Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

Г. М. Макаренко
Д. А. Антонович

ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ

Пособие

В четырех частях

Часть 2

ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

Новополоцк
ПГУ
2010

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73
М15

Рекомендовано к изданию методической комиссией
геодезического факультета в качестве
пособия (протокол № 2 от 14.10.2009)

Рецензенты:

канд. физ.-мат. наук, проф. каф. высшей математики
УО «ПГУ» И. Е. АНДРУШКЕВИЧ;
канд. техн. наук, доц. каф. физики УО «ПГУ» Н. В. ОЩЕПКОВА;
канд. физ.-мат. наук, доц. каф. физики, декан радиотехнического
факультета УО «ПГУ» С. А. ВАБИЩЕВИЧ

Макаренко, Г. М.

М15 Задачи по физике: пособие. В 4 ч. Ч. 2: Основы молекулярной физики и термодинамики / Г. М. Макаренко, Д. А. Антонович. – Новополоцк : ПГУ, 2010. – 180 с.

ISBN 978-985-531-045-8.

Приведены решения 130 задач, используемых при изучении общей физики (разделы «Молекулярно-кинетическая теория» и «Термодинамика»). По каждой теме дан перечень основных формул, применяемых при решении.

Предназначен для студентов высших учебных заведений технических специальностей.

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73

ISBN 978-985-531-045-8 (Ч. 2)
ISBN 978-985-531-043-4

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сборник задач разработан в соответствии с программой курса общей физики для студентов вузов, для которых физика не является профилирующей дисциплиной.

В изучении физики решение задач имеет исключительно важное значение, так как способствует усвоению теоретического материала и позволяет приобрести навыки практического применения основных законов и формул. Умение решать задачи является одним из основных критериев оценки глубины изучения материала.

Основная цель сборника – оказать студентам методическую помощь в выполнении самостоятельных и контрольных работ; ознакомить их с некоторыми методами решения физических задач, привить навыки и культуру решения, обратить внимание на наиболее распространенные ошибки.

В сборнике задач рассмотрены типовые задачи, подобные тем, которые наиболее часто используются при изучении общей физики в техническом вузе.

Задачи объединены в разделы, разделенные по темам. В начале каждой темы приведены основные законы, уравнения и формулы, используемые при решении задач.

Решения задач выполнены по одной схеме: составлены необходимые уравнения, приведено решение их в общем виде, подставлены числовые данные, выписан ответ.

Предлагаемый сборник предназначен для студентов вузов, для которых физика не является профилирующей дисциплиной.

Методические указания к решению задач

При решении задач рекомендуется определенная последовательность:

1. Изучите по учебникам [3, 9, 11, 13, 17, 19] теоретический материал соответствующего раздела курса, запомните законы и основные формулы, а также единицы измерения величин, входящих в них.
2. Несколько раз внимательно прочитайте условие задачи. Сделайте сокращенную запись данных и искомых физических величин, предварительно представив их в системе СИ.
3. В условиях и при решении задач часто используются множители и приставки СИ для образования десятичных и дольных единиц.
4. 3. Вникните в смысл задачи. Представьте физическое явление, о котором идет речь; введите упрощающие предположения, которые можно сделать при решении. Для этого необходимо использовать такие модели, как материальная точка, абсолютно твердое тело, точечный заряд, луч света и т.д.
5. Если позволяет условие задачи, выполните схематический чертеж, поясняющий содержание и решение.
6. С помощью физических законов установите количественные связи между заданными и искомыми величинами, т.е. составьте замкнутую систему уравнений, в которой число уравнений равнялось бы числу неизвестных.
7. Найдите решение полученной системы уравнений в виде расчетной формулы, отвечающей на вопрос задачи.
8. Проверьте правильность полученного решения, используя правило размерностей. Размерности правой и левой частей уравнения должны совпадать. Хотя равенство размерностей не является достаточным подтверждением правильности решения задачи, рекомендуемый метод проверки очень полезен.
9. Подставьте в полученную формулу числовые значения физических величин и проведите вычисления. Обратите внимание на точность численного ответа, которая не может быть больше точности исходных величин.
10. Получив численный ответ, оцените его правдоподобность.

Заметим, что при решении задач возможны отступления от вышеизложенной схемы.

В сборнике не проводится проверка размерностей в некоторых задачах, в которых она очевидна.

Для уменьшения объема текста подстановка численных значений в некоторых заданиях не показана.

2. ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

2.1. Молекулярно-кинетическая теория идеального газа. Законы идеального газа

Основные формулы

Количество вещества тела (системы)

$$\nu = \frac{N}{N_A},$$

где N – число структурных элементов (молекул, атомов, ионов и т.п.); $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – постоянная Авогадро (число молекул в одном моле).

Молярная масса вещества

$$M = \frac{m}{\nu},$$

где m – масса однородного тела (системы); ν – количество вещества этого тела.

Молярная масса смеси газов

$$M_{см} = \frac{\sum_{i=0}^{n} m_i}{\sum_{i=0}^{n} \nu_i},$$

где m_i – масса i-того компонента смеси; ν_i – количество вещества i-того компонента смеси; n – число компонентов смеси.

Концентрация частиц (молекул, атомов, ионов и т.п.) однородной системы

$$n = \frac{N}{V},$$

где N – число частиц в системе; V – объем системы.

Нормальные условия – стандартные физические условия, определяемые давлением $p = 101325 \approx 10^5$ Па (760 мм. рт. ст.) и абсолютной температурой $T = 273,15$ К ($t = 0°$ С).

Уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева – Клапейрона):

$$pV = \frac{m}{M}RT,$$

где R = 8,31 Дж/моль·К – молярная газовая постоянная; T – термодинамическая температура газа; p – давление газа; V – объем газа.

Зависимость давления газа p от концентрации молекул n и температуры T газа (уравнение состояния газа):

$$p = nkT,$$

где k =1,38·10^{-23} Дж/К – постоянная Больцмана (определяет «долю» газовой постоянной, приходящейся на одну молекулу $k = \frac{R}{N_A}$).

Опытные газовые законы:

объединенный газовый закон:

$$\frac{pV}{T} = \text{const},$$

или для двух состояний газа: $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$,

где p_1, V_1, T_1 – соответственно давление, объем и температура газа в начальном состоянии; p_2, V_2, T_2 – те же величины в конечном состоянии.

Закон Бойля – Мариотта (изотермически процесс, m = const, T = const):

$$pV = \text{const},$$

или для двух состояний газа: $p_1V_1 = p_2V_2$.

Закон Гей-Люссака (изобарный процесс, m = const, p = const):

$$\frac{V}{T} = \text{const},$$

или для двух состояний газа: $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$.

Закон Шарля (изохорный процесс, m = const, V = const):

$$\frac{p}{T} = \text{const},$$

или для двух состояний газа: $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$.

Закон Дальтона, определяющий давление смеси газов:

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n,$$

где p – давление смеси газов; p_i – парциальное давление i-того компонента смеси; n – число компонентов смеси.

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов:

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle \upsilon_{кв} \rangle^2 \quad \text{или} \quad p = \frac{2}{3} n \langle E_к \rangle,$$

где m_0 – масса одной молекулы; $\langle \upsilon_{кв} \rangle$ – средняя квадратичная скорость молекул; $\langle E_к \rangle$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул.

Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы газа

$$\langle E_1 \rangle = \frac{3}{2} kT,$$

где k = 1,38·10^{-23} Дж/К – постоянная Больцмана (определяет «долю» газовой постоянной, приходящейся на одну молекулу, $k = \frac{R}{N_A}$).

Средняя полная кинетическая энергия поступательного движения (приходящаяся на все степени свободы молекулы)

$$\langle E_i \rangle = \frac{i}{2} kT,$$

где i – сумма числа поступательных $i_П$, числа вращательных $i_В$ и удвоенного числа колебательных $i_К$ степеней свободы молекулы, $i = i_П + i_В + 2i_К$.

Внутренняя энергия идеального газа:

для произвольной массы газа

$$U = \frac{i}{2} \frac{m}{M} RT = \frac{i}{2} \nu RT;$$

для 1 моля газа

$$U = \frac{i}{2} kTN_A = \frac{i}{2} RT,$$

где i – число степеней свободы газа; k – постоянная Больцмана; T – термодинамическая температура; N_A – постоянная Авогадро; R – молярная газовая постоянная; m – масса газа; M – молярная масса; ν – количество вещества.

Задача 2.1

Найти число молекул газа, находящегося в сосуде объемом V = 0,5 л при нормальных условиях.

Дано: $V = 5{\cdot}10^{-4}$ м^3; $P = 10^5$ Па; T = 273 К.

Найти: N.

Решение. Считая газ идеальным, из уравнения Менделеева – Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$ найдем количества вещества газа ν:

$$pV = \nu RT;$$

$$\nu = \frac{PV}{RT},$$

где $R = 8{,}31\,\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ – молярная газовая постоянная.

Число молекул газа N, находящегося в сосуде, найдем как произведение количества вещества ν на постоянную Авогадро N_A:

$$N = \nu N_A \quad \text{или} \quad N = \frac{PV}{RT}N_A;$$

$$[N] = \frac{\text{Па}\cdot\text{м}^3\cdot\text{моль}\cdot\text{К}}{\text{Дж}\cdot\text{К}\cdot\text{моль}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^3}{\text{Н}\cdot\text{м}^2\cdot\text{м}} = 1;$$

$$N = \frac{10^5\cdot 5\cdot 10^{-4}}{8{,}31\cdot 273}\cdot 6{,}02\cdot 10^{23} = 1{,}3\cdot 10^{22}.$$

Ответ: $N = 1{,}3{\cdot}10^{22}$.

Задача 2.2

В цилиндр длиной l_1 = 1,5 м и площадью S = 100 см^2, заполненный идеальным газом при нормальном давлении, начали медленно вдвигать поршень. Определить силу, действующую на поршень, если его остановить на расстоянии l_2 = 15 см от дна цилиндра.

Дано: $P_1 = 10^5$ Па; $l_1 = 1{,}5$ м; $l_2 = 0{,}15$ м; $S = 10^{-2}$ м^2.

Найти: F.

Решение. Считая температуру газа неизменной, запишем закон Бойля – Мариотта:

$$P_1V_1 = P_2V_2,$$

где $V_1 = Sl_1$; $V_2 = Sl_2$.

Тогда

$$P_1Sl_1 = P_2Sl_2.$$

Отсюда определим давление:

$$P_2 = P_1\frac{l_1}{l_2}$$

Сила, действующая на поршень,

$$F = P_2S = P_1\frac{l_1}{l_2}S;$$

$$[F] = \frac{\text{Па}\cdot\text{м}}{\text{м}}\cdot\text{м}^2 = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}\cdot\text{м}^2 = \text{Н};$$

$$F = 10^5\cdot\frac{1{,}5}{0{,}15}\cdot 10^{-2} = 10^4 H = 10\ \text{кН}.$$

Ответ: $F = 10$ кН.

Задача 2.3

Идеальный газ находится в сосуде при температуре $t_1 = 20$ °С. При нагревании газа до температуры t_2 его давление возросло в 1,5 раза. Найти температуру газа t_2.

Дано: $T_1 = 293$ К; $P_2 = 1{,}5P_1.$

Найти: t_2.

Решение. Процесс нагревания газа протекает при постоянном объеме, т.е. является изохорическим.

Для такого процесса по закону Шарля

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2},$$

откуда

$$T_2 = \frac{P_2}{P_1} T_1;$$

$$T_2 = \frac{1{,}5P_1}{P_1} \cdot 293 = 439{,}5 \text{ К}.$$

Тогда

$$t_2 = T_2 - 273 = 439{,}5 - 273 = 166{,}5 \text{ °C}.$$

Ответ: $t_2 = 166{,}5$ °C.

Задача 2.4

При нагревании газа на $\Delta T = 10$ К его объем увеличился на $\frac{1}{250}$ часть первоначального объема. Найти начальную температуру газа, считая давление постоянным.

Дано: $\Delta T = 10$ К; $P = \text{const}$; $\Delta V = \frac{V_1}{250}$.

Найти: T_1.

Решение. Воспользуемся законом Гей-Люссака, поскольку процесс нагревания газа изобарный:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2},$$

где $V_2 = V_1 + \Delta V = \frac{250}{251} V_1$, $T_2 = T_1 + \Delta T$.

Получим

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_1 + \Delta V}{T_1 + \Delta T} = \frac{251 V_1}{250\,(T_1 + \Delta T)},$$

откуда

$$T_1 = \frac{250\,(T_1 + \Delta T)}{251 V_1};$$

$$251 T_1 = 250 T_1 + 250\,\Delta T; \quad T_1 = 250\,\Delta T;$$

$$T_1 = 2500 \text{ К}.$$

Ответ: $T_1 = 2500$ К.

Задача 2.5

Сосуд емкостью V = 10 л, заполненный воздухом при температуре 500 К, соединяется трубочкой с чашкой, в которой находится ртуть. Найти количество ртути Δm, перешедшей в сосуд при остывании воздуха в нем до 300 К.

Дано: $V = 10^{-2}$ м^3; $T_1 = 500$ К; $T_2 = 300$ К.

Найти: Δm.

Решение. Поскольку объем сосуда не меняется, найдем изменение давления ΔP воздуха в нем с уменьшением температуры.

По закону Шарля запишем:

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}; \quad P_2 = \frac{T_2}{T_1} P_1,$$

откуда

$$\Delta P = P_1 - P_2 = P_1 - \frac{P_1 T_2}{T_1} = \frac{P_1 (T_1 - T_2)}{T_1}.$$

Считая, что

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{\Delta P}{P_1},$$

получим

$$\frac{\Delta m}{\rho V} = \frac{P_1 (T_1 - T_2)}{P_1 T_1},$$

откуда

$$\Delta m = \rho V \frac{(T_1 - T_2)}{T_1},$$

где ρV – масса ртути, помещающейся в объеме V; ρ – плотность ртути.

$$[\Delta m] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^3} \cdot \frac{\text{К}}{\text{К}} = \text{кг};$$

$$\Delta m = 13{,}6 \cdot 10^3 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{500 - 300}{500} = 54{,}4 \text{ кг}.$$

Ответ: Δm = 54,4 кг.

Задача 2.6

Определить: 1) число N молекул воды, занимающей при температуре t = 4 °С объем V = 1 мм^3; 2) массу m_1 молекул воды; 3) диаметр d молекулы воды, считая, что молекулы имеют форму шариков, соприкасающихся друг с другом.

Дано: t = 4 °С; V = 1 мм^3 = 10^{-9} м^3.

Найти: N; m_1; d.

Решение

1. Число N молекул, содержащихся в теле некоторой массы m, равно произведению постоянной Авогадро N_A на количество вещества:

$$N = \nu N_A.$$

Так как $\nu = \frac{m}{\mu}$, где μ – молярная масса, то

$$N = \frac{m}{M} N_A.$$

Выразив в этой формуле массу как произведение плотности ρ на объем V, получим

$$N = \frac{\rho V}{M} N_A,$$

где ρ – плотность воды.

Зная химическую формулу воды (H_2O), найдем молярную массу воды по формуле

$$M = M_r k,$$

где M_r – относительная молекулярная масса вещества; $k = 10^{-3}$ кг/моль;

$$M = M_r k = (2 \cdot 1 + 1 \cdot 16) \cdot 10^{-3} = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль};$$

$$[N] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{моль}}{\text{м}^3 \cdot \text{кг} \cdot \text{моль}} = 1;$$

$$N = \frac{10^{-3} \cdot 10^{-9}}{18 \cdot 10^{-3}} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} = 3{,}34 \cdot 10^{19} \text{ молекул.}$$

2. Массу одной молекулы воды найдем делением ее молярной массы на постоянную Авогадро:

$$m_1 = \frac{M}{N_A};$$

$$[m_1] = \frac{\text{кг} \cdot \text{моль}}{\text{моль}} = \text{ кг};$$

$$m_1 = \frac{18 \cdot 10^{-3}}{6{,}02 \cdot 10^{23}} = 299 \cdot 10^{-26} \text{кг}.$$

3. Будем считать, что молекулы плотно прилегают друг к другу, тогда на каждую молекулу диаметром d приходится объем (кубическая ячейка) $V_1 = d^3$.

