2 = 0,27\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 1.59

Принимая, что масса Земли неизвестна, определить высоту h, на которой ускорение свободного падения g_1 будет в $n = 3$ раза меньше, чем ускорение свободного падения у поверхности Земли g. Радиус Земли $R_0 = 6{,}37 \cdot 10^6$ м.

Дано: $g_1 = \dfrac{g}{n}$; $n = 3$; $R_0 = 6{,}37 \cdot 10^6$ м.

Найти: h.

Решение. Если пренебречь суточным вращением Земли вокруг своей оси, то сила тяжести и сила гравитационного взаимодействия равны:

$$mg_1 = \frac{GmM}{\left(R_0 + h\right)^2}, \qquad (1)$$

где M – масса Земли; m – масса тела; R_0 − радиус Земли; h – высота орбиты над поверхностью Земли; G – гравитационная постоянная.

Учитывая условие задачи, выражение (1) запишем в виде

$$\frac{g}{n} = \frac{GM}{\left(R_0 + h\right)^2},$$

откуда

$$h = \sqrt{\frac{nGM}{g}} - R_0. \qquad (2)$$

Для тела, находящегося у поверхности Земли,

$$mg = G\frac{mM}{R_0{}^2}, \text{ откуда } GM = gR_0{}^2.$$

Подставив это значение в формулу (2), найдем искомую высоту:

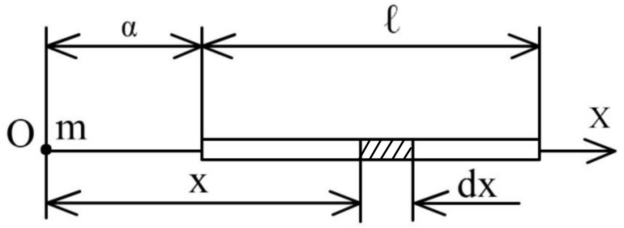
$$h = R_0\left(\sqrt{n} - 1\right); \quad [h] = \text{м};$$

$$h = 6{,}37 \cdot 10^6\left(\sqrt{3} - 1\right) = 6{,}37 \cdot 10^6\left(1{,}73 - 1\right) = 4{,}65 \cdot 10^6 \text{ м}.$$

Ответ: $h = 4{,}65 \cdot 10^6$ м $= 4{,}65$ Мм.

Задача 1.60

Материальная точка массой m в некоторый момент времени находится в точке O на оси длинного тонкого стержня массой M и длиной l на расстоянии a от одного из его концов (см. рисунок). Определить напряженность и потенциал гравитационного поля стержня в точке O, а также силу, действующую на материальную точку.



Дано: m, M; a; l.

Найти: E; φ; F.

Решение. Пусть ось стержня совпадает с осью OX. Разобьем стержень на элементарные отрезки длиной dx, настолько малые, что каждый из них можно принять за материальную точку. Найдем массу dM выделенного элемента:

$$dM = M\frac{dx}{l}.$$

Тогда модуль силы притяжения dF материальной точки элементом стержня dx можно определить по закону всемирного тяготения:

$$dF = G\frac{mdM}{x^2} = G\frac{mM}{l}\frac{dx}{x^2}. \qquad (1)$$

Поделив выражение (1) на m, получим модуль напряженности гравитационного поля в точке O, создаваемой выделенным элементом стержня:

$$dE = \frac{dF}{m} = G\frac{M}{l}\frac{dx}{x^2}. \qquad (2)$$

Направление вектора напряженности $d\vec{E}$ совпадает с направлением силы, действующей на материальную точку, т.е. $d\vec{E}$ направлено по оси OX. Так как от всех элементарных отрезков стержня вектора $d\vec{E}$ направлены в одну сторону, то модуль напряженности поля $\left|\vec{E}\right|$ в точке O определяется интегрированием выражения (2):

$$E = G\frac{M}{l}\int_{a}^{a+l}\frac{dx}{x^2} = \frac{GM}{a(a+l)}; \qquad (3)$$

$$[E]=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}\cdot\frac{\text{кг}}{\text{м}^2}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{м}\cdot\text{кг}}=\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Потенциал гравитационного поля выделенного элемента в точке O

$$d\varphi=\frac{dE}{m}=-G\frac{dM}{x}=-G\frac{M}{l}\frac{dx}{x}. \qquad (4)$$

Интегрируя (4), получим потенциал гравитационного поля, создаваемого стержнем в точке O:

$$\varphi=-G\frac{M}{l}\int_a^{a+l}\frac{dx}{x}=-G\frac{M}{l}\ln\left(1+\frac{l}{a}\right);\quad [\varphi]=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}\cdot\frac{\text{кг}}{\text{м}}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\frac{\text{м}}{\text{кг}}=\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}.$$

Сила притяжения, действующая на материальную точку,

$$F=mg=\frac{GMm}{a(a+l)};\quad F=\text{кг}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}^2}=\text{Н}$$

и направлена по оси OX к стержню.

Ответ: $E=\dfrac{GM}{a(a+l)}$; $\varphi=-G\dfrac{M}{l}\ln\left(1+\dfrac{l}{a}\right)$; $F=\dfrac{GMm}{a(a+l)}$.

Задача 1.61

Определить потенциал φ поля тяготения, создаваемого однородным стержнем длиной l = 2 м и линейной плотностью τ = 100 кг/м в точке O, находящейся на оси, проходящей через его середину и лежащей на расстоянии R = 1 м от стержня.

Дано: l = 2 м; τ = 100 кг/м; R = 1 м.

Найти: φ.

Решение. Потенциал $d\varphi$ гравитационного поля, создаваемого в точке O отрезком стержня малой длины dl,

$$d\varphi=-G\frac{dm}{r}, \qquad (1)$$

где G – гравитационная постоянная; $dm=\tau dl$ − масса отрезка dl; r – расстояние от отрезка dl до точки O.

Из рисунка следует, что

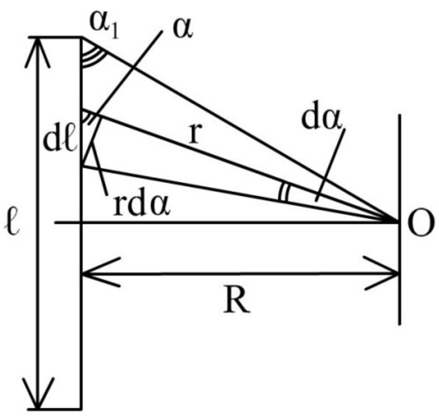
$$dl\sin\alpha = \tau dl \quad \text{и} \quad r = \frac{R}{\sin\alpha}.$$

Тогда

$$dm = \frac{\tau R}{\sin^2\alpha} d\alpha.$$

Подставив это выражение в формулу (1), получим:

$$d\varphi = -\frac{G\tau}{\sin\alpha} d\alpha.$$



Потенциал в точке *O*, создаваемый половиной стержня,

$$\varphi_1 = \int d\varphi = -\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{G\tau}{\sin\alpha} d\alpha, \qquad (2)$$

где согласно рисунку пределы изменения угла α – от $\alpha_1 = \alpha = \mathrm{arctg}\frac{2R}{l} = \frac{\pi}{4}$ до $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$.

Точка *O* лежит на оси, проходящей через середину стержня, поэтому искомый потенциал, создаваемый однородным стержнем,

$$\varphi = -2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{G\tau}{\sin\alpha} d\alpha = -2G\tau \ln\left|\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right| \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}};$$

$$[\varphi] = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}\cdot\frac{\text{кг}}{\text{м}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\frac{\text{м}}{\text{кг}} = \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}\cdot\frac{\text{кг}}{\text{кг}} = \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}; \quad \varphi = -21{,}5\cdot 10^{-9}\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}.$$

Ответ: $\varphi = -21{,}5$ нДж/кг.

Задача 1.62

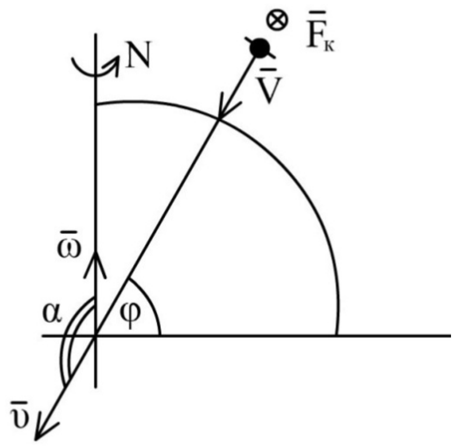
Тело брошено вниз в безветренную погоду с высоты *h* с нулевой начальной скоростью и попадает на землю в точку с географической широтой φ = 50° северного полушария. Определить эту высоту *h*, если отклонение *l* тела от вертикали при его падении составляет 9 см.

Дано: $\varphi = 50°$; $\upsilon_0 = 0$; $l = 9\cdot 10^{-2}$ м.

Найти: h.

Решение. Тело отклоняется от вертикали вследствие действия на него силы Кориолиса (см. рисунок)

$$\vec{F}_к = 2m\left[\vec{\upsilon},\vec{\omega}\right], \qquad (1)$$



где m – масса тела; $\vec{\upsilon}$ вектор скорости тела относительно Земли; $\vec{\omega}$ − вектор угловой скорости суточного вращения Земли.

Эта сила возникает вследствие суточного вращения Земли вокруг своей оси, т.е. неинерциальности системы отсчета, связанной с Землей. Как следует из рисунка и анализа формулы (1), сила Кориолиса $\vec{F}_к$ направлена перпендикулярно к плоскости чертежа от нас, т.е. к востоку. В этом же направлении будет происходить отклонение тела.

Модуль силы Кориолиса

$$F_к = 2m\upsilon\omega\sin\alpha, \qquad (2)$$

где α – угол между векторами $\vec{\upsilon}$ и $\vec{\omega}$. Из рисунка следует, что $\alpha = 90° + \varphi$, откуда $\sin\alpha = \cos\varphi$.

Скорость падающего тела направлена вдоль радиуса, $\upsilon = gt$ (t – время падения). Тогда сила Кориолиса (1) запишется в виде

$$F_к = 2m\omega gt\cos\varphi.$$

Ускорение, сообщаемое телу силой Кориолиса и совпадающее с ней по направлению,

$$a_к = \frac{F_к}{m} = 2\omega gt\cos\varphi.$$

Скорость тела, обусловленная действием силы Кориолиса,

$$\upsilon_к = \int_0^t a_к dt = \int_0^t 2\omega gt\cos\varphi dt = \omega gt^2\cos\varphi.$$

Отклонение тела от вертикали

$$l = \int_0^t \upsilon_\kappa dt = \int_0^t \omega g t^2 \cos\varphi dt = \frac{1}{3}\omega g t^3 \cos\varphi,$$

откуда время падения

$$t = \sqrt[3]{\frac{3l}{\omega g \cos\varphi}}. \qquad (3)$$

Время падения t связано с высотой h соотношением

$$h = \frac{gt^2}{2}.$$

Учитывая формулу (3) и то, что $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ (T = 24 ч – период суточного обращения Земли), найдем искомую высоту:

$$h = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9l^2 g T^2}{4\pi^2 \cos^2\varphi}}; \quad [h] = \sqrt[3]{\text{м}^2 \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{с}^2} = \sqrt[3]{\text{м}^3} = \text{м};$$

$$\text{h} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9\left(9 \cdot 10^{-2}\right)^2 9{,}81 \cdot 86400^2}{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 0{,}6428^2}} = 743 \text{ м}.$$

Ответ: h = 743 м.

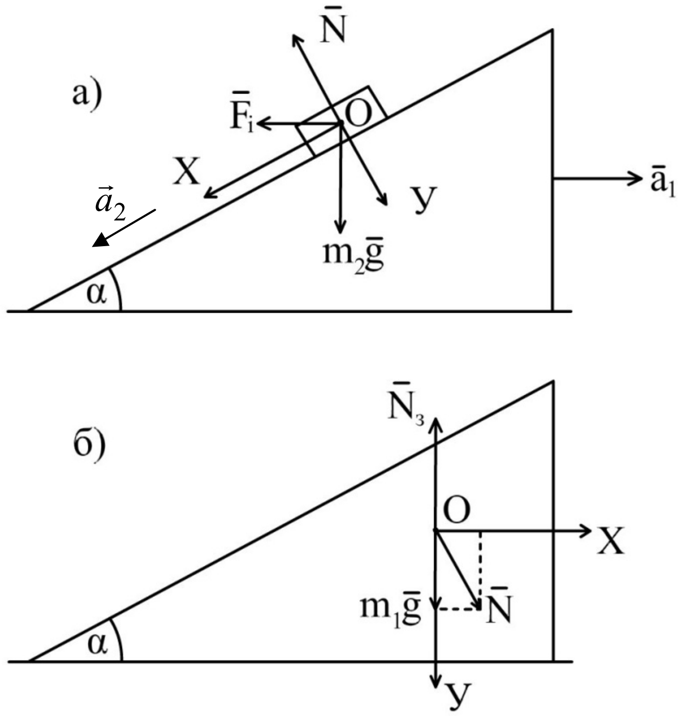
Задача 1.63

Тело массой $m_2 = 0{,}6$ кг скользит по наклонной поверхности клина (см. рис., *а*) массой $m_1 = 2$ кг. Найти ускорение движения тела a_2 и клина a_1, а также силу N взаимодействия тела и клина и силу N_3 взаимодействия клина с Землей, если известно, что угол при основании клина α = 30°. Трением при движении пренебречь.

Дано: $m_1 = 2$ кг; $m_2 = 0{,}6$ кг; α = 30°.

Найти: a_1; a_2; N; N_3.

Решение. В задаче рассматривается движение тела относительно клина и клина относительно Земли. Примем тело за материальную точку. Рассмотрим его движение относительно клина.



Поскольку клин движется с ускорением $\vec{a}_1$, то система отсчета, связанная с клином, является неинерциальной (НИСО). В неинерциальных системах все законы классической механики справедливы в предположении, что наряду с силами взаимодействия тел действуют силы инерции, зависящие прежде всего от характера движения самой системы.

Второй закон Ньютона применительно к телу в НИСО запишем в виде:

$$m_2\vec{a}_2 = \sum\vec{F} + \vec{F}_i, \tag{1}$$

где $\sum\vec{F}$ − геометрическая сумма внешних сил, действующих на тело; $\vec{F}_i = -m_2\vec{a}_1$ − сила инерции; a_2 − ускорение движения тела, направленное вдоль оси *OX* (см. рис., *а*).

На рис. *а* показаны силы, действующие на тело, и направление осей координат. Запишем уравнение (1) в проекциях на координатные оси:

OX:

$$m_2 g\sin\alpha + m_2 a_1\cos\alpha = m_2 a_2 \tag{2}$$

OY:

$$-N - m_2 a_1\sin\alpha + m_2 g\cos\alpha = 0 \tag{3}$$

Получим систему двух уравнений с тремя неизвестными – a_1, a_2, N.

Рассмотрим движение клина относительно Земли. Эту систему отсчета можно считать инерциальной. Направление осей координат и сил, действующих на клин, показано на рис. *б*.

Здесь $\vec{N}_з$ − сила взаимодействия клина с Землей, $\vec{N}$ − результат взаимодействия тела и клина. Все силы, действующие на клин, приложим в его центр масс, который движется как материальная точка. Запишем второй закон Ньютона для центра масс клина:

$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{N}_з + \vec{N}\,. \tag{4}$$

Уравнение (4) в проекциях на оси координат примет вид:

OX:

$$m_1 a_1 = N\sin\alpha\,; \tag{5}$$

OY:

$$0 = m_1 g + N\cos\alpha - N_з\,. \tag{6}$$

Решая систему уравнений (3) и (5), находим ускорение клина:

$$a_1 = \frac{g\sin\alpha\cos\alpha}{\dfrac{m_1}{m_2}+\sin^2\alpha};\quad a_1 = \frac{9{,}81\cdot 0{,}5\cdot 0{,}866}{\dfrac{2}{0{,}6}+0{,}5^2} = 1{,}2\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\,.$$

Из уравнений (2) и (7) определяется ускорение движения тела:

$$a_2 = g\sin\alpha\left(\frac{1+\cos^2\alpha}{\dfrac{m_1}{m_2}+\sin^2\alpha}\right);\ a_2 = 9{,}81\cdot 0{,}5\left(\frac{1+0{,}866^2}{\dfrac{2}{0{,}6}+0{,}5^2}\right) = 6{,}1\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\,.$$

Система уравнений (5) − (7) позволяет определить силы взаимодействия N и $N_з$:

$$N = \frac{m_1 g\cos\alpha}{\dfrac{m_1}{m_2}+\sin^2\alpha};\quad [N] = \text{кг}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н};\quad N = \frac{2\cdot 9{,}81\cdot 0{,}866}{\dfrac{2}{0{,}6}+0{,}5^2} = 4{,}8\ \text{Н}\,.$$

$$N_з = m_1 g\left(1+\frac{\cos^2\alpha}{\dfrac{m_1}{m_2}+\sin^2\alpha}\right);$$

$$N_з = 2\cdot 9{,}81\left(1+\frac{0{,}866^2}{\dfrac{2}{0{,}6}+0{,}5^2}\right) = 24{,}1\ \text{Н}\,.$$

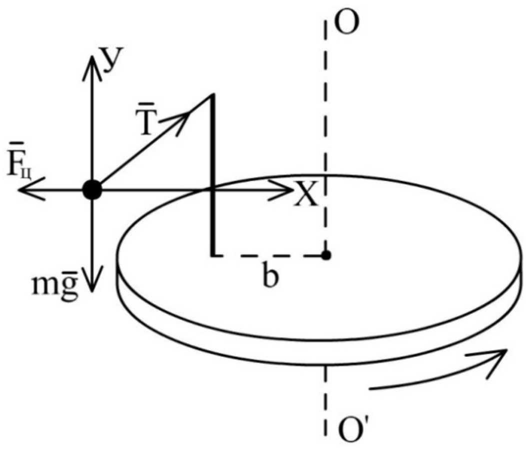
Ответ: $a_1 = 1{,}2\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $a_2 = 6{,}1\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $N = 4{,}8\ \text{Н}$; $N_з = 24{,}1\ \text{Н}$.

Задача 1.64

Вертикальный стержень укреплен на горизонтальном диске, вращающемся с частотой $n = 0{,}8\ \text{с}^{-1}$. К вершине стержня привязан шарик на нити длиной $l = 0{,}12$ м (см. рисунок). Определить расстояние b от стержня до оси вращения, если угол α нити с вертикалью равен 37°.

Дано: $n = 0{,}8\ \text{с}^{-1}$; $l = 0{,}12$ м; $\alpha = 37°$.

Найти: b.



Решение. Движение шарика рассмотрим в неинерциальной системе отсчета, связанной с вращающимся диском. В этой системе отсчета на шарик действует сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}$ и центробежная сила инерции $\vec{F}_ц$, направленная по горизонтали от оси вращения диска.

Относительно системы отсчета, связанной с вращающимся диском, шарик покоится ($\vec{\alpha}' = 0$), и второй закон Ньютона с учетом центробежной силы инерции

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_ц = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) в проекции на вертикальные оси X и Y (см. рисунок) запишется в виде:

$$T\sin\alpha - \frac{m\upsilon^2}{R} = 0;\ \ T\cos\alpha - mg = 0,$$

где $R = l\sin\alpha + b$; $-\dfrac{m\upsilon^2}{R} = \vec{F}_ц$ – центробежная сила инерции.

Из уравнения $g\,\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\upsilon^2}{R}$, учитывая, что $\upsilon = 2\pi nR$ и $R = l\sin\alpha + b$, запишем:

$$g\,\mathrm{tg}\,\alpha = 4\pi^2 n^2 (l\sin\alpha + b),$$

откуда искомое расстояние от стержня до оси вращения

$$b = \frac{g\operatorname{tg}\alpha}{4\pi^2 n^2} - l\sin\alpha, \quad [b] = \frac{\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2} - \text{м} = \text{м};$$

$$b = \frac{9{,}81\cdot 0{,}7536}{4\cdot(3{,}14)^2\cdot 0{,}8^2} = 0{,}22 \text{ м}.$$

Ответ: b = 0,22 м.

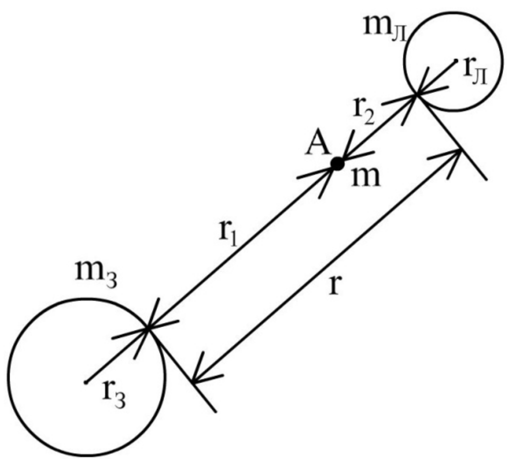
Задача 1.65

Определить точку либрации Земли, т.е. точку пространства, в которой материальное тело массой m одинаково притягивается Землей и Луной.

Дано: $F_1 = F_2$.

Найти: r_1.

Решение. Допустим, что точка A, лежащая на линии соединения центров Земли и Луны, является либрационной точкой (см. рисунок). Выпишем табличные данные:



масса Земли $m_З = 5{,}976\cdot 10^{24}$ кг;

масса Луны $m_Л = 7{,}35\cdot 10^{22}$ кг;

радиус Земли $r_З = 6{,}378\cdot 10^6$ м;

радиус Луны $r_Л = 1{,}737\cdot 10^6$ м;

среднее расстояние до Луны $r = 3{,}844\cdot 10^8$ м.

Пусть r_1 – расстояние от поверхности Земли до искомой точки A; r_2 – расстояние от поверхности Луны до точки A.

Найдем силы притяжения: F_1 – между телом массой m и Землей и F_2 – между телом и Луной:

$$F_1 = G\frac{m\cdot m_З}{\left(r_1 + r_З\right)^2}; \quad F = G\frac{m\cdot m_Л}{\left(r_2 + r_Л\right)^2}.$$

По условию задачи модули этих сил равны, т.е. $F_1 = F_2$ или

$$G\frac{m \cdot m_З}{\left(r_1 + r_З\right)^2} = G\frac{m \cdot m_Л}{\left(r_2 + r_Л\right)^2}. \qquad (1)$$

Расстояние от поверхности Земли до Луны $r = r_1 + r_2$, тогда

$$r_2 = r - r_1. \qquad (2).$$

Подставив (2) в (1) и извлекая квадратный корень из обеих частей уравнения, получим:

$$\frac{\sqrt{m_З}}{r_1 + r_З} = \frac{\sqrt{m_Л}}{r - r_1 + r_Л},$$

откуда

$$r_1 + r_З = \sqrt{\frac{m_З}{m_Л}}\left(r - r_1 + r_Л\right). \qquad (3)$$

Преобразуем выражение (3):

$$r_1\left(1 + \sqrt{\frac{m_З}{m_Л}}\right) = \sqrt{\frac{m_З}{m_Л}}(r + r_Л) - r_З; \qquad (4)$$

$$1 + \sqrt{\frac{m_З}{m_Л}} = \frac{\sqrt{m_З} + \sqrt{m_Л}}{\sqrt{m_Л}}. \qquad (5)$$

Тогда из (4) и (5) находим:

$$r_1 = \frac{\left(r + r_З\right)\sqrt{m_З} - r_З\sqrt{m_Л}}{\sqrt{m_З} + \sqrt{m_Л}}; \quad [r_1] = \frac{\sqrt{кг} \cdot м - \sqrt{кг} \cdot м}{\sqrt{кг} + \sqrt{кг}} = м.$$

Подставив табличные данные, получим, что либрационная точка находится на расстоянии $r_1 = 3{,}4 \cdot 10^8$ м от поверхности Земли.

Ответ: $r_1 = 3{,}4 \cdot 10^8$ м.

Задача 1.66

Деревянный шар (ρ = 500 кг/м^3) радиусом R = 5 см удерживается под водой внешней силой. При этом верхняя точка шара касается поверхности воды. Найти работу, которую произведет сила Архимеда, если отпустить шар.

Дано: $R = 5 \cdot 10^{-2}$ м; $\rho = 500$ кг/м^3; $\rho_0 = 10^3$кг/м^3.

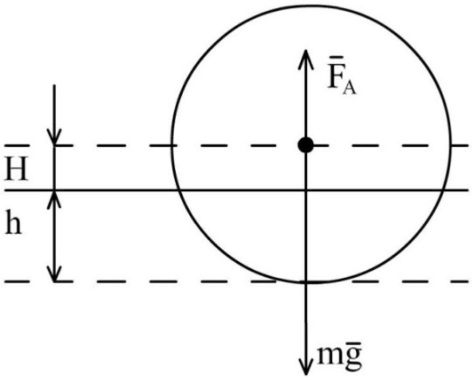
Найти: A.

Решение. Рассмотрим свободно плавающий шар. Пусть центр шара находится на высоте H (см. рисунок) над поверхностью воды, высота шарового сегмента, погруженного в воду, h. Шар находится в равновесии, если сила тяжести mg, действующая на него, будет уравновешена силой Архимеда F_A, т.е. $mg = F_A$, где $m = \rho V = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ – масса шара, $F_A = \rho_0 V_0 g$; V_0 – объем погруженной части шара.

Найдем объем V_0 шарового сегмента, погруженного в воду:

$$V_0 = \frac{1}{3}\pi h^2 (3R - h),$$

следовательно, сила F_A



$$F_A = \frac{1}{3}\pi h^2 (3R - h) g \rho_0 = \frac{4}{3}\pi R^3 g \rho$$

или

$$4R^3 = \frac{\rho_0}{\rho}\, h^2 (3R - h) = 2h^2 (3R - h),$$

откуда

$$2R^3 = h^2 (3R - h);$$

$$2R^3 - h^2 (3R - h) = 0. \qquad 1)$$

Кубическое уравнение (1) имеет единственный корень $h = R$. Следовательно, шар свободно плавает, будучи погружен в воду до своей диаметральной плоскости, при этом $H = 0$.

Если теперь погрузить шар на величину X, то сила Архимеда превысит действующую на шар силу тяжести и результирующая сила, выталкивающая шар из воды, будет равна:

$$F(x) = F_A(x) - mg \qquad (2)$$

Сила $F(x)$ зависит от величины погружения X. Если отпустить погруженный в воду шар, то он начинает всплывать, величина X, а значит, и сила $F(x)$ уменьшается.

По закону Архимеда сила

$$F_A(x) = \rho_0 V_1 g,$$

где $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi\ (h+x)^2[3R - (h+x)]$ – объем шарового сегмента высотой $(h+x)$.

Тогда результирующая сила, выталкивающая шар,

$$F(x) = F_A(x) - mg = \rho_0 V_1 g - \rho_0 V_0 g = \rho_0 g\left(V_1 - V_0\right) = \rho_0 g V(x),$$

где

$$V(x) = \left(V_1 - V_0\right) = \frac{1}{3}\pi(h+x)^2[3R - (h+x)] - \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h). \qquad (3)$$

Поскольку $h = R$, то выражение (3) примет вид:

$$V(x) = V_1 - V\ = \frac{1}{3}\pi(R+x)^2(2R - x) - \frac{2}{3}\pi R^3 \qquad (4)$$

Следовательно, выталкивающая сила, действующая на шар,

$$F(x) = \rho_0 g V(x) = \frac{1}{3}\pi\rho_0 g[(R+x)^2(2R - x) - 2R^3] =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\rho_0 g[(R^2 + 2Rx + x^2)(2R - x) - 2R^3] = \frac{1}{3}\pi\rho_0 g(3R^2x - x^3).$$

Работа переменной силы $F(x)$ при изменении x от 0 до R

$$A = \int_0^R F(x)dx = \frac{1}{3}\pi\rho_0 g\int_0^R\left(3R^2x - x^3\right)dx\ = \frac{1}{3}\pi\rho_0 g\left(\frac{3R^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^R =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\rho_0 g\left(\frac{3R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right) = \frac{5}{12}\ \pi\rho_0 g R^4;$$

$$[A] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\text{м}^4 = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\text{м} = \text{Н}\cdot\text{м} = \text{Дж}\,;$$

$$A = \frac{5}{12}\cdot 3{,}14\cdot 10^3\cdot 9{,}81\cdot(5\cdot 10^{-2})^4 = 0{,}08\ \text{Дж}\,.$$

Ответ: $A = 0{,}08$ Дж.