Отсюда

$$d = \sqrt[3]{V_1}.$$

Объем V_1 найдем, разделив молярный объем V_m вещества на число молекул в моле, т.е. на постоянную Авогадро N_A:

$$V_1 = \frac{V_m}{N_A}.$$

Молярный объем равен отношению молярной массы к плотности вещества, т.е. $V_m = \frac{M}{\rho}$.

Поэтому можем записать, что

$$V_1 = \frac{M}{\rho N_A}.$$

Подставив полученное выражение V_1 в формулу для d, получим

$$d = \sqrt[3]{\frac{M}{\rho N_A}};$$

$$[d] = \left(\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{кг}}\right)^{1/3} = \text{м};$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{18 \cdot 10^{-3}}{10^{-3} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}} = 3{,}11 \cdot 10^{-10} \text{м}.$$

Ответ: $N = 3{,}34 \cdot 10^{19}$ молекул; $m_1 = 2{,}99 \cdot 10^{-26}$ кг; $d = 3{,}11 \cdot 10^{-10}$ м.

Задача 2.7

В оболочке сферического аэростата находится газ объемом $V_1 = 1000$ м^3, заполняющий оболочку лишь частично. На сколько увеличится подъемная сила аэростата, если газ в нем нагреть от $T_1 = 273$ К до $T_2 = 300$ К? Давление газа в оболочке и в окружающей среде постоянно и равно нормальному атмосферному давлению.

Дано: $V_1 = 1000$ м^3; $T_1 = 273$ К; $T_2 = 300$ К; $P_1 = 10^5$ Па.

Найти: ΔF.

Решение. Подъемная сила, действующая на аэростат, в начальном состоянии

$$F_1 = F_{A1} - mg,$$

где $F_{A1} = \rho_1 V_1 g$ – сила Архимеда; mg – сила тяжести.

Плотность воздуха при нормальных условиях $\rho_1 = 1{,}29$ кг/м^3.

Таким образом,

$$F_1 = \rho_1 V_1 g - mg.$$

Подъемная сила, действующая на шар после нагревания воздуха,

$$F_2 = F_{A2} - mg = \rho_1 V_2 g - mg,$$

где V_2 – объем газа в оболочке после нагревания.

При изобарическом нагревании газа, применяя закон Гей-Люссака, получим

$$V_2 = \frac{T_2}{T_1} V_1,$$

поэтому

$$\Delta F = F_2 - F_1 = F_{A2} - mg - F_{A1} + mg = \rho_1 g (V_2 - V_1) = \rho_1 V_1 g \frac{T_2 - T_1}{T_1};$$

$$[\Delta F] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м}^3 \cdot \frac{\text{К}}{\text{К}} = \text{Н};$$

$$\Delta F = 1{,}29 \cdot 9{,}81 \cdot 10^3 \cdot \frac{300 - 273}{273} = 1{,}28 \cdot 10^3 \text{ Н} = 1{,}28 \text{ кН}.$$

Ответ: $\Delta F = 1{,}28$ кН.

Задача 2.8

Два баллона емкостью $V_1 = 2$ л и $V_2 = 6$ л, в которых находятся различные газы, соединены трубкой с краном. Давление газа в первом баллоне $P_1 = 0{,}2$ МПа, а во втором $P_2 = 0{,}12$ МПа. Температура газов одинакова. Найти общее давление P в баллонах и парциальные давления P'_1 и P'_2 газов после открытия крана.

Дано: $V_1 = 2\cdot10^{-3}$ м^3; $V_2 = 6\cdot10^{-3}$ м^3; $P_1 = 2\cdot10^5$ Па; $P_2 = 12\cdot10^4$ Па.

Найти: P; P'_1; P'_2.

Решение. Запишем для каждого из газов, находящихся в баллонах, уравнение Менделеева – Клапейрона:

$$P_1V_1 = \nu_1RT; \tag{1}$$

$$P_2V_2 = \nu_2RT, \tag{2}$$

где ν_1 и ν_2 – количество вещества; R – универсальная газовая постоянная, T – температура.

После открытия крана каждый из газов занимает объем $V = V_1 + V_2$ и находится под своим парциальным давлением. Поэтому для каждого газа снова можно записать уравнение Менделеева – Клапейрона:

$$P'_1(V_1 + V_2) = \nu_1RT; \tag{3}$$

$$P'_2(V_1 + V_2) = \nu_2RT. \tag{4}$$

Из уравнений (1) – (4) запишем:

$$P'_1(V_1 + V_2) = P_1V_1; \tag{5}$$

$$P'_2(V_1 + V_2) = P_1V_1. \tag{6}$$

Парциальные давления газов найдем из уравнений (5), (6):

$$P'_1 = P_1\frac{V_1}{V_1+V_2};$$

$$P'_2 = P_2\frac{V_2}{V_1+V_2};$$

$$[P'] = \frac{\text{Па}\cdot\text{м}^3}{\text{м}^3} = \text{Па};$$

$$P'_1 = 2\cdot10^5\cdot\frac{2\cdot10^{-3}}{2\cdot10^{-3}+6\cdot10^{-3}} = 5\cdot10^4\ \text{Па};$$

$$P'_2 = 12\cdot10^4\cdot\frac{6\cdot10^{-3}}{2\cdot10^{-3}+6\cdot10^{-3}} = 8\cdot10^4\ \text{Па}.$$

Согласно закону Дальтона давление P смеси газов равно:

$$P = P'_1 + P'_2 = \frac{P_1V_1 + P_2V_2}{V_1+V_2};$$

$$P = \frac{2\cdot10^5\cdot2\cdot10^{-3}+6\cdot10^{-3}\cdot12\cdot10^4}{2\cdot10^{-3}+6\cdot10^{-3}} = 1{,}3\cdot10^5\ \text{Па}.$$

Ответ: $P'_1 = 5\cdot10^4$ Па; $P'_2 = 8\cdot10^4$ Па; $P = 1{,}3\cdot10^5$ Па.

Задача 2.9

В сосуде находится смесь водорода и кислорода, причем их массовые доли равны соответственно: $\omega_1 = 2/7$ и $\omega_2 = 5/7$. Найти плотность ρ смеси газов, если давление смеси $P = 50$ кПа, а температура $T = 273$ К.

Дано: $\omega_1 = 2/7$; $\omega_2 = 5/7$; $M_1 = 2\cdot10^{-3}\frac{\text{кг}}{\text{моль}}$; $M_2 = 32\cdot10^{-3}\frac{\text{кг}}{\text{моль}}$; $P = 5\cdot10^4$ Па; $T = 273$ К.

Найти: ρ.

Решение. Из уравнения Менделеева – Клапейрона $pV = \frac{m}{M}RT$, зная массовые доли газов, найдем массы водорода и кислорода:

$$m_1 = \frac{P_1VM_1}{RT}, \quad m_2 = \frac{P_2VM_2}{RT},$$

где P_1, P_2 – парциальные давления водорода и кислорода.

Используя полученные формулы, запишем:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{P_2M_2}{P_1M_1}. \qquad (1)$$

Согласно закону Дальтона давление

$$P = P_1 + P_2. \qquad (2)$$

Из выражения (2) найдем P_2 и подставим в (1):

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{(P - P_1)M_2}{P_1 M_1},$$

откуда

$$P_1 = \frac{PM_2}{\frac{\omega_2}{\omega_1}M_1 + M_2}. \qquad (3)$$

Тогда

$$P_2 = P - P_1 = \frac{P\frac{\omega_2}{\omega_1}M_1}{\frac{\omega_2}{\omega_1}M_1 + M_2}. \qquad (4)$$

Согласно уравнению Менделеева – Клапейрона плотность смеси

$$\rho = \frac{PM}{RT}. \qquad (5)$$

Тогда из уравнений (2) – (5) запишем:

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 = \frac{P_1 M_1}{RT} + \frac{P_2 M_2}{RT} = \left(\frac{PM_2 M_1}{\frac{\omega_2}{\omega_1}M_1 + M_2} + \frac{P\frac{\omega_2}{\omega_1}M_1 M_2}{\frac{\omega_2}{\omega_1}M_1 + M_2} \right) / RT = \frac{PM_2 M_1\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} + 1\right)}{RT\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}M_1 + M_2\right)};$$

$$[\rho] = \frac{\text{Па} \cdot \text{кг} \cdot \text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{моль} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{кг}} = \frac{\text{Па} \cdot \text{кг}}{\text{Дж}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

$$\rho = \frac{5 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 32 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{5}{2} + 1\right)}{8{,}31 \cdot 273\left(\frac{5}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-3} + 32 \cdot 10^{-3}\right)} = 0{,}13\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Ответ: $\rho = 0{,}13\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Задача 2.10

Найти массу водорода m_1 и гелия m_2 в смеси, находящийся в баллоне объемом V = 20 л при температуре 300 К и давлении P = 800 кПа, если общая масса смеси m = 20 г.

Дано: $M_1 = 2{\cdot}10^{-3}\ \dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$; $M_2 = 4{\cdot}10^{-3}\ \dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$; $P = 8{\cdot}10^5$ Па; $T = 300$ К; $V = 2{\cdot}10^{-2}\text{м}^3$; $m = 2{\cdot}10^{-2}$ кг.

Найти: m_1, m_2.

Решение. По закону Дальтона давление смеси

$$P = P_1 + P_2,$$

где P_1, P_2 – парциальные давления водорода и гелия соответственно.

Используя уравнение Менделеева – Клапейрона, запишем:

$$P_1V = \frac{m_1}{M_1}RT; \quad P_2V = \frac{m_2}{M_2}RT.$$

Просуммировав эти уравнения, получим

$$PV = (P_1 + P_2)V = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)RT;$$

$$\begin{cases} \dfrac{m_1}{M_1} + \dfrac{m_2}{M_2} = \dfrac{PV}{RT}; \\ m_1 + m_2 = m. \end{cases}$$

Имеем систему уравнений с двумя неизвестными, решая которую, найдем массу:

$$m_1 = \frac{M_1 M_2}{M_2 - M_1}\left(\frac{PV}{RT} - \frac{m}{M_2}\right);$$

$$[m] = \frac{\text{кг} \cdot \text{кг} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{моль} \cdot \text{кг}}\left(\frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}{\text{Дж} \cdot \text{К}} - \frac{\text{кг} \cdot \text{моль}}{\text{моль}}\right) =$$

$$= \frac{\text{кг}}{\text{моль}}\left(\frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{моль}}{\text{м}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{м}} - \text{моль}\right) = \frac{\text{кг} \cdot \text{моль}}{\text{моль}} = \text{кг};$$

$$m_1 = \frac{2\cdot10^{-3}\cdot4\cdot10^{-3}}{4\cdot10^{-3}-2\cdot10^{-3}}\left(\frac{2\cdot10^{-2}\cdot8\cdot10^{5}}{8{,}31\cdot300}-\frac{2\cdot10^{-2}}{4\cdot10^{-3}}\right)=5{,}7\cdot10^{-3}\text{кг};$$

$$m_2 = m - m_1;$$

$$m_2 = 2\cdot10^{-2}-5{,}7\cdot10^{-3}=14{,}3\cdot10^{-3}\text{кг}.$$

Ответ: $m_1 = 5{,}7\cdot10^{-3}$кг; $m_2 = 14{,}3\cdot10^{-3}$кг.

Задача 2.11

В баллоне объемом $V = 10$ л находится гелий под давлением $P_1 = 1$ МПа при температуре $T_1 = 300$ К. После того, как был израсходован гелий массой $m = 10$ г, температура в баллоне понизилась до $T_2 = 290$ К. Определить давление P_2 гелия, оставшегося в баллоне.

Дано: $V = 10^{-2}$ м^3; $P_1 = 10^6$ Па; $T_1 = 300$ К; $m = 10^{-2}$ кг; $T_2 = 290$ К.

Найти: P_2.

Решение. Воспользуемся уравнением Менделеева – Клапейрона, применив его дважды к начальному и конечному состояниям газа:

$$P_1V = \frac{m_1}{M}RT, \quad P_2V = \frac{m_2}{M}RT,$$

где m_1 и m_2 – массы гелия в начальном и конечном состояниях.

Выразим массы m_1 и m_2 гелия из этих уравнений:

$$m_1 = \frac{P_1MV}{RT_1}; \quad m_2 = \frac{P_2MV}{RT_2}.$$

Вычитая из выражения m_1 выражение m_2, получаем:

$$m = m_1 - m_2 = \frac{P_1MV}{RT_1} - \frac{P_2MV}{RT_2}.$$

Отсюда искомое давление

$$P_2 = \frac{RT_2}{MV}\left(\frac{P_1MV}{RT_1} - m\right) = \frac{T_2}{T_1}P_1 - \frac{m}{M}\frac{RT_2}{V}.$$

$$[P_2] = \frac{\text{К}}{\text{К}}\text{Па} - \frac{\text{кг}\cdot\text{моль}}{\text{кг}} \cdot \frac{\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{К}\cdot\text{моль}\cdot\text{м}^3} = \text{Па} - \frac{\text{кг}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}\cdot\text{моль}}{\text{кг}\cdot\text{К}\cdot\text{моль}\cdot\text{м}^3} = \text{Па} - \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} =$$

$$= \text{Па} - \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{м}\cdot\text{м}^2} = \text{Па} - \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па} - \text{Па} = \text{Па}.$$

Учитывая, что молярная масса гелия $M = 4{\cdot}10^{-3}$ кг/моль, получим

$$P_2 = \left(\frac{290}{300}\cdot 10^6 - \frac{10^{-2}}{4\cdot 10^{-3}}\cdot\frac{8{,}31\cdot 290}{10^{-2}}\right) = 3{,}64\cdot 10^5\,\text{Па} = 364\,\text{кПа}.$$

Ответ: $P_2 = 364$ кПа.

Задача 2.12

Какое количество Δm кислорода выпустили из баллона емкостью 10 л, если при этом показания манометра на баллоне изменились от $P_1 = 1{,}4$ МПа до $P_2 = 0{,}7$ МПа, а температура изменилась от $t_1 = 27$ °С до $t_2 = 7$ °С?

Дано: $V = 10^{-2}$ м^3; $P_1 = 1{,}4{\cdot}10^6$ Па; $P_2 = 0{,}7{\cdot}10^6$ Па; $T_1 = 300$ К; $T_2 = 280$ К; $M = 32{\cdot}10^{-3}\,\frac{\text{кг}}{\text{моль}}$; $R = 8{,}31\,\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$.

Найти: Δm.

Решение. Масса выпущенного газа

$$\Delta m = m_1 - m_2,$$

где m_1 – первоначальная масса; m_2 – масса оставшегося после выпуска газа.

Тогда уравнение газового состояния для каждой массы:

$$P_1V = \frac{m_1}{M}RT, \quad P_2V = \frac{m_2}{M}RT.$$

Выразив массы m_1 и m_2, получим:

$$\Delta m = \frac{P_1MV}{RT_1} - \frac{P_2MV}{RT_2};$$

$$\Delta m = \frac{MV}{R}\left(\frac{P_1}{T_1} - \frac{P_2}{T_2}\right);$$

$$[\Delta m] = \frac{\text{м}^3 \cdot \text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}}{\text{моль} \cdot \text{Дж}} \cdot \frac{\text{Па}}{\text{К}} = \frac{\text{м}^3 \cdot \text{кг} \cdot \text{Па} \cdot \text{К}}{\text{Дж} \cdot \text{К}} = \frac{\text{м}^3 \cdot \text{кг} \cdot \text{Н}}{\text{м}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{м}} = \text{кг};$$

$$\Delta m = \frac{10^{-2} \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{8{,}31}\left(\frac{1{,}4 \cdot 10^6}{300} - \frac{0{,}7 \cdot 10^6}{280}\right) = \frac{32}{8{,}31}\left(\frac{1{,}4}{30} - \frac{0{,}7}{28}\right) = 0{,}085 \text{ кг} .$$

Ответ: $\Delta m =$ 0,085кг = $85 \cdot 10^{-3}$ кг.

Задача 2.13

Плотность смеси азота и водорода при температуре t = 47 °С и давлении P = $2 \cdot 10^5$ Па равна ρ = 0,3 $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Найти концентрации молекул азота (n_1) и водорода (n_2).

Дано: P = $2 \cdot 10^5$ Па; T = 320 К; ρ = 0,3 $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; M_1 = $28 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$; $M_2 = 2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$.

Найти: n_1; n_2.

Решение. Концентрацию однородного по составу газа можно найти из уравнения

$$P = nkT.$$

Для азота можно записать:

$$P_1 = n_1 kT.$$

Для водорода

$$P_2 = n_2 kT.$$

По закону Дальтона давление смеси равно сумме парциальных давлений:

$$P = P_1 + P_2 = (n_1 + n_2)kT.$$

Масса одной молекулы газа

$$m_0 = \frac{M}{N_A},$$

где M – молярная масса газа, N_A – число Авогадро.

Количество молекул

$$N = nV,$$

где n – концентрация; V – объем сосуда.

Умножив массу одной молекулы на число молекул, найдем массу газа:

$$m = \frac{M}{N_A} nV.$$

Следовательно, для азота можно записать:

$$m_1 = \frac{M_1}{N_A} n_1 V.$$

Для водорода

$$m_2 = \frac{M_2}{N_A} n_2 V.$$

Масса смеси будет равно сумме

$$m_1 + m_2 = \frac{V}{N_A}\left(M_1 n_1 + M_2 n_2\right).$$

Плотность смеси

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V} = \frac{M_1 n_1 + M_2 n_2}{N_A};$$

$$\rho N_A = M_1 n_1 + M_2 n_2.$$

Найдем из уравнения $\frac{m}{kT} = n_1 + n_2$

$$n_2 = \frac{m}{kT} - n_1.$$

Подставим в найденное уравнение:

$$\rho N_A = M_1 n_1 + M_2\left(\frac{P}{kT} - n_1\right);$$

$$\rho N_A = M_1 n_1 + M_2 \frac{P}{kT} - M_2 n_1;$$

$$n_1 = \frac{\rho N_A - M_2 \frac{P_2}{kT}}{M_1 - M_2} = \frac{\rho RT - M_2 P}{\left(M_1 - M_2\right) kT};$$

$$[n]=\frac{\dfrac{\text{кг}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{м}^3\cdot\text{моль}\cdot\text{К}}-\dfrac{\text{кг}\cdot\text{Па}}{\text{моль}}}{\dfrac{\text{кг}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{моль}\cdot\text{К}}}=\frac{\dfrac{\text{кг}\cdot\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{м}^3\cdot\text{моль}}-\dfrac{\text{кг}\cdot\text{Н}}{\text{моль}\cdot\text{м}^2}}{\dfrac{\text{кг}\cdot\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{моль}}}=\frac{\text{кг}\cdot\text{Н}\cdot\text{моль}}{\text{м}^2\cdot\text{моль}\cdot\text{кг}\cdot\text{Н}\cdot\text{м}}=\text{м}^{-3};$$

$$n_1=\frac{0,3\cdot 8,3\cdot 320-2\cdot 10^{-3}\cdot 2\cdot 10^5}{(28-2)\cdot 10^{-3}\cdot 1,38\cdot 10^{-23}\cdot 320}=\frac{396,8\cdot 10^{26}}{11,48\cdot 10^3}=3,46\cdot 10^{24}\ \text{м}^{-3};$$

$$n_2=\frac{\rho RT-\mu_1 P}{(\mu_2-\mu_1)kT};$$

$$n_2=\frac{0,3\cdot 8,3\cdot 320-28\cdot 10^{-3}\cdot 2\cdot 10^5}{-26\cdot 10^{-3}\cdot 1,38\cdot 10^{-23}\cdot 320}=\frac{480,32\cdot 10^{26}}{26\cdot 1,38\cdot 320}=4,2\cdot 10^{25}\ \text{м}^{-3}.$$

Ответ: $n_1=3,46\cdot 10^{24}$ м$^{-3}$; $n_2=4,2\cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

Задача 2.14

В баллоне объемом $V = 0,4$ м^3 находится кислород массой $m_1 = 1,2$ кг и $m_2 = 0,5$ кг воды. Баллон нагревается до температуры $t = 300$ °C, при этом вся вода превращается в пар. Определить давление в баллоне после нагревания.

Дано: $m_1 = 1,2$ кг; $m_2 = 0,5$ кг; $M_1 = 32\cdot 10^{-3}\ \dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$; $M_2 = 18\cdot 10^{-3}\ \dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$; $V = 0,4$ м^3; $T = 573$ К.

Найти: P.

Решение. Согласно закону Дальтона давление смеси

$$P = P_1 + P_2,$$

где P_1, P_2 – парциальные давления кислорода и водяного пара соответственно.

Запишем уравнение Менделеева – Клапейрона для каждой компоненты газа:

$$P_1 V=\frac{m_1}{M_1}RT,$$

откуда

$$P_1 = \frac{m_1}{M_1 V} RT.$$

Аналогично

$$P_2 V = \frac{m_2}{M_2} RT, \quad \text{откуда} \quad P_2 = \frac{m_2}{M_2 V} RT.$$

Тогда давление смеси

$$P = P_1 + P_2 = \frac{RT}{V}\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right);$$

$$[P] = \frac{\text{Дж}\cdot\text{К}\cdot\text{кг}\cdot\text{моль}}{\text{К}\cdot\text{моль}\cdot\text{м}^3\cdot\text{кг}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па};$$

$$P = \frac{8,31\cdot 573}{0,4}\left(\frac{1,2}{32\cdot 10^{-3}} + \frac{0,5}{18\cdot 10^{-3}}\right) = 7,77\cdot 10^5\,\text{Па} = 777\ \text{кПа}.$$

Ответ: P = 777 кПа.

Задача 2.15

Молекула кислорода, летящая со скоростью υ = 500 м/с, упруго ударяется о стенку по нормали к ней. Найти импульс, полученный стенкой.

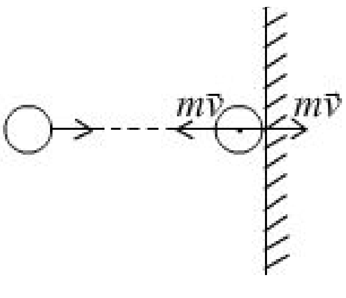
Дано: υ = 500 м/с; $M = 32\cdot 10^{-3}\,\frac{\text{кг}}{\text{моль}}$.

Найти: P.

Решение. При нормальном упругом ударе молекулы о стенку ее скорость по модулю не меняется, но изменяется на противоположное направление вектора скорости (см. рисунок).

Тогда изменение импульса молекулы

$$\Delta P = -m\upsilon - m\upsilon = -2m\upsilon,$$



где $m = \frac{\mu}{N_A}$ – масса одной молекулы; N_A – число Авогадро.

Таким образом,

$$\Delta P = -2\upsilon \frac{M}{N_A}.$$

$$[\Delta P]=\frac{\text{м}\cdot\text{кг}\cdot\text{моль}}{\text{с}\cdot\text{моль}}=\frac{\text{м}\cdot\text{кг}}{\text{с}};$$

$$\Delta P=-2\cdot 500\cdot\frac{32\cdot 10^{-3}}{6{,}02\cdot 10^{23}}=-5{,}3^{-23}\,\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}.$$

Такой же по модулю импульс получит стенка, т.е. P = ΔP.

Ответ: P = ΔP = $-5{,}3\cdot 10^{-23}\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 2.16

В баллоне вместимостью V = 50 л находится азот, концентрация молекул которого $n = 9{,}5\cdot 10^{23}$ м$^{-3}$. Найти массу газа.

Дано: $V = 5\cdot 10^{-2}$ м^3; $n = 9{,}5\cdot 10^{23}$ м$^{-3}$; $M = 28\cdot 10^{-3}\,\frac{\text{кг}}{\text{моль}}$.

Найти: m.

Решение. Число молей газа

$$\nu=\frac{N}{N_A},$$

где N – число молекул газа; N_A – постоянная Авогадро.

С другой стороны, число молекул газа

$$N = nV,$$

тогда

$$\nu=\frac{nV}{N_A}. \tag{1}$$

Поскольку число молекул $\nu=\frac{m}{M}$, то, используя выражение (1), находим массу газа:

$$m=\frac{nV}{N_A};$$

$$[m]=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^3\cdot\text{моль}}{\text{моль}\cdot\text{м}^3}=\text{кг};$$

$$m = 28 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{9,5 \cdot 10^{23} \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{6,02 \cdot 10^{23}} = 221 \cdot 10^{-3} \text{кг.}$$

Ответ: $m = 221 \cdot 10^{-3}$ кг.

Задача 2.17

Найти внутреннюю энергию U массы $m = 50$ г азота при температуре $t = 20$ °С. Какая часть этой энергии приходится на долю поступательного движения молекул, и какая часть – на долю вращательного движения?

Дано: $T = 293$ К; $m = 50 \cdot 10^{-3}$ кг; $M = 28 \cdot 10^{-3} \ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$.

Найти: U; $U_п$; $U_в$.

Решение. Внутренняя энергия идеального газа определяется по формуле

$$U = \frac{i}{2} \frac{m}{M} RT, \qquad (1)$$

где i – число степеней свободы.

Для двухатомного газа $i = 5$, причем $i = 3$ приходится на долю поступательного движения и $i = 2$ – на долю вращательного движения.

Подставляя в формулу (1) числовые данные и соответствующие значения числа степеней свободы, получим:

$$[U] = \frac{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}} = \text{Дж};$$

$$U = \frac{5}{2} \cdot \frac{50 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 \cdot 293 = 10,8 \cdot 10^{3} \text{Дж} = 10,8 \text{ кДж};$$

$$U_п = \frac{3}{2} \cdot \frac{50 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 \cdot 293 = 6,5 \cdot 10^{3} \text{Дж} = 6,5 \text{ кДж};$$

$$U_в = \frac{2}{2} \cdot \frac{50 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 \cdot 293 = 4,3 \cdot 10^{3} \text{Дж} = 4,3 \text{ кДж};$$

Ответ: $U = 10,8$ кДж; $U_п = 6,5$ кДж; $U_в = 4,3$ кДж.

Задача 2.18

Найти среднюю кинетическую энергию $\left\langle E_{K1вр} \right\rangle$ вращательного движения одной молекулы кислорода при температуре T = 286 К, а также кинетическую энергию $E_{K\,вр}$ вращательного движения всех молекул этого газа, если его масса m = 4 г.

Дано: T = 286 К; m = 4 г.

Найти: $\left\langle E_{K1вр} \right\rangle; E_{K\,вр}$.

Решение. Известно, что на каждую степень свободы молекул газа приходится одинаковая средняя энергия $\frac{1}{2}kT$. Так как молекула кислорода двухатомная, а, следовательно, обладает двумя вращательными степенями свободы, то средняя кинетическая энергия вращательного движения молекулы кислорода

$$\left\langle E_{K1вр} \right\rangle = 2\frac{1}{2}kT = kT;$$

$$\left[\left\langle E_{K1вр} \right\rangle\right] = \frac{\text{Дж}}{\text{К}} \cdot \text{К} = \text{Дж};$$

$$\left\langle E_{K1вр} \right\rangle = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 286 = 3{,}95 \cdot 10^{-21}\ \text{Дж}.$$

Средняя кинетическая энергия вращательного движения всех молекул газа выражается соотношением

$$E_{K\,вр} = N\left\langle E_{K1вр} \right\rangle,$$

где число молекул газа $N = \frac{m}{M}N_A$.

В результате

$$E_{K\,вр} = \frac{m}{M}N_A\left\langle E_{K1вр} \right\rangle;$$

$$\left[E_{K\,вр}\right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{кг}} \cdot \text{Дж} = \text{Дж};$$

$$E_{K\,вр} = 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot 3{,}95 \cdot 10^{-21} = 297\ \text{Дж}.$$

Ответ: $\left\langle E_{K1вр} \right\rangle$ = $3{,}95 \cdot 10^{-21}$ Дж; $E_{K\,вр}$ = 297 Дж.

Задача 2.19

Смесь азота и гелия при температуре t = 27 °С находится под давлением $P = 1{,}3 \cdot 10^2$ Па. Масса азота составляет 70 % от общей массы смеси. Найти концентрацию молекул каждого из газов.

Дано: T = 300 К; $P = 1{,}3 \cdot 10^2$ Па; c_1 = 70 %.

Найти: n_1; n_2

Решение. Зависимость давления газа от концентрации молекул и температуры выражается уравнением

$$P = nkT\,, \tag{1}$$

где n – концентрация молекул; $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \dfrac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – постоянная Больцмана; $T = t + 273$ °С – термодинамическая температура.

Давление идеального газа (при данном давлении газ можно считать идеальным) не зависит от его природы и, как видно из уравнения (1), однозначно определяется его температурой и концентрацией, т.е. отношением числа частиц к занимаемому объему.

Уравнение (1) позволяет найти концентрацию молекул смеси и по известному процентному содержанию – концентрацию каждого газа.

Процентное содержание газов задано по массе, это значит, что масса каждого из них

$$m_1 = c_1 m\,; \qquad m_2 = c_2 m\,, \tag{2}$$

где m – масса смеси; c_1 и c_2 – процентное содержание соответственно азота и гелия.

С другой стороны, масса каждого из газов

$$m_1 = \frac{M_1}{N_A} n_1 V; \quad m_2 = \frac{M_2}{N_A} n_2 V\,, \tag{3}$$

где M – молярная масса газа; N_A – постоянная Авогадро; ($\dfrac{M_i}{N_A}$ – масса молекулы); V – объем газа.

Из (1) концентрация смеси

$$n = \frac{P}{kT}\,.$$

Приравняв правые части уравнений (2) и (3), получим:

$$c_1 m = \frac{M_1}{N_A} n_1 V;$$

$$c_2 m = \frac{M_2}{N_A} n_2 V,$$

откуда

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{c_1 M_2}{c_2 M_1} = \frac{1}{3}.$$

Поскольку $n_1 + n_2 = n$, то

$$n_1 = \frac{1}{4}\frac{P}{kT};$$

$$n_2 = \frac{3}{4}\frac{P}{kT};$$

$$[n] = \frac{\text{Па}\cdot\text{К}}{\text{Дж}\cdot\text{К}} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2\cdot\text{Н}\cdot\text{м}} = \text{м}^{-3};$$

$$n_1 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1{,}3\cdot 10^2}{1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 300} = 0{,}8\cdot 10^{23}\ \text{м}^{-3};$$

$$n_2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1{,}3\cdot 10^2}{1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 300} = 2{,}4\cdot 10^{23}\ \text{м}^{-3}\ .$$

Ответ: $n_1 = 0{,}8\cdot 10^{23}$ м$^{-3}$, $n_2 = 2{,}4\cdot 10^{23}$ м$^{-3}$.

Задача 2.20

В баллоне вместимостью V = 6,9 л находится азот массой m = 2,3 г. При нагревании часть молекул диссоциировали на атомы. Степень диссоциации α = 0,2.

Определить: 1) общее число N_1 молекул и концентрацию n_1 молекул азота до нагревания; 2) концентрацию n_2 молекул и n_3 атомов азота после нагревания.

Дано: $V = 6{,}9\cdot 10^{-3}$ м^3; $m = 2{,}3\cdot 10^{-3}$ кг; α = 0,2.

Найти: N_1; n_1; n_2; n_3.