Задача 1.67

Определить работу сил поля тяготения при перемещении тела массой m = 12 кг из точки 1, находящейся от центра Земли на расстоянии $r_1 = 4R_0$, в точку 2, находящуюся от ее центра на расстоянии $r_2 = 2R_0$, где R_0 – радиус Земли.

Дано: m = 12 кг; $r_1 = 4R_0$; $r_2 = 2R_0$; $R_0 = 6{,}37 \cdot 10^6$ м.

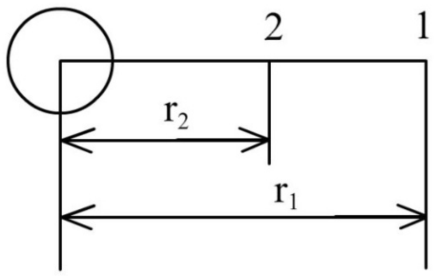
Найти: A_{12}.

Решение. Поскольку силы тяготения консервативны, работа этих сил равна изменению потенциальной энергии системы «тело – Земля», взятому с обратным знаком:

$$A_{12} = -\Delta E_n = E_{n1} - E_{n2}, \tag{1}$$

где E_{n1} и E_{n2} – соответственно потенциальные энергии системы «тело – Земля» в точках 1 и 2.

Так как $E_n = -\dfrac{GmM}{r}$ (M – масса Земли), имеем:



$$E_{n1} = -\frac{GmM}{4R_0} \quad \text{и} \quad E_{n2} = -\frac{GmM}{2R_0}$$

Подставив эти выражения в (1), получим:

$$A_{12} = \frac{GmM}{4R_0}.$$

Учитывая, что $g = \dfrac{GM}{R_0^2}$, придем к выражению для искомой работы:

$$A_{12} = \frac{mgR_0}{4}; \quad [A_{12}] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Дж};$$

$$A_{12} = \frac{12 \cdot 9{,}81 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6}{4} = 187 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

Ответ: $A_{12} = 187 \cdot 10^6$ Дж $=$ 187 МДж.

Задача 1.68

Определить числовое значение первой космической скорости υ_1 для Луны, если ускорение свободного падения у поверхности Луны g = 1,7 м/с^2, а радиус Луны $R = 1{,}74 \cdot 10^6$ м.

Дано: $R = 1{,}74 \cdot 10^6$м; $g = 1{,}7$ м/с^2.

Найти: υ_1.

Решение. Искомая первая космическая скорость – горизонтально направленная минимальная скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло двигаться вокруг Луны по круговой орбите, т.е. превратиться в искусственный спутник Луны. На спутник, движущийся по круговой орбите радиусом r, действует сила тяготения Луны, сообщающая ему нормальное ускорение $\dfrac{\upsilon_1^2}{r}$.

По второму закону Ньютона

$$\frac{m\upsilon_1^2}{r} = \frac{GmM}{r^2},$$

где G – гравитационная постоянная; m – масса спутника; M – масса Луны.

Если спутник движется вблизи поверхности Луны, то $r \approx R$ (R – радиус Луны). Тогда из этого выражения получаем:

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}. \qquad (1)$$

Для тела, находящегося у поверхности Луны,

$$mg = \frac{GmM}{R^2}, \quad \text{откуда } GM = gR^2.$$

Подставляя это значение в формулу (1), получим искомую первую космическую скорость для Луны

$$\upsilon_1 = \sqrt{gR}\,; \quad \upsilon_1 = \sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{9{,}81 \cdot 1{,}74 \cdot 10^6} = 1{,}72 \cdot 10^3\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\upsilon_1 = 1{,}72 \cdot 10^3\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 1.69

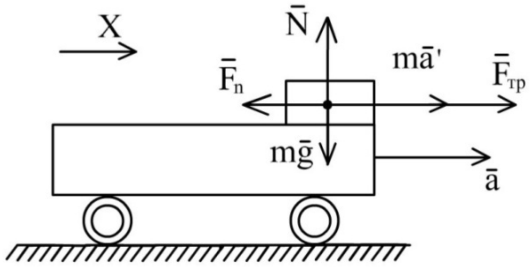
На краю тележки длиной l = 1,8 м, движущейся горизонтально с ускорением a = 2,1 м/с^2, положили брусок. Определить, за какое время t брусок соскользнет с доски, если коэффициент трения между бруском и тележкой μ = 0,4.

Дано: l = 1,8 м; a = 2,1 м/с^2; μ = 0,4.

Найти: t.

Решение. Движение рассмотрим в системе отсчета, связанной с тележкой. Эта система является неинерциальной (тележка движется с ускорением относительно Земли). В этой системе отсчета на брусок, кроме силы тяжести $m\vec{g}$, силы реакции опоры $\vec{N}$ и силы трения $\vec{F}_{тр}$, препятствующей относительному проскальзыванию тел, действует также сила инерции

$$\vec{F}_и = -m\vec{a},$$



где $\vec{a}$ – ускорение тележки.

Уравнение второго закона Ньютона для бруска с учетом силы инерции можно записать в виде:

$$m\vec{a}' = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} + \vec{F}_и, \qquad (1)$$

где a' – ускорение бруска относительно тележки.

Направив ось X горизонтально, запишем уравнение (1) в проекции на эту ось (см. рисунок):

$$ma' = F_{тр} - ma. \qquad (2)$$

Учитывая, что при проскальзывании бруска $F_{тр} = \mu N$, из уравнения (2) следует, что

$$a' = \mu g - a. \qquad (3)$$

В системе отсчета, связанной с тележкой, брусок должен пройти путь $l = \dfrac{a't^2}{2}$.

Подставив сюда выражение (3), найдем искомый промежуток времени:

$$t = \sqrt{\frac{2l}{\mu g - a}}; \quad [t] = \sqrt{\frac{\text{м}}{\frac{\text{м}}{\text{с}^2} - \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}} = \sqrt{\text{с}^2} = \text{с}; \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}8}{0{,}4 \cdot 9{,}81 - 2{,}1}} = 1{,}4 \text{ с}.$$

Ответ: t = 1,4 с.

Задача 1.70

Электровоз массой m = 142 т движется со скоростью υ = 79 км/ч на широте φ = 62° вдоль меридиана. Определить, чему равна горизонтальная составляющая силы давления на рельсы F.

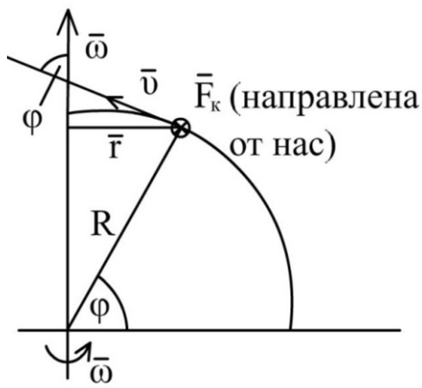
Дано: $m = 142 \cdot 10^3$ кг; υ = 21,9 м/с; φ = 62°.

Найти: F.

Решение. Ввиду вращения Земли вокруг своей оси система отсчета, связанная с Землей, является неинерциальной. В этой системе отсчета на тело действует центробежная сила инерции $\vec{F}_ц$ и сила Кориолиса $\vec{F}_к$.

Центробежная сила инерции

$$\vec{F}_ц = m\omega^2\vec{r},$$



где ω – угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси; $\vec{r}$ − радиус вращения точки Земли, в которой находится тело (см. рисунок).

Центробежная сила направлена вдоль $\vec{r}$ и не оказывает бокового (горизонтального) давления на рельсы.

Сила Кориолиса

$$F_к = 2m\left[\vec{\upsilon}, \vec{\omega}\right], \qquad (1)$$

где $\vec{\upsilon}$ − вектор скорости тела относительно Земли; $\vec{\omega}$ − вектор угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси.

Как следует из рисунка и анализа формулы (1), сила Кориолиса направлена по горизонтали (по касательной к поверхности Земли) перпендикулярно к $\vec{\upsilon}$ (перпендикулярно к плоскости чертежа от нас) и оказывает, таким образом, боковое давление на первый рельс по движению поезда.

Модуль силы Кориолиса

$$F_к = 2m\upsilon\omega\sin\varphi,$$

где φ – угол (см. рисунок) между $\vec{\upsilon}$ и $\vec{\omega}$ (равен широте φ).

Учитывая, что $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ (T = 24 ч – период суточного обращения Земли), найдем искомую силу давления на рельсы, которая, как следует из вышерассмотренного, обусловлена только силой Кориолиса.

$$F=\frac{4\pi m\upsilon\sin\alpha}{T}\ ;\quad \left[F\right]=\frac{\text{кг}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}}}{\text{с}}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}=\text{Н}\ ;$$

$$F=\frac{4\cdot 3{,}14\cdot 142\cdot 10^3\cdot 21{,}9\cdot 0{,}8829}{24\cdot 3600}=399\ \text{Н}.$$

Ответ: $F=399$ Н.

1.3. Механика твердого тела и жидкостей. Основные формулы

Момент силы относительно неподвижной точки

$$\vec{M}=\left[\vec{r},\vec{F}\right],$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из этой точки в точку приложения силы $\vec{F}$.

Момент силы относительно неподвижной оси Z

$$\vec{M}_z=\left[\vec{r},\vec{F}\right].$$

Модуль момента силы

$$M = Fl,$$

где l – плечо силы (кратчайшее расстояние между линией действия силы и осью вращения).

Момент инерции материальной точки

$$J=mr^2,$$

где m – масса точки; r – расстояние до оси вращения.

Момент инерции системы (тела)

$$J=\sum_{i=1}^{n}m_i r_i^2,$$

где r_i – расстояние материальной точки массой m_i до оси вращения.

Ниже приведены моменты инерции некоторых однородных тел массой m правильной геометрической формы.

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр радиусом R	Ось симметрии	mR^2
Сплошной цилиндр или диск радиусом R	То же	$\frac{1}{2}mR^2$
Прямой тонкостенный стержень длиной l	Ось перпендикулярна к стержню и проходит через его середину	$\frac{1}{12}ml^2$
То же	Ось перпендикулярна к стержню и проходит через его конец	$\frac{1}{3}ml^2$
Шар радиусом R	Ось проходит через центр шара	$\frac{2}{5}mR^2$

В случае непрерывного распределения масс (сплошного однородного твердого тела)

$$J = \oint\limits_m r^2 dm = \rho \oint\limits_V r^2 dV ,$$

где ρ – плотность тела; V – его объем.

Теорема Штейнера:

$$J = J_c + ma^2,$$

где J_c – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс; J – момент инерции относительно параллельной оси, отстоящей от первой на расстоянии a; m – масса вращающегося тела.

Момент импульса материальной точки относительно неподвижной точки

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{\upsilon}].$$

Момент импульса (момент количества движения) твердого тела относительно неподвижной оси вращения

$$\vec{L}_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \upsilon_i r_i = J_z \vec{\omega}_z ,$$

где r_i – расстояние от оси z до отдельной частицы тела; $m_i\upsilon_i$ – импульс этой частицы; J_z – момент инерции тела относительно оси Z; $\vec{\omega}_z$ – угловая скорость вращения.

Закон сохранения момента импульса (момента количества движения) для замкнутой системы:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \text{const}.$$

Для двух взаимодействующих тел

$$J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = J_1'\omega_1' + J_2'\omega_2',$$

где J_1, J_2, ω_1, ω_2 – моменты инерции и угловые скорости тел до взаимодействия; J_1', J_2', ω_2', ω_2' – те же величины после взаимодействия.

Основное уравнение (закон) динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}; \quad M_z = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon,$$

где ε – угловое ускорение; J_z – момент инерции тела относительно оси Z.

Элементарная работа при вращении тела

$$dA = M_z d\varphi,$$

где $d\varphi$ – угол поворота тела; M_z – момент силы относительно оси z.

Работа внешних сил при повороте твердого тела на конечный угол φ

$$A = \int_0^{\varphi} M_z d\varphi.$$

Если M_z = const, то работа

$$A = M_z \varphi.$$

Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси Z,

$$W_{K вр} = \frac{J_z \omega^2}{2},$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси Z; ω – его угловая скорость.

Кинетическая энергия тела, катящегося по плоскости без скольжения,

$$W_K = \frac{1}{2} m \upsilon_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2,$$

где m – масса тела; υ_c – скорость центра масс тела; J_c – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс; ω – угловая скорость тела.

Напряжение при упругой деформации тела

$$\sigma = \frac{F}{S},$$

где F – растягивающая (сжимающая) сила; S – площадь поперечного сечения тела.

Относительное продольное растяжение (сжатие)

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l},$$

где Δl – изменение длины тела при растяжении (сжатии); l – длина тела до деформации.

Относительное поперечное растяжение (сжатие)

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d},$$

где Δd – изменение диаметра стержня при растяжении (сжатии); d – диаметр стержня.

Связь между относительным поперечным сжатием (растяжением) ε' и относительным продольным растяжением (сжатием) ε:

$$\varepsilon' = \mu\varepsilon,$$

где μ – коэффициент Пуассона.

Закон Гука для продольного растяжения (сжатия):

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где E – модуль Юнга.

Потенциальная энергия упругорастянутого (сжатого) тела

$$W_{\Pi} = \int_0^{\Delta l} F dx = \frac{1}{2}\frac{ES}{l}(\Delta l)^2 = \frac{E\varepsilon^2}{2}V,$$

где V – объем тела.

Гидростатическое давление столба жидкости на глубине h

$$p = \rho g h,$$

где ρ – плотность жидкости.

Закон Архимеда:

$$F_A = \rho g V,$$

где F_A – выталкивающая сила; V – объем вытесненной жидкости.

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости:

$$S\upsilon = \text{const},$$

где S – площадь поперечного сечения трубки тока; υ – скорость жидкости.

Уравнение Бернулли для стационарного течения идеальной несжимаемой жидкости:

$$\frac{\rho\upsilon^2}{2} + \rho g h + p = \text{const},$$

где p – статическое давление жидкости для определенного сечения трубки тока; υ – скорость жидкости для этого же сечения; $\frac{\rho\upsilon^2}{2}$ – динамическое давление жидкости для этого же сечения; h – высота, на которой расположено сечение; $\rho g h$ – гидростатическое давление.

Для трубки тока, расположенной горизонтально,

$$\frac{\rho\upsilon^2}{2} + p = \text{const}.$$

Формула Торричелли, позволяющая определить скорость истечения жидкости из малого отверстия в открытом широком сосуде:

$$\upsilon = \sqrt{2gh},$$

где h – глубина, на которой находится отверстие относительно уровня жидкости в сосуде.

Сила внутреннего трения между слоями текущей жидкости

$$F = \eta \cdot \left| \frac{\Delta\upsilon}{\Delta x} \right| \cdot S,$$

где η – динамическая вязкость жидкости; $\frac{\Delta\upsilon}{\Delta x}$ – градиент скорости; S – площадь соприкасающихся слоев.

Число Рейнольдса, определяющее характер движения жидкости,

$$\text{Re} = \frac{\rho\langle\upsilon\rangle d}{\eta},$$

где ρ – плотность жидкости; $\langle\upsilon\rangle$ – средняя по сечению трубы скорость жидкости; d – характерный линейный размер, например, диаметр трубы.

Формула Стокса, позволяющая определить силу сопротивления, действующую на медленно движущийся в вязкой среде шарик:

$$F = 6\pi\eta r\upsilon,$$

где r – радиус шарика; υ – его скорость.

Формула Пуазейля, позволяющая определить объем жидкости, протекающий за время t через капиллярную трубку длиной l:

$$V = \pi R^4 \frac{\Delta p t}{8\eta l},$$

где R – радиус трубки; Δp – разность давлений на концах трубки.

При движении твердых тел в жидкостях и газах лобовое сопротивление

$$R_x = C_x \frac{\rho \upsilon^2}{2} S,$$

где C_x – коэффициент сопротивления (безразмерный); ρ – плотность среды; υ – скорость движения тела; S – площадь наибольшего поперечного сечения тела.

Подъемная сила

$$R_y = C_y \frac{\rho \upsilon^2}{2} S,$$

где C_y – коэффициент подъемной силы (безразмерный).

Задача 1.71

Зависимость угла поворота от времени для точки, лежащей на ободе колеса радиусом R, задается уравнением $\varphi = t^3 + 0{,}5t^2 + 2t + 1$. К концу третьей секунды эта точка получила нормальное ускорение, равное 153 м/с^2. Определить радиус колеса.

Дано: $\varphi = t^3 + 0{,}5t^2 + 2t + 1$; $t = 3$ с; $a_n = 153$ м/с^2.

Найти: R.

Решение. Для определения радиуса колеса воспользуемся формулой связи нормального ускорения с угловой скоростью:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R,$$

отсюда

$$R = \frac{a_n}{\omega^2}.$$

Угловую скорость найдем как первую производную от угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 3t^2 + t + 2.$$

Численное значение угловой скорости в конце третьей секунды найдем, подставив в полученное уравнение для ω время $t = 3$ с:

$$\omega = (2 + 3 + 3 \cdot 9) = 32\ (1/\text{с}).$$

Радиус колеса

$$R = \frac{a_n}{\omega^2};$$

$$[R] = \frac{\text{м}/\text{с}^2}{1/\text{с}^2} = \text{м};$$

$$R = \frac{153}{32^2} = 0{,}15\ \text{м}.$$

Ответ: $R = 0{,}15$ м.

Задача 1.72

Маховик массой 4 кг свободно вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр, делая 720 об/мин. Массу маховика можно считать распределенной по его ободу радиусом 40 см. Через 30 с под действием тормозящего момента маховик остановился. Найти тормозящий момент и число оборотов, которое делает маховик до полной остановки.

Дано: $\omega = 0$; $m = 4$ кг; $\Delta t = 30$ с; $R = 0{,}4$ м; $n = 12$ с$^{-1}$.

Найти: M; N.

Решение. Для определения тормозящего момента M нужно применить основное уравнение динамики вращательного движения:

$$J\Delta\omega = M\Delta t, \tag{1}$$

где J – момент инерции маховика относительно оси, проходящей через центр масс; $\Delta\omega$ – изменение угловой скорости за время Δt, причем $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, где ω – конечная угловая скорость, а ω_0 – начальная; M – тормозящий момент сил, действующих на тело.

По условию задачи $\Delta\omega = -\,\omega_0$, так как конечная угловая скорость $\omega = 0$. Выразим начальную угловую скорость ω_0 через число оборотов маховика n в единицу времени, тогда

$$\omega_0 = 2\pi n \quad \text{и} \quad \Delta\omega = -\,2\pi n.$$

Момент инерции маховика $J = mR^2$, где m – масса маховика, а R – его радиус.

Зная все величины, можно определить тормозящий момент:

$$-mR^2 \cdot 2\pi n = M\Delta t,$$

откуда

$$M = -\frac{2\pi n \cdot mR^2}{\Delta t};$$

$$[M] = \frac{\frac{1}{\text{с}} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Н} \cdot \text{м};$$

$$[M] = -\frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 12 \cdot 4 \cdot 0{,}4^2}{30} = -1{,}61 \text{ нм}.$$

Угол поворота (угловой путь φ) за время вращения маховика до остановки может быть определен по формуле для равнозамедленного вращения:

$$\varphi = \omega_0 \Delta t - \frac{\varepsilon \Delta t^2}{2}, \qquad (2)$$

где ε – угловое ускорение.

По условию задачи

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon\Delta t; \quad \omega = 0; \quad \omega_0 = \varepsilon\Delta t.$$

Тогда выражение (2) может быть записано так:

$$\varphi = \omega_0 \Delta t - \frac{\omega_0 \Delta t}{2} = \frac{\omega_0 \Delta t}{2}. \qquad (3)$$

Формула (3) может быть также получена по значению средней угловой скорости. Выразив значение φ через число полных оборотов N и ω_0 через число оборотов маховика n в единицу времени, найдем:

$$\varphi = 2\pi N; \quad \omega_0 = 2\pi n.$$

Отсюда определим число полных оборотов N:

$$\varphi = \frac{\omega_0 \Delta t}{2};$$

$$2\pi N = \frac{2\pi n \Delta t}{2};$$

$$N = \frac{n \Delta t}{2}.$$

$$[N] = 1/\text{с} \cdot \text{с} = 1; \quad N = \frac{12 \cdot 30}{2} = 180.$$

Ответ: $M = -1{,}61$ Н·м; $N = 180$.

Задача 1.73

Однородный диск, имеющий вес P = 124 Н, вращается с постоянным угловым ускорением, и его движение описывается уравнением $\varphi = 30t^2 + 2t + 1$. Диск вращается под действием постоянной касательной тангенциальной силы F_τ = 90,2 Н, приложенной к ободу диска. Определить момент сил трения $M_{тр}$, действующих на диск при вращении. Радиус диска R = 0,15 м.

Дано: P =124 Н; $\varphi = 30t^2 + 2t + 1$; F_τ = 90,2 Н; R = 0,15 м.

Найти: $M_{тр}$.

Решение. Для нахождения $M_{тр}$ используем второй закон Ньютона для вращательного движения. На диск при вращении действует две силы: движущая сила F_τ и сила трения $F_{тр}$. Результирующий момент сил, под действием которого вращается диск, равен

$$M = F_\tau R - M_{тр}.$$

С другой стороны, согласно основному закону динамики вращательного движения

$$M = J\varepsilon,$$

где J – момент инерции диска; $J = \dfrac{mR^2}{2}$; ε – угловое ускорение, приобретаемое диском под действием результирующего момента сил M.

Искомый момент сил трения найдем, приравняв друг к другу два полученных выражения для M.

Значение ε найдем из уравнения движения, взяв вторую производную по времени от φ:

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 60 \text{ с}^{-2}.$$

Масса диска

$$m = \frac{P}{g} = \frac{124}{9{,}81} = 12{,}64 \text{ кг}.$$

Окончательно

$$M_{тр} = F_\tau R - \frac{mR^2}{2}\varepsilon.$$

$$[M_{тр}] = \text{Н·м} - \frac{\text{кг}\cdot\ \text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Н·м} - \text{Н·м} = \text{Н·м}.$$

$$M_{тр} = 90{,}2\cdot 0{,}15 - \frac{12{,}7\cdot 0{,}0225}{2}\cdot 60 = 5\ \text{Н·м}.$$

Ответ: $M_{тр} = 5$ Н·м.

Задача 1.74

Найти момент инерции J прямоугольника, сделанного из проволоки, со сторонами $a = 20$ см и $b = 10$ см относительно оси, лежащей в плоскости прямоугольника и проходящей через середины больших сторон. Масса прямоугольника $m_0 = 0{,}3$ кг.

Дано: $a = 0{,}2$ м; $b = 0{,}1$ м; $m_0 = 0{,}3$ кг.

Найти: J.

Решение. Момент инерции прямоугольника равен сумме моментов инерции его сторон. С учетом симметрии фигуры (см. рисунок) можно записать:

$$J = 2\,(J_a + J_b), \qquad (1)$$

где J_a и J_b – моменты инерции сторон a и b прямоугольника соответственно.

Определим J_a. Момент инерции стержня массой m и длиной l относительно оси, проходящей через центр инерции стержня перпендикулярно к нему, найдем по формуле

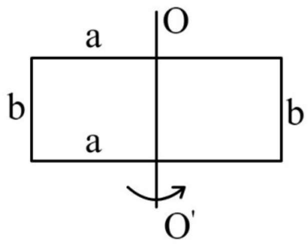
$$J = \frac{ml^2}{12}.$$

Так как на единицу длины прямоугольника приходится масса $\frac{m_0}{2\,(a+b)}$, то масса стороны a равна

$$m_a = \frac{m_0 a}{2\,(a+b)},$$

а ее момент инерции

$$J_a = \frac{m_0 a^3}{24\,(a+b)}. \qquad (2)$$



Определим J_b. Момент инерции стержня относительно оси, совпадающей с осью стержня, равен нулю. Согласно теореме Штейнера момент инерции стержня длиной l и массой m относительно оси, параллельной стержню и расположенной на расстоянии r от стержня,

$$J = mr^2.$$

С учетом того, что масса стороны b

$$m_b = \frac{m_0 b}{2\,(a+b)},$$

а расстояние $r = a/2$, запишем:

$$J_b = \frac{m_0 b a^2}{8\,(a+b)}. \qquad (3)$$

Подставляя выражения (2) и (3) в (1), получим:

$$J = 2\left[\frac{m_0 a^3}{24\,(a+b)} + \frac{m_0 b a^2}{8\,(a+b)}\right] = \frac{m_0 a^2}{4\,(a+b)}\left(\frac{a}{3} + b\right);$$

$$[J] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{м}}\cdot\text{м} = \text{кг}\cdot\text{м}^2;$$

$$J = \frac{0,3\cdot 0,2^2}{4(0,2+0,1)}\cdot\left(\frac{0,2}{3} + 0,1\right) = 1,67\cdot 10^{-3}\,\text{кг}\cdot\text{м}^2.$$

Ответ: $J = 1,67\cdot 10^{-3}\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$.

Задача 1.75

К стержню длиной l = 0,5 м и массой m = 0,3 кг приварен цилиндр массой M = 1,2 кг и радиусом R = 0,25 м (см. рисунок). Определить момент инерции J системы относительно оси OO', проходящей через незакрепленный конец стержня параллельно образующей цилиндра.

Дано: l = 0,5 м; m = 0,3 кг; M = 1,2 кг; R = 0,25 м.

Найти: J.

Решение. Общий момент инерции J рассматриваемой системы относительно оси OO' равен сумме моментов инерции стержня J_1 и цилиндра J_2:

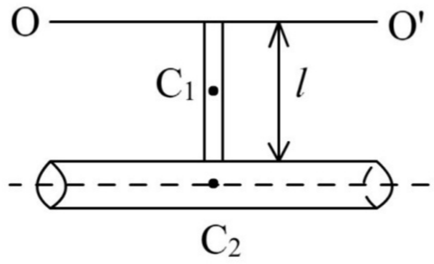
$$J = J_1 + J_2. \tag{1}$$

Для определения J_1 и J_2 следует воспользоваться теоремой Штейнера:

$$J = J_c + md^2, \tag{2}$$

где J_c – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс; J – момент инерции относительно параллельной оси, отстоящей от первой на расстоянии d; m – масса тела.

Моменты инерции стержня и цилиндра, согласно формуле (2),



$$J_1 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}; \tag{3}$$

$$J_2 = \frac{MR^2}{2} + M(R+l)^2. \tag{4}$$

Подставив выражения (3) и (4) в формулу (1), найдем искомый момент инерции:

$$J = \frac{ml^2}{3} + \frac{MR^2}{2} + M(R+l)^2;$$

$$[J] = \text{кг·м}^2 + \text{кг·м}^2 + \text{кг·м}^2 = \text{кг·м}^2;$$

$$J = \frac{0,3 \cdot 0,5^2}{3} + \frac{1,2 \cdot 0,25^2}{2} + 1,2\ (0,25+0,5)^2 = 0,738\ \text{кг} \cdot \text{м}^2.$$

Ответ: $J = 0,738$ кг·м^2.

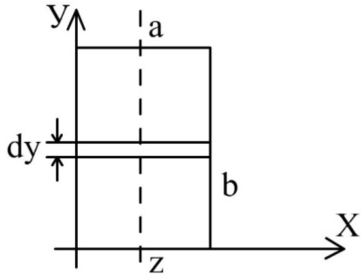
Задача 1.76

Определить момент инерции J однородной прямоугольной пластинки массой 500 г со сторонами $a = 20$ см и $b = 30$ см относительно оси, проходящей через геометрический центр пластинки параллельно большей ее стороне.