Решение. По определению концентрация частиц газа есть отношение числа частиц к вместимости сосуда, занимаемого газом:

$$n = \frac{N}{V}. \qquad (1)$$

1. Число N_1 молекул газа до нагревания найдем из соотношения

$$N_1 = \nu N_A = \frac{m}{M} N_A; \qquad (2)$$

$$[N_1] = \frac{\text{кг} \cdot \text{моль}}{\text{кг} \cdot \text{моль}} = 1;$$

$$N_1 = \frac{2,3 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} = 4,94 \cdot 10^{23} \text{ молекул.}$$

Концентрацию n_1 найдем по (1):

$$n_1 = \frac{N_1}{V};$$

$$n_1 = \frac{4,94 \cdot 10^{23}}{6,9 \cdot 10^{-3}} = 7,16 \cdot 10^{25} \text{м}^{-3}.$$

2. Концентрацию молекул после нагревания найдем из соотношения

$$n_2 = \frac{N_2}{V} = n_1 = \frac{N_1(1-\alpha)}{V}, \qquad (3)$$

где N_2 – число молекул, не распавшихся на атомы;

$$n_2 = \frac{4,94 \cdot 10^{23}(1-0,2)}{6,9 \cdot 10^{-3}} = 5,73 \cdot 10^{25} \text{м}^{-3}.$$

Концентрация атомов после нагревания азота

$$n_3 = \frac{2N_1\alpha}{V}. \qquad (4)$$

Число 2 в формуле (4) выражает тот факт, что каждая молекула после распада дает два атома;

$$n_3 = \frac{2 \cdot 4,94 \cdot 10^{23} \cdot 0,2}{6,9 \cdot 10^{-3}} = 2,86 \cdot 10^{25} \text{м}^{-3}.$$

Ответ: N_1 = 4,94·10^{23}молекул; n_1 = 7,16·10^{25} м$^{-3}$; n_2 = 5,73·10^{25} м$^{-3}$; n_3 = 2,86·10^{25} м$^{-3}$.

Задача 2.21

В колбе вместимостью V = 0,5 л находится кислород при нормальных условиях. Определить среднюю энергию $\langle E_n \rangle$ поступательного движения всех молекул, содержащихся в колбе.

Дано: $V = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ м^3; $V_m = 22{,}4 \cdot 10^{-3} \dfrac{\text{м}^3}{\text{моль}}$; T = 273 К.

Найти: $\langle E_n \rangle$.

Решение. Средняя энергия $\langle E_n \rangle$ поступательного движения всех молекул может быть выражена соотношением

$$\langle E_n \rangle = N \langle E_{n1} \rangle, \tag{1}$$

где $\langle E_{n1} \rangle$ – средняя энергия поступательного движения одной молекулы; N – число всех молекул, содержащихся в колбе.

Как известно,

$$\langle E_{n1} \rangle = \frac{3}{2} kT, \tag{2}$$

где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – постоянная Больцмана; T – термодинамическая температура.

Число молекул, содержащихся в колбе, найдем по формуле

$$N = \nu N_A, \tag{3}$$

где ν – количество вещества кислорода; N_A – постоянная Авогадро.

Так как по условию задачи кислород в колбе находится при нормальных условиях, то количество вещества кислорода в колбе выражается соотношением

$$\nu = \frac{V}{V_m}. \tag{4}$$

Подставив выражение ν по (4) в (3), получим

$$N = \frac{V}{V_m} N_A. \tag{5}$$

С учетом (2) и (5) выражение (1) энергии поступательного движения молекул примет вид

$$\langle E_n \rangle = \frac{3kTVN_A}{2V_m};$$

$$\left[\langle E_n\rangle\right] = \frac{\text{Дж}\cdot\text{К}\cdot\text{м}^3\cdot\text{моль}}{\text{К}\cdot\text{м}^3\cdot\text{моль}} = \text{ Дж};$$

$$\langle E_n\rangle = \frac{3\cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 273\cdot 0{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 6{,}02\cdot 10^{23}}{2\cdot 22{,}4\cdot 10^{-3}} = 75{,}9\text{ Дж}.$$

Ответ: $\langle E_n\rangle$ = 75,9 Дж.

Задача 2.22

Какой объем занимает смесь 1 кг кислорода и 2 кг гелия при нормальных условиях? Какова молярная масса смеси?

Дано: m_1 = 1 кг; m_2 = 2 кг; M_1 = $32\cdot 10^{-3}\,\dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$; M_2 = $4\cdot 10^{-3}\,\dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$; $P = 1{,}01\cdot 10^5$ Па; T = 273 К.

Найти: V; $\mu_{см}$.

Решение. Обозначим через m_1 и M_1 массу и молярную массу кислорода, через m_2 и M_2 – массу и молярную массу гелия.

Для смеси газов справедлив закон Дальтона:

$$P = P_1 + P_2,$$

где P_1, P_2 – парциальные давления, определяемые из уравнения Менделеева – Клапейрона:

$$P_1 = \frac{m_1}{M_1 V} RT;$$

$$P_2 = \frac{m_2}{M_2 V} RT,$$

где T – температура; V – объем сосуда, в котором смешаны газы; R – молярная газовая постоянная.

Тогда

$$P = \frac{RT}{V}\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right);$$

$$V=\frac{RT}{P}\left(\frac{m_1}{M_1}+\frac{m_2}{M_2}\right).$$

Молярная масса смеси определяется по уравнению Менделеева – Клапейрона:

$$PV=\frac{m_{см}}{M_{см}}RT=\left(\frac{m_1}{M_1}+\frac{m_2}{M_2}\right)RT,$$

поэтому

$$M_{см}=\frac{m_{см}}{\dfrac{m_1}{M_1}+\dfrac{m_2}{M_2}}=\frac{(m_1+m_2)M_1M_2}{m_1M_2+m_2M_1};$$

$$[V]=\left(\frac{\text{кг}\cdot\text{моль}}{\text{кг}}+\frac{\text{кг}\cdot\text{моль}}{\text{кг}}\right)\cdot\frac{\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{моль}\cdot\text{К}\cdot\text{Па}}=\frac{\text{моль}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{моль}\cdot\text{К}\cdot\text{Па}}=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{м}^2}{\text{м}}=\text{м}^3;$$

$$[M_{см}]=\frac{\text{кг}\cdot\text{кг}\cdot\text{кг}\cdot\text{моль}}{\text{моль}\cdot\text{моль}\cdot\text{кг}\cdot\text{кг}}=\frac{\text{кг}}{\text{моль}};$$

$$V=\left(\frac{1}{32}+\frac{2}{4}\right)\cdot\frac{8,31\cdot 273}{1,01\cdot 10^5}=12\ \text{м}^3\ ;$$

$$M_{см}=\frac{(1+2)\cdot 32\cdot 4}{1\cdot 4+2\cdot 32}=5,65\cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}.$$

Ответ: V = 12 м^3; $M_{см}=5,65\cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$.

Задача 2.23

Двухатомный газ занимает объем V = 100 см^3 при давлении P = 6 кПа и температуре t = 20 °C. Какое число молекул N содержится в газе и какой энергией теплового движения обладают эти молекулы?

Дано: T = 273 К; i = 5; $V = 10^{-4}$ м^3; P = 6000 Па.

Найти: N; U.

Решение. Из уравнения состояния идеального газа $PV = \nu RT$ найдем количество вещества

$$\nu = \frac{PV}{RT}.$$

Тогда число молекул, находящихся в объеме,

$$N = \nu N_A = \frac{PV}{RT} N_A;$$

$$[N] = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{моль} \cdot \text{К}}{\text{Дж} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{моль}}{\text{м} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{моль}} = 1;$$

$$N = \frac{6000 \cdot 10^{-4} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}{8{,}31 \cdot 293} = 1{,}510^{20}.$$

Внутренняя энергия

$$U = \frac{i}{2} \nu RT = \frac{i}{2} PV;$$

$$[U] = \text{Па} \cdot \text{м}^3 = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^2} = \text{ Дж};$$

$$U = \frac{5}{2} 6000 \cdot 10^{-4} = 1{,}5 \text{ Дж}.$$

Ответ: $N = 1{,}5 \cdot 10^{20}$; U = 1,5 Дж.

Задача 2.24

Найти энергию теплового движения молекул, содержащихся в двухатомном газе массой m = 2 кг, имеющем плотность ρ = 5 кг/м^3 и находящемся под давлением P = 100 кПа.

Дано: m = 2 кг; ρ = 5 кг/м^3; P = 10^5 Па.

Найти: U.

Решение. Внутренняя энергия идеального газа

$$U = \frac{i}{2}\frac{m}{M}RT,$$

где i = 5 для двухатомного газа.

Из уравнения состояния $PV = \frac{m}{M}RT$, $P = \frac{\rho}{M}RT$ найдем, что

$$\frac{RT}{M} = \frac{P}{\rho},$$

поэтому

$$U = \frac{i}{2}\frac{mP}{\rho};$$

$$[U] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Па} \cdot \text{м}^3}{\text{кг}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^2} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{ Дж};$$

$$U = \frac{5}{2} \cdot \frac{2 \cdot 10^5}{5} = 10^5 \text{ Дж.}$$

Ответ: U = 10^5 Дж.

Задача 2.25

Найти температуру T и среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул газа $\langle E_n \rangle$, имеющего концентрацию n = 10^{16} м$^{-3}$ и находящегося под давлением P = 0,5 мПа.

Дано: n = 10^{16} м$^{-3}$; P = $5 \cdot 10^{-4}$ Па.

Найти: $\langle E_n \rangle$; T.

Решение. Согласно уравнению состояния давление газа

$$P = nkT,$$

где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – постоянная Больцмана.

Отсюда температура

$$T = \frac{P}{nk};$$

$$[T] = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{К}}{\text{Дж}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{К}}{\text{м} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}^2} = \text{К};$$

$$T = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{10^{16} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}} = 3600\ \text{К}.$$

На основании уравнения МКТ $P = \frac{2}{3} n \langle E_к \rangle$ определим среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул:

$$\langle E_к \rangle = \frac{3}{2} \frac{P}{n};$$

$$[\langle E_к \rangle] = \text{Па} \cdot \text{м}^3 = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^2} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж};$$

$$\langle E_к \rangle = \frac{3}{2} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-4}}{10^{16}} = 7{,}5 \cdot 10^{-20}\ \text{Дж}.$$

Ответ: $T = 3600$ К; $\langle E_к \rangle = 7{,}5 \cdot 10^{-20}$ Дж.

Задача 2.26

Кислород массой $m = 10$ г находится под давлением 200 кПа при температуре 280 К. В результате изобарного расширения газ занял объем 9 л.

Определить: 1) объем газа V_1 до расширения; 2) температуру газа T_2 после расширения; 3) плотность газа ρ_2 после расширения.

Дано: $M = 32 \cdot 10^{-3} \dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$; $m = 10^{-2}$ кг; $P = 2 \cdot 10^5$ Па = const; $T_1 = 280$ К; $V_2 = 9 \cdot 10^{-3}$ м^3.

Найти: V_1; T_2; ρ_2.

Решение. Объем газа до расширения найдем согласно уравнению Менделеева – Клапейрона

$$pV_1 = \frac{m}{M} RT_1,$$

откуда

$$V_1 = \frac{mRT_1}{MP};$$

$$[V_1] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{кг} \cdot \text{Па}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Па}} = \frac{\text{м} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Н}} = \text{м}^3;$$

$$V_1 = \frac{10^{-2} \cdot 8{,}31 \cdot 280}{32 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^5} = 3{,}64 \cdot 10^{-3}\,\text{м}^3 = 3{,}64\ \text{л}.$$

Записав уравнение Менделеева – Клапейрона для конечного состояния газа $pV_2 = \dfrac{m}{M} RT_2$, найдем искомую температуру:

$$T_2 = \frac{M}{mR} pV_2;$$

$$[T] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Па} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{кг} \cdot \text{Дж}} = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{К}}{\text{Дж}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{К}}{\text{м} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}^2} = \text{К};$$

$$T_2 = \frac{32 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 9 \cdot 10^{-3}}{10^{-2} \cdot 8{,}31} = 693\ \text{К}.$$

Плотность газа после расширения

$$\rho_2 = \frac{m}{V_2};$$

$$[\rho] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

$$\rho_2 = \frac{10^{-2}}{9 \cdot 10^{-3}} = 1{,}11\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Ответ: V_1 = 3,64 л, T_2 = 693 К, ρ_2 = $1{,}11\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Задача 2.27

В баллоне вместимостью V = 5 л находится гелий под давлением P_1 = 3 МПа при температуре t_1 = 27 °С. После того, как из баллона был израсходован гелий массой m = 15 г, температура в баллоне понизилась до t_2 = 17 °С. Определить давление P_2 гелия, оставшегося в баллоне.

Дано: $V = 5 \cdot 10^{-3}$ м^3; $P_1 = 3 \cdot 10^6$ Па; T_1 = 300 К; $m = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ кг; T_2 = 290 К; $M = 4 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{кг}}{\text{моль}}$.

Найти: P_2.

Решение. Запишем уравнение Менделеева – Клапейрона для начального 1 и конечного 2 состояний газов:

$$P_1 V = \frac{m_1}{M} RT; \quad P_2 V = \frac{m_2}{M} RT,$$

где R = $8{,}31\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – молярная газовая постоянная; $M = 4 \cdot 10^{-3}\frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ – молярная масса.

Выразим из этих уравнений массы:

$$m_1 = \frac{P_1 M V}{R T_1}; \quad m_2 = \frac{P_2 M V}{R T_2};$$

тогда

$$m = m_1 - m_2 = \frac{P_1 M V}{R T_1} - \frac{P_2 M V}{R T_2}.$$

Отсюда выражение для искомого давления:

$$P_2 = P_1\frac{T_2}{T_1} - \frac{m}{M}\frac{RT_2}{V} = T_2\left(\frac{P_1}{T_1} - \frac{m}{M}\frac{R}{V}\right);$$

$$[P_2] = \frac{\text{К}}{\text{К}}\text{Па} - \frac{\text{кг}\cdot\text{моль}}{\text{кг}}\cdot\frac{\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{К}\cdot\text{моль}\cdot\text{м}^3} = \text{Па} - \frac{\text{кг}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}\cdot\text{моль}}{\text{кг}\cdot\text{К}\cdot\text{моль}\cdot\text{м}^3} =$$

$$= \text{Па} - \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} = \text{Па} - \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{м}\cdot\text{м}^2} = \text{Па} - \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па} - \text{Па} = \text{Па};$$

$$P_2 = \left(\frac{290}{300}\cdot 3\cdot 10^6 - \frac{1{,}5\cdot 10^{-2}}{4\cdot 10^{-3}}\cdot\frac{8{,}31\cdot 290}{5\cdot 10^{-3}}\right) = 1{,}09\cdot 10^6\,\text{Па} = 1{,}09\ \text{МПа}\ .$$

Ответ: P_2 = 1,09 МПа.

Задача 2.28

Давление в автомобильной шине объемом V = 0,3 м^3 равно P_0 = 1,5 атм. Шина накачивается насосом с емкостью хода поршня ΔV = 3·10^{-3} м^3 до давления P_N = 2 атм. Сколько ходов поршня N потребуется, если процесс накачки происходит достаточно медленно, так, что система сохраняет температуру окружающей среды. Атмосферное давление принять равным P_a = 1 атм.

Дано: V = 0,3 м^3; P_0 = 1,5 атм; ΔV = 3·10^{-3} м^3; P_N = 2 атм; P_a = 1 атм.

Найти: N.

Решение. Сначала из уравнения состояния определяем массу воздуха, перекачиваемую за один ход поршня в шину,

$$\Delta m = P_a\Delta V\frac{\mu}{RT_0},\ \Delta m = P_a\Delta V\frac{M}{RT_0},$$

где T_0 – температура окружающей среды.

Аналогично начальная масса воздуха в шине

$$m_0 = P_0 V \frac{M}{RT_0}.$$

После N ходов поршня масса воздуха в шине станет равной

$$m_N = m_0 + N\Delta m = \left(P_0 V + NP_a \Delta V\right)\frac{M}{RT_0},$$

а давление в ней определится из уравнения состояния

$$P_N V = \frac{m_N}{M_N} RT_0,$$

откуда

$$P_N = P_0 + NP_a \frac{\Delta V}{V}.$$

Из этого уравнения находим число ходов поршня N:

$$N = \frac{P_N - P_0}{P_a}\frac{V}{\Delta V}.$$

Учтем, что в данном случае нет необходимости переводить единицы измерения давления из атмосфер в паскали, поскольку в ответ входит только безразмерная комбинация давлений.

$$N = \frac{2-1,5}{1}\frac{0,3}{3\cdot 10^{-3}} = 50.$$

Отметим, что результат не зависит от температуры T_0.

Ответ: $N = 50$.

2.2. Элементы статистической физики

Основные формулы

Скорости молекул:

наиболее вероятная

$$\upsilon_в = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}};$$

средняя квадратичная

$$\langle \upsilon_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}};$$

средняя арифметическая

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}},$$

где m_0 – масса одной молекулы.

Распределение молекул по скоростям (распределение Максвелла):

$$dN = Nf(\upsilon)d\upsilon,$$

где $f(\upsilon)$ – функция распределения молекул газа по скоростям (доля молекул, модули скоростей которых находятся в единичном интервале скоростей).

Аналитическое выражение функции распределения:

$$f(\upsilon) = \frac{dN(\upsilon)}{Nd\upsilon} = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2}\upsilon^2 e^{-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}},$$

где m_0 – масса одной молекулы газа; k = 1,38·10^{-23} Дж/К – постоянная Больцмана; T – термодинамическая температура.

Закон распределения молекул по скоростям (Максвелла) в дифференциальной форме:

$$dN(u) = Nf(u)du = \frac{4}{\sqrt{\pi}}Ne^{-u^2}u^2du,$$

где $u = \frac{\upsilon}{\upsilon_в}$ – относительная скорость; υ – данная скорость; $\upsilon_в$ – наиболее вероятная скорость молекул; $f(u)$ – функция распределения; N – общее число молекул.

Для малых интервалов относительных скоростей $\Delta u << u$ или, поскольку $u = \dfrac{\upsilon}{\upsilon_в}$ и $\Delta u = \dfrac{\Delta\upsilon}{\upsilon_в}$, $\Delta\upsilon << \upsilon$, закон распределения молекул по скоростям справедлив в виде:

$$f(u) = \frac{\Delta N}{N\Delta u} = \frac{4}{\pi} N e^{-u^2} u^2,$$

и при решении задач на закон распределения молекул по скоростям удобно пользоваться таблицей, в которой даны значения функции распределения $f(u) = \dfrac{\Delta N}{N\Delta u} = \dfrac{4}{\pi} N e^{-u^2} u^2$ для различных u.

u	$f(u)$	u	$f(u)$	u	$f(u)$
0,1	0,022	0,8	0,761	1,5	0,535
0,2	0,087	0,9	0,813	1,6	0,447
0,3	0,185	1,0	0,830	1,7	0,362
0,4	0,308	1,1	0,814	1,8	0,286
0,5	0,439	1,2	0,770	2,0	0,165
0,6	0,567	1,3	0,703	2,2	0,186
0,7	0,677	1,4	0,623	2,4	0,041

Распределение частиц в потенциальном силовом поле (распределение Больцмана):

$$n = n_0 e^{-Mgh/(RT)} = n_0 e^{-m_0 gh/(kT)} \quad \text{или} \quad n = n_0 e^{-\Pi/(kT)},$$

где n и n_0 – концентрации молекул соответственно на высоте h и $h = 0$; $\Pi = m_0 gh$ – потенциальная энергия молекулы в поле тяготения.

Распределение давления в однородном поле силы тяжести (барометрическая формула)

$$p = p_0 e^{-Mgh/(RT)} = p_0 e^{-m_0 gh/(kT)},$$

где h – координата (высота) точки по отношению к уровню, принятому за нулевой; p – давление газа на высоте h; p_0 – давление газа на высоте $h = 0$; m_0 – масса частицы; M – молярная масса; g – ускорение свободного падения; R – молярная газовая постоянная; k – постоянная Больцмана.

Задача 2.29

Найти число молекул n кислорода в единице объема сосуда при давлении P = 300 Па, если средняя квадратичная скорость его молекул $\upsilon_{кв}$ = 2,5 км/с.

Дано: P = 300 Па; $\upsilon_{кв}$ = 2500 м/с; $M = 32\cdot10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$.

Найти: n.

Решение. Из уравнения состояния газа

$$P = nkT$$

выразим

$$n = \frac{P}{kT}, \qquad (1)$$

где $k = 1{,}38\cdot10^{-23}\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – постоянная Больцмана.

Температуру газа T найдем, зная среднюю квадратичную скорость молекул,

$$\upsilon_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{M}},$$

откуда

$$T = \frac{M\upsilon_{кв}^2}{3R}. \qquad (2)$$

Подставляя выражение (2) в (1), получим:

$$n = \frac{3PR}{kM\upsilon_{кв}^2};$$

$$[n] = \frac{\text{Па}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}\cdot\text{моль}\cdot\text{с}^2}{\text{К}\cdot\text{моль}\cdot\text{Дж}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Па}\cdot\text{с}^2}{\text{кг}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Н}\cdot\text{с}^2}{\text{м}^2\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^4} = \frac{1}{\text{м}^3} = \text{м}^{-3};$$

$$n = \frac{3\cdot300\cdot3{,}81}{1{,}38\cdot10^{-23}\cdot32\cdot10^{-3}\cdot(2500)^2} = 6{,}8\cdot10^{24}\,\text{м}^{-3}.$$

Ответ: $n = 6{,}8\cdot10^{24}\ \text{м}^{-3}$.

Задача 2.30

Найти температуру T, при которой среднеквадратичная скорость молекулы азота равнялась бы среднеквадратичной скорости молекулы водорода при температуре T_1 =200 К.

Дано: $M = 28\cdot10^{-3}$ кг/моль ; $M_1 = 2\cdot10^{-3}$ кг/моль ; $T_1 = 200$ К.

Найти: T.

Решение. Средняя квадратичная скорость

$$\upsilon_{кв} = \sqrt{3RT / M}.$$

По условию задачи

$$\upsilon_{кв\,1} = \upsilon_{кв\,2},$$

где $\upsilon_{кв\,1}$ и $\upsilon_{кв\,2}$ – среднеквадратичные скорости азота и водорода соответственно.

Таким образом,

$$\frac{3RT}{M} = \frac{3RT_1}{M_1},$$

откуда

$$T = \frac{M}{M_1} T_1;$$

$$T = \frac{28\cdot10^{-3}}{2\cdot10^{-3}} 200 = 2800 \text{ К}.$$

Ответ: $T = 2800$ К.

Задача 2.31

Какое число молекул n содержит единица массы газа при нормальных условиях, если средняя квадратичная скорость молекул $\upsilon_{кв}$ = 500 м/с?

Дано: $\upsilon_{кв}$ = 500 м/с; $P = 10^5$ Па; $T = 273$ К.

Найти: n.

Решение. Средняя квадратичная скорость

$$\upsilon_{кв} = \sqrt{3RT / M}. \qquad (1)$$

Число молекул газа, содержащихся в его массе m, равно

$$N = \frac{m}{M} N_A,$$

где M – молярная масса газа; N_A – число Авогадро.

Тогда число молекул, содержащихся в единице массы,

$$n = \frac{N}{m} = \frac{N_A}{M}. \qquad (2)$$

Выразив молярную массу из уравнения (1) и подставив ее в (2), получим:

$$n = \frac{N_A \upsilon_{кв}^2}{3RT};$$

$$[n] = \frac{\text{К} \cdot \text{моль} \cdot \text{м}^2}{\text{К} \cdot \text{моль} \cdot \text{Дж} \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{м}^2}{\text{Дж} \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{м}^2}{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^2} = \frac{1}{\text{кг}} = \text{кг}^{-1};$$

$$n = \frac{6,02 \cdot 10^{23} \cdot (500)^2}{3 \cdot 8,31 \cdot 273} = 2,2 \cdot 10^{25} \text{кг}^{-1}.$$

Ответ: $n = 2,2 \cdot 10^{25}$ кг^{-1}.

Задача 2.32

Пылинка массой $m = 10^{-11}$ кг находится среди молекул азота. Во сколько раз скорость пылинки υ меньше средней квадратичной скорости $\upsilon_{кв}$ молекул азота?

Дано: $m = 10^{-11}$ кг; $M = 28 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$.

Найти: $n = \frac{\upsilon_{кв\,2}}{\upsilon_{кв\,1}}$.

Решение. Средняя квадратичная скорость молекул находится по формуле

$$\upsilon_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}},$$

где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{Дж}{К}$ – постоянная Больцмана; m_0 – масса молекулы.

Тогда для пылинки

$$\upsilon_{кв1} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

Для молекул азота

$$\upsilon_{кв2} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

Тогда

$$n = \frac{\upsilon_{кв2}}{\upsilon_{кв1}} = \sqrt{\frac{Rm}{kM}};$$

$$[n] = \sqrt{\frac{Дж \cdot кг \cdot К \cdot моль}{моль \cdot К \cdot Дж \cdot кг}} = 1;$$

$$n = \sqrt{\frac{8{,}31 \cdot 10^{-11}}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 28 \cdot 10^{-3}}} = 1{,}47 \cdot 10^{7}\ \text{раз}.$$

Ответ: $n = 1{,}47 \cdot 10^{7}$ раз.

Задача 2.33

Средняя квадратичная скорость молекул газа $\upsilon_{кв}$ = 800 м/с. Чему равна их средняя арифметическая скорость $\langle \upsilon \rangle$?

Дано: $\upsilon_{кв}$ = 800 м/с.

Найти: $\langle \upsilon \rangle$.

Решение. Зная, что средняя квадратичная скорость молекул

$$\upsilon_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{M}},$$

а средняя арифметическая скорость молекул

$$\langle\upsilon\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}},$$

поделив скорость $\langle\upsilon\rangle$ на $\upsilon_{кв}$, получим

$$\frac{\langle\upsilon\rangle}{\upsilon_{кв}} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}}.$$

Отсюда

$$\langle\upsilon\rangle = \upsilon_{кв}\sqrt{\frac{8}{3\pi}};$$

$$\langle\upsilon\rangle = 800\sqrt{\frac{8}{3\cdot 3{,}14}} = 737 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\langle\upsilon\rangle = 737\,\text{м/с}$.

Задача 2.34

Найти массу m и давление P двухатомного газа, находящегося в баллоне объемом V = 40 л, если известны энергия поступательного движения E_n = 10 кДж и средняя квадратичная скорость его молекул $\upsilon_{кв}$ = 2500 м/с.

Дано: $V = 40\cdot 10^{-3}$ м^3; $E_n = 10^4$ Дж; $\upsilon_{кв}$ = 2500 м/с.

Найти: m; P.

Решение. Из формулы для средней квадратичной скорости определим температуру газа:

$$\upsilon_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{M}},$$

откуда

$$T = \frac{M\upsilon_{кв}^2}{3R}. \tag{1}$$

Внутренняя энергия идеального газа

$$U = \frac{i}{2}\frac{m}{M}RT. \tag{2}$$

Поскольку для поступательного движения i = 3, то из уравнений (1) и (2) получим:

$$E_n = \frac{3}{2}\frac{m}{M}R\frac{M\upsilon_{кв}^2}{3R} = \frac{m\upsilon_{кв}^2}{2}. \qquad (3)$$

Из выражения (3) найдем массу газа

$$m = \frac{2E_n}{\upsilon_{кв}^2}; \qquad (4)$$

$$[m] = \frac{\text{Дж}\cdot\text{с}^2}{\text{м}^2} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{м}^2\cdot\text{с}^2} = \text{кг};$$

$$m = \frac{2\cdot 10^4}{2500^2} = 3{,}2\cdot 10^{-3}\ \text{кг}.$$

Давление газа находится из уравнения состояния

$$PV = \frac{m}{M}RT;$$

$$P = \frac{mRT}{MV}. \qquad (5)$$

Подставляя в выражение (5) формулы (1) и (4), получим

$$P = \frac{2}{3}\frac{E_n}{V};$$

$$[P] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па};$$

$$P = \frac{2}{3}\cdot\frac{10^4}{40\cdot 10^{-3}} = 0{,}17\cdot 10^6\ \text{Па} = 0{,}17\ \text{МПа}.$$

Ответ: $m = 3{,}2\cdot 10^{-3}$ кг; $P = 0{,}17$ МПа.

Задача 2.35

Найти среднюю квадратичную скорость, среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул гелия и азота при температуре t = 27 °С.

Дано: $M_1 = 4\cdot 10^{-3}$ кг/моль; $M_2 = 28\cdot 10^{-3}$ кг/моль; T = 300 К.

Найти: $\langle\upsilon_{кв\,1}\rangle$; $\langle\upsilon_{кв\,2}\rangle$; $\langle E_n\rangle$.

Решение. Средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы любого газа однозначно определяется его термодинамической температурой:

$$\langle E_n \rangle = \frac{3}{2} kT,$$

где k = $1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – постоянная Больцмана; T – термодинамическая температура ($T = t + 273$);

$$\langle E_n \rangle = \frac{3}{2} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 = 6{,}21 \cdot 10^{-21}\ \text{Дж}.$$

Средняя квадратичная скорость молекул зависит от молярной массы газа:

$$\langle \upsilon_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}},$$

где $R = 8{,}31\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – молярная газовая постоянная; μ – молярная масса газа.

Для гелия

$$\langle \upsilon_{кв1} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M_1}};$$

$$\langle \upsilon_{кв1} \rangle = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}31 \cdot 300}{4 \cdot 10^{-3}}} = 1{,}37 \cdot 10^3 \text{м/с}.$$

Для азота

$$\langle \upsilon_{кв2} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M_2}};$$

$$\langle \upsilon_{кв2} \rangle = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}31 \cdot 300}{28 \cdot 10^{-3}}} = 0{,}52 \cdot 10^3 \text{м/с}$$

Ответ: $\langle E_n \rangle = 6{,}21 \cdot 10^{-21}$Дж; $\langle \upsilon_{кв1} \rangle = 1{,}37 \cdot 10^3$м/с; $\langle \upsilon_{кв2} \rangle = 0{,}52 \cdot 10^3$м/с.

Задача 2.36

Сколько молекул водорода находится в сосуде емкостью V = 2 л, если средняя квадратичная скорость движения молекул $\langle \upsilon_{кв} \rangle$ = 500 м/с, а давление на стенки $P = 10^4$ Па?

Дано: $V = 2\cdot10^{-3}$ м^3; $\langle \upsilon_{кв} \rangle = 500$ м/с; $P = 10^4$ Па.

Найти: N.

Решение. Применим основное уравнение кинетической теории газов

$$P = \frac{2}{3}n\langle E_n \rangle = \frac{2}{3}n\left\langle \frac{m\upsilon^2}{2} \right\rangle = \frac{1}{3}nm\langle \upsilon^2 \rangle.$$

Из него выражаем концентрацию n молекул газа

$$n = \frac{3P}{m\langle \upsilon^2 \rangle}.$$

Тогда искомая величина

$$N = nV = \frac{3PV}{m\langle \upsilon \rangle^2},$$

где масса молекулы водорода

$$m = \frac{M}{N_A}.$$

Тогда

$$N = \frac{3PVN_A}{M\langle \upsilon \rangle^2};$$

$$[N] = \frac{\text{Па}\cdot\text{м}^3\cdot\text{моль}\cdot\text{с}^2}{\text{моль}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Па}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{кг}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{м}^2\cdot\text{кг}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{м}^2\cdot\text{с}^2\cdot\text{кг}} = 1;$$

$$N = \frac{3\cdot10^4\cdot2\cdot10^{-3}\cdot6{,}02\cdot10^{26}}{2\cdot500^2} = 0{,}72\cdot10^{23} = 7{,}2\cdot10^{22}.$$

Ответ: $N = 7{,}2\cdot10^{22}$.