Дано: $a = 0,2$ м; $b = 0,3$ м; $m = 0,5$ кг.

Найти: J.

Решение. Согласно условию задачи ось Y проходит параллельно стороне b (см. рисунок). Мысленно выделим тонкую полоску шириной dY. Эту полоску можно считать тонким стержнем длиной a.



Тогда ее момент инерции

$$dJ = \frac{a^2}{12}dm = \frac{\rho h a^3}{12}dy.$$

(учли, что масса полоски $dm = \rho a h dy$),
где ρ – плотность пластинки; h – толщина пластинки.

Искомый момент инерции пластинки

$$J = \int dJ = \int_0^b \frac{\rho h a^3}{12}dy = \frac{\rho h a^3 b}{12} = \frac{ma^2}{12},$$

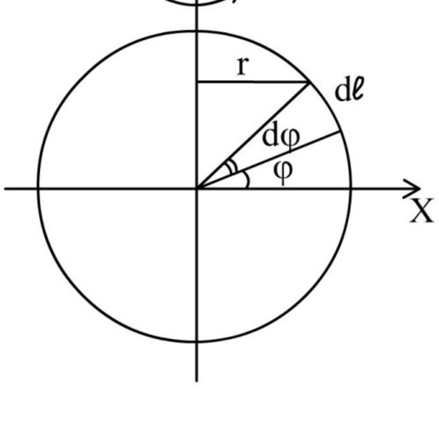
где m – масса всей пластинки, $m = \rho abh$.

$$J = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}2^2}{12} = 1{,}67 \cdot 10^{-3} \text{ кг·м}^2.$$

Ответ: $J = 1{,}67 \cdot 10^{-3}$ кг·м^2.

Задача 1.77

Найти момент инерции обруча радиусом $R = 30$ см и массой $m = 200$ г относительно оси, проходящей через его центр и лежащей в плоскости обруча.



Дано: $R = 0{,}3$ м; $m = 0{,}2$ кг.

Найти: J.

Решение. Момент инерции однородного тела находится по формуле

$$J = \int_m r^2 dm,$$

где r – расстояние от выбранной точки до оси вращения.

Интегрирование этого выражения производится по всем точкам тела.

Выделим на обруче элемент длиной dl (см. рисунок) массой

$$dm = \frac{m}{2\pi R} dl.$$

Положение элемента dl относительно центра обруча можно определить углом φ и радиус-вектором $\vec{r}$. При этом $dl = Rd\varphi$, $r = R\cos\varphi$.

Тогда

$$dJ = \left(R\cos\varphi\right)^2 \frac{m}{2\pi R} Rd\varphi. \qquad (1)$$

Для нахождения момента инерции всего обруча интегрируем выражение (1) от $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$ до $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, а полученный результат удвоим:

$$J = \frac{2m}{2\pi R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^3 \cos^2\varphi d\varphi = \frac{2mR^2}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi d\varphi = \frac{mR^2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi =$$

$$= \frac{mR^2}{2\pi} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi + \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2\varphi d\varphi \right] = \frac{mR^2}{2\pi} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{mR^2}{2\pi} \left(\pi + \sin\pi \right) = \frac{mR^2}{2};$$

$$[J] = \text{кг·м}^2.$$

$$J = \frac{0,2 \cdot 0,3^2}{2} = 9 \cdot 10^{-3} \text{кг} \cdot \text{м}^2.$$

Ответ: $J = 9 \cdot 10^{-3}$ кг·м^2.

Задача 1.78

Найти момент инерции однородного диска массой $m_0 = 1$ кг и радиусом $R = 0,5$ м относительно оси, проходящей через центр диска перпендикулярно к его плоскости, если в диске вырезано отверстие радиусом $r = 0,1$ м, центр которого находится на расстоянии $l = 10$ см от оси диска.

Дано: $m_0 = 1$ кг; $R = 0,5$ м; $r = 0,1$ м; $l = 0,1$ м.

Найти: J.

Решение. Момент инерции сплошного диска относительно оси, проходящей через его центр инерции,

$$J_0 = \frac{1}{2} mR^2. \tag{1}$$

Масса сплошного диска

$$m_0 = \rho V = \rho\pi R^2 h, \tag{2}$$

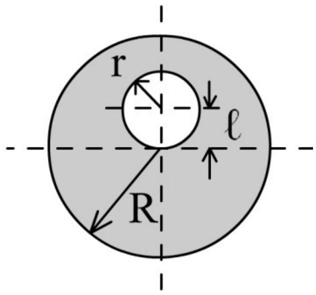
где ρ – плотность материала; h – высота диска; V – объем диска.

Из выражения (2) найдем плотность:

$$\rho = \frac{m_0}{\pi R^2 h}. \tag{3}$$

Масса вырезанного диска

$$m = \rho\pi r^2 = \frac{m_0 r^2 h\pi}{\pi R^2 h} = m_0 \frac{r^2}{R^2}.$$



Момент инерции вырезанного диска относительно оси, проходящей через его центр инерции,

$$J_в = \frac{1}{2} mr^2 = \frac{m_0 r^4}{2R^2}. \tag{4}$$

Момент инерции вырезанного диска относительно центра сплошного диска определяется по теореме Штейнера:

$$J' = J_в + ml^2 = \frac{m_0 r^4}{2R^2} + ml^2 = \frac{m_0 r^4}{2R^2} + \frac{m_0 r^2}{R^2} l = \frac{m_0 r^2}{R^2}\left(\frac{r^2}{2} + l^2\right). \tag{5}$$

Искомый момент инерции найдем из уравнений (1), (5):

$$J = J_0 - J' = \frac{1}{2} m_0 R^2 - \frac{m_0 r^2}{R^2}\left(\frac{r^2}{2} + l^2\right) = \frac{m_0}{2R^2}\left(R^4 - r^4 - r^2 l^2\right);$$

$$[J] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^2} \cdot \text{м}^4 = \text{кг}\cdot\text{м}^2.$$

$$J = \frac{1}{2 \cdot 0{,}5}\left(0{,}5^4 - 0{,}1^4 - 0{,}1^2 \cdot 0{,}1^2\right) = 12{,}5 \cdot 10^{-2} \text{кг} \cdot \text{м}^2.$$

Ответ: $J = 12{,}5 \cdot 10^{-2}$ кг·м^2.

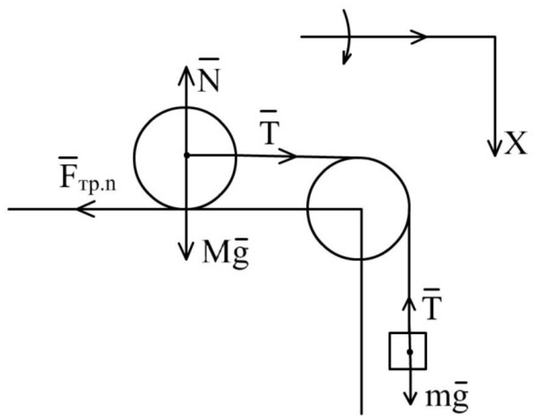
Задача 1.79

Система, состоящая из цилиндрического катка радиусом R и гири, связанных нитью, перекинутой через блок, под действием силы тяжести гири приходит в движение из состояния покоя. Определить ускорение $\vec{a}$ центра инерции катка и силу натяжения нити $\vec{T}$. Какую скорость $\vec{\upsilon}$ приобретет гиря, если она спустится с высоты h? Масса цилиндра M, масса гири m, массой блока пренебречь. Считать, что цилиндр катится по горизонтальной поверхности без скольжения. Трением качения пренебречь.

Дано: R; M; m; h.

Найти: a; T; υ.

Решение. Катящийся цилиндр участвует в двух движениях: вращается вокруг оси и движется поступательно со скоростью оси. На каток действуют четыре силы (см. рисунок): сила натяжения нити $\vec{T}$, сила тяжести $M\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения покоя $\vec{F}_{тр.п}$.



Сила трения покоя обусловлена тем, что каток не скользит, а катится по плоскости, в то время как первые три силы, проходящие через ось, не могли бы вызвать вращение тела. Действие силы $\vec{F}_{тр.п}$ не связано с трением качения. Она проявляется как сила реакции опоры, противодействующая возникновению скольжения катка по плоскости. При исчезновении силы натяжения нити $\vec{T}$ исчезнет и сила $\vec{F}_{тр.п}$. Выберем положительные направления оси X и угла поворота. Для поступательного движения на основании закона, описывающего движение твердого тела, получим:

$$T - F_{тр.п} = Ma. \tag{1}$$

Так как вращающий момент относительно оси цилиндра создает лишь сила трения, то согласно основному уравнению динамики вращательного движения твердого тела имеем:

$$F_{тр.п}R = J\varepsilon. \tag{2}$$

Поскольку каток катится без проскальзывания,

$$\varepsilon = \frac{a}{R}.$$

Известно, что момент инерции однородного цилиндра

$$J = \frac{MR^2}{2}.$$

Применим второй закон Ньютона для гири, ускорение которой равно ускорению центра инерции катка:

$$mg - T = ma. \qquad (3)$$

Решая систему (1) – (3), найдем неизвестные величины a и T:

$$a = \frac{2mg}{3M + 2m};$$

$$T = \frac{3Mmg}{3M + 2m}.$$

Зная ускорение гири, вычислим искомую скорость υ по формуле скорости равноускоренного движения:

$$\upsilon = \sqrt{2ah} = 2\sqrt{\frac{mgh}{3M + 2m}}.$$

Ответ: $a = \dfrac{2mg}{3M + 2m}$; $T = \dfrac{3Mmg}{3M + 2m}$; $\upsilon = 2\sqrt{\dfrac{mgh}{3M + 2m}}$.

Задача 1.80

На однородный сплошной цилиндрический вал радиусом R = 20 см намотана невесомая нить, к концу которой подвешен груз массой m = 2 кг. Груз, разматывая нить, опускается с ускорением a = 1 м/с^2.

Определить: 1) момент инерции J вала; 2) массу m_1 вала.

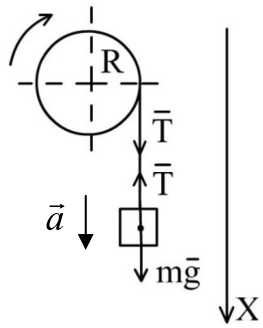
Дано: R = 0,2 м; m = 2 кг; a = 1 м/с^2.

Найти: 1) J; 2) m_1.

Решение. Согласно основному уравнению динамики вращательного движения вращающий момент, приложенный к валу,

$$M = J\varepsilon, \tag{1}$$

где J – момент инерции вала относительно оси, перпендикулярной к плоскости чертежа; $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$ – угловое ускорение.



С другой стороны, вращающий момент, действующий на вал, равен произведению силы натяжения T нити на радиус R вала:

$$M = TR. \tag{2}$$

Приравнивая выражения (1) и (2) и учитывая формулу для ε, найдем:

$$J = \frac{TR^2}{a}. \tag{3}$$

Направив ось X вертикально вниз (см. рисунок), запишем уравнение движения (второй закон Ньютона) на эту ось:

$$ma = mg - T, \tag{4}$$

где T – сила натяжения нити.

Из уравнения (4) сила натяжения нити

$$T = m\,(g - a).$$

Подставив это выражение в формулу (3), найдем искомый момент инерции вала:

$$J = mR^2\left(\frac{g}{a} - 1\right);$$

$$[J] = \text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\frac{\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{м}} = \text{кг}\cdot\text{м}^2;$$

$$J = 2\cdot 0{,}2^2\left(\frac{9{,}8}{1} - 1\right) = 0{,}7\ \text{кг}\cdot\text{м}^2.$$

Учитывая, что момент инерции сплошного цилиндрического вала $J = \dfrac{m_1R^2}{2}$, можно определить искомую массу вала:

$$m_1 = \frac{2J}{R^2};\quad [m_1] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{м}^2} = \text{кг};\quad m_1 = \frac{2\cdot 0{,}7}{0{,}2^2} = 35\ \text{кг}.$$

Ответ: $J = 0{,}7$ кг·м^2; $m_1 = 35$ кг.

Задача 1.81

Кинетическая энергия вращающегося с частотой $n_1 = 3$ с$^{-1}$ маховика равна 8,4 кДж. Во сколько раз увеличится частота вращения маховика за время $t = 5$ с, если на маховик начнет действовать ускоряющий момент силы $M = 100$ Н·м?

Дано: $E_{к.вр} = 8{,}4 \cdot 10^3$ Дж; $n_1 = 3$ с$^{-1}$; $M = 100$ Н·м; $t = 5$ с.

Найти: $\dfrac{n_2}{n_1}$.

Решение. Кинематическое уравнение для угловой скорости вращательного движения имеет вид:

$$\omega_2 = \omega_1 + \varepsilon t$$

или

$$2\pi n_2 = 2\pi n_1 + \varepsilon t, \qquad (1)$$

где ω_1 и ω_2 – угловые скорости; $\omega_1 = 2\pi n_1$ и $\omega_2 = 2\pi n_2$; ε – угловое ускорение.

Угловое ускорение, согласно основному уравнению динамики вращательного движения,

$$\varepsilon = \frac{M}{J}, \qquad (2)$$

где M – момент силы относительно оси; J – момент инерции маховика относительно той же оси.

Кинетическая энергия вращающегося маховика до начала действия ускоряющего момента силы

$$E_{к.вр} = \frac{J\omega_1^2}{2} = 2\pi^2 n_1{}^2 J \quad (\text{учли, что } \omega_1 = 2\pi n_1),$$

откуда момент инерции

$$J = \frac{E_{к.вр}}{2\pi^2 n_1^2}. \qquad (3)$$

Подставив выражение (3) в формулу (2), найдем:

$$\varepsilon = \frac{2\pi^2 n_1^2 M}{E_{к.вр}}. \qquad (4)$$

Запишем формулу (1) с учетом (4):

$$2\pi n_2 = 2\pi n_1 + \frac{2\pi^2 n_1^2 Mt}{E_{к.вр}},$$

откуда искомое отношение частот

$$\frac{n_2}{n_1} = 1 + \frac{\pi n_1 Mt}{E_{к.вр}};$$

$$\left[\frac{n_2}{n_1}\right] = \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{с} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}} = 1;$$

$$\frac{n_2}{n_1} = 1 + \frac{3{,}14 \cdot 3 \cdot 100 \cdot 5}{8{,}4 \cdot 10^3} = 6{,}61.$$

Ответ: $\frac{n_2}{n_1} = 6{,}61.$

Задача 1.82

Через блок массой m_0 = 300 г, укрепленный на горизонтальной оси, проходящей через его центр, перекинута нить, к которой прикреплены грузы m_1 = 300 г и m_2 = 200 г (см. рисунок). Блок считать однородным диском (R = 20 см).

Найти: 1) ускорения грузов; 2) результирующий момент вращения блока; 3) силу давления $F_{давл.}$ блока на ось.

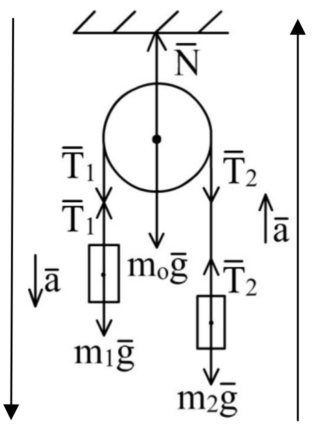
Дано: m_0 = 0,3 кг; m_1 = 0,3 кг; m_2 = 0,2 кг; R = 0,2 м; g = 10 м/с.

Найти: a_0; M; F.

Решение. Система состоит из трех тел: грузов m_1 и m_2, движущихся поступательно, и блока m_0, который вращается. Основное уравнение динамики для поступательного движения:

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}; \\ m_2\vec{g} + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}. \end{cases} \qquad \begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a; \\ T_2 - m_2 g = m_2 a. \end{cases}$$

На блок действуют: сила тяжести $m_0\vec{g}$, реакция опоры $\vec{N}$ со стороны оси, равная силе давления $F_{давл}$ блока на эту ось, силы натяжения нити $\vec{T}_1$ со стороны груза m_1 и $\vec{T}_2$ со стороны груза m_2. Силы $\vec{N}$ и $m_0\vec{g}$ во вращении не участвуют, так как их моменты относительно оси вращения равны нулю. Вращение вызывается только силами $\vec{T_1}$ и $\vec{T_2}$.



Моменты сил $\vec{T_1}$ и $\vec{T_2}$ направлены по оси вращения, но в противоположные стороны. Основное уравнение динамики для вращательного движения блока:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = J\vec{\varepsilon}; \quad R(T_1 - T_2) = J\varepsilon.$$

1. Решаем совместно уравнения:

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a; \\ T_2 - m_2 g = m_2 a; \\ (T_1 - T_2)\, R = \dfrac{m_0 R^2}{2}\dfrac{a}{R} \end{cases}$$

(учли, что $J = \dfrac{m_0 R^2}{2}$, а $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$);

$$m_1 g - T_1 + T_2 - m_2 g + T_1 - T_2 = \left(m_1 + m_2 + \frac{m_0}{2}\right)a;$$

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + \dfrac{m_0}{2}}; \quad [a] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2}{\text{кг}} = \text{м/с}^2; \quad a = \frac{0{,}1\cdot 10}{0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}3/2} = 1{,}54 \text{ м/с}^2.$$

2. Найдем силы натяжения $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$:

$$T_1 = m_1\,(g - a);$$
$$T_2 = m_2\,(g + a).$$

Тогда результирующий момент блока

$$M = (T_1 - T_2)R = (m_1 g - m_1 a - m_2 g - m_2 a)R = [(m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a]R;$$

$$[M] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\text{м} = \text{Н·м};$$

$$M = (0{,}1\cdot 10 - 0{,}5\cdot 1{,}54)\cdot 0{,}2 = 0{,}046 \text{ Н·м} = 0{,}05 \text{ Н·м}.$$

3. Сила давления $|F_{давл}|$ на ось блока по третьему закону Ньютона равна реакции опоры $|N|$. Сумма сил, действующих на блок по оси OY, равна нулю:

$$\vec{N} - m_0\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0;$$

$$N - T_1 - T_2 - m_0 g = 0;$$

$$N = T_1 + T_2 + m_0 g = m_1 g - m_1 a + m_2 g + m_2 a + m_0 g;$$

$$N = (m_1 + m_2 + m_0)\, g - (m_1 - m_2)a;$$

$$[N] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} - \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}.$$

$$N = (0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}3)\, 10 - (0{,}3 - 0{,}2)\, 1{,}54 = 7{,}62 \text{ Н}.$$

Ответ: $a = 1{,}54$ м/с^2; $M = 0{,}05$ Н·м; $F = 7{,}62$ Н.

Задача 1.83

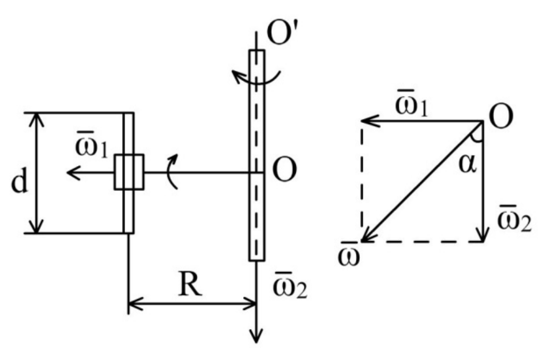
Колесо диаметром $d = 7$ см, насаженное на горизонтальную ось, катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью $\upsilon = 16{,}8$ см/с, описывая окружность радиусом $R = 12$ см. Найти величину результирующей угловой скорости колеса и угол ее наклона к вертикали.

Дано: $d = 0{,}07$ м; $\upsilon = 0{,}168$ м/с; $R = 0{,}12$ м.

Найти: ω, α.

Решение. Пусть колесо катится так, что сверху его движение видно происходящим по часовой стрелке (см. рисунок). Колесо одновременно участвует в двух движениях: вращении вокруг оси OO' с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$ и вращении вокруг собственной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$, направленной вдоль радиуса от оси OO'. Вектор результирующей угловой скорости равен сумме $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2.$$



Так как векторы $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ взаимно перпендикулярны, то

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}\,; \qquad (1)$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \qquad (2)$$

Угловая скорость $\vec{\omega}_2$ численно равна отношению линейной скорости к радиусу вращения:

$$\omega_2 = \frac{\upsilon}{R}. \qquad (3)$$

Численное значение угловой скорости $\vec{\omega}_1$ найдем из условия, что колесо катится по плоскости без скольжения. Отсутствие скольжения означает, что линейная скорость $\vec{\upsilon}_1$ точки колеса, касающейся плоскости, равна скорости точек плоскости, т.е равна нулю. Скорость $\vec{\upsilon}_1$ численно равна разности линейной скорости υ вращения колеса вокруг оси OO' и линейной скорости $\omega_1 \frac{d}{2}$ вращения колеса вокруг собственной оси: $\upsilon_1 = \upsilon - \frac{\omega_1 d}{2} = 0.$

Поэтому

$$\omega_1 = \frac{2\upsilon}{d}. \qquad (4)$$

Заменяя в формулах (1) и (2) ω_1 и ω_2 выражениями (3) и (4), получим окончательно:

$$\omega = \sqrt{\frac{4\upsilon^2}{d^2} + \frac{\upsilon^2}{R^2}} = \frac{\upsilon}{dR}\sqrt{4R^2 + d^2}; \quad \alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{2R}{d};$$

$$[\omega] = \frac{\text{м}}{\text{см} \cdot \text{м}} \cdot \sqrt{\text{м}^2} = \frac{\text{м} \cdot \text{м}}{\text{с} \cdot \text{м} \cdot \text{м}} = \frac{1}{\text{с}};$$

$$\omega = \frac{0{,}168}{0{,}07 \cdot 0{,}12} \cdot \sqrt{4 \cdot 0{,}12^2 + 0{,}07^2} = 5 \text{ рад/с}; \quad \alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{2 \cdot 0{,}12}{0{,}07} = 73^\circ 45'.$$

Ответ: $\omega = 5$ рад/с; $\alpha = 73^\circ 45'$.

Задача 1.84

Через неподвижный блок, укрепленный на краю стола, перекинута нить, к которой привязаны три груза массами $m_1 = 800$ г, $m_2 = 700$ г, $m_3 = 200$ г. Масса блока $M = 500$ г, радиус $R = 0{,}38$ м. Считая нить невесомой и пренебрегая трением, определить ускорение грузов a, а также расстояние S, которое груз m_3 пройдет от начала движения до того момента, когда кинетическая энергия вращения блока будет $E_{к.вр} = 1{,}1$ Дж.

Дано: m_1 = 0,8 кг; m_2 = 0,7 кг; m_3 = 0,2 кг; M = 0,5 кг; R = 0,38 м; $E_{к.вр}$ = 1,1 Дж.

Найти: a; S.

Решение. Выбрав направления осей X и Y (см. рисунок), запишем уравнения движения (второй закон Ньютона) для грузов в проекциях на эти оси:

$$T_1 = m_1 a; \tag{1}$$

$$T_2 - T'_1 = m_2 a; \tag{2}$$

$$m_3 g - T_3 = m_3 a. \tag{3}$$

Согласно основному закону динамики вращательного движения вращающий момент, приложенный к блоку,

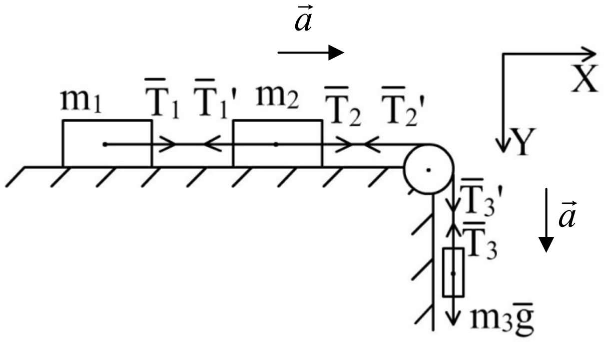
$$M_Z = J\varepsilon, \tag{4}$$

где J – момент инерции блока относительно оси Z, перпендикулярной к плоскости чертежа; ε – угловое ускорение.

С другой стороны,

$$M_Z = (T'_3 - T'_2)R, \tag{5}$$

где T'_3 и T'_2 – силы, приложенные к ободу блока; R – плечо силы, равное радиусу блока.



Приравняв выражения (4) и (5), получаем:

$$J\varepsilon = (T'_3 - T'_2)R. \tag{6}$$

Учитывая, что $J = \dfrac{MR^2}{2}$, $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$, уравнение (6) запишем в виде:

$$\frac{Ma}{2} = T'_3 - T'_2. \tag{7}$$

По третьему закону Ньютона и учитывая, что нити невесомы, $T'_1 = T_1$, $T'_2 = T_2$, $T'_3 = T_3$. Учитывая эти равенства, из уравнений (1) – (3) и (7) находим искомую величину a:

$$a = \frac{m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3 + 0{,}5M}; \qquad [a] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м/с}^2}{\text{кг}} = \text{м/с}^2;$$

$$a = \frac{0{,}2 \cdot 9{,}8}{0{,}8 + 0{,}7 + 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 1{,}01 \text{ м/с}^2.$$

Кинетическая энергия вращающегося блока

$$E_{к.вр} = \frac{J\omega^2}{2},$$

где ω – угловая скорость.

Учитывая, что $\omega = \varepsilon t$, $J = \frac{1}{2}MR^2$, $\varepsilon = \frac{a}{R}$, получаем:

$$E_{к.вр} = \frac{J\varepsilon^2 t^2}{2} = \frac{Ma^2t^2}{4}.$$

Откуда время движения

$$t = \frac{2}{a}\sqrt{\frac{E_{к.вр}}{M}}.$$

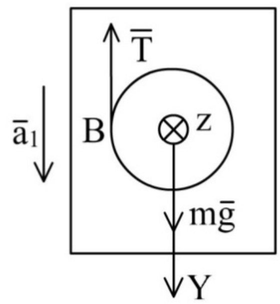
Пройденное за это время расстояние

$$S = \frac{at^2}{2} = \frac{2E_{к.вр}}{M}; \quad [S] = \frac{м}{с^2}\cdot с^2 = м; \quad S = \frac{2\cdot 1{,}1}{0{,}5} = 4{,}4 \text{ м}.$$

Ответ: $a = 1{,}01$ м/с^2; $S = 4{,}4$ м.

Задача 1.85

На полый тонкостенный цилиндр массой m = 2 кг намотана нить (тонкая, невесомая) (см. рисунок). Свободный конец ее прикреплен к потолку лифта, движущегося вниз с ускорением a_1 = 2 м/с^2. Цилиндр предоставлен сам себе. Найти ускорение a_2 цилиндра относительно лифта и силу натяжения T нити.



Дано: m = 2 кг; a_1 = 2 м/с^2; g = 10 м/с^2.

Найти: a_2; T.

Решение. На цилиндр действует сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения $\vec{T}$ нити, которая создает вращающий момент относительно оси, проходящей через центр масс цилиндра перпендикулярно к плоскости рисунка. Следовательно, цилиндр совершает сложное плоское движение – вращение вокруг оси и поступательное движение вниз (разматывается нить, и лифт движется с ускорением a_1).

В системе отсчета, связанной с Землей, можно записать уравнения:

$$m\vec{a}_0 = m\vec{g} + \vec{T}; \quad \vec{M} = J\vec{\varepsilon},$$

где a_0 – ускорение центра масс цилиндра относительно Земли, при этом

$$\vec{a}_0 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2,$$

где a_2 – ускорение цилиндра относительно лифта.

Рассмотрим точку B на ободе цилиндра. Скорость этой точки относительно лифта

$$\vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon}_0 + \vec{u},$$

где $\vec{\upsilon}_0$ – скорость центра масс цилиндра относительно лифта, т.е. скорость поступательного движения цилиндра; u – линейная скорость, обусловленная вращением,

$$u = \omega R,$$

где ω – угловая скорость; R – радиус цилиндра.