Задача 2.37

Найти относительное число молекул ω идеального газа, скорости которых находятся в пределах от 0 до одной сотой наиболее вероятной скорости $\upsilon_в$.

Дано: $\upsilon_{\min} = 0$ м/с; $\upsilon_{\max} = 0{,}01\cdot\upsilon_в$.

Найти: ω.

Решение. Воспользуемся распределением молекул по скоростям

$$dN(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N e^{-u^2} u^2 du,$$

где $u = \dfrac{\upsilon}{\upsilon_в}$; dN – число молекул, скорости которых u заключены в пределах от u до du.

Так как $\upsilon_{\max} = 0{,}01\cdot\upsilon_в$, то $u_{\max} = \dfrac{\upsilon_{\max}}{\upsilon_в} = 0{,}01.$

Для $u \ll 1$ имеем: $e^{-u^2} = 1 - u^2$.

Пренебрегая значением $u^2 = 0{,}01^2 = 10^{-4}$ по сравнению с 1, получим

$$\omega = \int_0^{u_{\max}} \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 du = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{0{,}01} u^2 du = 7\cdot 10^{-7}.$$

Ответ: $\omega = 7\cdot 10^{-7}$.

Задача 2.38

В сосуде объемом $V = 1\,\text{см}^3$ находится водород при нормальных условиях. Найти число молекул ΔN, скорости которых лежат в диапазоне от 0 до 1 м/с.

Дано: T = 273 К; $V = 10^{-6}$ м^3; $P = 10^5$ Па; $\upsilon_{\min} = 0$ м/с; $\upsilon_{\max} = 1$ м/с; $M = 2\cdot 10^{-3}\,\dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$.

Найти: ΔN.

Решение. Воспользуемся распределением молекул по скоростям

$$dN(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N e^{-u^2} u^2 du, \tag{1}$$

где $dN(u)$ – число молекул, скорости u которых заключены в интервале от u до du; N – полное число молекул.

Найдем значение максимальной скорости интересующих нас молекул:

$$u_{\max} = \frac{\upsilon_{\max}}{\upsilon_{в}},$$

где $\upsilon_{в} = \sqrt{\dfrac{2RT}{M}}$ – наиболее вероятная скорость.

Тогда $u_{max} = 0,66 \cdot 10^{-3}$.

Для таких значений u выражение (1) можно упростить; учитывая, что $u \ll 1$, выполняется равенство $e^{-u^2} = 1 - u^2$.

Если пренебречь значением $u^2 = 0,44 \cdot 10^{-6}$ по сравнению с 1, выражение (1) примет вид:

$$dN(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N u^2 du \ ;$$

$$\Delta N = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \int_0^{u_{\max}} u^2 du = \frac{4N}{3\sqrt{\pi}} u^3{}_{\max}. \qquad (2)$$

Число молекул $N = N_A$, а количество вещества ν выразим из уравнения Менделеева – Клапейрона:

$$pV = \nu RT,$$

откуда

$$\nu = \frac{PV}{RT}.$$

Тогда

$$N = \frac{PV}{RT} N_A. \qquad (3)$$

Подставив выражение (3) в (2), получим

$$\Delta N = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{PV}{RT} N_A u^3{}_{\max};$$

$$[\Delta N] = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{моль} \cdot \text{К}}{\text{моль} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3}{\text{Дж}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{м}} = 1;$$

$$\Delta N = \frac{4}{3\sqrt{3,14}} \cdot \frac{10^5 \cdot 10^{-6} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{8,31 \cdot 273} \cdot 1^3 = 5,8 \cdot 10^9.$$

Ответ: $\Delta N = 5,8 \cdot 10^9$.

Задача 2.39

Найти долю молекул кислорода, находящегося при температуре t = 20 °С, скорости которых находятся в интервале от υ_1 = 275 м/с до υ_2 = 280 м/с.

Дано: T = 293 К; $M = 32{\cdot}10^{-3}$ кг/моль; υ_1 = 275 м/с; υ_2 = 280 м/с;

Найти: $\dfrac{\Delta N}{N}$.

Решение. В данном случае для нахождения доли молекул, обладающих скоростями, лежащими в заданном интервале, можно воспользоваться распределением молекул по скоростям

$$\frac{\Delta N(u)}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 \Delta u \ .$$

Тогда при решении задачи можно воспользоваться таблицей, в которой даны значения функции распределения $f(u) = \dfrac{\Delta N(u)}{N \Delta u}$ для различных значений u (с. 42). Функция распределения $f(u)$ является универсальной, так как не зависит ни от температуры, ни от рода газа.

Вычислим:

наиболее вероятную скорость

$$\upsilon_в = \sqrt{\frac{2RT}{M}};$$

$$\upsilon_в = \sqrt{\frac{2 \cdot 8{,}31 \cdot 293}{32 \cdot 10^{-3}}} = 385 \text{ м/с};$$

отношение

$$u = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_в};$$

$$u = \frac{275}{385} = 0{,}7$$

и интервал скоростей

$$\Delta u = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{\upsilon_в};$$

$$\Delta u = \frac{280 - 275}{385} = 0,013.$$

По таблице находим, что скорости $u = 0,7$ соответствует значение $f(u) = 0,677$.

Отсюда

$$\frac{\Delta N}{N} = f(u)du;$$

$$\frac{\Delta N}{N} = 0,677 \cdot 0,013 = 0,009.$$

Это значит, что 0,9 % всех молекул кислорода обладают скоростями, лежащими в заданном интервале скоростей.

Ответ: $\frac{\Delta N}{N} = 0,9$ %.

Задача 2.40

Температура окиси азота NO t = 27 °С. Определить долю молекул, скорости которых лежат в интервале от υ_1 = 820 м/с до υ_2 = 830 м/с.

Дано: T = 300 К; M = $30 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; υ_1 = 820 м/с; υ_2 = 830 м/с.

Найти: $\frac{dN}{N}$.

Решение. Рассматриваемый газ находится в равновесном состоянии, и, согласно Максвеллу, относительное число молекул, скорости которых заключены в интервале от υ до $(\upsilon + d\upsilon)$,

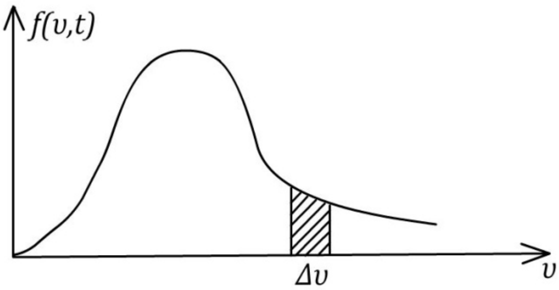
$$\frac{dN}{N} = f(\upsilon, t)d\upsilon,$$

где $f(\upsilon, t)$ – функция распределения Максвелла (см. рисунок).

Так как $\Delta\upsilon \ll \upsilon$, то искомую величину можно рассчитать по приближенной формуле:

$$\frac{dN}{N} = f(\upsilon, t)\, d\upsilon;$$

$$\frac{dN}{N} = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \upsilon^2 e^{\frac{-m_0{}^2}{2kT}} \Delta\upsilon.$$



Относительная скорость

$$u = \frac{\upsilon}{\upsilon_в},$$

где $\upsilon_в$ – наивероятнейшая скорость;

$$\upsilon_в = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}};$$

$$\upsilon_в = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 300}{30 \cdot 10^{-3}}} = 407 \text{ м/с};$$

$$u = \frac{\upsilon}{\upsilon_в}; \qquad u = \frac{820}{407} = 2,01; \qquad \upsilon = u\upsilon_в; \qquad \Delta\upsilon = \upsilon_в \Delta u;$$

$$\frac{\Delta N}{N} = 4\pi \frac{m_0}{2\pi kT}\sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}}\, \frac{2kT}{m_0} u^2 e^{\frac{-m_0\, 2kTu^2}{2kTm_0}} \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} \Delta u;$$

$$\frac{\Delta N}{N} = 4\sqrt{\pi} u^2 e^{-u^2} \Delta u;$$

$$\Delta u = \frac{\Delta\upsilon}{\upsilon_в} = \frac{10}{407} = 0,025;$$

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4 \cdot 2,01^2}{\sqrt{\pi}} e^{-2,01^2} \cdot 0,025 = 4 \cdot 10^{-3};$$

$$\frac{\Delta N}{N} = 0,4\%.$$

Ответ: $\frac{\Delta N}{N} = 0,4$ %.

Задача 2.41

Какая часть молекул водорода, находящегося при температуре T, обладает скоростями, отличающимися от наиболее вероятной скорости не более чем на 5 м/с? Задачу решить для двух значений T: 1) T_1 = 400 К; 2) T_2 = 900 К.

Дано: $\Delta\upsilon = $ 5 м/с; $M = 2\cdot 10^{-3}\ \dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$; $R = 8{,}3\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$; $T_1 = $ 400 К; T_2 = 900 К.

Найти: $\dfrac{\Delta N}{N}$.

Решение. Найдем наиболее вероятную скорость:

$$\upsilon_{в1} = \sqrt{\frac{2RT_1}{M}};$$

$$\upsilon_{в1} = \sqrt{\frac{2\cdot 8{,}3\cdot 400}{2\cdot 10^{-3}}} = 1{,}82\cdot 10^3 \text{м/с};$$

$$\upsilon_{в2} = \sqrt{\frac{2RT_2}{M}};$$

$$\upsilon_{в2} = \sqrt{\frac{2\cdot 8{,}3\cdot 900}{2\cdot 10^{-3}}} = 2{,}73\cdot 10^3 \text{м/с}.$$

Так как $\Delta\upsilon \ll \upsilon$, то можно воспользоваться приближенной формулой

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 \Delta u,$$

где $u = \dfrac{\upsilon}{\upsilon_в}$; $u = 1$; $\sqrt{\pi} = 1{,}77$.

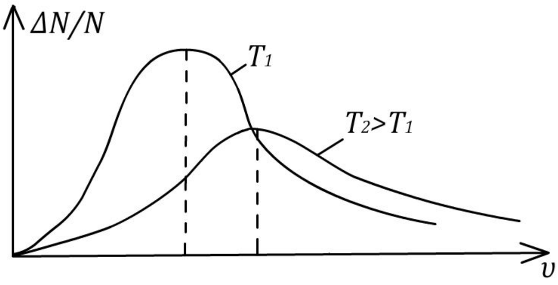
1) $\Delta u = \dfrac{\Delta\upsilon}{\upsilon_{в1}}$; $\quad \Delta u = \dfrac{10}{1{,}82\cdot 10^3} = 5{,}5\cdot 10^{-3}$;

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4e^{-1}}{\sqrt{\pi}}\cdot 2{,}75\cdot 10^{-3} = \frac{4\cdot 2{,}75\cdot 10^{-3}}{e\sqrt{\pi}} = 4{,}6\cdot 10^{-3};$$

2) $\Delta u = \frac{\Delta\upsilon}{\upsilon_{в2}}$; $\Delta u = \frac{10}{2,73\cdot 10^{3}} = 3,66\cdot 10^{-3}$;

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4\cdot 3,66\cdot 10^{-3}}{e\sqrt{\pi}} = 3,06\cdot 10^{-3}.$$

При увеличении температуры наиболее вероятная скорость увеличивается, а число молекул, скорости которых лежат в одном и том же интервале около наиболее вероятной скорости, уменьшается. Максимум сдвигается вправо, а величина максимума уменьшается (см. рисунок).



Ответ: 1) $\frac{\Delta N}{N} = 0,46\,\%$ 2) $\frac{\Delta N}{N} = 0,31\,\%$.

Задача 2.42

Найти изменение атмосферного давления при подъеме на высоту h = 500 м, считая температуру воздуха постоянной и равной T = 300 К, а давление у поверхности Земли $P_0 = 10^5$ Па.

Дано: h = 500 м; T = 300 К; $P_0 = 10^5$ Па.

Найти: ΔP.

Решение. Давление воздуха P_1 на высоте h найдем, используя барометрическую формулу

$$P_1 = P_0 e^{\frac{-Mgh}{RT}},$$

где $M = 29\cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Тогда

$$\Delta P = P_0 - P_1 = P_0\left(1 - e^{\frac{-Mgh}{RT}}\right);$$

$$\Delta P = 5,8 \text{ кПа}.$$

Ответ: ΔP = 5,8 кПа.

Задача 2.43

Определить высоту полета самолета, если барометр в его кабине показывает давление $P = 2{,}5 \cdot 10^4$ Па. Температуру воздуха считать постоянной и равной T = 220 К, а давление у поверхности Земли $P_0 = 10^5$ Па.

Дано: T = 220 К; $P = 2{,}5 \cdot 10^4$ Па; $P_0 = 10^5$ Па.

Найти: h.

Решение. Воспользуемся барометрической формулой

$$P = P_0 e^{\frac{-Mgh}{RT}}, \tag{1}$$

где $M = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса воздуха.

Приведем уравнение (1) к виду

$$\frac{P_0}{P} = e^{\frac{Mgh}{RT}}$$

и прологарифмируем его:

$$\frac{Mgh}{RT} = \ln \frac{P_0}{P},$$

откуда

$$h = \frac{RT}{Mg} \ln \frac{P_0}{P};$$

$$[h] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{моль} \cdot \text{с}^2}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Н}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{Н}} = \text{м};$$

$$h = \frac{8{,}3 \cdot 220}{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8} \ln \frac{10^5}{2{,}5 \cdot 10^4} = 8700 \text{ м}.$$

Ответ: $h = 8700$ м.

Задача 2.44

Определить отношение давления воздуха на высоте h_1 = 1 км к давлению воздуха на дне скважины глубиной 1 км (h_2 = –1 км). Воздух на поверхности земли находится при нормальных условиях и его температура не зависит от высоты.

Дано: $M = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $R = 8{,}3\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$; $P = 10^5$ Па; $T = 273$ К; $h_1 = 10^3$ м; $h_2 = -10^3$ м.

Найти: $\dfrac{P_1}{P_2}$.

Решение. Барометрическая формула определяет давление воздуха на высоте h над поверхностью Земли:

$$P_1 = P_0 e^{\frac{-Mgh_1}{RT}};$$

$$P_2 = P_0 e^{\frac{-Mgh_2}{RT}},$$

где M – молярная масса воздуха; g – ускорение свободного падения;

$$\frac{P_1}{P_2} = e^{\frac{-Mg}{RT}(h_1 + h_2)};$$

$$\frac{P_1}{P_2} = e^{\frac{-29 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10^3}{8{,}3 \cdot 273}} = e^{-0{,}26} = 0{,}788.$$

Ответ: $\dfrac{P_1}{P_2} = 0{,}778$.

Задача 2.45

На какой высоте плотность воздуха в e раз (e – основание натурального логарифма) меньше по сравнению с его плотностью на уровне моря? Температура воздуха и ускорение свободного падения не зависят от высоты.

Дано: $M = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $\dfrac{P_0}{P} = e$; $R = 8{,}3\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$; $T = 273$ К.

Найти: h.

Решение. Из уравнения газового состояния можно найти связь давления с плотностью:

$$PV = \frac{m}{M} RT;$$

$$\rho = \frac{m}{V};$$

$$PM = \rho RT;$$

$$\rho = \frac{PM}{RT}.$$

Отсюда видно, что плотность вещества меняется с высотой так же, как давление:

$$P = P_0 e^{\frac{-Mgh}{RT}};$$

$$\rho = \rho_0 e^{\frac{-Mgh}{RT}},$$

где ρ – плотность воздуха на высоте h; ρ_0 – плотность воздуха на поверхности;

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{e};$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = e^{\frac{-Mgh}{RT}};$$

$$\frac{Mgh}{RT} = 1;$$

$$h = \frac{RT}{Mg};$$

$$[h] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{моль} \cdot \text{с}^2}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}} = \text{м};$$

$$h = \frac{8{,}3 \cdot 273}{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8} = 7{,}8 \cdot 10^3\,\text{м}.$$

Ответ: $h = 7{,}8 \cdot 10^3\,\text{м}$.

Задача 2.46

Температура воздуха на некоторой высоте T_0 = 220 К, а давление P = 25 кПа. Найти изменение высоты Δh, соответствующее изменению давления на $\Delta P = 100$ Па.

Дано: T_0 = 220 К; $P = 25 \cdot 10^3$ Па; $\Delta P = 100$ Па.

Найти: Δh.

Решение. Используем барометрическую формулу

$$P = P_0 e^{\frac{-Mgh}{RT}},$$

откуда

$$\frac{P}{P_0} = e^{\frac{-Mgh}{RT}}. \qquad (1)$$

Так как $P = P_0 - \Delta P$, а $h = \Delta h$, то выражение (1) приводится к виду

$$\frac{P_0 - \Delta P}{P_0} = e^{\frac{-Mg\Delta h}{RT}}.$$

Логарифмируя полученное выражение по основанию *e*, получим

$$\ln \frac{P_0 - \Delta P}{P_0} = -\frac{Mg\Delta h}{RT},$$

откуда

$$\Delta h = \frac{RT}{Mg} \ln \frac{P_0}{P_0 - \Delta P};$$

$$[\Delta h] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{моль} \cdot \text{с}^2}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Н}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{Н}} = \text{м};$$

$$\Delta h = \frac{8{,}3 \cdot 220}{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8} \ln \frac{25 \cdot 10^3}{2{,}5 \cdot 10^3 - 100} = 25{,}7 \text{ м}.$$

Ответ: $\Delta h = 25{,}7$ м.

Задача 2.47

Известно отношение концентрации пылинок n_1 / n_0 = 0,787, взвешенных в воздухе и находящихся на высоте h_1 = 0,1 м и h_0 = 0 м. Температура воздуха T = 300 К, а масса пылинки $m = 10^{-21}$ кг. Найти по эти данным значение постоянной Авогадро N_A.

Дано: $m = 10^{-21}$ кг; T = 300 К; n_1 / n_0 = 0,787; h_1 = 0,1 м; h_0 = 0 м.

Найти: N_A.

Решение. Воспользуемся распределением Больцмана

$$n = n_0 e^{\frac{-E_n}{kT}},$$

где $k = \dfrac{R}{N_A}$ – постоянная Больцмана.

Тогда

$$n_1 = n_0 e^{\frac{-mgh_1 N_A}{RT}}$$

или

$$\frac{n_1}{n_0} = e^{\frac{-mgh_1 N_A}{RT}}. \tag{1}$$

Логарифмируя выражение (1), получим:

$$\ln\frac{n_1}{n_0} = -\frac{mgh_1 N_A}{RT},$$

откуда

$$N_A = -\ln\frac{n_1}{n_0}\frac{RT}{mgh_1};$$

$$[N_A] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{с}^2}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{Дж}} = \text{моль}^{-1};$$

$$N_A = 5{,}96 \cdot 10^{23}\,\text{моль}^{-1}.$$

Ответ: $N_A = 5{,}96 \cdot 10^{23}\,\text{моль}^{-1}$.

Задача 2.48

Одинаковые частицы массой $m = 10^{-12}$ г каждая распределены в однородном гравитационном поле напряженностью g = 0,2 мкН/кг. Определить отношение n_1 / n_2 концентрации частиц, находящихся на эквипотенциальных уровнях, отстоящих друг от друга на Δz = 10 м. Температура T во всех слоях считается одинаковой и равной 290 К.

Дано: $m = 10^{-15}$ кг; $g = 2 \cdot 10^{-7}$ Н/кг; Δz = 10 м; T = 290 К.

Найти: $\dfrac{n_1}{n_2}$.

Решение. Согласно распределению Больцмана концентрация частиц в силовом поле

$$n = n_0 e^{\frac{-E_n}{kT}},$$

где k – постоянная Больцмана; E_n – потенциальная энергия частиц.

В однородном гравитационном поле напряженностью g потенциальная энергия

$$E_n = mgz,$$

где z – координата (высота) точки, в которой расположена частица массой m, по отношению к уровню, принятому за нулевой.

Для частиц, находящихся на двух эквипотенциальных уровнях, концентрация

$$n_1 = n_0 e^{\frac{-mgz_1}{kT}};$$

$$n_2 = n_0 e^{\frac{-mgz_2}{kT}}.$$

Отсюда найдем отношение

$$\frac{n_1}{n_2} = e^{\frac{mg}{kT}(z_2 - z_1)}.$$

По условию задачи $\Delta z = z_2 - z_1$.

Поэтому

$$\frac{n_1}{n_2} = e^{\frac{mg\Delta z}{kT}};$$

$$\left[\frac{mg\Delta z}{kT}\right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{К}}{\text{кг} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Дж}} = 1;$$

$$\frac{n_1}{n_2} = 1{,}65.$$

Ответ: $\frac{n_1}{n_2} = 1{,}65.$

Задача 2.49

Во время полета вертолета барометр в его кабине показывает давление P = 80 кПа, поэтому летчик считает, что летит на постоянной высоте. Однако температура воздуха изменилась на ΔT = 2 К. Какую ошибку допускает летчик при определении высоты полета? Считать температуру воздуха не зависящей от высоты, а давление у поверхности Земли $P_0 = 10^5$ Па.

Дано: $P = 8 \cdot 10^4$ Па; ΔT = 2 К; $P_0 = 10^5$ Па; $M = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Найти: Δh.

Решение. До изменения температуры давление, показываемое барометром,

$$P = P_0 e^{\frac{-Mgh}{RT}}, \tag{1}$$

где h – высота полета.

После изменения температуры на ΔT давление, показываемое барометром, осталось таким же, поэтому

$$P = P_0 e^{\frac{-Mg(h+\Delta h)}{R(T+\Delta T)}}, \tag{2}$$

где Δh – ошибка в измерении высоты.

Из уравнений (1), (2) следует:

$$P_0 e^{\frac{-Mgh}{RT}} = P_0 e^{\frac{-Mg(h+\Delta h)}{R(T+\Delta T)}},$$

откуда

$$\frac{h}{T} = \frac{h+\Delta h}{T+\Delta T}$$

или

$$\Delta h = \frac{h}{T}\Delta T. \tag{3}$$

Соотношение $\frac{h}{T}$ найдем из формулы (1):

$$\frac{P_0}{P} = e^{\frac{Mg}{R}\cdot\frac{h}{T}};$$

$$\ln\frac{P_0}{P}=\frac{Mg}{R}\frac{h}{T},$$

откуда

$$\frac{h}{T}=\frac{R}{Mg}\ln\frac{P_0}{P}. \qquad (4)$$

Подставив выражение (4) в (3), получим:

$$\Delta h=\frac{R\Delta T}{Mg}\ln\frac{P_0}{P};$$

$$[\Delta h]=\frac{\text{Дж}\cdot\text{К}\cdot\text{моль}\cdot\text{с}^2}{\text{моль}\cdot\text{К}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}}=\frac{\text{Дж}}{\text{Н}}=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{Н}}=\text{м};$$

$$\Delta h=\frac{8{,}3\cdot 2}{29\cdot 10^{-3}\cdot 10}\ln\frac{10^5}{8\cdot 10^4}=13\ \text{м}.$$

Ответ: $\Delta h=13$ м.

Задача 2.50

Идеальный газ с молярной массой M находится в однородном поле тяжести, ускорение свободного падения в котором равно g. Найти давление газа как функцию высоты h, если при h = 0 давление $P=P_0$, а температура изменяется с высотой как 1) $T=T_0(1-\alpha h)$; 2) $T=T_0(1+\alpha h)$, где α – положительная постоянная.

Дано: M; g; h; h = 0; $P=P_0$; 1) $T=T_0(1-\alpha h)$; 2) $T=T_0(1+\alpha h)$.

Найти: P.

Решение. Комбинируя соотношение $dP=-\rho g dh$ с уравнением состояния идеального газа

$$P=\frac{m}{M}\frac{RT}{V}=\frac{\rho RT}{M},$$

получаем дифференциальное уравнение для определения зависимости давление P от высоты h:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{Mgdh}{RT}.$$

Его решение с учетом начального условия $P = P_0$ при $h = 0$ дает:

для случая 1 следующую зависимость:

$$P = P_0(1-\alpha h)^{\frac{Mg}{RT_0\alpha}},$$

а для случая 2 получаем соотношение

$$P = P_0(1+\alpha h)^{-\frac{Mg}{RT_0\alpha}}.$$

Ответ: 1) $P = P_0(1-\alpha h)^{\frac{Mg}{RT_0\alpha}}$; 2) $P = P_0(1+\alpha h)^{-\frac{Mg}{RT_0\alpha}}$.

2.3. Явления переноса в газах

Основные формулы

Среднее число соударений, испытываемых одной молекулой газа в единицу времени,

$$\langle z \rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n \langle \upsilon \rangle,$$

где d – эффективный диаметр молекулы; n – концентрация молекул; $\langle \upsilon \rangle$ – средняя арифметическая скорость молекул.

Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle l \rangle = \frac{\langle \upsilon \rangle}{\langle z \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p},$$

где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана.

Среднее число ударов молекул о единицу поверхности в единицу времени

$$\nu = \frac{1}{4} n \langle \upsilon \rangle.$$

Закон Ньютона для внутреннего трения (вязкости)

$$F = -\eta \frac{d\upsilon}{dx} S,$$

где F – сила внутреннего трения между движущимися слоями площадью S; $\frac{d\upsilon}{dx}$ – градиент скорости; η – динамическая вязкость;

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle \upsilon \rangle \langle l \rangle,$$

где ρ – плотность газа.

Закон теплопроводности Фурье:

$$Q = -\lambda \frac{dT}{dx} St,$$

где Q – теплота, прошедшая посредством теплопроводности через площадь S за время t; $\frac{dT}{dx}$ – градиент температуры; λ – коэффициент теплопроводности;

$$\lambda = \frac{1}{3} c_V \rho \langle \upsilon \rangle \langle l \rangle,$$

где c_V – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; ρ – плотность газа; $<\upsilon>$ – средняя арифметическая скорость теплового движения его молекул; $<l>$ – средняя длина свободного пробега молекул.

Закон диффузии Фика:

$$M = -D \frac{d\rho}{dx} St,$$

где M – масса вещества, переносимая посредством диффузии через площадь S за время t; $\frac{d\rho}{dx}$ – градиент плотности, D – коэффициент диффузии;

$$D = \frac{1}{3} \langle \upsilon \rangle \langle l \rangle.$$

Задача 2.51

Водород находится при температуре t = 20 °С и давлении P = 15 Па. Найти среднюю длину пробега $\langle\lambda\rangle$ молекул водорода.

Дано: T = 293 К; P = 15 Па; d = $0,23\cdot10^{-9}$ м.

Найти: $\langle\lambda\rangle$.

Решение. Средняя длина свободного пробега молекул определяется по формуле

$$\langle\lambda\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}, \qquad (1)$$

где $n-$ концентрация молекул газа.

Выразим n из уравнения состояния идеального газа:

$$P=nkT;$$

$$n=\frac{P}{kT}. \qquad (2)$$

Подставив формулу (2) в (1), получим:

$$\langle\lambda\rangle=\frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 P};$$

$$[\lambda]=\frac{\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{К}\cdot\text{м}^2\cdot\text{Па}}=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{м}^2}{\text{м}^2\cdot\text{Н}}=\text{м};$$

$$\langle\lambda\rangle=\frac{1,38\cdot10^{-23}\cdot293}{\sqrt{2}\cdot3,14\cdot\left(0,23\cdot10^{-9}\right)^2\cdot15}=1,16\cdot10^{-3}\text{м}.$$

Ответ: $\langle\lambda\rangle=1,16\cdot10^{-3}$м.

Задача 2.52

Средняя длина свободного пробега $\langle\lambda\rangle$ молекул кислорода равна 10 см. Найти плотность ρ газа.

Дано: $\langle\lambda\rangle$ = 0,1 м; M = $32\cdot10^{-3}$ кг/моль; d = $0,23\cdot10^{-9}$ м.

Найти: ρ.

Решение. Поскольку (см. задачу 2.51)

$$\langle\lambda\rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 P}, \qquad (1)$$

то, выразив давление P из уравнения Менделеева – Клапейрона, $p = \frac{\rho}{M}RT$ (учли, что $\rho = \frac{m}{V}$, $m = \rho V$), и подставив его в формулу (1), получим:

$$\langle\lambda\rangle = \frac{kTM}{\sqrt{2}\pi d^2 \rho RT},$$

откуда

$$\rho = \frac{kM}{\sqrt{2}\pi d^2 \langle\lambda\rangle R};$$

$$[\rho] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}}{\text{К} \cdot \text{моль} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{м} \cdot \text{Дж}} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

$$\rho = \frac{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{2} \cdot 3{,}14 \cdot \left(0{,}23 \cdot 10^{-9}\right)^2 \cdot 0{,}1 \cdot 8{,}31} = 0{,}13 \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Ответ: $\rho = 0{,}13 \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Задача 2.53

Определить среднюю длину $\langle\lambda\rangle$ свободного пробега атомов гелия, если плотность ρ газа равна $2 \cdot 10^{-2}$ кг/м^3. Эффективный диаметр d молекулы гелия равен 0,22 нм.

Дано: $\rho = 2 \cdot 10^{-2}$ кг/м^3; $M = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $d = 0{,}22 \cdot 10^{-9}$ м.

Найти: $\langle\lambda\rangle$.

Решение. Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle\lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}, \qquad (1)$$

где n – концентрация молекул газа.

Плотность газа

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT} \tag{2}$$

(использовали уравнение Менделеева – Клапейрона $PV = \frac{m}{M}RT$).

Давление газа

$$P = nkT, \tag{3}$$

где k – постоянная Больцмана; T – температура.

Подставив выражение (3) в формулу (2), получаем:

$$\rho = \frac{nkTM}{RT},$$

откуда

$$n = \frac{\rho RP}{kTM}. \tag{4}$$

Подставив выражение (4) в (1), получим:

$$\langle\lambda\rangle = \frac{kTM}{\sqrt{2}\pi d^2 \rho RT} = \frac{kM}{\sqrt{2}\pi d^2 \rho R} = \frac{M}{\sqrt{2}\pi d^2 \rho N_A}$$

(учли, что $R = kN_A$, где N_A – постоянная Авогадро);

$$\left[\langle\lambda\rangle\right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}} = \text{м};$$

$$\langle\lambda\rangle = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{1,41 \cdot 3,14 \cdot \left(0,22 \cdot 10^{-9}\right)^2 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}} = 1,55 \cdot 10^{-6}\text{м} = 1,55\ \text{мкм}.$$

Ответ: $\langle\lambda\rangle = 1,55$ мкм.

Задача 2.54

При температуре T = 280 К и некотором давлении средняя длина $\langle\lambda_1\rangle$ свободного пробега молекул кислорода равна 0,1 мкм. Определить среднее число $\langle z_r \rangle$ столкновений молекул в 1 с, если давление в сосуде уменьшить до 0,02 от первоначального значения. Температуру считать постоянной, а эффективный диаметр d молекулы кислорода принять равным 0,36 нм.

Дано: T = 280 К; $\langle\lambda_1\rangle = 10^{-7}$ м; d = $0{,}36\cdot 10^{-9}$ м; M = $32\cdot 10^{-3}$ кг/моль; $\frac{P_2}{P_1} = 0{,}02$.

Найти: $\langle z_r\rangle$.

Решение. Среднее число столкновений молекул в 1 с при конечном давлении определяется отношением средней скорости υ молекулы к средней длине ее свободного пробега λ_2 при том же давлении:

$$\langle z_r\rangle = \frac{\langle\upsilon\rangle}{\langle\lambda_2\rangle}, \tag{1}$$

где средняя скорость молекул определяется по формуле

$$\langle\upsilon\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \tag{2}$$

где R – молярная газовая постоянная; M – молярная масса вещества.