Тогда $\upsilon_B = \upsilon_0 - u = 0$, так как точка B принадлежит нити, а она неподвижна относительно лифта; $\upsilon_0 = \omega R$, после дифференцирования по времени имеем:

$$\frac{d\upsilon_0}{dt} = \frac{d\omega}{dt}R; \quad a_2 = \varepsilon R.$$

Введем оси координат Y (направлена вниз) и Z (перпендикулярна к рисунку).

В проекциях на эти оси

$$a_0 = a_1 + a_2; \quad \varepsilon_Z = \varepsilon; \quad M_Z = TR.$$

Для полого цилиндра момент инерции

$$J = mR^2.$$

Уравнение динамики можно записать в виде:

$$m(a_1 + a_2) = mg - T;$$

$$TR = mR^2\varepsilon; \quad ma_1 + ma_2 = mg - ma_2;$$

$$a_2 = \frac{(g - a_1)}{2}; \quad [a] = \text{м/с}^2; \quad a_2 = \frac{9{,}8 - 2}{2} = 3{,}9\ \text{м/с}^2;$$

$$T = \frac{(g - a_1)}{2}; \quad [T] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}; \quad T = \frac{2(9{,}8 - 2)}{2} = 7{,}8\ \text{Н}.$$

Ответ: $a_2 = 3{,}9$ м/с^2; $T = 7{,}8$ Н.

Задача 1.86

Маховик, массу которого m = 5 кг можно считать распределенной по ободу радиусом R = 20 см, свободно вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр, с частотой n = 720 мин$^{-1}$. При торможении маховик останавливается через Δt = 20 с.

Найти: 1) тормозящий момент; 2) число оборотов, которое сделает маховик до полной остановки; 3) работу сил торможения.

Дано: m = 5 кг; R = 0,2 м; n = 12 с$^{-1}$; Δt = 20 с.

Найти: M; N; A.

Решение

1. Если тормозящий момент постоянен, то движение маховика равнозамедленное, и основное уравнение динамики запишется в виде:

$$M = J\,\frac{\Delta\omega}{\Delta \mathrm{t}},$$

где $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_0 = -\omega_0 = -2\pi n$ – измерение угловой скорости за время Δt; J – момент инерции маховика, $J = mR^2$ (масса распределена по ободу);

$$M = \frac{mR^2(2\pi n)}{\Delta t}; \quad [M] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}\cdot\text{с}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Н·м};$$

$$M = \frac{5\cdot 0{,}2^2\cdot 2\cdot 3{,}14\cdot 12}{20} = 0{,}75 \text{ Нм}.$$

2. Для определения числа оборотов до остановки найдем угол поворота из уравнения кинематики для вращательного движения:

$$\varphi = \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon}; \quad \varepsilon = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\Delta t}; \quad \varphi = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\Delta t; \quad \omega_1 = 0;$$

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega_0\Delta t}{2\cdot 2\pi} = \frac{n\Delta t}{2}; \quad [N] = \text{с/с} = 1; \quad N = \frac{12\cdot 20}{2} = 120 \text{ об.}$$

3. Работа торможения будет равна изменению кинетической энергии при вращательном движении:

$$A = \frac{J\omega_1^2}{2} - \frac{J\omega_0^2}{2} = -\frac{mR^2(2\pi n)^2}{2}; \quad A = mR^2\cdot 2\pi^2 n^2;$$

$$[A] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Дж}; \quad A = 5 \cdot 0{,}2^2 \cdot 2 \cdot 3{,}14^2 \cdot 12^2 = 567{,}91 \text{ Дж}.$$

Ответ: $M = 0{,}75$ Нм; $N = 120$ об; $A = 367{,}91$ Дж.

Задача 1.87

С наклонной плоскости высотой $h = 7$ м, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом (см. рисунок), скатывается без скольжения шарик. Пренебрегая трением качения, определить время движения шарика по наклонной плоскости.

Дано: $h = 7$ м; $\alpha = 30^\circ$; $g = 10$ м/с^2.

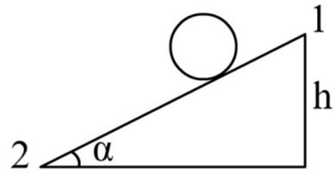
Найти: t.

Решение. Запишем закон сохранения энергии при переходе шарика из состояния 1 в состояние 2:

$$E_1 = E_2.$$

Энергия в состоянии 1 – потенциальная, в состоянии 2 – кинетическая, состоящая из кинетической энергии поступательного движения $\frac{m\upsilon^2}{2}$ и вращательного движения $\frac{J\omega^2}{2}$;

$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2},$$



где υ – скорость поступательного движения центра масс шарика в конце движения; ω – угловая скорость его вращения, $\omega = \frac{\upsilon}{R}$; R – радиус шарика; J – момент инерции шарика, $J = \frac{2}{5}mR^2$.

$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{\frac{2}{5}mR^2\upsilon^2}{2R^2}; \quad gh = \frac{7}{10}\upsilon^2; \quad \upsilon = \sqrt{\frac{10gh}{7}}.$$

Шарик проходит путь $S = \dfrac{h}{\sin\alpha}$ с ускорением a; $S = \dfrac{at^2}{2}$, скорость в конце движения связана с ускорением: $\upsilon = at$;

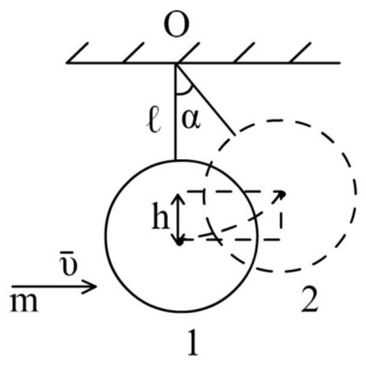
$$\sqrt{\frac{10gh}{7}} = \frac{2S}{t}; \quad t = 2S\sqrt{\frac{7}{10gh}} = \frac{2h}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{7}{10gh}} = \frac{2}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{7h}{10g}} \;;$$

$$[t] = \sqrt{\frac{\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{м}}} = \sqrt{\text{с}^2} = \text{с}\,; \quad t = \frac{2}{0{,}5}\sqrt{\frac{7\cdot 7}{10\cdot 10}} = \frac{4\cdot 7}{10} = 2{,}8 \text{ с.}$$

Ответ: $t = 2{,}8$ с.

Задача 1.88

Маятник в виде однородного шара массой M = 10 кг, жестко скрепленного с тонким невесомым стержнем, длина которого l равна радиусу шара R ($l = R$, R = 15 см), может качаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через конец стержня (см. рисунок). В центр шара попадает пуля массой m = 10 г, летевшая горизонтально со скоростью υ = 800 м/с, и застревает в нем. На какой угол отклонится маятник в результате удара пули? Массой стержня пренебречь.



Дано: $l = R$; R = 0,15 м; m = 0,01 кг; M = 10 кг; υ = 800 м/с; g = 10 м/с^2.

Найти: α.

Решение. Из рисунка видно, что $\cos\alpha = \dfrac{(2R - h)}{2R}$. Следовательно, для ответа на вопрос задачи надо найти высоту, на которую поднимается центр масс шара. В результате удара пули в шар скорости обоих тел будут одинаковыми, следовательно, этот удар можно считать абсолютно неупругим. Значит, механическая энергия в процессе удара не сохраняется. Однако после удара механическая энергия системы «шар плюс пуля» будет сохраняться. Следовательно, кинетическая энергия шара с пулей в состоянии 1 равна их потенциальной энергии в состоянии 2:

$$\frac{J\omega^2}{2} = Mgh \quad (M >> m),$$

где J – момент инерции шара; ω – угловая скорость, приобретенная шаром, когда в него попала пуля.

Для определения угловой скорости воспользуемся законом сохранения момента импульса. На систему «шар плюс пуля» во время удара действуют внешние силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и реакция опоры оси вращения. Эти силы не создают вращательного момента. Значит, момент импульса системы во время удара должен сохраняться. До удара пуля обладала моментом импульса $L_1 = m\upsilon 2R$, после удара момент импульса «пуля и шар» $L_2 = J\omega$. По закону сохранения момента импульса можно записать:

$$m\upsilon 2R = J\omega,$$

где J – момент инерции шара относительно оси вращения ($M >> m$), проходящей через точку O перпендикулярно к плоскости рисунка.

По теореме Штейнера

$$J = \frac{2}{5}MR^2 + M(2R)^2; \quad J = \frac{22}{5}MR^2.$$

Подставляя это значение в закон сохранения момента импульса, получаем:

$$m\upsilon 2R = 4{,}4MR^2\omega; \quad \omega = \frac{m\upsilon}{2{,}2\,MR}.$$

Подставим значения J и ω в уравнение закона сохранения энергии:

$$\frac{4{,}4MR^2m^2\upsilon^2}{2{,}2^2M^2R^2\cdot 2} = Mgh; \quad h = \frac{m^2\upsilon^2}{2{,}2M^2g}; \quad \cos\alpha = 1 - \frac{h}{2R};$$

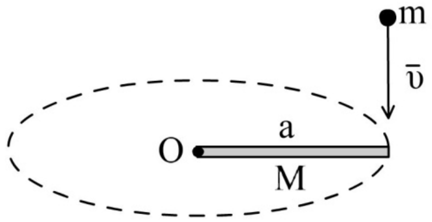
$$\cos\alpha = 1 - \frac{m^2\upsilon^2}{2{,}2M^2g\cdot 2R}; \quad [\cos\alpha] = \frac{\text{кг}^2\cdot\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}}{\text{кг}^2\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\text{м}} = 1;$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{10^{-4}\cdot 64\cdot 10^4}{4{,}4\cdot 10^2\cdot 0{,}15} = 1 - 0{,}097 = 0{,}9; \quad \alpha = 26^\circ.$$

Ответ: $\alpha = 26^\circ$.

Задача 1.89

Однородный стержень массой M и длиной a может свободно вращаться в горизонтальной плоскости относительно вертикальной оси, проходящей через его конец. Во второй конец нормально к стержню ударяется шар массой m, летящий горизонтально со скоростью υ (см рисунок). Удар считать упругим, силы трения между поверхностью плоскости и телами пренебрежимо малы. Найти скорость шара u и угловую скорость стержня ω.



Дано: M; a; m; υ.

Найти: u, ω.

Решение. Воспользуемся законами сохранения механической энергии и момента импульса. Энергия системы «шар – стержень» до удара определялась кинетической энергией шара $E_0 = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$, после взаимодействия – кинетической энергией поступательного движения шара $E_ш = \dfrac{mu^2}{2}$ и вращательной энергией стержня $E_{ст} = \dfrac{J\omega^2}{2}$. Таким образом, закон сохранения энергии

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{mu^2}{2} = \frac{J\omega^2}{2}. \qquad (1)$$

Момент импульса данной системы может быть найден из следующего соотношения:

(до взаимодействия) $m\upsilon a = J\omega + mua$ (после взаимодействия). (2)

Момент инерции стержня относительно оси вращения

$$J = \frac{Ma^2}{3}.$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{m\upsilon^2}{2} = \dfrac{mu^2}{2} + \dfrac{J\omega^2}{2}; \\ m\upsilon a = J\omega + mua; \\ J = \dfrac{Ma^2}{3}, \end{cases}$$

откуда $$m(\upsilon^2 - u^2) = J\omega^2; \qquad (3)$$

$$ma(\upsilon - u) = J\omega. \qquad (4)$$

Делим уравнение (3) на (4) и получаем

$$\upsilon + u = \omega a, \quad \text{откуда} \quad u = \omega a - \upsilon.$$

Подставим последнее выражение в (2):

$$2m\upsilon a = \omega(J + ma^2),$$

следовательно, $$\omega = \frac{2m\upsilon a}{J + ma^2} = \frac{6m\upsilon}{(M + 3m)a};$$

$$u = \omega a - \upsilon = \frac{\upsilon(3m - M)}{3m + M}.$$

Ответ: $\omega = \dfrac{6m\upsilon}{(M + 3m)a}$; $u = \dfrac{\upsilon(3m - M)}{3m + M}$.

Задача 1.90

Тонкий однородный стержень длиной l = 0,8 м имеет горизонтальную ось вращения, проходящую через его конец. Найти скорость υ нижней точки стержня, когда стержень проходит положение равновесия при отклонении его от вертикали на угол α = 30º.

Дано: l = 0,8 м; α = 30º.

Найти: υ.

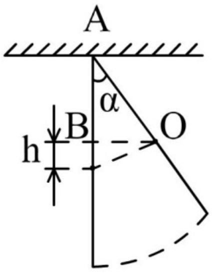
Решение. При отклонении стержня на угол α от положения равновесия его центр поднимается на высоту h (см. рисунок), которую можно определить из треугольника AOB:

$$\frac{l}{2} - h = \frac{l}{2}\cos\alpha; \quad h = \frac{l}{2}(1 - \cos\alpha). \qquad (1)$$

При этом потенциальная энергия стержня увеличится на величину

$$\Delta E_n = mgh, \qquad (2)$$

где m – масса стержня.



При прохождении стержнем положения равновесия потенциальная энергия $\Delta E_п$ переходит в кинетическую энергию

$$E_к = \frac{J\omega^2}{2}, \qquad (3)$$

где J – момент инерции стержня; ω – его угловая скорость вращения.

Для стержня, ось вращения которого проходит через его конец,

$$J = \frac{1}{3}ml^2. \qquad (4)$$

По закону сохранения энергии

$$E_к = \Delta E_п. \qquad (5)$$

Из уравнений (1) – (5) получим:

$$mg\frac{l}{2}\left(1-\cos\alpha\right) = \frac{1}{6}m\,l^2\omega^2$$

или

$$g\,(1 - \cos\alpha) = \frac{1}{3}l\omega^2. \qquad (6)$$

Из выражения (6) найдем угловую скорость:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g(1-\cos\alpha)}{l}}$$

Линейная скорость

$$\upsilon = \omega l = \sqrt{3gl(1-\cos\alpha)}; \quad [\upsilon] = \sqrt{\frac{м}{с^2}\cdot м} = \frac{м}{с};$$

$$\upsilon = \sqrt{3\cdot 9{,}8\cdot 0{,}8(1-0{,}866)} = 1{,}78 \text{ м/с}.$$

Ответ: υ = 1,78 м/с.

Задача 1.91

Горизонтальная поверхность массой m_1 = 250 кг имеет форму диска радиусом R = 2,5 м. Платформа может вращаться относительно оси, проходящей через ее центр. С какой угловой скоростью ω будет вращаться платформа, если вдоль ее края будет двигаться человек массой m_2 = 75 кг со скоростью υ = 2,5 м/с относительно платформы? Найти угол поворота платформы, если человек сделает по платформе 1 оборот.

Дано: $m_1 = 250$ кг; $m_2 = 75$ кг; $R = 2{,}5$ м; $\upsilon = 2{,}5$ м/с.

Найти: ω, φ.

Решение. Согласно условию задачи платформа с человеком вращается по инерции. Это значит, что момент внешних сил, действующих на систему, равен нулю. Систему «человек – платформа» будем считать замкнутой. Применим к этой системе закон сохранения момента импульса:

$$\vec{L}_ч + \vec{L}_п = 0, \qquad (1)$$

где $L_ч = m_2 \upsilon R$ – момент импульса человека относительно оси вращения платформы; $L_п$ – момент импульса платформы с человеком,

$$L_п = \omega(J_п + J_ч), \qquad (2)$$

где $J_п = \dfrac{1}{2} m_1 R^2$, $J_ч = m_2 R^2$ – моменты инерции платформы и человека соответственно.

Из уравнений (1) и (2) получим:

$$m_2 \upsilon R = \omega \left(\frac{1}{2} m_1 R^2 + m_2 R^2 \right),$$

откуда

$$\omega = \frac{m_2 \upsilon}{\dfrac{1}{2} m_1 R + m_2 R} = \frac{2 m_2 \upsilon}{R\,(m_1 + 2m_2)};$$

$$[\omega] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{кг}} = \text{с}^{-1}; \quad \omega = \frac{2 \cdot 75 \cdot 2{,}5}{2{,}5(250 + 2 \cdot 75)} = 37{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{с}^{-1}.$$

Время, необходимое для совершения полного круга по платформе, будет равно

$$t = \frac{2\pi R}{\upsilon},$$

где $2\pi R$ – путь, пройденный человеком со скоростью υ относительно платформы.

Угол поворота платформы

$$\varphi = \omega t = \omega \frac{2\pi R}{\upsilon}; \quad [\varphi] = \frac{\text{рад} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{с} \cdot \text{м}} = \text{рад};$$

$$\varphi = 37{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}5}{2{,}5} = 2{,}36 \text{ рад.}$$

Ответ: $\omega = 37{,}5 \cdot 10^{-2}$ с$^{-1}$; $\varphi = 2{,}36$ рад.

Задача 1.92

Платформа в виде сплошного диска радиусом 1,5 м и массой 180 кг вращается по инерции около вертикальной оси с частотой n = 10 мин$^{-1}$. В центре платформы стоит человек массой 60 кг. Какую линейную скорость относительно пола будет иметь человек, если он перейдет на край платформы?

Дано: m_1 = 180 кг; R = 1,5 м; n = 1/6 с$^{-1}$; m_2 = 60 кг.

Найти: υ.

Решение. Так как платформа вращается по инерции, то момент внешних сил относительно оси вращения z, совпадающей с геометрической осью платформы, равен нулю. При этом условии момент импульса L_z системы «платформа – человек» остается постоянным:

$$L_z = J_z\omega = \text{const}, \tag{1}$$

где J_z – момент инерции платформы с человеком относительно оси z; ω – угловая скорость платформы.

Момент инерции системы равен сумме моментов инерции тел, входящих в состав системы, поэтому

$$J_z = J_1 + J_2,$$

где J_1 – момент инерции платформы, J_2 – момент инерции человека.

С учетом этого равенство (1) имеет вид:

$$(J_1 + J_2)\omega = \text{const}.$$

или

$$(J_1 + J_2)\,\omega = (J'_1 + J'_2)\,\omega', \tag{2}$$

где значения величин без штриха относятся к начальному состоянию системы, со штрихом – к конечному состоянию.

Момент инерции платформы (сплошного диска) относительно оси z при переходе человека не изменяется:

$$J_1 = J'_1 = \frac{1}{2} m_1 R^2.$$

Момент инерции человека относительно той же оси будет изменяться. Если рассматривать человека как материальную точку, то его момент инерции J_2 в начальном положении (в центре платформы) можно считать равным нулю. В конечном положении (на краю платформы) момент инерции человека

$$J'_2 = m_2 R^2.$$

Подставим в формулу (2) найденные выражения моментов инерции, а также выразим начальную угловую скорость ω вращения платформы с человеком через частоту вращения n ($\omega = 2\pi n$) и конечную угловую скорость ω' – через линейную скорость υ человека относительно пола ($\omega' = \upsilon/R$):

$$\left(\frac{1}{2}m_1R^2 + 0\right)2\pi n = \left(\frac{1}{2}m_1R^2 + m_2R^2\right)\frac{\upsilon}{R}.$$

После сокращения на R^2 и простых преобразований находим скорость:

$$\upsilon = 2\pi nR\frac{m_1}{m_1 + 2m_2}; \qquad [\upsilon] = \frac{\text{м} \cdot \text{кг}}{\text{с} \cdot \text{кг}} = \text{м/с};$$

$$\upsilon = 2 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1{,}5 \cdot \frac{180}{180 + 2 \cdot 60} = 0{,}942 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\upsilon = 0{,}942$ м/с.

Задача 1.93

В стакан с водой, уравновешенный на рычажных весах, опустили подвешенный на нити латунный шарик массой $M = 400$ г так, чтобы он не касался дна. Определить массу m гирьки, с помощью которой можно уравновесить весы. Плотность материала шарика $\rho = 8{,}55$ г/см^3, плотность воды $\rho_1 = 1$ г/см^3.

Дано: $M = 0{,}4$ кг; $\rho = 8{,}55 \cdot 10^3$ кг/м^3; $\rho_1 = 10^3$ кг/м^3.

Найти: m.

Решение. На шарик со стороны жидкости действует выталкивающая сила F_A (сила Архимеда), направленная вертикально вверх. Согласно третьему закону Ньютона, со стороны шарика на воду (и, в соответствии с законом Паскаля, на дно стакана) действует такая же по величине сила, но направленная вертикально вниз. Эта сила возникает вследствие увеличения давления жидкости за счет повышения ее уровня в стакане. Таким образом, чашка весов со стаканом опустится, и на другую чашку весов нужно поставить гирьку массой m, определяемой из условия:

$$mg = F_A \quad \text{или} \quad mg = \rho_1 gV,$$

где V – объем шарика.

Поскольку $V = \dfrac{M}{\rho}$, искомая масса гирьки

$$m = \frac{\rho_1 M}{\rho}; \quad [m] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{кг}}{\text{м}^3 \cdot \text{кг}} = \text{кг};$$

$$m = \frac{10^3 \cdot 0{,}4}{8{,}55 \cdot 10^3} = 4{,}7 \cdot 10^{-2} \text{ кг} = 47 \text{ г}.$$

Ответ: $m = 47$ г.

Задача 1.94

Два мальчика массами $m_1 = 20$ кг и $m_2 = 25$ кг катаются на льдинах. Определить минимальную площадь $S_{\min}$ льдины, способной удержать их обоих, если толщина льда $h = 0{,}4$ м. Плотность льда $\rho = 0{,}9$ г/см^3, плотность воды $\rho_1 = 1$ г/см^3.

Дано: $m_1 = 20$ кг; $m_2 = 25$ кг; $h = 0{,}4$ м; $\rho = 900$ кг/м^3; $\rho_1 = 10^3$ кг/м^3.

Найти: $S_{\min}$.

Решение. На льдину с мальчиками действуют сила тяжести

$$F = \rho Shg + (m_1 + m_2)g \tag{1}$$

и выталкивающая сила (определяется законом Архимеда)

$$F_A = \rho_1 Sh_1 g, \tag{2}$$

где S – площадь льдины; g – ускорение свободного падения; h_1 – толщина погрузившейся под воду части льдины.

Льдина плавает, если силы (1) и (2) равны:

$$\rho Shg + (m_1 + m_2)g = \rho_1 Sh_1 g,$$

откуда площадь льдины

$$S = \frac{m_1 + m_2}{h_1\rho_1 - h\rho}.$$

Из приведенной формулы следует, что $S = S_{min}$, когда $h_1 = h$. Следовательно, искомая минимальная площадь льдины

$$S_{min} = \frac{m_1 + m_2}{h(\rho_1 - \rho)};\quad S_{min}] = \frac{кг \cdot м^3}{м \cdot кг} = м^2;\quad S_{min} = \frac{20 + 25}{0,4(10^3 - 900)} = 1,13\ м^2.$$

Ответ: $S_{min} = 1,13$ м^2.

Задача 1.95

Цилиндрический сосуд высотой $H = 1$ м до краев заполнен жидкостью. Пренебрегая вязкостью жидкости, определить, на какой высоте h должно быть проделано малое отверстие в стенке сосуда, чтобы струя, вытекающая из отверстия, падала на пол на расстоянии 50 см от цилиндра.

Дано: $H = 1$ м; $l = 0,5$ м.

Найти: h.

Решение. Согласно уравнению Бернулли

$$\frac{\rho\upsilon_1^2}{2} + \rho g H + p_1 = \frac{\rho\upsilon_2^2}{2} + \rho g h + p_2, \qquad (1)$$

где ρ – плотность жидкости, υ_1 – скорость понижения уровня жидкости в цилиндре; p_1 и p_2 – статическое давление у поверхности жидкости и у отверстия соответственно; υ_2 – скорость вытекания жидкости из отверстия.

Поскольку сосуд открыт, $p_1 = p_2$ (равны атмосферному давлению).

Согласно уравнению неразрывности

$$S_1\upsilon_1 = S_2\upsilon_2,$$

где S_1 и S_2 – площади сечений цилиндра и отверстия соответственно, причем по условию $S_1 >> S_2$. Следовательно, $\upsilon_1 << \upsilon_2$. Учитывая приведенные рассуждения, уравнение Бернулли (1) запишется в виде:

$$\frac{\rho\upsilon_2^2}{2} = \rho g(H - h),$$

откуда

$$\upsilon_2^2 = 2g(H - h). \qquad (2)$$

Учитывая кинематические уравнения $h = \frac{gt^2}{2}$ и $l = \upsilon_2 t$ (t – время падения струи на поверхность земли), найдем:

$$\upsilon_2^2 = \frac{gl^2}{2h}. \qquad (3)$$

Приравняв (2) и (3), запишем:

$$2g\,(H - h) = \frac{gl^2}{2h},$$

откуда

$$4h^2 - 4hH + l^2 = 0.$$

Решая это уравнение, найдем искомую высоту:

$$h = \frac{H \pm \sqrt{H^2 - l^2}}{2}; \quad [h] = м + \sqrt{м^2} = м + м = м;$$

$$h = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 0{,}5^2}}{2}; \quad h_1 = 0{,}933 \text{ м}; \quad h_2 = 0{,}067 \text{ м}.$$

Ответ: h_1 = 93,3 см; h_2 = 6,7 см.

Задача 1.96

За 15 минут по трубе диаметром 2 см протекает 50 кг воды. Найти скорость течения.

Дано: $t = 9\cdot10^2$ с; $d = 2\cdot10^{-2}$ м; $\rho = 10^3$ кг/м^3; m = 50 кг.

Найти: υ.

Решение. За время t через поперечное сечение трубы S, равное $\frac{\pi d^2}{4}$, протекает объем воды, равный $V = S\upsilon t$, где υ – скорость течения.

Плотность $\rho = \frac{m}{V}$, откуда $V = \frac{m}{\rho}$.

Подставляя выражения для V и S в формулу объема, получим:

$$\frac{m}{\rho} = \frac{\pi d^2}{4} \upsilon t,$$

откуда

$$\upsilon = \frac{4m}{\pi d^2 \rho t}; \quad [\upsilon] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}} = \text{м/с};$$

$$\upsilon = \frac{4 \cdot 50}{3{,}14 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3 \cdot 9 \cdot 10^2} = 0{,}18 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\upsilon = 0{,}18$ м/с.

Задача 1.97

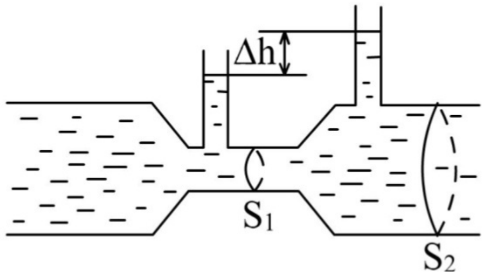
Водомер представляет собой горизонтальную трубу переменного сечения, в которую впаяны две вертикальные манометрические трубки одинакового сечения (см. рисунок). По трубе протекает вода. Пренебрегая вязкостью воды, определить ее массовый расход, если разность уровней в манометрических трубках Δh = 8 см, а сечения трубы у оснований манометрических трубок соответственно равны S_1 = 6 см^2 и S_2 = 12 см^2. Плотность воды ρ = 1 г/см^3.

Дано: $\Delta h = 0{,}8$ м; $S_1 = 6{\cdot}10^{-4}$ м^2; $S_2 = 1{,}2{\cdot}10^{-3}$ м^2; $\rho = 10^3$ кг/м^3.

Найти: Q.

Решение. Массовый расход воды – это масса воды, протекающая через сечение за единицу времени:

$$Q = \frac{m}{\Delta t} = \frac{\rho \upsilon_2 S_2 \Delta t}{\Delta t} = \rho \upsilon_2 \mathrm{S}_2, \qquad (1)$$



где ρ – плотность воды; υ_2 – скорость течения воды в месте сечения S_2.

При стационарном течении идеальной несжимаемой жидкости выполняются уравнение неразрывности

$$S_1 \upsilon_1 = S_2 \upsilon_2 \qquad (2)$$

и уравнение Бернулли для горизонтальной трубы ($h_1 = h_2$)

$$p_1 + \frac{\rho\upsilon_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho\upsilon_2^2}{2}, \qquad (3)$$

где p_1 и p_2 – статические давления в сечениях манометрических трубок; υ_1 и υ_2 – скорости течения воды в местах сечений S_1 и S_2.

Учитывая, что $p_2 - p_1 = \rho g\Delta h$ и решая систему уравнений (2), (3), получаем:

$$\upsilon_2 = S_1\sqrt{\frac{2g\Delta h}{S_2^2 - S_1^2}}$$

Подставляя это выражение в (1), найдем искомый массовый расход воды:

$$Q = \rho S_1 S_2\sqrt{\frac{2g\Delta h}{S_2^2 - S_1^2}};$$

$$[Q] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\cdot\text{м}^2\cdot\text{м}^2\sqrt{\frac{\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{м}^4}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^4\cdot\text{м}}{\text{м}^3\cdot\text{с}\cdot\text{м}^2} = \text{кг/с};$$

$$Q = 10^3\cdot 6\cdot 10^{-4}\cdot 1{,}2\cdot 10^{-3}\sqrt{\frac{2\cdot 9{,}8\cdot 0{,}08}{(1{,}2\cdot 10^{-3})^2 - (6\cdot 10^{-4})^2}} = 0{,}868 \text{ кг/с}.$$

Ответ: $Q = 0{,}868$ кг/с.

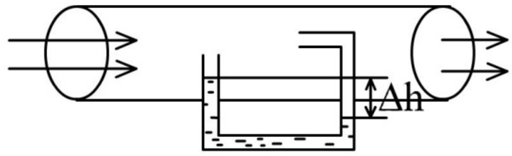
Задача 1.98

Для определения объема перекачки газа используется прибор, основанный на принципе действия трубки Пито (см. рисунок). При перекачке азота по трубке за время $t = 1$ мин проходит объем газа $V = 59{,}3$ м^3. Определить диаметр d трубы, если разность уровней воды в коленах трубки Пито $\Delta h = 1$ см. Плотность азота $\rho = 1{,}25$ кг/м^3, плотность воды $\rho_1 = 1$ г/см^3.

Дано: $t = 60$ с; $V = 59{,}3$ м^3; $\Delta h = 10^{-2}$ м; $\rho = 1{,}25$ кг/м^3; $\rho_1 = 10^3$ кг/м^3.

Найти: d.

Решение. Согласно уравнению Бернулли разность давлений газа, оказываемых на колена трубки,



$$\Delta p = \frac{\rho\upsilon^2}{2}, \qquad (1)$$

где ρ – плотность газа; υ – скорость течения газа.

С другой стороны, разность давлений в коленах определяется разностью уровней жидкости в коленах трубки:

$$\Delta p = \rho_1 g\Delta h. \qquad (2)$$

Приравняв выражения (1) и (2)

$$\frac{\rho\upsilon^2}{2} = \rho_1 g\Delta h,$$

найдем скорость движения газа:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2\rho_1 g\Delta h}{\rho}}. \qquad (3)$$

Объем V газа, перекачиваемого за время t,

$$V = S\upsilon t,$$

где S – площадь сечения трубы.

Подставив в эту формулу выражение (3) и $S = \frac{\pi d^2}{4}$, найдем:

$$V = \frac{\pi d^2}{4} t\sqrt{\frac{2\rho_1 g\Delta h}{\rho}},$$

откуда искомый диаметр трубы

$$d = \sqrt{\frac{4V}{\pi t\sqrt{2g\Delta h\frac{\rho_1}{\rho}}}}; \quad [d] = \sqrt{\frac{\text{м}^3}{\text{с}\sqrt{\frac{\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^3}{\text{м}^3\cdot\text{кг}}}}} = \sqrt{\frac{\text{м}^3}{\frac{\text{с}\cdot\text{м}}{\text{с}}}} = \sqrt{\text{м}^2} = \text{м};$$

$$d = \sqrt{\frac{4\cdot 59{,}3}{3{,}14\cdot 60\sqrt{2\cdot 9{,}8\cdot 10^{-2}\cdot\frac{10^3}{1{,}25}}}} = 0{,}3 \text{ м}.$$

Ответ: $d = 30$ см.

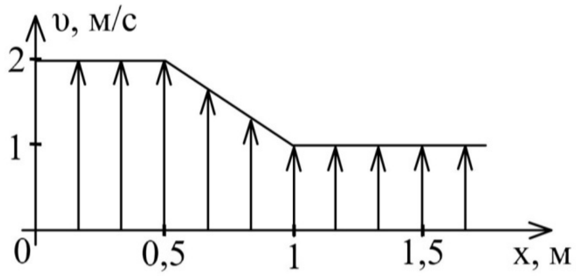
Задача 1.99

В области соприкосновения двух параллельно текущих слоев воды их скорость изменяется, как показано на рисунке. Определить силу внутреннего трения F, если площадь S соприкосновения слоев равна 3 м^2. Динамическая вязкость воды $\eta = 10^{-3}$ Па·с.

Дано: $S = 3$ м^2; $\eta = 10^{-3}$ Па·с.

Найти: F.

Решение. Сила внутреннего трения между слоями текущей жидкости



$$F = \eta \left| \frac{d\upsilon}{dX} \right| S, \qquad (1)$$

где η – динамическая вязкость жидкости; $\frac{d\upsilon}{dX}$ – градиент скорости; S – площадь соприкосновения слоев.

Согласно графику, где определен градиент на участке от 0,5 до 1 м,

$$\left| \frac{d\upsilon}{dX} \right| = \frac{1}{0{,}5} = 2 \text{ с}^{-1}.$$

Подставляя значения физических величин в формулу (1), определим искомую силу внутреннего трения:

$$F = 10^{-3} \cdot 2 \cdot 3 = 6 \cdot 10^{-3} \text{ Н};$$

$$[F] = \text{Па}\cdot\text{с}\cdot\text{с}^{-1}\cdot\text{м}^2 = \frac{\text{Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^2}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} = \text{Н}.$$

Ответ: $F = 6$ мН.

Задача 1.100

Свинцовый шарик диаметром 2 мм падает с постоянной скоростью 3,6 см/с в сосуде, наполненном глицерином. Найти коэффициент вязкости глицерина.

Дано: d = 0,2 см; ρ_1 = 11,3 г/см^3; ρ_2 = 1,2 г/см^3; υ = 3,6 см/с.

Найти: η.

Решение. На тело массой m и объемом V, движущееся в жидкости (газе), действуют три силы: $F_T = mg$ – сила тяжести; $F_A = \rho_2 Vg$ – выталкивающая сила Архимеда; $F_C = 6\pi\eta r\upsilon$ – сила сопротивления (внутреннего трения), определяемая по формуле Стокса.

В случае если тело движется равномерно, сила тяжести уравновешивается силой Архимеда и силой сопротивления, т.е. $F_T = F_A + F_C$;

$$mg = \rho_2 Vg + 6\pi\eta r\upsilon.$$

Учитывая, что

$$m = \rho_1 V = \rho_1 \frac{\pi d^3}{6}, \quad V = \frac{\pi d^3}{6}, \quad r = d/2,$$

где ρ_1 и ρ_2 – плотности шарика и глицерина; r и d – радиус и диаметр шарика; υ – скорость опускания шарика, получим:

$$\frac{\rho_1 \pi d^3 g}{6} = \frac{\rho_2 \pi d^3 g}{6} + 3\pi\eta d\upsilon.$$

Отсюда коэффициент вязкости η будет равен:

$$\eta = \frac{(\rho_1 - \rho_2) d^2 g}{18\upsilon};$$

$$[\eta] = \frac{\text{г}}{\text{см}^3} \cdot \frac{\text{см}^3 \cdot \text{см} \cdot \text{с}}{\text{с}^2 \cdot \text{см}} = \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{с}} \cdot \frac{\text{с}}{\text{с}} = \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{с}^2} \cdot \text{с} = \text{Па} \cdot \text{с};$$

$$\eta = \frac{10{,}1 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 9{,}81}{18 \cdot 3{,}6} = 6{,}1 \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{с}^2} = 0{,}61 \text{ Па·с}.$$

Ответ: η = 0,61 Па·с.

Задача 1.101

Два свинцовых шарика диаметром 2 и 1 мм опускают в сосуд с глицерином высотой 0,5 м. Считая, что скорость шариков сразу становится равномерной, определить, насколько раньше и какой из шариков достигнет дна сосуда.

Дано: $d_1 = 2\cdot10^{-3}$ м; $\rho_1 = 11{,}3\cdot10^3$ кг/м^3; $d_2 = 1\cdot10^{-3}$ м; $\rho_2 = 1{,}2\cdot10^3$ кг/м^3; $h = 0{,}5$ м; $\eta = 0{,}61$ Па·с.

Найти: t_1; t_2.

Решение. На каждый из шариков, опускающийся в жидкости, действуют три силы – сила тяжести F_T; сила внутреннего трения (вязкость) F_C, определяемая по формуле Стокса, и выталкивающая сила – сила Архимеда F_A.

Если скорость υ опускания шариков постоянна, то время опускания t будет равно:

$$t = h/\upsilon.$$

Для шариков, опускающихся в глицерине, при равномерном движении сила тяжести уравновешивается силой Архимеда и силой сопротивления, т.е. $F_T = F_A + F_C$,

$$mg = \rho_2 Vg + 6\pi\eta r\upsilon.$$

Учитывая, что $\upsilon = h/t$, получим выражение для t:

$$t = \frac{6\pi r h\eta}{mg - \rho_2 Vg}.$$

Учитывая, что $V = \dfrac{\pi d^3}{6}$, $\quad m = \rho_1 V = \rho_1\dfrac{\pi d^3}{6}$, $\quad r = d/2$,

получим:

$$t = \frac{18h\cdot\eta}{g(\rho_1-\rho_2)d^2}; \quad [t] = \frac{\text{м}\cdot\text{Па}\cdot\text{с}\cdot\ \text{с}^2\cdot\ \text{м}^3}{\text{м}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^3\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\ \text{м}^2\cdot\text{кг}} = \text{с};$$

$$t_1 = \frac{18\cdot0{,}5\cdot0{,}61}{9{,}81\left(11{,}3-1{,}2\right)\cdot10^3\cdot4\cdot10^{-6}} = 13{,}88\ \text{с};$$

$$t_2 = \frac{18\cdot0{,}5\cdot0{,}61}{9{,}81\left(11{,}3-1{,}2\right)\cdot10^3\cdot1\cdot10^{-6}} = 55{,}52\ \text{с}; \quad \frac{t_2}{t_1} = \frac{d_1^2}{d_2^2} = 4.$$

Ответ: шарик меньшего диаметра будет опускаться в четыре раза медленнее.

Задача 1.102

Пробковый шарик радиусом r = 0,5 см всплывает в широком сосуде в глицерине. Определить предельную скорость υ_0 шарика, если течение жидкости, вызванное его всплытием, является ламинарным. Плотность материала шарика ρ = 0,2 г/см^3, плотность глицерина ρ_1 = 1,26 г/см^3. Динамическая вязкость глицерина η = 1,48 Па·с.

Дано: $r = 5\cdot10^{-3}$ м; $\rho = 0{,}2\cdot10^3$ кг/м^3; $\rho_1 = 1{,}26\cdot10^3$ кг/м^3; η = 1,48 Па·с.

Найти: υ_0.

Решение. На всплывающий шарик (см. рисунок) действует сила тяжести $mg = \frac{4}{3}\pi r^3\rho g$ (r – радиус шарика), стоксова сила сопротивления жидкости $F = 6\pi\eta r\upsilon_0$ (υ – скорость шарика) и выталкивающая сила $F_A = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_1 g$.

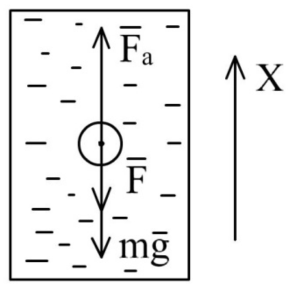
Сила сопротивления F возрастает до тех пор, пока геометрическая сумма сил не станет равной нулю, после чего движение шарика происходит с постоянной скоростью υ_0.

Второй закон Ньютона в проекции на выбранную ось X (см. рисунок):

$$F_A - mg - F = 0 \qquad (1)$$

Подставив записанные выражения для сил в формулу (1), найдем:

$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho_1 g - \frac{4}{3}\pi r^3\rho g = 6\pi\eta r\upsilon_0.$$



Откуда искомая предельная скорость

$$\upsilon_0 = \frac{2(\rho_1 - \rho)gr^2}{9\eta};$$

$$[\upsilon_0] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}^2}{\text{м}^3\cdot\text{с}^2\cdot\text{Па}\cdot\text{с}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^3\cdot\text{Н}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^2}{\text{с}^3\cdot\text{кг}\cdot\text{м}} = \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\upsilon_0 = \frac{2(1{,}26 - 0{,}2)\cdot10^3\cdot9{,}81\cdot(5\cdot10^{-3})^2}{9\cdot1{,}48} = 0{,}039 \text{ м/с} = 3{,}9 \text{ см/с}.$$

Ответ: υ_0 = 3,9 см/с.

Задача 1.103

Шарик радиусом r = 2 мм падает в глицерине с постоянной скоростью υ = 8,5 мм/с. Определить число Рейнольдса, $Re_{кр}$ = 0,5. Плотность глицерина ρ = 1,26 г/см^3, динамическая вязкость глицерина η = 1,48 Па·с.

Дано: $r = 2\cdot10^{-3}$ м; $\upsilon = 8{,}5\cdot10^{-3}$ м/с; $Re_{кр} = 0{,}5$; $\eta = 1{,}48$ Па·с; $\rho = 1{,}26\cdot10^3$ кг/м^3.

Найти: Re; ρ_1.

Решение. Характер течения жидкости зависит от числа Рейнольдса, определяемого формулой

$$Re = \frac{\rho\upsilon d}{\eta},$$

где ρ – плотность жидкости; υ – скорость жидкости; d – диаметр шарика; η – динамическая вязкость жидкости.

Учитывая данные задачи, получаем Re = 0,029.

Поскольку Re < $Re_{кр}$, то движение жидкости является ламинарным.

Стокс установил, что при небольших скоростях и размерах тел (при малых Re) сопротивление среды обусловлено практически только силой трения, определяемой по формуле

$$F = 6\pi\eta r\upsilon,$$

где r – радиус шарика.

При установившемся движении шарика в глицерине (υ = const) сила тяжести шарика (P) уравновешивается выталкивающей силой (F_A) и силой трения (F):

$$p = F_A + F \quad \text{или} \quad \rho_1 gV = \rho gV + 6\pi\eta r\upsilon, \tag{1}$$

где g – ускорение свободного падения; V – объем шарика.

Подставив в уравнение (1) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ и решив его, найдем искомую плотность материала шарика:

$$\rho_1 = \rho + \frac{9\eta\upsilon}{2gr^2};$$

$$[\rho_1] = \frac{кг}{м^3} + \frac{Па\cdot с\cdot м\cdot с^2}{с\cdot м\cdot м^2} = \frac{кг}{м^3} + \frac{Н\cdot с^2}{м^2\cdot м^2} = \frac{кг}{м^3} + \frac{кг\cdot м\cdot с^2}{с^2\cdot м^2\cdot м^2} = \frac{кг}{м^3} + \frac{кг}{м^3} = \frac{кг}{м^3};$$

$$\rho_1 = 1{,}26\cdot 10^3 + \frac{9\cdot 1{,}48\cdot 8{,}5\cdot 10^{-3}}{2\cdot 9{,}81\cdot (2\cdot 10^{-3})^2} = 2{,}7 \text{ г/см}^3.$$

Ответ: Re = 0,029; $\rho_1 = 2{,}7$ г/см^3.

Задача 1.104

За время t = 1 ч через трубу диаметром d = 40 см прокачивается газ массой m = 15 кг. Динамическая вязкость газа $\eta = 10^{-5}$ Па·с. Если за характерный размер принять диаметр трубы, то критическое значение числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{кр}$ для ламинарного течения газа равно 2000. Определить характер течения газа.

Дано: t = 3600 с; d = 0,4 м; m = 15 кг; $\eta = 10^{-5}$ Па·с; $\mathrm{Re}_{кр}$ = 2000.

Найти: Re.

Решение. Масса m газа, протекающего за время t через поперечное сечение трубы S,

$$m = \rho V = \rho S \upsilon t,$$

где ρ – плотность газа; V – объем протекающего газа; υ – скорость потока.

Тогда

$$\upsilon = \frac{4m}{\pi d^2 \rho t}, \tag{1}$$

учли, что $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$.

По определению число Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \upsilon d}{\eta}. \tag{2}$$

Подставив в (2) выражение (1), найдем число Рейнольдса:

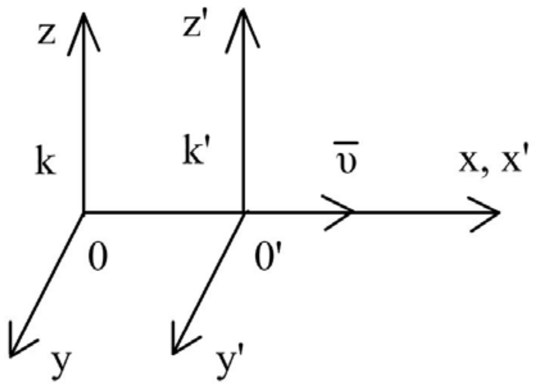
$$\mathrm{Re} = \frac{4m}{\pi \eta t d}; \quad [\mathrm{Re}] = \frac{\text{кг}}{\text{Па}\cdot\text{с}\cdot\text{с}\cdot\text{м}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{Н}\cdot\text{с}^2\cdot\text{м}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^2}{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2\cdot\text{м}} = 1;$$

$$\mathrm{Re} = \frac{4\cdot 15}{3{,}14\cdot 10^{-5}\cdot 3600\cdot 0{,}4} = 1330.$$

Поскольку $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{кр}$, течение газа является ламинарным.

Ответ: течение ламинарное.

1.4. Элементы специальной теории относительности (СТО). Основные формулы



В СТО рассматриваются только инерциальные системы отсчета. В рассматриваемых задачах считается, что оси координат y и y' и z, z' (см. рисунок) сонаправлены, а относительная скорость υ системы координат k' относительно системы k направлена вдоль общей оси xx'.

Релятивистское (лоренцево) сокращение длины стержня

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2}\,,$$

где l_0 – длина стержня в системе k', относительно которой стержень покоится (собственная длина); стержень параллелен оси x; l − длина стержня в системе k, относительно которой он движется со скоростью υ; $\beta = \dfrac{\upsilon}{c}$; $c = 3\cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме.

Релятивистское замедление хода часов

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\,,$$

где Δt_0 − промежуток времени между двумя событиями, происходящими в одной точке системы k', измеренными по часам этой системы (собственное время движущихся часов); Δt − промежуток времени между двумя событиями, измеренными по часам системы k.

Зависимость массы частицы от скорости ее движения (релятивистская масса)

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\,,$$

где m_0 − масса покоя этой частицы.

Релятивистский импульс

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon} = \frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Кинетическая энергия релятивистской частицы

$$E_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right); \quad E_к = E - E_0,$$

где $E = mc^2 = m_0c^2 + E_к$ – полная энергия релятивистской частицы; $E_0 = m_0c^2$ – энергия покоя частицы.

Изменение массы системы на величину Δm соответствует изменению энергии системы на величину

$$\Delta E = \Delta mc^2.$$

Связь между полной энергией и импульсом релятивистской частицы:

$$E = \sqrt{m_0^2c^4 + p^2c^2}; \quad pc = \sqrt{E_к\left(E_к + 2E_0\right)}.$$

Релятивистское сложение скоростей:

$$u = \frac{u' + \upsilon}{1 + \frac{u'\upsilon}{c^2}}; \quad u' = \frac{u - \upsilon}{1 - \frac{u\upsilon}{c^2}},$$

где u' – скорость тела относительно системы k' (относительная скорость), υ – скорость системы k' относительно системы k (переносная скорость); u – скорость тела относительно системы k.

Энергию микрочастиц часто измеряют в электрон-вольтах:

1эВ = 1,6·10^{-19} Дж.

Задача 1.105

Протон движется со скоростью 0,7 скорости света. Найти импульс и кинетическую энергию протона.

Дано: $m_0 = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг; β = 0,7; $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Найти: P; T.

Решение. Импульс частицы в релятивистской механике определяется по формуле

$$P=\frac{m_0\upsilon}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \quad \text{или} \quad P=m_0 c\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (1)$$

где $\beta=\frac{\upsilon}{c}$.

Подставив в формулу (1) числовые значения, получим:

$$P=1{,}67\cdot 10^{-27}\cdot 3\cdot 10^{8}\cdot\frac{0{,}7}{\sqrt{1-0{,}7^2}}\approx 4{,}91\cdot 10^{-19}\ \text{кг}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$[P]=\text{кг}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

В релятивистской механике кинетическая энергия частицы $E_к$ определяется как разность между полной энергией E и энергией покоя этой частицы:

$$E_к=E-E_0,$$

где

$$E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}};\ E_0=m_0c^2.$$

Тогда формула $E_к$ примет вид:

$$E_к=m_0c^2\left(\frac{1}{1-\beta^2}-1\right); \quad [E]=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2}=\text{Дж};$$

$$E_к=1{,}5\cdot 10^{-10}\left(\frac{1}{1-0{,}7^2}-1\right)\approx 6{,}02\cdot 10^{-11}\ \text{Дж}.$$

Ответ: $P=4{,}91\cdot 10^{-19}\ \text{кг}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}}$; $E_к=6{,}02\cdot 10^{-11}$ Дж.

Задача 1.106

Релятивистское сокращение длины движущегося тела составляет 30 %. С какой относительной скоростью υ движется тело?

Дано: $\dfrac{\Delta l}{l_0} = 0,3$.

Найти: υ.

Решение. Релятивистское сокращение длины

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\,, \qquad (1)$$

где $c = 3\cdot10^8$ м/с – скорость света.

По условию задачи

$$\frac{l_0 - l}{l_0} = 1 - \frac{l}{l_0} = 0,3\,,$$

откуда

$$l = 0,7\ l_0. \qquad (2)$$

Подставив выражение (2) в (1), получим:

$$\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = 0,7\,;\ \ \upsilon = \sqrt{c^2\left(1-0,49\right)} = \sqrt{0,51c^2} = 0,714\ c\,;\ \ \upsilon = 2,14\cdot10^8 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\upsilon = 2,14\cdot10^8$ м/с.

Задача 1.107

Тело движется со скоростью, равной 0,9 c. Найти релятивистское сокращение объема тела.

Дано: υ = 0,9 c.

Найти: τ.

Решение. Поскольку поперечные размеры тела при его движении не изменяются, то изменение объема тела будет определяться релятивистским сокращением продольного размера, определяемого формулой

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\,.$$

Тогда сокращение объема можно найти по аналогичной формуле:

$$V = V_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} .$$

Определим относительное изменение объема:

$$\tau = \frac{V_0 - V}{V_0}100\% = \frac{V_0 - V_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}{V_0}100\% = \left(1-\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\right)100\% .$$

$$\tau = 56\ \% .$$

Ответ: $\tau = 56\ \%$.

Задача 1.108

Скорость движения мезона υ = 0,95 *c*. Какой промежуток времени $\Delta\tau$ по часам неподвижного наблюдателя соответствует одной секунде «собственного времени» мезона?

Дано: υ = 0,95 *c*; Δt = 1 с.

Найти: $\Delta\tau$.

Решение. Промежуток времени $\Delta\tau$ по часам неподвижного наблюдателя и соответствующий ему промежуток собственного времени связаны соотношением

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} ,$$

отсюда

$$\Delta\tau = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}95^2}} = 3{,}2\ \text{с} .$$

Ответ: $\Delta\tau = 3{,}2$ с.

Задача 1.109

В ускорителе протонов − циклотроне относительное увеличение массы частицы не должно превышать 5 %. До какой энергии можно ускорять протоны в циклотроне?

Дано: $n \leq 5$ %.

Найти: $E_к$.

Решение. Согласно формуле полной энергии релятивистской частицы кинетическая энергия релятивистской частицы

$$E_к = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 = c^2\left(m - m_0\right).$$

Поделив правую и левую части уравнения на m_0, получим:

$$\frac{E_к}{m_0} = \frac{c^2\left(m - m_0\right)}{m_0}.$$

Обозначим $\dfrac{m - m_0}{m_0} = n$, тогда $E_к = m_0c^2n$.

По условию задачи $n = 0{,}05$.

Следовательно,

$$E_к = 1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot \left(3 \cdot 10^8\right)^2 \cdot 0{,}05 = 41 \cdot 10^{-16}\ \text{Дж} = 25{,}6\ \text{кэВ}$$

(учли, что $m_0 = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ м для протона);

$$\left[E_к\right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Дж}.$$

Ответ: $E_к = 41 \cdot 10^{-16}\ \text{Дж} = 25{,}6\ \text{кэВ}$.

Задача 1.110

В ускорителе электронов – бетатроне частицы приобретают энергию $E_к = 0{,}67$ МэВ. До какой скорости разгоняются электроны?

Дано: $E_к = 1{,}072 \cdot 10^{-13}$ Дж.

Найти: υ.

Решение. Кинетическая энергия релятивистской частицы определяется выражением

$$E_к = E - E_0 = E_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right), \qquad (1)$$

где $\beta = \dfrac{\upsilon}{c}$ – скорость частицы, выраженная в долях скорости света.

Из уравнения (1) запишем:

$$\frac{E_к}{E_0} + 1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \text{ откуда } 1-\beta^2 = \frac{1}{\left(\dfrac{E_к}{E_0}+1\right)^2};$$

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\dfrac{E_к}{E_0}+1\right)^2}}; \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\dfrac{1{,}072\cdot 10^{-13}}{9{,}1\cdot 10^{-31}}+1\right)^2}} = 0{,}902.$$

Скорость

$$\upsilon = \beta c; \; [\upsilon] = \text{м/с}; \; \upsilon = 0{,}902 \cdot 3 \cdot 10^8 = 2{,}71 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\upsilon = 2{,}71 \cdot 10^8$ м/с.

Задача 1.111

Поток энергии, излучаемой Солнцем, $P = 4 \cdot 10^{26}$ Вт. За какое время масса Солнца уменьшится в 2 раза? Излучение Солнца считать постоянным.

Дано: $P = 4 \cdot 10^{26}$ Вт; $\dfrac{m_0}{\Delta m} = 2$.

Найти: t.

Решение. Изменение массы системы на Δm соответствует изменению энергии на величину $\Delta E = c^2\Delta m$. За время t при постоянном излучении Солнце выделит энергию $\Delta E = Pt$ и потеряет при этом массу $\Delta m = m_0 / 2$, где $m_0 = 1{,}98 \cdot 10^{30}$ кг − масса Солнца.

Тогда

$$Pt = \frac{c^2 m_0}{2}, \text{ откуда } t = \frac{c^2 m_0}{2P};$$

$$[t] = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{Вт}} = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}}{\text{с}^2 \cdot \text{Дж}} = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с} \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2} = \text{с};$$

$$t = \frac{\left(3 \cdot 10^8\right)^2 \cdot 1{,}98 \cdot 10^{30}}{2 \cdot 4 \cdot 10^{26}} \approx 7 \cdot 10^{12} \text{ лет}.$$

Ответ: $t \approx 7 \cdot 10^{12}$ лет.

Задача 1.112

Две ракеты летят навстречу друг другу со скоростями, равными $0{,}8c$ по отношению к неподвижному наблюдателю. Здесь c – скорость света в вакууме. Найти скорость сближения ракет.

Дано: $\upsilon = 0{,}8c$; $u' = 0{,}8c$.

Найти: u.

Решение. По условию задачи первая ракета летит со скоростью $u' = 0{,}8c$ относительно второй ракеты. В свою очередь, вторая ракета движется со скоростью $\upsilon = 0{,}8c$ относительно неподвижного наблюдателя. Обе скорости лежат на одной прямой. Результирующую скорость ракет u (скорость их сближения) относительно неподвижного наблюдателя можно определить по формуле сложения скоростей в релятивистской механике:

$$u = \frac{u' + \upsilon}{1 + \frac{u'\upsilon}{c^2}}; \quad u = \frac{0{,}8c + 0{,}8c}{1 + \frac{0{,}8c \cdot 0{,}8c}{c^2}} = 0{,}98c.$$

Ответ: $u = 0{,}98c$.

Задача 1.113

Реакция деления ядра урана $^{235}_{92}U$ сопровождается выделением энергии ΔE_0 = 200 МэВ. Определить изменение массы Δm при делении одного моля урана.

Дано: $\Delta E_0 = 3{,}2\cdot 10^{-11}$ Дж; ν = 1 моль.

Найти: Δm.

Решение. Изменение массы

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}. \tag{1}$$

При делении ν молей урана освобождается энергия

$$\Delta E = \Delta E_0 \nu N_A, \tag{2}$$

где ΔE_0 − энергия, освобождаемая при делении одного ядра; N_A − число Авогадро.

Подставив уравнение (2) в (1), получим:

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0 \nu N_A}{c^2}; \quad [m] = \frac{\text{Дж}\cdot\text{моль}\cdot\text{с}^2}{\text{моль}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{м}^2} = \text{кг};$$

$$\Delta m = \frac{3{,}2\cdot 10^{-11}\cdot 1\cdot 6{,}02\cdot 10^{23}}{\left(3\cdot 10^{8}\right)^2} = 0{,}2\cdot 10^{-2}\ \text{кг}.$$

Ответ: $\Delta m = 0{,}2\cdot 10^{-2}$ кг.

Задача 1.114

Определить импульс электрона, обладающего кинетической энергией 5 МэВ.

Дано: $E_к = 5$ МэВ; $E_0 = 0{,}511$ МэВ; $c = 3\cdot 10^8$ м/с.

Найти: P.

Решение. Полная энергия E частицы равна:

$$E = E_0 + E_к,$$

где E_0 – энергия покоя, $E_к$ – кинетическая энергия частицы.

Релятивистское соотношение между полной энергией и импульсом имеет вид:

$$E^2 = E_0{}^2 + P^2c^2,$$

где c – скорость света в вакууме.

Импульс электрона будет равен:

$$P = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - E_0{}^2} = \frac{1}{c}\sqrt{E_к\left(E_к + 2E_0\right)}\ ;\quad [P] = \frac{\text{Дж}\cdot\text{с}}{\text{м}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}}{\text{с}^2\cdot\text{м}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}};$$

$$P = \frac{\sqrt{5(5 + 2\cdot 0{,}511)}}{\text{с}} = \frac{5{,}5\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}}{3\cdot 10^8} = 2{,}93\cdot 10^{-21}\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $P = 2{,}93\cdot 10^{-21}\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 1.115

Протон движется со скоростью, равной 0,8 скорости света. Навстречу ему движется электрон со скоростью 0,9 скорости света. Каковы их скорости относительно друг друга? Определить полную и кинетическую энергию электрона.

Дано: $u = 0{,}8c$; $\upsilon = 0{,}9c$; $c = 3\cdot 10^8$ м/с; $E_0 = 0{,}511$ МэВ.

Найти: u'; E; $E_к$.

Решение. Скорость u' относительного движения частиц в релятивистской механике, когда частицы движутся навстречу друг другу, определяется по теореме сложения скоростей:

$$u' = \frac{u + \upsilon}{1 + \frac{u\upsilon}{c^2}}.$$

Здесь u и υ − скорость движения протона и электрона; c – скорость света в вакууме,

$$u' = \frac{(0,8+0,9)c}{1+\frac{0,8\cdot 0,9c^2}{c^2}} = \frac{1,7\cdot 3\cdot 10^8}{1+0,72} \approx 2,97\cdot 10^8 \text{м/с}.$$

Полная энергия электрона

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

где m_0 − масса электрона.

$$E = \frac{9,1\cdot 10^{-31}\cdot 9\cdot 10^{16}}{\sqrt{1-0,9^2}} \approx 1,88\cdot 10^{-13}\ \text{Дж} = 1,173\ \text{МэВ}.$$

Кинетическая энергия частицы

$$E_к = 1,173 - 0,511 = 0,662\ \text{МэВ}.$$

Ответ: $u' = 2,97\cdot 10^8$ м/с; $E = 1,173$ МэВ; $E_к = 0,662$ МэВ.

Задача 1.116

Определить скорость нестабильной частицы, если время ее жизни по часам наблюдателя с Земли увеличилось в n = 1,8 раз.

Дано: $n = \frac{\tau'}{\tau} = 1,8$.

Найти: υ.

Решение. Систему отсчета K свяжем с частицей, тогда промежуток времени между возникновением и распадом частицы в этой системе отсчета равен ее собственному времени жизни τ. Поскольку система K движется вместе с частицей, то эти события происходят в одной точке, что является необходимым условием применения формулы, описывающей релятивистское замедление хода часов.

Для системы K', связанной с Землей, время жизни частицы − τ'.

Тогда

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Откуда

$$\frac{\tau'}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = n,$$

откуда искомая скорость

$$\upsilon = c\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\ ;\ \ \upsilon = 3\cdot 10^8\sqrt{1-\frac{1}{1{,}8^2}} = 8{,}831\ \text{с}.$$

Ответ: $\upsilon = 8{,}831$ с.

Задача 1.117

Долетит ли до поверхности Земли возникшая на высоте h = 4 км нестабильная частица, обладающая собственным временем жизни τ = 4,5 мкс и летящая со скоростью υ = 0,95c по направлению к Земле?

Дано: $h = 4\cdot 10^3$ м; υ = 0,95c; $\tau = 4\cdot 10^{-6}$с.

Найти: S.

Решение. Расстояние, которое пройдет частица в системе отсчета, связанной с Землей, определяется как

$$S = \upsilon\tau', \tag{1}$$

где τ' – время жизни частицы, измеренное по часам на Земле.

Промежуток времени τ' связан с собственным временем жизни частицы τ соотношением

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}. \tag{2}$$

Подставив (2) в (1), получаем искомое расстояние:

$$S = \frac{\upsilon\tau}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\ ; \quad [S] = \frac{\text{м}}{\text{с}}\cdot\text{с} = \text{м}; \quad S = \frac{0{,}95\cdot 3\cdot 10^8}{\sqrt{1-\frac{\left(0{,}95\cdot 3\cdot 10^8\right)^2}{\left(3\cdot 10^8\right)^2}}} = 4{,}11\cdot 10^3\ \text{м}.$$

Так как $S > h$, то частица долетит до Земли.

Ответ: $S > h$, частица до Земли долетит.

Задача 1.118

Космическая платформа движется со скоростью $\upsilon = 0{,}8c$ относительно наблюдателя. На платформе одновременно происходят два события в точках, расположенных на расстоянии $l_0 = 150$ м друг от друга. Определить промежуток времени τ' между этими событиями, отсчитанный по часам наблюдателя.

Дано: $\upsilon = 0{,}8c$; $l_0 = x_2 - x_1 = 150$ м; $t_2 = t_1 = t$.

Найти: τ'.

Решение. Систему отсчета K свяжем с платформой, систему отсчета K' − с наблюдателем. По условию задачи K' движется относительно K со скоростью υ в направлении, принятом за положительное.

Искомый промежуток времени

$$\tau' = t_1' - t_2', \tag{1}$$

где t_1' и t_2' − показания синхронизированных часов в системе K', расположенных в точках x_1' и x_2', в те моменты времени, когда в каждой из точек произошло рассматриваемое событие.

Согласно преобразованиям Лоренца

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{\upsilon}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\ ; \quad t_2' = \frac{t_2 - \frac{\upsilon}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}. \tag{2}$$

Подставив выражение (2) в формулу (1) и учитывая, что $t_2 = t_1 = t$ и $x_2 - x_1 = l_0$, найдем:

$$\tau' = \frac{l_0 \upsilon}{c^2 \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \quad [\tau'] = \frac{\text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с} \cdot \text{м}^2} = \text{с};$$

$$\tau' = \frac{150 \cdot 0{,}8 \cdot 3 \cdot 10^8}{\left(3 \cdot 10^8\right)^2 \sqrt{1 - \frac{\left(0{,}8 \cdot 3 \cdot 10^8\right)^2}{3 \cdot 10^8}}} = 0{,}667 \text{ мкс}.$$

Ответ: $\tau' = 0{,}667$ мкс.

Задача 1.119

Определить релятивистский импульс частицы, если ее полная энергия E = 1,5 ГэВ, а скорость υ = 0,5c.

Дано: $E = 2{,}4 \cdot 10^{-10}$ Дж; υ = 0,5c.

Найти: P.

Решение. Релятивистский импульс частицы

$$P = \frac{m_0 \upsilon}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \tag{1}$$

где m – масса частицы; υ – ее скорость.

Умножая выражение (1) на c^2, получим искомый импульс:

$$P = \frac{m_0 \upsilon c^2}{c^2 \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{E\upsilon}{c^2}; \quad [P] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} \cdot \frac{\text{с}}{\text{с}} = \text{Н} \cdot \text{с};$$

учли, что полная энергия $E = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}$.

$$P = \frac{2{,}4 \cdot 10^{-10} \cdot 0{,}5 \cdot 3 \cdot 10^{8}}{\left(3 \cdot 10^{8}\right)^{2}} = 0{,}4 \cdot 10^{-18} \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

Ответ: $P = 0{,}4 \cdot 10^{-18}$ Н · с.

Задача 1.120

Определить скорость частицы, если ее полная энергия в n = 2,5 раза больше ее энергии покоя.

Дано: $\dfrac{E}{E_0} = n = 2{,}5$.

Найти: υ.

Решение. Полная энергия частицы

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}, \qquad (1)$$

где m – масса частицы; υ – ее скорость; c – скорость распространения света в вакууме.

Энергия покоя частицы

$$E_0 = m_0 c^2. \qquad (2)$$

Согласно формулам (1) и (2)

$$\frac{E}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} = n,$$

откуда искомая скорость частицы

$$\upsilon = c\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}; \quad \upsilon = c\sqrt{1 - \frac{1}{2{,}5^2}} = 0{,}917c.$$

Ответ: $\upsilon = 0{,}917c$.

1.5. Механические колебания. Основные формулы

Колебаниями называют движения и процессы, обладающие повторяемостью во времени. К гармоническим относят колебания, при которых координаты тела меняются по закону

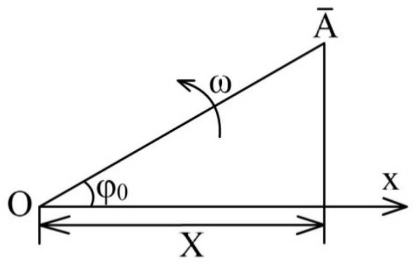
$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \quad \text{или} \quad x = A\sin(\omega t + \varphi_0),$$

где x – смещение колеблющейся величины от положения равновесия; A – амплитуда колебаний; $\omega = 2\pi / T = 2\pi\nu$ – круговая (циклическая) частота; $\nu = 1/T$ – частота; T – период колебаний; φ_0 – начальная фаза (в момент времени $t_0 = 0$); $(\omega t + \varphi_0)$ – фаза колебаний в момент t.

Гармонические колебания можно представить с помощью векторной диаграммы. Вектор $\vec{A}$ равномерно вращается с угловой скоростью ω относительно точки O (см. рисунок), при этом угол φ между осью OX и вектором $\vec{A}$ непрерывно меняется со временем t:

$$\varphi = \omega t + \varphi_0,$$

где φ_0 – начальный угол при $t_0 = 0$.



При вращении проекция вектора $\vec{A}$ на ось OX совершает гармонические колебания $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, при которых модуль вектора $|\vec{A}|$ является амплитудой, угловая скорость вращения ω – циклической частотой, а угол φ_0 – начальной фазой колебаний. Метод векторной диаграммы используется при сложении гармонических колебаний одинаковой частоты и определении сдвига фаз между током и напряжением в цепях переменного тока.

Скорость и ускорение материальной точки, совершающей гармонические колебания,

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) = A\omega\cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi) = -\omega^2 x,$$

где $A\omega$ – амплитуда скорости; $A\omega^2$ – амплитуда ускорения.

Фаза колебаний

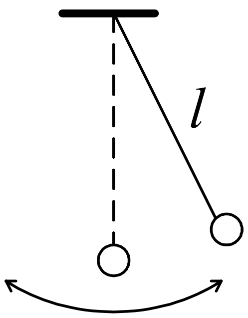
$$\varphi = (\omega t + \varphi_0) = (2\pi\nu t + \varphi_0) = \left(\frac{2\pi}{T} + \varphi_0\right).$$

Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний материальной точки массой m:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \text{или} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

где m – масса точки; k – коэффициент квазиупругой силы ($k = m\omega^2$), ω^2 – собственная частота колебаний, которая зависит от параметров колеблющейся системы.

Математический маятник (см. рисунок):

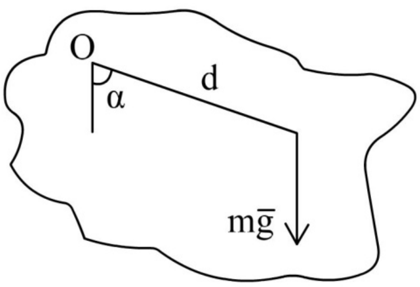


период колебаний $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$;

циклическая частота $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$,

где l – длина маятника; g – ускорение свободного падения.

Физический маятник (см. рисунок):

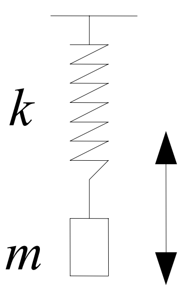


период колебаний $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$;

циклическая частота $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \sqrt{\dfrac{mgd}{J}} = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$,

где J – момент инерции маятника относительно оси колебаний O; d – расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника; $L = J/(md)$ – приведенная длина физического маятника.

Пружинный маятник (см. рисунок):

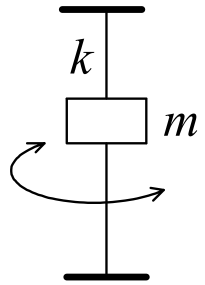


период колебаний $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$;

циклическая частота $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$,

где k – коэффициент упругости (жесткость пружины).

Крутильный маятник (тело, подвешенное на упругой нити, см рисунок):



период крутильных колебаний $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{k}}$;

циклическая частота $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \sqrt{\dfrac{k}{J}}$,

где J – момент инерции тела относительно оси, совпадающей с упругой нитью; k – жесткость упругой нити, равная отношению упругого момента, возникающего при закручивании нити, к углу, на который нить закручивается.

Приведенные формулы являются точными для случая бесконечно малых амплитуд. При конечных амплитудах эти формулы дают лишь приближенные результаты. При амплитудах порядка 3° погрешность в значении периода не превышает 1 %.

При наличии сил трения свободные колебания будут затухающими, и их амплитуда уменьшается в результате потерь энергии. Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{или} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt},$$

где $\delta = \dfrac{r}{2m}$ – коэффициент затухания; если амплитуда уменьшилась в e раз, то $\delta = \dfrac{1}{\tau}$, где τ – время релаксации; $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ – собственная частота той же колебательной системы; r – коэффициент сопротивления.

Уравнение затухающих колебаний (решение дифференциального уравнения):

$$x = A(t)\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $A(t) = A_0 e^{-\delta t}$ – амплитуда затухающих колебаний в момент t; A_0 – амплитуда затухающих колебаний в начальный момент времени ($t_0 = 0$); $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ – круговая частота затухающих колебаний.

Логарифмический декремент затухания

$$\Theta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e},$$

где δ – коэффициент затухания; T – период затухающих колебаний; τ – время релаксации; N_e – число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в e раз; $A(t)$ и $A(t+T)$ – амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующих моментам времени, отличающимся на период.

Добротность колебательной системы

$$Q = \frac{\pi}{\Theta} = \frac{\omega_0}{2\delta},$$

где Θ – логарифмический декремент затухания; ω_0 – циклическая частота свободных незатухающих колебаний той же колебательной системы; δ – коэффициент затухания.

Если система совершает колебания под периодически изменяющимся внешним воздействием, то такие колебания называют вынужденными.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний для установившихся колебаний:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \quad \text{или} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt} + F_0\cos\omega t,$$

где $F_0\cos\omega t$ – внешняя периодическая сила, действующая на колеблющуюся материальную точку и вызывающая вынужденные колебания; F_0 – амплитуда вынуждающей силы.

Решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний для установившихся колебаний:

$$x = A\cos(\omega t - \varphi),$$

где A – амплитуда вынужденных колебаний, которая зависит от соотношения вынужденной ω и собственной частоты ω_0,

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}},$$

где φ определяет отставание по фазе вынужденного колебания от вынуждающей силы;

$$tg\varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Резонансная частота и резонансная амплитуда:

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}; \quad A_{рез} = \frac{F_0/m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}},$$

где F_0 – амплитудное значение внешней периодической силы.

Кинетическая энергия колеблющейся материальной точки массой m (см. рисунок)

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Потенциальная энергия колеблющейся материальной точки массой m (см. рис.)

$$E_n = \frac{kx^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right).$$

Полная энергия колеблющейся материальной точки массой m (см. рис.)

$$E = \frac{1}{2}mA^2{\omega_0}^2 = \frac{1}{2}kA^2.$$

Сложение двух гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты

Амплитуда A результирующего колебания

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

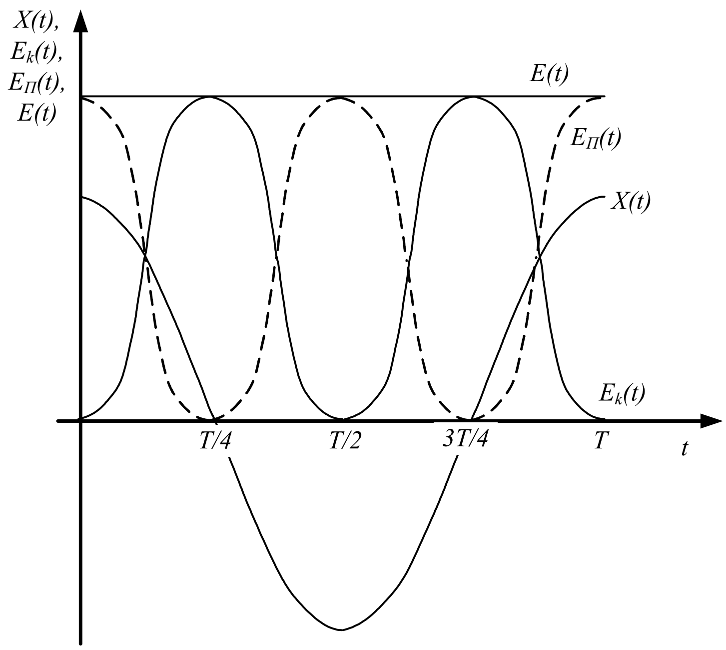
Начальная фаза результирующего колебания

$$tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2},$$

где A_1 и A_2 – амплитуды двух складываемых колебаний; φ_1 и φ_2 – начальные фазы колебаний.

Частота биений, возникающих при сложении двух колебаний, происходящих по одной прямой с различными, но близкими по значению частотами ν_1 и ν_2,

$$\nu = \nu_1 - \nu_2.$$



Уравнение траектории точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях с амплитудами A_1 и A_2 и начальными фазами φ_1 и φ_2:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Если начальные фазы φ_1 и φ_2 составляющих колебаний одинаковы, уравнение траектории примет вид:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1,$$

т.е. точка движется по эллипсу.

Задача 1.121

Написать уравнение гармонического колебания, если амплитуда его 10 см, максимальная скорость 50 см/с, начальная фаза 15º. Определить период колебаний и смещение колеблющейся точки через 0,2 с от начала колебания.

Дано: A = 0,1 м; υ_{max} = 0,5 м/с; φ_0 = 15º; t = 0,2 с.

Найти: $x(t)$; T; $x(0{,}2)$.

Решение. Уравнение гармонического колебания с начальной фазой φ имеет вид:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Циклическая частота $\omega = 2\pi/T$. Скорость колеблющейся точки находится как первая производная смещения от времени:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Максимальная скорость достигается при значении

$$\cos(\omega t + \varphi_0) = 1, \quad \upsilon_{max} = A\omega,$$

откуда

$$\omega = \frac{\upsilon_{max}}{A} = \frac{2\pi}{T}; \quad T = \frac{2\pi A}{\upsilon_{max}}; \quad [T] = \frac{\text{м} \cdot \text{с}}{\text{м}} = \text{с};$$

$$T = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}1}{0{,}5} = 1{,}26 \text{ с}; \quad \omega = \frac{\upsilon_{max}}{A} = 5 \text{ с}^{-1}.$$

Выразим начальную фазу в радианах:

$$\varphi_0 = 2\pi\frac{15}{360} = \frac{\pi}{12}.$$

Тогда уравнение гармонического колебания запишется:

$$x(t) = 0{,}1\sin\left(5\text{t} + \frac{\pi}{12}\right).$$

В момент времени t = 0,2 с смещение $x(t)$ будет равно

$$x = 0{,}1\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{12}\right) = 0{,}1\sin\pi\left(\frac{2t}{T} + \frac{1}{12}\right); \; x = 0{,}1\sin\pi\left(\frac{2 \cdot 0{,}2}{1{,}26} + \frac{1}{12}\right) = 0{,}095 \text{ м}.$$

Ответ: $x(t) = 0{,}1\sin\left(5\text{t} + \frac{\pi}{12}\right)$; T = 1,26 с; $x(0{,}2)$ = 0,095 м.

Задача 1.122

Материальная точка совершает гармонические колебания с частотой n = 500 Гц и амплитудой A = 0,02 см. Определить среднее значение скорости $<\upsilon>$ и ускорения $<a>$ точки на пути от ее крайнего положения до положения равновесия, а также найти амплитудные значения этих величин υ_m, a_m.

Дано: $n = 5\cdot10^2$ Гц; $A = 2\cdot10^{-4}$ м.

Найти: $<\upsilon>$; $<a>$; υ_m; a_m.

Решение. По определению $<\upsilon> = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$. В данном случае $\Delta x = A$, а время $\Delta t = T/4$, так как за один период T колеблющаяся точка проходит путь, равный четырем амплитудам.

Следовательно,

$$<\upsilon> = \frac{4A}{T} = 4An; \quad [<\upsilon>] = \text{м}\cdot\text{с}^{-1} = \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$<\upsilon> = 4\cdot2\cdot10^{-4}\cdot5\cdot10^2 = 0{,}4 \text{ м/с}.$$

Уравнение скорости в гармонических колебаниях:

$$\upsilon = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Амплитудное значение скорости

$$\upsilon_m = A\omega = \text{A}2\pi n; \quad [\upsilon_m] = \text{м}\cdot\text{с}^{-1} = \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad \upsilon_m = 2\cdot10^{-4}\cdot2\pi\cdot5\cdot10^{-2} = 0{,}63\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

По определению среднее значение ускорения

$$<a> = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t},$$

где $\Delta\upsilon = \upsilon_m - \upsilon_0$; υ_m – максимальное значение скорости в момент положения равновесия; $\upsilon_0 = 0$ – скорость в крайнем положении.

$$<a> = \frac{4\upsilon_m}{T} = A8\pi n^2; \; [<a>] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; \; <a> = 2\cdot10^{-4}\cdot8\pi\cdot25\cdot10^4 = 1{,}26\cdot10^3 \text{ м/с}^2.$$

Уравнение ускорения в гармонических колебаниях:

$$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Амплитудное значение ускорения

$$a_m = A\omega^2 = A4\pi^2n^2; \quad [a_m] = \text{м/с}^2; \quad a_m = 2\cdot10^{-4}\cdot4\pi^2\cdot25\cdot10^4 = 2\cdot10^3 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $<\upsilon> = 0{,}4$ м/с; $<a> = 1{,}26\cdot10^3$ м/с²; $\upsilon_m = 0{,}63$ м/с; $a_m = 2\cdot10^3$ м/с².

Задача 1.123

Материальная точка массой 20 г совершает гармонические колебания с периодом 9 с. Начальная фаза колебаний 10º. Через какое время от начала движения смещение точки достигнет половины амплитуды? Найти амплитуду, максимальные скорость и ускорение точки, если полная ее энергия равна 10^{-2} Дж.

Дано: $m = 0{,}02$ кг; $T = 9$ с; $\varphi_0 = 10^\circ = \dfrac{\pi}{18}$; $x = 0{,}5\,A$, $E = 10^{-2}$ Дж.

Найти: t; A; υ_m; a_m.

Решение. Уравнение гармонического колебательного движения:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0). \qquad (1)$$

Из уравнения (1) можно определить время t:

$$x = A\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0\right); \quad \frac{x}{A} = \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0\right); \quad \frac{2\pi t}{T} + \varphi_0 = \arcsin\frac{x}{A};$$

$$t = \frac{\left(\arcsin\dfrac{x}{A} - \varphi_0\right)T}{2\pi}. \qquad (2)$$

Подставляя числовые значения в формулу (2), получим:

$$t = \frac{\left(\arcsin 0{,}5 - \dfrac{\pi}{18}\right)}{2\pi}\cdot 9 = \frac{\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{18}}{2\pi}\cdot 9 = 0{,}5 \text{ с}.$$

Амплитуду колебаний можно определить из формулы полной энергии E колеблющейся точки:

$$E = \frac{mA^2\omega^2}{2}; \quad A = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2E}{m}} = \frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{2E}{m}}; \quad [A] = \text{с}\sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}} = \text{с}\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2\cdot\text{кг}}} = \text{с}\sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = \text{м};$$

$$A = \frac{9}{2\cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{2\cdot 10^{-2}}{2\cdot 10^{-2}}} = 1{,}43 \text{ м}.$$

Зная амплитуду, можно вычислить максимальную скорость точки, которая определяется как первая производная от смещения x по времени:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Полагая cos ($\omega t + \varphi$) = 1, получаем значение максимальной скорости:

$$\upsilon_m = A\omega = A\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{2E}{m}};\ [\upsilon_m] = \sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2\cdot\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = \text{м/с};\ \ \upsilon_m = \sqrt{\frac{2\cdot 10^{-2}}{2\cdot 10^{-2}}} = 1\ \text{м/с}.$$

Уравнение точки определяется как первая производная скорости по времени, т.е.

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Считая при максимальном ускорении sin ($\omega t + \varphi_0$) = –1, получим:

$$a_m = A\omega^2 = A\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{2\pi}{T}\sqrt{\frac{2E}{m}};$$

$$[a_m] = \frac{1}{\text{с}}\cdot\sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}} = \frac{1}{\text{с}}\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2\cdot\text{кг}}} = \frac{1}{\text{с}}\cdot\sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = \frac{1}{\text{с}}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a_m = \frac{2\cdot 3{,}14}{9} = \sqrt{\frac{2\cdot 10^{-2}}{2\cdot 10^{-2}}} = 6{,}98\cdot 10^{-1}\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 0{,}698\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 0{,}7\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

Ответ: t = 0,5 с; A = 1,43 м; υ_m = 1 м/с; a_m = 0,7 м/с^2.

Задача 1.124

Материальная точка массой m = 1 г колеблется гармонически. Амплитуда колебаний равна 5 см, циклическая частота 2 с$^{-1}$, начальная фаза равна 0. Определить силу, действующую на точку в тот момент, когда ее скорость равна 6 м/с.

Дано: $\upsilon = 6\cdot 10^{-3}$ м/с; $A = 5\cdot 10^{-2}$ м; $m = 10^{-3}$ кг; $\omega = 2$ с$^{-1}$.

Найти: F.

Решение. Скорость определяется первой производной от смещения по времени:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt}.$$

Смещение x задано уравнением:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Находим скорость:

$$\upsilon = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Ускорение равно производной от скорости по времени:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt}; \quad a = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Возводим скорость и ускорение во вторую степень:

$$\upsilon^2 = A^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi_0); \tag{1}$$

$$a^2 = A^2\omega^4\sin^2(\omega t + \varphi_0). \tag{2}$$

Уравнение (1) разделим на $A^2\omega^2$, а уравнение (2) на $A^2\omega^4$ и сложим их:

$$\frac{\upsilon^2}{A^2\omega^2} + \frac{a^2}{A^2\omega^4} = 1.$$

Производим дальнейшие преобразования:

$$\upsilon^2\omega^2 + a^2 = A^2\omega^4; \quad a^2 = A^2\omega^4 - \upsilon^2\omega^2; \quad a^2 = \omega^2(A^2\omega^2 - \upsilon^2).$$

Ускорение получается равным

$$a = \omega\sqrt{A^2\omega^2 - \upsilon^2}.$$

Следовательно, сила по второму закону Ньютона равна:

$$F = ma; \quad F = m\omega\sqrt{A^2\omega^2 - \upsilon^2}; \quad [F] = \frac{\text{кг}}{\text{с}}\sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н};$$

$$F = 10^{-3}\cdot 2\sqrt{(5\cdot 10^{-2})^2\cdot 2^2 - (6\cdot 10^{-2})^2} = 16\cdot 10^{-5}\ \text{Н}.$$

Ответ: $F = 16\cdot 10^{-5}$ Н.

Задача 1.125

За какую часть периода точка, совершающая гармонические колебания, пройдет путь, равный: 1) половине амплитуды, если в начальный момент она находилась в положении равновесия; 2) одной трети амплитуды, если в начальный момент она находилась в крайнем положении.

Дано: 1) $x_1 = A/2$; 2) $x_2 = A/3$.

Найти: t_1; t_2.

Решение

1. Смещение точки x от положения равновесия к крайнему положению

$$x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right) \text{ при } t = 0;\ x = 0;\ \varphi_0 = 0;$$

$$x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right);\quad x = \frac{x_m}{2};\quad \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = 1/2;\quad \frac{2\pi}{T}t = \pi/6;\quad t = T/12.$$

2. Точка движется из крайнего положения точки B, поэтому начальные условия будут такие: $t = 0$; $x = A$.

Уравнение смещения:

$$x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right), \text{ где } \varphi_0 = \pi/2;\quad x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \pi/2\right);$$

$$x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right);\quad x = 2/3\ A;\quad \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = 2/3;\quad \frac{2\pi}{T}t = \arccos 2/3;$$

$$t = \frac{T\cdot 48^\circ}{360^\circ} = \frac{T}{7,5}.$$

Ответ: 1) $t_1 = \dfrac{T}{12}$; 2) $t_2 = \dfrac{T}{7,5}$.

Задача 1.126

Тело массой m = 10 г совершает гармонические колебания по закону $x = 0,1\cos(4\pi t + \pi/4)$ м.

Определить максимальные значения: 1) кинетической энергии; 2) возвращающей силы.

Дано: $m = 10^{-2}$ кг; $x = 0,1\cos(4\pi t + \pi/4)$ м.

Найти: E_{km}, F_{m}.

Решение. Уравнение зависимости смещения от времени задано:

$$x = 0,1\cos(4\pi t + \pi/4),$$

где амплитуда A = 0,1 м, циклическая частота $\omega = 4\pi$ с$^{-1}$.

Продифференцировав уравнение смещения по времени, получим уравнение скорости υ:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -0{,}1\cdot 4\pi\sin(4\pi t + \pi/4).$$

Максимальное значение скорости достигается при

$$\sin(4\pi t + \pi/4) = 1;$$

$$\upsilon_{\text{m}} = 0{,}1\cdot 4\pi \text{ м/с},$$

максимальное значение кинетической энергии

$$E_{k\text{m}} = \frac{m\upsilon_m^2}{2}; \quad [E_{k\text{m}}] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Дж};$$

$$E_{k\text{m}} = \frac{10^{-2}\cdot(0{,}1\cdot 4\pi)^2}{2} = 8\pi^2\cdot 10^{-4} \text{ Дж} = 7{,}89 \text{ мДж}.$$

Продифференцировав уравнение скорости по времени, получим уравнение ускорения:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -0{,}1(4\pi)^2\cos(4\pi t + \pi/4).$$

Максимальное значение ускорения достигается при

$$\cos(4\pi t + \pi/4) = 1; \quad a = 0{,}1\,(4\pi)^2 \text{ м/с}^2.$$

Тогда максимальное значение возвращающей силы

$$F_{\text{m}} = ma_{\text{m}}; \quad F_{\text{m}} = 10^{-2}\cdot 0{,}1\cdot(4\pi)^2 = 0{,}158 \text{ Н}.$$

Ответ: 1) $E_{k\text{m}} = 7{,}89$ мДж; 2) $F_{\text{m}} = 0{,}158$ Н.

Задача 1.127

Материальная точка массой $m = 10$ г совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 10$ см. Определить частоту n колебаний, если максимальная сила F_{m}, действующая на точку, равна 10 мН.

Дано: $m = 10^{-2}$ кг; $A = 0{,}1$ м; $F_{\text{m}} = 10^{-2}$ Н.

Найти: n.

Решение. Уравнение гармонических колебаний:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Скорость и ускорение колеблющейся точки:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0);$$

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Согласно второму закону Ньютона сила, действующая на точку,

$$F = ma = -mA\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Сила максимальна ($F = F_{\text{m}}$) при $\cos(\omega t + \varphi_0) = \pm 1$, т.е. $F_{\text{m}} = m\text{A}\omega^2$.

Учитывая, что циклическая частота $\omega = 2\pi n$, выражение для F_{m} можно записать в виде:

$$F_{\text{m}} = 4\pi^2 mAn^2,$$

откуда искомая частота

$$n = \sqrt{\frac{F_{\text{m}}}{4\pi^2 Am}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{F_{\text{m}}}{Am}}; \quad [n] = \sqrt{\frac{\text{Н}}{\text{м} \cdot \text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{м} \cdot \text{кг}}} = \sqrt{\frac{1}{\text{с}^2}} = \text{с}^{-1};$$

$$n = \frac{1}{2 \cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{10^{-2}}{0{,}1 \cdot 10^{-2}}} = 0{,}503 \text{ с}^{-1}.$$

Ответ: $n = 0{,}503$ Гц.

Задача 1.128

Пружинный маятник совершает гармонические колебания, описываемые уравнением $x = 0{,}3\cos\frac{\pi}{6}t$, м. В тот момент, когда возвращающая сила F в первый раз достигла значения –10 мН, потенциальная энергия E_n маятника оказалась равной 7,5 мДж. Определить этот момент времени t.

Дано: $x = 0{,}3\cos\frac{\pi}{6}t$, м; $F = -10^{-2}$ Н; $E_n = 7{,}5 \cdot 10^{-3}$ Дж.

Найти: t.

Решение. Из заданного уравнения гармонических колебаний маятника $x = 0{,}3\cos\frac{\pi}{6}t$, м, следует, что амплитуда колебаний $A = 0{,}3$ м, циклическая частота $\omega = \pi/6$ с$^{-1}$.

Тогда в общем виде это уравнение можно записать:

$$x = A\cos\omega t. \quad (1)$$

Возвращающая сила упругости F деформированной пружины пропорциональна смещению x из положения равновесия и равна:

$$F = -kx = -k\,A\cos\omega t, \quad (2)$$

где k – жесткость пружины.

Потенциальная энергия маятника, совершающего под действием упругой силы гармонические колебания,

$$E_n = -\int_0^x F dx = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}\cos^2\omega t\,. \quad (3)$$

Поделив (3) на (2), получаем:

$$\frac{E_n}{F} = -\frac{A}{2}\cos\omega t,$$

откуда

$$\omega t = \arccos\left(-\frac{2E_n}{AF}\right) = \arccos\left(-\frac{2\cdot 7{,}5\cdot 10^{-3}}{0{,}3\cdot(-10^{-2})}\right) = \frac{\pi}{3}\ \text{рад.}$$

Тогда искомый момент времени

$$t = \frac{\frac{\pi}{3}}{\omega} = \frac{\pi}{3\omega} = \frac{6\pi}{3\pi} = \frac{6}{3} = 2\ \text{с}\,.$$

Ответ: $t = 2$ с.

Задача 1.129

Материальная точка массой $m = 50$ г совершает гармонические колебания согласно уравнению $x = 0{,}1\cos\dfrac{3\pi}{2}t$, м.

Определить: 1) возвращающую силу F для момента времени $t = 0{,}5$ с; 2) полную энергию.

Дано: $m = 5\cdot 10^{-2}$ кг; $t = 0{,}5$ с; $x = 0{,}1\cos\dfrac{3\pi}{2}t$, м.

Найти: F; E.

Решение. Возвращающая сила $F = ma$, $a = \dfrac{d^2x}{dt^2} = -0{,}1\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)^2 \cos\dfrac{3\pi}{2}\mathrm{t}$, через $t = 0{,}5$ с ускорение равно:

$$a = -0{,}1\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 \cos\frac{3\pi}{4}.$$

Возвращающая сила будет равна:

$$F = ma; \quad F = 5\cdot 10^{-2}\cdot 0{,}1\cdot\frac{9\pi^2}{2}\cdot 0{,}71 = 78{,}7 \text{ мН}.$$

Полная энергия

$$E = \frac{mA^2\omega^2}{2}; \quad [E] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Дж};$$

$$E = \frac{5\cdot 10^{-2}\cdot 10^{-2}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)^2}{2} = 5{,}55\cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 5{,}55 \text{ мДж}.$$

Ответ: $F = 78{,}7$ мН; $E = 5{,}55$ мДж.

Задача 1.130

Через какую долю периода в первый раз от начала колебаний кинетическая энергия будет равна потенциальной?

Дано: $t_0 = 0$; $E_п = E_к$.

Найти: t.

Решение. Смещение колеблющейся точки от положения равновесия

$$x = A\cos\frac{2\pi}{T}t.$$

Уравнение скорости:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\frac{2\pi}{T}\sin\frac{2\pi}{T}t.$$

Кинетическая энергия

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{mA^2 4\pi^2}{2T^2} = \sin^2\frac{2\pi}{T}t.$$

Потенциальная энергия

$$E_n = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2 \cos^2 \frac{2\pi}{T} t}{2} = \frac{m4\pi^2 A^2 \cos^2 \frac{2\pi}{T} t}{2T^2};$$

$$\frac{E_k}{E_n} = tg^2 \frac{2\pi}{T} t .$$

Так как энергии равны, то

$$1 = \mathrm{tg}^2 \frac{2\pi}{T} t; \quad \mathrm{tg} \frac{2\pi}{T} t = 1; \quad \frac{2\pi}{T} t = \pi/4; \quad t = T/8.$$

Ответ: $t = T/8$.

Задача 1.131

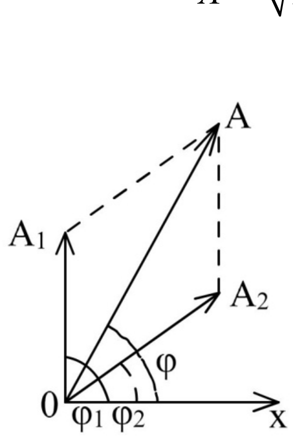
Складываются два гармонических колебания одного направления с периодами $T_1 = T_2 = 2$ с, амплитудами $A_1 = A_2 = 3$ см и начальными фазами $\varphi_1 = \pi/2$ и $\varphi_2 = \pi/3$. Записать уравнение результирующих колебаний, найти амплитуду A и начальную фазу φ, построить векторную диаграмму.

Дано: $T_1 = T_2 = 2$ с; $A_1 = A_2 = 0{,}03$ м; $\varphi_1 = \pi/2$; $\varphi_2 = \pi/3$.

Найти: A, φ.

Решение. Амплитуду и начальные фазы результирующих колебаний определим по формулам

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}; \quad A = 5{,}8 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$



$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2} = 75^o;$$

$$\varphi = 0{,}417\ \pi \text{ рад.}$$

Запишем уравнения складывающихся колебаний:

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1);$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

и результирующих колебаний:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) = 5{,}8 \cdot 10^{-2} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + 0{,}417\pi\right) = 5{,}8 \cdot 10^{-2} \cos(\pi t + 0{,}417\pi) \text{ м.}$$

Векторная диаграмма складываемых колебаний показана на рисунке.

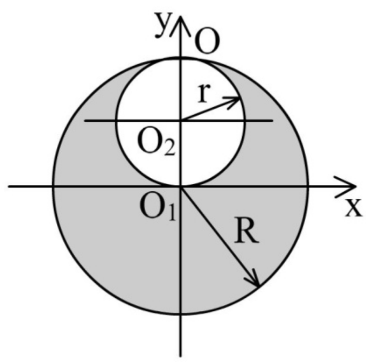
Ответ: $A = 5{,}8 \cdot 10^{-2}$ м; $\varphi = 0{,}417\,\pi$ рад; $x = 5{,}8 \cdot 10^{-2} \cos(\pi t + 0{,}417\pi)$ м.

Задача 1.132

Тонкий однородный диск радиусом R = 0,3 м имеет вырез в виде круга радиусом r = 0,15 м (см. рисунок). Найти период колебаний диска, если ось вращения перпендикулярна к его плоскости и проходит через точку O.

Дано: R = 0,3 м; r = 0,15 м.

Найти: T.



Решение. Диск представляет собой физический маятник, период колебаний которого определяется по формуле

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}, \qquad (1)$$

где J – момент инерции маятника относительно оси колебаний O; d – расстояние между центром масс маятника и осью колебаний.

Момент инерции диска найдем по формуле

$$J = J_R - J_r, \qquad (2)$$

где J_R – момент инерции диска радиусом R (без выреза); J_r – момент инерции диска радиусом r.

С использованием теоремы Штейнера имеем:

$$J_R = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2; \qquad (3)$$

$$J_r = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2, \qquad (4)$$

где M и m – массы дисков радиусами R и r соответственно.

Подставив выражения (3), (4) в (2), получим:

$$J = \frac{3}{2}\left(Mr^2 - mr^2\right). \tag{5}$$

Найдем массы дисков:

$$M = \rho\pi R^2 h; \quad m = \rho\pi r^2 h, \tag{6}$$

где ρ – плотность материала диска; h – толщина диска.

Уравнение (5) с учетом (6) примет вид:

$$J = \frac{3}{2}(\rho\pi R^4 - \rho\pi r^4)h = \frac{3}{2}\rho\pi(R^4 - r^4)h. \tag{7}$$

Найдем расстояние d по формуле

$$d = \frac{\sum m_y}{\sum m} = \frac{\left(\rho\pi R^2 \cdot R - \rho\pi r^2 \cdot r\right)h}{\left(\rho\pi R^2 - \rho\pi r^2\right)h} = \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}. \tag{8}$$

Подставим выражения (7) и (8) в формулу (1):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3\pi\rho\left(R^4 - r^4\right)\left(R^2 - r^2\right)h}{2\pi\rho\left(R^2 - r^2\right)g\left(R^3 - r^3\right)h}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2g}\cdot\frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}};$$

$$[T] = \sqrt{\frac{\text{м}^4 \cdot \text{с}^2}{\text{м} \cdot \text{м}^3}} = \text{с};$$

$$T = 2\cdot 3{,}14\sqrt{\frac{3}{2\cdot 9{,}8}\cdot\frac{0{,}3^4 - 0{,}15^4}{0{,}3^3 - 0{,}15^4}} = 1{,}39 \text{ с}.$$

Ответ: $T = 1{,}39$ с.

Задача 1.133

Физический маятник в виде тонкого однородного стержня совершает гармонические колебания вокруг неподвижной оси, проходящей через точку подвеса O, находящуюся от центра масс C на расстоянии $x = 28{,}9$ см. Определить длину стержня, если циклическая частота колебаний максимальна.

Дано: x = 0,289 м; $\omega = \omega_m$.

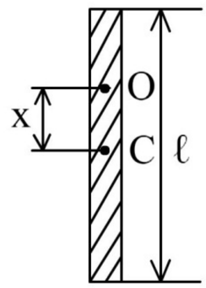
Найти: l.

Решение. Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgx}},$$

где J – момент инерции стержня относительно горизонтальной оси, проходящей через точку O, не совпадающую с центром масс C стержня (см. рисунок); m – масса стержня; g – ускорение свободного падения; x – расстояние между точкой подвеса O и центром масс C.

Циклическая частота



$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mgx}{J}}. \tag{1}$$

Согласно теореме Штейнера момент инерции стержня относительно оси, проходящей через точку подвеса, находящуюся от центра масс на расстоянии x,

$$J = J_0 + mx^2 = \frac{ml^2}{12} + mx^2, \tag{2}$$

где $J_0 = \dfrac{ml^2}{12}$ – момент инерции стержня относительно горизонтальной оси, проходящей через центр масс стержня (через середину стержня).

Подставив (2) в (1), получаем:

$$\omega = \sqrt{\frac{12gx}{l^2 + 12x^2}}. \tag{3}$$

Найдем экстремум функции (3) (по условию задачи циклическая частота максимальна):

$$\frac{d\omega}{dx} = 0; \quad \frac{d\omega}{dx} = \frac{\sqrt{3}g\,(l^2 - 12x^2)}{x^{1/2}\,(l^2 + 12x^2)^{3/2}} = 0,$$

откуда

$l^2 - 12x^2 = 0$ (нас интересует только положительные решения),

т.е. искомая длина маятника

$$l = 2\sqrt{3}\,x; \quad l = 2\cdot 1{,}73\cdot 0{,}289 = 1 \text{ м}.$$

Ответ: l = 1 м.

Задача 1. 134

Шарик массой m = 20 г колеблется с периодом T = 2 с. В начальный момент времени шарик обладал энергией E = 0,01 Дж и находился от положения равновесия на расстоянии x_1 = 0,25 м. Написать уравнение гармонических колебаний шарика.

Дано: m = 0,02 кг; T = 2 с; E = 0,01 Дж; x_1 = 0,25 м.

Найти: $x(t)$.

Решение. Полная энергия колеблющейся точки, независимо от ее положения, определяется выражением

$$E = \frac{m\omega^2 A^2}{2}, \qquad (1)$$

где A – амплитуда колебаний; $\omega = 2\pi/T$ – круговая частота.

Уравнение колебаний имеет вид:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0), \text{ в момент } t = 0$$

$$x_1 = A\cos\varphi; \quad \cos\varphi = \frac{A}{x_1} = 0{,}78; \quad \varphi \approx 51^\circ \approx 0{,}3\,\pi.$$

Определив начальную фазу, найдем из (1) амплитуду колебаний:

$$A^2 = \frac{2E}{m\omega^2} = \frac{4ET^2}{m\cdot 4\pi^2}; \quad A = \frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{2E}{m}}; \quad [A] = \text{с}\sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}} = \text{с}\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2\cdot\text{кг}}} = \text{с}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}} = \text{м};$$

$$A = \frac{2}{2\cdot 3{,}14}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 0{,}01}{0{,}02}} = 0{,}32 \text{ м}.$$

Таким образом, получаем уравнение колебаний точки:

$$x = 0{,}32\cos\pi(t + 0{,}3).$$

Ответ: $x = 0{,}32\cos\pi(t + 0{,}3)$ м.

Задача 1.135

Физический маятник представляет собой стержень длиной l = 1 м и массой $3m_1$ с прикрепленным к одному из его концов обручем диаметром $d = l/2$ и массой m_1. Горизонтальная ось OZ маятника проходит через середину стержня перпендикулярно к нему (см. рисунок). Определить период T колебаний такого маятника.

Дано: $l = 1$ м; $m = 3m_1$; $d = l/2$; m_1.

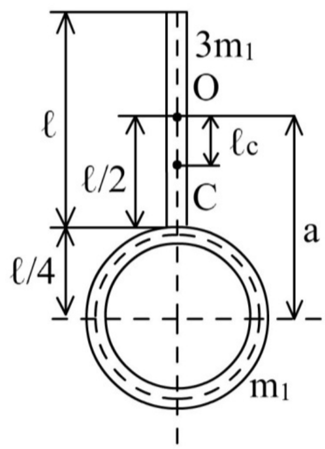
Найти: T.

Решение. Период колебаний физического маятника определяется по формуле

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl_c}}, \tag{1}$$

где J – момент инерции маятника относительно оси колебаний; m – его масса; l_c – расстояние от центра масс маятника до оси колебаний.

Момент инерции маятника равен сумме моментов инерции стержня J_1 и обруча J_2:



$$J = J_1 + J_2. \tag{2}$$

Момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его центр масс, определяется по формуле

$$J_1 = \frac{ml^2}{12}.$$

В данном случае $m = 3m_1$, тогда

$$J_1 = \frac{m_1 l^2}{4}.$$

Момент инерции обруча найдем, воспользовавшись теоремой Штейнера:

$$J = J_0 + ma^2,$$

где J – момент инерции относительно произвольной оси; J_0 – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс параллельно заданной оси; a – расстояние между указанными осями. Применив эту формулу к обручу, получим:

$$J_2 = m_1\left(\frac{l}{4}\right)^2 + m_1\left(\frac{3l}{4}\right)^2 = \frac{5}{8}\,m_1 l^2.$$

Подставив выражения J_1 и J_2 в формулу (2), найдем момент инерции маятника относительно оси вращения:

$$J = \frac{1}{4}\,m_1 l^2 + \frac{5}{8}\,m_1 l^2 = \frac{7}{8}\,m_1 l^2.$$

Расстояние l_c от оси маятника до его центра масс

$$l_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{3m_1 \cdot 0 + m_1 \dfrac{3l}{4}}{3m_1 + m_1} = \frac{\dfrac{3}{4} m_1 l}{4m_1} = \frac{3}{16} l .$$

Подставив в формулу (1) выражения для J, l_c и массы маятника ($m =$ $= 3m_1 + m_1 = 4m_1$), найдем период его колебаний:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\dfrac{7}{8} m_1 l^2}{4m_1 g \ \dfrac{3}{16} l}} = 2\pi \sqrt{\frac{7l}{6g}} ; \quad [T] = \sqrt{\frac{\text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{м}}} = \text{с};$$

$$T = 2 \cdot 3{,}14 \sqrt{\frac{7 \cdot 1}{6 \cdot 9{,}8}} = 2{,}17 \text{ с}.$$

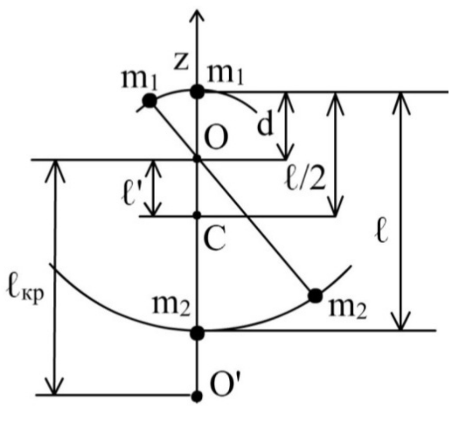
Ответ: $T = 2{,}17$ с.

Задача 1.136

Тонкий невесомый стержень длиной $l = 0{,}5$ м с грузиками на концах массами $m_1 = m_2 = m$ колеблется около точки O на горизонтальной оси (см. рисунок). Определить приведенную длину $l_{пр}$ и период колебаний такого маятника, если расстояние $d = 0{,}1$ м.

Дано: $l = 0{,}5$ м; $m_1 = m_2 = m$; $d = 0{,}1$ м.

Найти: T; $l_{пр}$.



Решение. Приведенная длина физического маятника

$$l_{пр} = \frac{J}{m'l'}, \qquad (1)$$

а период колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_{пр}}{g}}, \qquad (2)$$

где J – момент инерции маятника относительно оси колебаний (точки O); $m' = m_1 + m_2 = 2m$ –

масса маятника; $l' = l/2 - d$ – расстояние от оси вращения до центра инерции маятника (точки C).

Считая грузики за материальные точки, найдем момент инерции J маятника относительно оси вращения (точки O):

$$J = J_1 + J_2,$$

где $J_1 = md^2$, $J_2 = m(l-d)^2$, поэтому

$$J = md^2 + m(l-d)^2.$$

Определим приведенную длину маятника по формуле (1):

$$l_{пр} = \frac{J}{m'l'} = \frac{m\,[d^2 + (l-d)^2]}{2m\left(\frac{l}{2} - d\right)} = \frac{d^2 + (l-d)^2}{2\left(\frac{l}{2} - d\right)}; \quad [l_{пр}] = \frac{\text{м}^2}{\text{м}} = \text{м};$$

$$l_{пр} = \frac{0{,}1^2 + (0{,}5 - 0{,}1)^2}{2\left(\frac{0{,}5}{2} - 0{,}1\right)} = 0{,}57 \text{ м}.$$

По формуле (2) найдем период колебаний маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_{пр}}{g}}; \quad [T] = \sqrt{\frac{\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{м}}} = \text{с}; \quad T = 2\cdot 3{,}14\cdot\sqrt{\frac{0{,}57}{9{,}81}} = 1{,}5 \text{ с}.$$

Ответ: $T = 1{,}5$ с; $l_{пр} = 0{,}57$ м.

Задача 1.137

Определить период колебаний T математического маятника с длиной нити $l = 0{,}8$ м, поднимающегося вверх с ускорением $a = 2$ м/с^2.

Дано: $l = 0{,}8$ м; $a = 2$ м/с^2.

Найти: T.

Решение. Колебания маятника, поднимающегося с ускорением a, эквивалентны колебаниям маятника в поле силы тяжести с ускорением $g' = g + a$, если маятник поднимается вверх, и $g' = g - a$, если маятник опускается вниз.

Таким образом,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}\,; \quad [T] = \sqrt{\frac{\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{м}}} = \text{с};$$

$$T = 2\cdot 3{,}14\sqrt{\frac{0{,}8}{9{,}8+2}} = 1{,}6\ \text{с}.$$

Ответ: $T = 1{,}6$ с.

Задача 1.138

Найти период T затухающих колебаний математического маятника длиной $l = 1$ м, если известен логарифмический декремент затухания $\theta = 0{,}6$.

Дано: $l = 1$ м; $\theta = 0{,}6$.

Найти: T.

Решение. Найдем период T_0 свободных колебаний:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,.$$

Частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\,,$$

где $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$; $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$; $\beta = \theta/T$.

Следовательно,

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{T_0^2} - \frac{\theta^2}{T^2}}\,;$$

Из этого выражения определим период затухающих колебаний:

$$T = \frac{T_0}{2\pi}\sqrt{4\pi^2+\theta^2} = \sqrt{\frac{l}{g}(4\pi^2+\theta^2)}\,; \quad [T] = \sqrt{\frac{\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{м}}} = \text{с};$$

$$T = \sqrt{\frac{1}{9{,}8}(4\cdot 3{,}14^2 + 0{,}6^2)} = 2\ \text{с}.$$

Ответ: $T = 2$ с.

Задача 1.139

Результирующее колебание, получающееся при сложении двух гармонических колебаний одного направления, мало отличающихся по частоте, описывается уравнением вида: $x = A\cos t\cos 50t$. Определить циклические частоты складываемых колебаний; циклическую частоту биений; период биений.

Дано: $x = A\cos t\cos 50t$.

Найти: ω_1; ω_2; $\omega_б$; $T_б$.

Решение. Результирующее колебание, получающееся при сложении двух гармонических колебаний одного направления с очень близкими частотами (для простоты считаем, что амплитуды складываемых колебаний равны, а начальные фазы складываемых колебаний равны нулю),

$$x = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right). \quad (1)$$

Из заданного в задаче результирующего колебания $x = A\cos t\cos 50t$ и уравнения (1) следует, что

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = 50,$$

откуда

$$\omega_1 - \omega_2 = 2; \quad \omega_1 + \omega_2 = 100.$$

Решая эти уравнения, получаем:

$$\omega_1 = 51\ \text{с}^{-1}; \quad \omega_2 = 49\ \text{с}^{-1}.$$

Циклическая частота биений равна разности циклических частот складываемых колебаний:

$$\omega_б = |\omega_1 - \omega_2|. \quad (2)$$

Таким образом, искомая частота биений согласно (2) равна 2 с^{-1}.

Период абсолютного значения косинуса равен π, поэтому период биений определяется из условия

$$\frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2} T_б = \pi,$$

откуда искомый период биений

$$T_б = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}.$$

Вычисляя, получаем: $T_б = 3{,}14$ с.

Ответ: $\omega_1 = 51\ \text{с}^{-1}$; $\omega_2 = 49\ \text{с}^{-1}$; $\omega_б = 2\ \text{с}^{-1}$; $T_б = 3{,}14$ с.

Задача 1.140

Энергия затухающих колебаний маятника, происходящих в некоторой среде, за время $t_1 = 2$ мин уменьшилась в $N = 100$ раз. Определить коэффициент сопротивления, если масса маятника $m = 0{,}1$ кг.

Дано: $t = 120$ с; $\dfrac{E_1}{E_2} = 100$; $m = 0{,}1$ кг.

Найти: r.

Решение. Коэффициент сопротивления r связан с коэффициентом затухания δ и массой m соотношением

$$\frac{r}{m} = 2\delta; \quad r = 2\delta m.$$

Чтобы определить коэффициент затухания δ, запишем уравнение смещения затухающих колебаний:

$$x = A_0 e^{-\delta t}\cos\omega t,$$

где A_0 – амплитуда при $t = 0$.

Полная энергия затухающих колебаний $E = \dfrac{m\omega^2 A^2}{2}$ пропорциональна квадрату амплитуды:

$$\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2; \quad \frac{A_1}{A_2} = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} = \sqrt{100} = 10;$$

$$A_1 = A_0 e^{-\delta t}; \quad A_2 = A_0 e^{-\delta(t_1 + t)}; \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_0 e^{-\delta t}}{A_0 e^{-\delta(t+t_1)}}; \quad \frac{A_1}{A_2} = e^{\delta t_1}; \quad \beta = \frac{\ln\frac{A_1}{A_2}}{t_1}.$$

Тогда

$$r = 2\delta m = 2\,\frac{\ln\frac{A_1}{A_2}}{t_1}m; \quad [r] = \text{кг/с}; \quad r = \frac{2\cdot 2{,}3\cdot 0{,}1}{120} = 0{,}0038 \text{ кг/с}.$$

Ответ: $r = 0{,}0038$ кг/с.

Задача 1.141

Тело массой m = 0,6 кг, подвешенное к пружине жесткостью k = 30 Н/м, совершает в некоторой среде упругие колебания. Логарифмический декремент затухания θ = 0,01.

Определить: 1) время t_1, за которое амплитуда колебаний уменьшится в 3 раза; 2) число полных колебаний N, которые должно совершить тело, чтобы прошло подобное уменьшение амплитуды.

Дано: m = 0,6 кг; k = 30 Н/м; θ = 0,01; $\dfrac{A_1}{A_2} = 3$.

Найти: t_1; N.

Решение. Уравнение смещения для затухающих колебаний:

$$x = A_0e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $A = A_0e^{-\delta t}$ – амплитуда затухающих колебаний;

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_0e^{-\delta t}}{A_0e^{-\delta(t+t_1)}} = e^{-\delta t_1};\quad e^{\delta t_1} = 3;$$

$$t_1 = \frac{\ln 3}{\delta} = \frac{\ln 3}{0{,}01} = 110 \text{ с}.$$

Период колебаний пружинного маятника $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ – время одного полного колебания.

Число полных колебаний

$$N = \frac{t_1}{T};\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}6}{30}} = \frac{2\pi}{7{,}07} = 0{,}89 \text{ с};\quad N = \frac{110}{0{,}89} = 123.$$

Ответ: t_1 = 110 с; N = 123.

Задача 1.142

Тело массой m = 100 г, совершая затухающие колебания, за t_1 = 1 мин потеряло 40 % своей энергии. Определить коэффициент сопротивления r.

Дано: m = 0,1 кг; t_1 = 60 с; $\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{1}{0{,}6} = \dfrac{5}{3}$.

Найти: r.

Решение. Полная энергия при колебательном движении $E = \dfrac{m\omega^2 A^2}{2}$ пропорциональна квадрату амплитуды:

$$\frac{E\ (t)}{E\ (t+t_1)} = \left(\frac{\mathrm{A_0 e^{-\delta t}}}{\mathrm{A_0 e^{-\delta(t+t_1)}}}\right)^2; \quad \frac{E\ (t)}{E\ (t+t_1)} = e^{2\delta t_1},$$

где δ – коэффициент затухания; $2\delta = \dfrac{r}{m}$.

Потеряно 40 % энергии, осталось 60 % энергии:

$$\frac{1}{0,6} = e^{2\delta t_1}; \quad \delta = \frac{\ln\frac{5}{3}}{2t_1}.$$

Коэффициент сопротивления

$$r = 2\delta m; \quad [r] = \text{с}^{-1}\cdot\text{кг} = \text{кг/с}; \quad r = \frac{m\ln\frac{5}{3}}{60} = \frac{0,1\ln\frac{5}{3}}{60} = 8,54\cdot10^{-4}\ \text{кг/с}.$$

Ответ: $r = 8,54\cdot10^{-4}$ кг/с.

Задача 1.143

Определить добротность Q колебательной системы, если за время, в течение которого система совершает $N = 90$ полных колебаний, их амплитуда уменьшилась в 3 раза.

Дано: $N = 90$; $n = 3$.

Найти: Q.

Решение. Добротность колебательной системы (при малых значениях логарифмического декремента θ)

$$Q = \pi/\theta. \qquad (1)$$

Логарифмический декремент затухания

$$\theta = \delta T, \qquad (2)$$

где δ – коэффициент затухания; T – условный период затухающих колебаний.

Амплитуда затухающих колебаний

$$A = A_0 e^{-\delta t}. \qquad (3)$$

Зная число полных колебаний, найдем

$$t = NT. \qquad (4)$$

Тогда, учитывая выражения (2) и (4),

$$A = A_0 e^{-N\theta} \quad \text{или} \quad \frac{A_0}{A} = n = e^{N\theta},$$

откуда

$$\theta = \frac{\ln n}{N}. \qquad (5)$$

Подставив формулу (5) в выражение (1), найдем искомую добротность колебательной системы:

$$Q = \frac{\pi N}{\ln n}; \quad Q = \frac{3{,}14 \cdot 90}{\ln 3} = 257.$$

Ответ: $Q = 257$.

Задача 1.144

Колебательная система совершает затухающие колебания с частотой $n = 900$ Гц. Определить собственную частоту колебательной системы, если резонансная частота $n_{рез} = 898$ Гц.

Дано: $n = 900$ Гц; $n_{рез} = 898$ Гц.

Найти: $n_{собс}$.

Решение. Циклическая частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \qquad (1)$$

где ω_0 – собственная циклическая частота колебательной системы; δ – коэффициент затухания.

Резонансная частота

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) находим:

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \delta^2; \qquad (3)$$

$$\omega_0^2 = \omega_{рез}^2 + 2\delta^2. \qquad (4)$$

Умножая уравнение (3) на 2 и вычитая из него (4), получаем:

$$\omega_0^2 = 2\omega^2 - \omega_{рез}^2. \qquad (5)$$

Учитывая, что $\omega = 2\pi n$, из уравнения (5) найдем искомую собственную частоту колебательной системы:

$$n_{собс} = \sqrt{2n^2 - n_{рез}^2}; \quad n_{собс} = \sqrt{2 \cdot 900^2 - 898^2} = 902 \text{ Гц}.$$

Ответ: $n_{собс} = 902$ Гц.

Задача 1.145

Тело массой m = 50 г совершает затухающие колебания, начальная амплитуда A_0 которых равна 10 см, начальная фаза $\varphi = 0$, коэффициент затухания $\delta = 1{,}6$ с$^{-1}$. В результате действия на это тело внешней периодической силы установились вынужденные колебания, описываемые уравнением $x = 6\cos(10\pi t - 0{,}75\pi)$, см. Написать уравнение собственных затухающих колебаний; уравнение внешней периодической силы.

Дано: m = 0,05 кг; A_0 = 0,1 м; $\varphi = 0$; $x = 0{,}06\cos(10\pi t - 0{,}75\pi)$, м; $\delta = 1{,}6$ с$^{-1}$.

Найти: $x(t)$; $F(t)$.

Решение. Уравнение собственных затухающих колебаний с начальной фазой, равной нулю:

$$x = A_0 e^{-\delta t}\cos\omega t. \qquad (1)$$

Для определения собственной частоты ω колебательной системы запишем выражение для сдвига фаз φ между собственными и вынужденными колебаниями:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \qquad (2)$$

где ω – циклическая частота внешней вынуждающей силы, которая согласно уравнению вынужденных колебаний, заданному в условиях, равна 10 π. Из этого же уравнения следует, что $\varphi = -0{,}75\,\pi$, откуда tg φ = 1.

Тогда согласно (2)

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + 2\delta\omega},$$

после подстановки числовых значений получаем:

$$\omega_0 = \sqrt{(10\pi)^2 + 2 \cdot 1{,}6 \cdot 10\pi} = 10{,}5\pi \text{ с}^{-1}.$$

Уравнение (1) собственных затухающих колебаний после подстановки числовых значений запишем в виде:

$$x = 0{,}1e^{-1{,}6t}\cos 10{,}5\pi t, \text{ м.}$$

Уравнение внешней вынуждающей силы:

$$F = F_0\cos\omega t, \tag{3}$$

где F_0 и ω – соответственно амплитуда и частота внешней вынуждающей силы (по условию задачи $\omega = 10\pi$ с$^{-1}$).

Зная выражение для амплитуды вынужденных колебаний

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

(из заданного уравнения вынужденных колебаний $A = 0{,}06$ м), найдем амплитуду вынуждающей силы:

$$F_0 = mA\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2};$$

$$F_0 = 0{,}05\cdot 0{,}06\sqrt{(10{,}5\pi)^2 - (10\pi)^2 + 4\cdot(1{,}6)^2(10\pi)^2} = 0{,}712 \text{ Н.}$$

Тогда искомое уравнение внешней периодической силы

$$F = 0{,}712\cos 10\pi t, \text{ Н.}$$

Ответ: $x = 0{,}1e^{-1{,}6t}\cos 10{,}5\pi t$, м; $F = 0{,}712\cos 10\pi t$, Н.

Задача 1.146

Груз массой $m = 50$ г, подвешенный на нити длиной $l = 20$ см, совершает колебания в жидкости. Коэффициент сопротивления $r = 0{,}02$ кг/с. На груз действует вынуждающая сила $F = 0{,}1\cos\omega t$, Н.

Определить: 1) частоту вынуждающей силы, при которой амплитуда вынужденных колебаний максимальна; 2) резонансную амплитуду.

Дано: $m = 5\cdot 10^{-2}$ кг; $l = 0{,}2$ м; $r = 0{,}02$ кг/с; $F = 0{,}1\cos\omega t$, Н.

Найти: $\omega_{рез}$; $A_{рез}$.

Решение. Очевидно, что частота вынуждающей силы, при которой амплитуда вынужденных колебаний максимальна, является резонансной частотой:

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}, \tag{1}$$

где ω_0 – собственная частота колебаний системы; $\delta = \dfrac{r}{2m}$ – коэффициент затухания.

Груз, подвешенный на нити, можно принять за математический маятник, тогда $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{q}{l}}$.

Подставив значение ω_0 и δ в формулу (1), найдем искомую резонансную частоту:

$$\omega_{рез} = \sqrt{\frac{q}{l} - \frac{r^2}{2m^2}}; \quad [\omega_{рез}] = \sqrt{\frac{\text{м}}{\text{с}^2\text{м}} - \frac{\text{кг}^2}{\text{с}^2\text{кг}^2}} = \sqrt{\frac{1}{\text{с}^2}} = \text{с}^{-1}.$$

Подставив в выражение для амплитуды вынужденных колебаний

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}},$$

где F_0 – амплитудное значение вынуждающей силы (по условию задачи $F_0 = 0{,}1$ Н), формулу (1), найдем искомую резонансную амплитуду:

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2m\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{F_0}{r\sqrt{\dfrac{q}{l} - \dfrac{r^2}{4m^2}}};$$

$$[A_{рез}] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}}{\text{с}^2\cdot\text{кг}\sqrt{\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2\text{м}} - \dfrac{\text{кг}^2}{\text{с}^2\text{кг}^2}}} = \frac{\text{м}}{\text{с}\sqrt{\dfrac{1}{\text{с}^2}}} = \frac{\text{м}\cdot\text{с}}{\text{с}} = \text{м};$$

$$A_{рез} = \frac{0{,}1}{0{,}02\sqrt{\dfrac{9{,}8}{0{,}2} - \dfrac{(0{,}02)^2}{4(5\cdot10^{-2)2}}}} = 7{,}14\cdot10^{-2}\ \text{м} = 71{,}4\ \text{см}.$$

Ответ: 1) $\omega_{рез} = 7$ рад/с; 2) $A_{рез} = 71{,}4$ см.

Задача 1.147

Точка одновременно совершает гармонические колебания, происходящие по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемые уравнениями $x = A_1\sin\omega t$ и $y = A_2\cos\omega t$, где $A_1 = 0{,}5$ см; $A_2 = 2$ см. Найти уравнение траектории и построить ее, указав направление движения.

Дано: $x = A_1\sin\omega t$; $y = A_2\cos\omega t$; $A_1 = 0{,}5$ см; $A_2 = 2$ см.

Найти: $y = y(x)$.

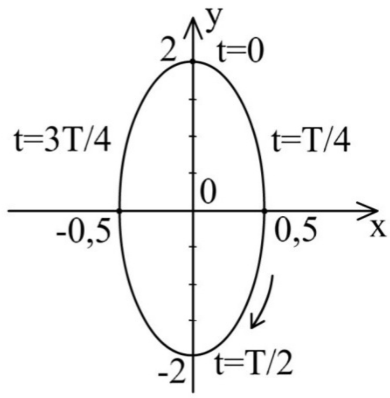
Решение. Размерность амплитуд и смещений колебаний целесообразно оставить в сантиметрах. По условию задачи

$$x = A_1 \sin\omega t = 0{,}5\sin\omega t; \quad (1)$$

$$y = A_2 \cos\omega t = 2\cos\omega t. \quad (2)$$

Исключая из уравнений (1) и (2) параметр t, с помощью основного тригонометрического тождества $\cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1$ получим:

$$\begin{cases} \sin\omega t = \dfrac{x}{0{,}5}; \\ \cos\omega t = \dfrac{y}{2}, \end{cases}$$



отсюда

$$\frac{x^2}{0{,}5^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1.$$

Траектория представляет собой эллипс с полуосями $a = 0{,}5$ см и $b = 2$ см (см. рисунок).

Направление движения по эллипсу определим, построив таблицу.

Время t выразим через период колебаний T.

t	0	$T/4$	$T/2$	$3T/4$	T
x, см	0	0,5	0	–0,5	0
y, см	2	0	–2	0	2

Ответ: эллипс, $\dfrac{x^2}{0{,}5^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1.$

Задача 1.148

Складываются два взаимно перпендикулярных колебания с одинаковыми периодами 0,2 с и одинаковой начальной фазой π/3. Амплитуда одного колебания $A = 4$ см, второго $B = 3$ см. Найти уравнение результирующего колебания.

Дано: $T_1 = T_2 = T = 0{,}2$ с; $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = \pi/3$; $A = 0{,}04$ м; $B = 0{,}03$ м.

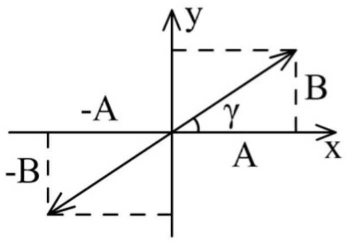
Найти: $y(x)$.

Решение. При сложении двух взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты (одинакового периода) уравнение траектории результирующего колебания имеет вид:

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi, \qquad (1)$$

где A и B – амплитуды складываемых колебаний; φ – разность между фазами колебаний.

Уравнение (1) описывает эллипс, оси которого ориентированы относительно координатных осей произвольно.



Согласно условию задачи разность фаз φ = 0, поэтому уравнение (1) примет вид:

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} + \frac{y^2}{B^2} = 0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0,$$

откуда

$$y = \frac{B}{A}x \text{ – уравнение прямой.}$$

Следовательно, результирующее колебание будет происходить вдоль прямой линии (см. рисунок).

Угол наклона прямой найдется из уравнения

$$\text{tg}\gamma = \frac{B}{A}; \quad \text{tg}\gamma = \frac{0{,}03}{0{,}04} = 0{,}75; \quad \gamma = 36^{\circ}52'.$$

Результирующее колебание является гармоническим с тем же периодом T (с той же циклической частотой $\omega = \frac{2\pi}{T}$), а амплитуда результирующего колебания $C = \sqrt{A^2 + B^2}$; $C = \sqrt{0{,}04^2 + 0{,}03^2} = 5\cdot10^{-2}$ м = 5 см.

Следовательно, уравнение результирующего колебания

$$y(x) = 0{,}05\cos(10\pi t + \pi/3), \text{ м.}$$

Ответ: $y(x) = 0{,}05\cos(10\pi t + \pi/3)$, м.

Задача 1.149

Материальная точка одновременно участвует в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях, уравнения которых $x = \cos 2\pi t$ и $y = \cos \pi t$. Найти уравнение траектории точки. Вычертить траекторию точки с соблюдением масштаба, указав направление движения точки.

Дано: $x = \cos 2\pi t$, см; $y = \cos \pi t$, см.

Найти: $y(x)$.

Решение. Для нахождения уравнения траектории точки следует из заданных в задаче уравнений исключить время t.

Второе заданное уравнение, воспользовавшись формулой

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2},$$

можно записать в виде:

$$y = \cos\pi t = \sqrt{\frac{1+\cos 2\pi t}{2}}.$$

Учитывая, что $x = \cos 2\pi t$, придем к уравнению

$$y = \sqrt{\frac{1+x}{2}},$$

откуда искомое уравнение материальной точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях,

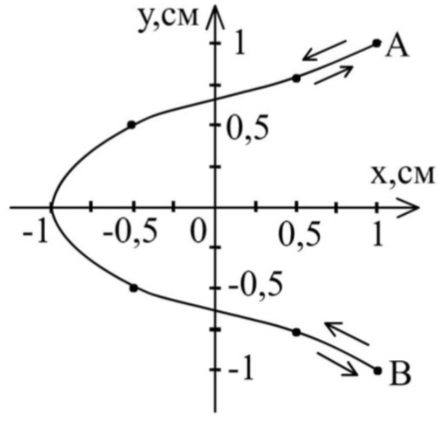
$$2y^2 - x = 1 \text{ – уравнение параболы.} \quad (1)$$

Из уравнений $x = \cos 2\pi t$, см и $y = \cos\pi t$, см следует, что смещение точки по осям координат x и y ограничено и заключено в пределах от –1 см до +1 см.

Для построения траектории найдем, согласно уравнению (1), значения y, отвечающие ряду значений x, удовлетворяющих условию $|x| \le 1$ см.

x, см	–1	–0,5	0	0,5	1
y, см	0	±0,5	±0,707	±0,866	±1

Начертив координатные оси и выбрав масштаб, нанесем на плоскость xoy найденные точки. Соединив их, получим траекторию точки, совершающей одновременно взаимно перпендикулярные колебания согласно заданным в задаче уравнениям (см. рисунок).



Для определения направления движения точки рассмотрим, как изменяется ее положение с течением времени.

При $t = 0$ координаты точки $x(0) = 1$ см, $y(0) = 1$ см. Далее, например, при $t = 0,5$ с координаты точки изменяются и станут равными $x(0,5) = –1$ см, $y(0,5) = 0$ см; при t = 1 с $x(1) = 1$ см, $y(1) = –1$ см и т.д.

Анализ расположения точек показывает, что движение происходит от точки A к началу координат (это указано стрелкой). После того, как в момент времени $t = 1$ с колеблющаяся точка достигнет точки B, она будет двигаться в обратном направлении.

Ответ: $y(x) = 2y^2 - x = 1$.

Задача 1.150

Найти период колебаний поршня массой m = 50 г, разделяющего закрытый горизонтальный цилиндрический сосуд сечением S = 100 см^2 на две равные части длиной l = 20 см каждая (см. рисунок), при отклонении поршня от среднего положения на малую величину x. По обе стороны от поршня находится воздух под давлением p = 100 Па. Температуру считать постоянной. Трением пренебречь.

Дано: $m = 5\cdot10^{-2}$ кг; $S = 10^{-2}$ м^2; l = 0,2 м; p = 100 Па.

Найти: T.

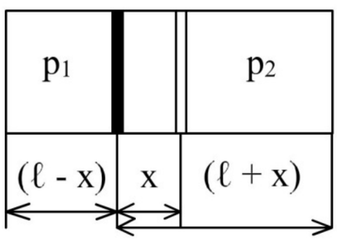
Решение. Пусть поршень отклонился влево на величину x. Считая процесс изотермическим (T = const), применим к газу, заключенному в цилиндре, закон Бойля – Мариотта:

$$p_1(l - x)S = p_2(l + x)S = plS, \qquad (1)$$

где p_1, p_2 – давление в левой и правой частях цилиндра; p – первоначальное давление газа в цилиндре.

Найдем силу, действующую на поршень после его отклонения:

$$F = (p_1 - p_2)S. \qquad (2)$$



Давления p_1 и p_2 определим из уравнения (1):

$$p_1 = \frac{pl}{l-x}; \quad p_2 = \frac{pl}{l+x}. \qquad (3)$$

Подставляя выражения (3) в (2), получим:

$$F = \frac{2plxS}{l^2 - x^2} = \frac{2pVx}{l^2 - x^2}, \qquad (4)$$

где V – объем половины цилиндра.

При малых колебания $x << l$, и выражение (4) можно записать в виде:

$$F = \frac{2pVx}{l^2}. \qquad (5)$$

Согласно второму закону Ньютона $a = F/m$, и, используя формулу (5), получим:

$$a = -\frac{2pVx}{l^2 m} = -\frac{2pSx}{ml}. \qquad (6)$$

Знак «минус» в уравнении (6) берется потому, что сила давления газа на поршень направлена в сторону, противоположную смещению x.

Поскольку ускорение есть вторая производная по времени t, то из уравнения (6) можно записать:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2pS}{ml}x = 0.$$

Получили дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний, в котором множитель $\frac{2pS}{ml} = \omega^2$, откуда $\omega = \sqrt{\frac{2pS}{ml}}$, где ω – циклическая частота колебаний.

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{2ml}{pS}};$$

$$[T] = \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{Па} \cdot \text{м}^2}} = \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}}} = \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}} = \text{с};$$

$$T = 3{,}14\sqrt{\frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}2}{100 \cdot 10^{-2}}} = 0{,}45 \text{ с}.$$

Ответ: $T = 0{,}45$ с.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антошина, Л. Г. Общая физика. Сборник задач: учеб. пособие / Л.Г. Антошина, С.В. Павлов, Л.А. Скипетрова; под ред. проф. Б.А. Струкова. – М.: ИНФРА-М, 2006. – 336 с.
2. Гладской, В.М. Сборник задач по физике с решениями: пособие для вузов / В.М. Гладской, П.И.Самойленко. – 2-е изд. – М.:Дрофа, 2004. – 288с. :ил.
3. Демков, В.П. Физика. Теория. Методика. Задачи / В.П. Демков, О.Н. Третьякова. – М.: Высш. шк., 2001. – 669 с.: ил.
4. Зиновьев, В.А. Краткий физико-технический справочник. Т. 2 / В.А. Зиновьев, Г.Н. Свешников, И.К. Снитко. – М.: Физматгиз, 1960. – 411 с.
5. Калашников, Н.П. Основы физики. Упражнения и задачи: учеб. пособие для вузов / Н.П. Калашников, М.А. Смондырев. – М.: Дрофа, 2004. – 464 с.
6. Кириллов, В.М. Решение задач по физике: учеб. пособие / В.М. Кириллов [и др.]. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: КомКнига, 2006. – 248 с.
7. Кирьянов, А.П. Общая физика. Сборник задач: учеб. пособие / А.П. Кирьянов [и др.]; под ред. И.П. Шапкарина. – М.: КНОРУС, 2008. – 304 с.
8. Кошкин, Н.И. Справочник по элементарной физике / Н.И. Кошкин, М.Г. Ширкевич. – М.: Физматгиз. 1960. – 208 с.
9. Курс физики: учебник для вузов: В 2 т. / под ред. В.Н. Лозовского. – СПб.: Изд-во «Лань», 2001. – Т. 1. – 576 с.; Т. 2. – 592 с.
10. Лунц, Г.Л. Краткий физико-технический справочник Т. 1. – М.: Физматгиз, 1960. – 446 с.
11. Макаренко, Г.М. Курс общей физики / Г.М. Макаренко. – Минск: Дизайн ПРО, 2003. – 640 с.
12. Макаренко, Г.М. Физические основы механики. Молекулярная физика и термодинамика: сб. заданий В 3 ч. / Г.М. Макаренко. – Новополоцк: ПГУ, 2008. – 304 с.
13. Наркевич, И.И. Физика: учебник / И.И. Наркевич, Э.И. Волмянский, С.И. Лобко – Минск: Новое знание, 2004. – 680 с.
14. Новиков, С.М. Сборник заданий по общей физике: учеб. пособие для студентов вузов / С.М. Новиков. – М.: ООО «Издательство Оникс»; ООО «Издательство “Мир и образование”», 2006. – 512 с.: ил.
15. Новодворская, Е.М. Сборник задач по физике с решениями для вузов / Е.М. Новодворская, Э.М. Дмитриев. – М.: ООО «Издательский дом “Оникс XXI век”»; ООО «Издательство Минобразования», 2005. – 386 с.: ил.
16. Решение задач по курсу общей физики: учеб. пособие. – 2-е изд., испр. / под ред. Н.М. Рогачева. – СПб.: Изд-во «Лань», 2008. – 304 с.
17. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т.И. Трофимова. – М.: Высш. шк., 1990. – 478 с.
18. Трофимова, Т. И. Курс физики. Задачи и решения: учеб. пособие для втузов / Т.И. Трофимова, А.В. Фирсов. – М.: Изд. центр «Академия», 2004. – 592 с.
19. Трофимова, Т.И. Курс физики. Колебания и волны. Теория, задачи и решения: учеб. пособие для студентов техн. специальностей вузов / Т.И. Трофимова, А.В. Фирсов. – М.: Изд. центр «Академия», 2003. – 256 с.
20. Фирганг, Е.В. Руководство к решению задач по курсу общей физики / Е.В. Фирганг. – СПб.: Изд-во «Лань», 2007. – 368 с.
21. Чертов, А.Г. Задачник по физике: учеб. пособие для втузов / А.Г Чертов, А.А. Воробьев. – 7-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во физико-математической литературы, 2003. – 640 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

МАКАРЕНКО Геннадий Макарович;
АНТОНОВИЧ Дмитрий Анатольевич

ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ

Пособие

В четырех частях

Часть 1

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
МЕХАНИКИ

Редактор *Т. В. Булах*

Дизайн обложки *В. А. Виноградовой*

Подписано в печать 4.05.10. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Ризография. Усл. печ. л. 12,3. Уч.-изд. л. 11,2. Тираж 120 экз. Заказ № 848.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Полоцкий государственный университет»

ЛИ № 02330/0548568 от 26.06.2009 ЛП № 02330/0494256 от 27.05.2009

211440 г. Новополоцк, ул. Блохина, 29