Из формул

$$\langle\lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \quad \text{и} \quad P = nkT$$

следует, что средняя длина свободного пробега молекул обратно пропорциональна давлению:

$$\frac{\langle\lambda_1\rangle}{\langle\lambda_2\rangle} = \frac{P_2}{P_1},$$

откуда

$$\langle\lambda_2\rangle = \langle\lambda_1\rangle\frac{P_1}{P_2}.$$

Подставив это выражение в формулу (1) и учитывая (2), получим искомое среднее число столкновений молекул в 1 с:

$$\langle z_r\rangle = \frac{\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}}{\langle\lambda_1\rangle\frac{P_1}{P_2}} = \frac{P_2}{P_1}\frac{\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}}{\langle\lambda_1\rangle};$$

$$\left[\left\langle z_r\right\rangle\right]=\frac{\sqrt{\dfrac{\text{Дж}\cdot\text{К}\cdot\text{моль}}{\text{моль}\cdot\text{К}\cdot\text{кг}}}}{\text{м}}=\frac{\sqrt{\dfrac{\text{Дж}}{\text{кг}}}}{\text{м}}=\frac{\sqrt{\dfrac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{кг}}}}{\text{м}}=\frac{\sqrt{\dfrac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{кг}}}}{\text{м}}=\frac{\frac{\text{м}}{\text{с}}}{\text{м}}=\frac{1}{\text{с}}=\text{с}^{-1};$$

$$\left\langle z_r\right\rangle=0{,}02\frac{\sqrt{\dfrac{8\cdot 8{,}31\cdot 280}{3{,}14\cdot 32\cdot 10^{-3}}}}{10^{-7}}=2{,}39\cdot 10^{-8}\,\text{с}^{-1}.$$

Ответ: $\left\langle z_r\right\rangle=2{,}39\cdot 10^{-8}\,\text{с}^{-1}$.

Задача 2.55

Найти среднее число соударений z в течение t = 1 с, испытываемых молекулой водорода при нормальных условиях.

Дано: d = $0{,}23\cdot 10^{-9}$ м; t = 1 с; T = 273 К; P = 10^5 Па; M = $2\cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Найти: $\langle z\rangle$.

Решение. Среднее число соударений в единицу времени одной молекулы определяется отношением

$$\langle z\rangle=\frac{\langle \upsilon\rangle}{\langle \lambda\rangle},$$

где $\langle \upsilon\rangle=\sqrt{\dfrac{8RT}{\pi M}}$ – средняя арифметическая скорость молекул.

Средняя длина свободного пробега молекул

$$\langle \lambda\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}=\frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 P}.$$

Тогда

$$\langle z\rangle=\frac{\sqrt{\dfrac{8RT}{\pi M}}}{\dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 P}}=\frac{4d^2P}{k}\sqrt{\frac{\pi R}{MT}};$$

$$\left[\langle z \rangle\right] = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{Па} \cdot \text{К}}{\text{Дж}} \sqrt{\frac{\text{Дж} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{кг} \cdot \text{К}}} = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{Н}}{\text{м}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{м}} \sqrt{\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг}}} = \frac{1}{\text{м}} \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}}} =$$

$$= \frac{1}{\text{м}} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}} = \frac{1}{\text{с}} = \text{с}^{-1};$$

$$\langle z \rangle = \frac{4 \cdot 0,23 \cdot 10^{-9} \cdot 10^5}{1,38 \cdot 10^{-23}} \sqrt{\frac{8,31 \cdot 3,14}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 273}} = 1,1 \cdot 10^{10}\,\text{с}^{-1}.$$

Ответ: $\langle z \rangle = 1,1 \cdot 10^{10}\,\text{с}^{-1}$.

Задача 2.56

Найти число z всех столкновений, которые происходят в единицу времени между всеми молекулами кислорода, занимающего объем V = 5 л при нормальных условиях.

Дано: d = $0,3 \cdot 10^{-9}$ м; T = 273 К; P = 10^5 Па; M = $32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; V = $5 \cdot 10^{-3}$ м^3.

Найти: z.

Решение. Среднее число столкновений за единицу времени, испытываемых одной молекулой,

$$\langle z \rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n \langle \upsilon \rangle,$$

где $\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$ – средняя арифметическая скорость; $n = \frac{N}{V}$ – концентрация молекул.

Общее число столкновений

$$z = \frac{N\langle z \rangle}{2}.$$

Так как при столкновении участвуют одновременно две молекулы, то берется $\frac{1}{2}N$.

Таким образом,

$$z = \frac{V}{2}\sqrt{2}\pi d^2 n^2 \langle \upsilon \rangle = \frac{V}{\sqrt{2}}\pi d^2 n^2 \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \qquad (1)$$

Из уравнения состояния $P = nkT$ определим концентрацию молекул:

$$n = \frac{P}{kT}\ . \qquad (2)$$

Подставив уравнение (2) в (1), получим:

$$z = \frac{V\pi d^2 P^2}{\sqrt{2}k^2T^2}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}};$$

$$[z] = \frac{\text{м}^3\cdot\text{м}^2\cdot\text{Па}^2\cdot\text{К}^2}{\text{Дж}^2\cdot\text{К}^2}\sqrt{\frac{\text{Дж}\cdot\text{К}\cdot\text{моль}}{\text{моль}\cdot\text{К}\cdot\text{кг}}} = \frac{\text{м}^5\cdot\text{Н}^2}{\text{м}^6\cdot\text{Н}^2}\sqrt{\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{кг}}} = \frac{1}{\text{м}}\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{кг}}} =$$

$$= \frac{\text{м}}{\text{м}\cdot\text{с}} = \frac{1}{\text{с}} = \text{с}^{-1};$$

$$z = \frac{5\cdot10^{-3}\cdot3{,}14\cdot\left(0{,}3\cdot10^{-9}\right)^2\cdot\left(10^5\right)^2}{1{,}41\cdot\left(1{,}38\cdot10^{-23}\right)^2\cdot273^2}\sqrt{\frac{8\cdot8{,}31\cdot273}{3{,}14\cdot32\cdot10^{-3}}} = 3\cdot10^{32}\,\text{с}^{-1}.$$

Ответ: $z = 3\cdot10^{32}\,\text{с}^{-1}$.

Задача 2.57

Для исследования плазмы тлеющего разряда применяется цилиндрическая газоразрядная трубка, в которой находится неон при температуре T = 300 К и давлении P = 1 Па. Найти число молекул неона N, ударяющихся в единицу времени о катод, имеющий форму диска площадью $S = 1$ см^2.

Дано: T = 300 К; P = 1 Па; $S = 10^{-4}$ м^2; $M = 20\cdot10^{-3}$ кг/моль.

Найти: N.

Решение. Среднее число ударов молекул о единицу поверхности в единицу времени

$$\nu = \frac{1}{4}n\langle\upsilon\rangle\ , \qquad (1)$$

где n – число молекул в единице объема.

Число молекул в единице объема можно определить из уравнения состояния

$$n = \frac{P}{kT}. \qquad (2)$$

Средняя арифметическая скорость

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \qquad (3)$$

Число молекул неона N, ударяющихся о катод в единицу времени, $N = \nu S$, или с учетом выражений (1) – (3)

$$N = \frac{SP}{4k}\sqrt{\frac{8R}{\pi MT}};$$

$$[N] = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{Па} \cdot \text{К}}{\text{Дж}}\sqrt{\frac{\text{Дж} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{кг} \cdot \text{К}}} = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{К}}{\text{м}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{К}}\sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}} = \frac{1}{\text{м}}\sqrt{\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг}}} =$$

$$= \frac{1}{\text{м}}\sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}}} = \frac{\text{м}}{\text{м} \cdot \text{с}} = \text{с}^{-1};$$

$$N = \frac{10^{-4} \cdot 1}{4 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}}\sqrt{\frac{8{,}31 \cdot 8}{3{,}14 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot 300}} = 3{,}4 \cdot 10^{18}\,\text{с}^{-1}.$$

Ответ: $N = 3{,}4 \cdot 10^{18}\,\text{с}^{-1}$.

Задача 2.58

Средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle$ молекулы углекислого газа при нормальных условиях равна 40 нм. Определить среднюю арифметическую скорость $\langle \upsilon \rangle$ молекул и число z соударений, которые испытывает молекула в 1 с.

Дано: $\langle l \rangle$ = 40·10^{-9} м; t = 1 с.

Найти: $\langle \upsilon \rangle$; $\langle z \rangle$.

Решение. Средняя арифметическая скорость молекул определяется по формуле

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}},$$

где M – молярная масса вещества (M = 44·10^{-3} кг/моль);

$$[\langle \upsilon \rangle] = \sqrt{\frac{\text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{Дж}}} = \sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}} = \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8 \cdot 8{,}31 \cdot 273}{3{,}14 \cdot 44 \cdot 10^{-3}}} = 362 \text{ м/с}.$$

Среднее число $\langle z \rangle$ соударений молекулы в 1с определяется отношением средней скорости $\langle \upsilon \rangle$ молекулы к средней длине ее свободного пробега $\langle l \rangle$:

$$\langle z \rangle = \frac{\langle \upsilon \rangle}{\langle l \rangle};$$

$$z = \frac{362}{40 \cdot 10^{-9}} = 9{,}05 \cdot 10^{9} \text{ с}^{-1}.$$

Ответ: $\langle \upsilon \rangle = 362$ м/с, $\langle z \rangle = 9{,}05 \cdot 10^{9}$ с$^{-1}$.

Задача 2.59

Определить коэффициент внутреннего трения для водорода, имеющего температуру t = 27 °С.

Дано: $M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $T = 300$ К; $d = 2{,}3 \cdot 10^{-10}$ м; $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$; $R = 8{,}31$ Дж/моль $\cdot$ К.

Найти: η.

Решение. Согласно молекулярно-кинетической теории газов коэффициент внутреннего трения

$$\eta = \frac{\rho \langle \upsilon \rangle \langle \lambda \rangle}{3}, \tag{1}$$

где ρ – плотность газа; $\langle \upsilon \rangle$ – средняя арифметическая скорость молекул; $\langle \lambda \rangle$ – средняя длина свободного пробега.

Плотность из уравнения Менделеева – Клапейрона

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT}, \tag{2}$$

где m, V, P и T – масса, объем, давление и температура газа; μ – молярная масса водорода; R – молярная газовая постоянная.

Средняя арифметическая скорость молекул

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \qquad (3)$$

Средняя длина свободного пробега

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_0},$$

где d – эффективный диаметр молекулы водорода; n_0 – число молекул водорода в $1\,\text{м}^3$.

Давление и температура газа связаны отношением

$$P = n_0 kT,$$

откуда

$$n_0 = \frac{P}{kT},$$

где $k = \dfrac{R}{N_A}$ (N_A – постоянная Авогадро).

Тогда

$$\langle \lambda \rangle = \frac{RT}{\sqrt{2}\pi d^2 P N_A}. \qquad (4)$$

Подставляя (2), (3) и (4) в уравнение (1), получим:

$$\eta = \frac{1}{3}\frac{PM}{RT}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}\frac{RT}{\sqrt{2}\pi d^2 P N_A} = \frac{\sqrt{8MRT}}{3\sqrt{2\pi^3}d^2 N_A};$$

$$[\eta] = \frac{\sqrt{\dfrac{\text{кг}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{моль}\cdot\text{моль}\cdot\text{К}}}\cdot\text{моль}}{\text{м}^2} = \frac{\sqrt{\dfrac{\text{кг}\cdot\text{Н}\cdot\text{К}\cdot\text{м}}{\text{моль}\cdot\text{моль}\cdot\text{К}}}\cdot\text{моль}}{\text{м}^2} = \frac{\sqrt{\dfrac{\text{кг}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}}}{\text{м}^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{м}\cdot\text{с}};$$

$$\eta = \frac{\sqrt{8\cdot 2\cdot 10^{-3}\cdot 8{,}31\cdot 300}}{3\sqrt{2\cdot 3{,}14^2}\cdot 2{,}3\cdot 10^{-10}\cdot 6{,}02\cdot 10^{23}} = 8{,}4\cdot 10^{-6}\,\frac{\text{кг}}{\text{м}\cdot\text{с}}.$$

Ответ: $= 8{,}4\cdot 10^{-6}\ \dfrac{\text{кг}}{\text{м}\cdot\text{с}}.$

Задача 2.60

Кислород находится при нормальных условиях. Известно, что средняя длина свободного пробега молекул $\langle\lambda\rangle = 0{,}1$ мкм. Найти коэффициент диффузии D.

Дано: T = 273 K; P = 10^5 Па; M = $32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $\langle\lambda\rangle = 10^{-7}$ м.

Найти: D.

Решение. Коэффициент диффузии определяется по формуле

$$D = \frac{\langle\upsilon\rangle\langle\lambda\rangle}{3},$$

где $\langle\upsilon\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$ – средняя арифметическая скорость.

В итоге

$$D = \frac{\langle\lambda\rangle}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}};$$

$$[D] = \text{м} \cdot \sqrt{\frac{\text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{кг}}} = \text{м} \cdot \sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}} = \text{м} \cdot \sqrt{\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг}}} = \text{м} \cdot \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}}} = \frac{\text{м}^2}{\text{с}};$$

$$D = \frac{10^{-7}}{3}\sqrt{\frac{8 \cdot 8{,}31 \cdot 273}{3{,}14 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}} = 14 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

Ответ: $D = 14 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$.

Задача 2.61

Найти, во сколько раз отличается коэффициент диффузии D_1 кислорода от коэффициента диффузии D_2 гелия, если оба газа находятся в нормальных условиях.

Дано: T = 273 K; P = 10^5 Па; $M_1 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $M_2 = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $d_1 = 3 \cdot 10^{-10}$ м; $d_2 = 2 \cdot 10^{-10}$ м.

Найти: $\frac{D_1}{D_2}$.

Решение. Коэффициент диффузии определяется по формуле

$$D = \frac{\langle \upsilon \rangle \langle \lambda \rangle}{3},$$

где $\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$ – средняя арифметическая скорость.

Среднюю длину свободного пробега определим по формуле

$$\langle \lambda \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 P}.$$

Таким образом,

$$D = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}\frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 P}.$$

Отношение коэффициентов диффузии

$$\frac{D_1}{D_2} = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2;$$

$$\frac{D_1}{D_2} = \sqrt{\frac{4\cdot 10^{-3}}{32\cdot 10^{-3}}}\left(\frac{2\cdot 10^{-10}}{3\cdot 10^{-10}}\right)^2 = 0{,}16.$$

Ответ: $\frac{D_1}{D_2}$ =0,16.

Задача 2.62

Коэффициент диффузии водорода при нормальных условиях $D = 9\cdot 10^{-5}\,\frac{\text{м}^2}{\text{с}}$. Найти динамическую вязкость водорода при тех же условиях.

Дано: T = 273 К; P = 10^5 Па; M = $2\cdot 10^{-3}$ кг/моль; $D = 9\cdot 10^{-5}\,\text{м}^2/\text{с}$.

Найти: η.

Решение. Коэффициент диффузии и коэффициент внутреннего трения определяются по формулам

$$D = \frac{\langle \upsilon \rangle \langle \lambda \rangle}{3}; \qquad \eta = \frac{\rho \langle \upsilon \rangle \langle \lambda \rangle}{3}.$$

Из сравнения коэффициентов D и η видно, что

$$\eta = \rho D, \tag{1}$$

где ρ – плотность газа.

Плотность газа ρ определим, используя уравнение Менделеева – Клапейрона:

$$\rho = \frac{MP}{RT}. \tag{2}$$

Из уравнений (1) и (2) находим динамическую вязкость:

$$\eta = \frac{MP}{RT} D;$$

$$[\eta] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Па} \cdot \text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{м}^2}{\text{моль} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{с}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{Па} \cdot \text{м}^2}{\text{Дж} \cdot \text{с}} = \frac{\text{Па} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{с}} = \text{Па} \cdot \text{с};$$

$$\eta = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5 \cdot 9 \cdot 10^{-5}}{8{,}31 \cdot 273} = 8 \cdot 10^{-6}\ \text{Па} \cdot \text{с}.$$

Ответ: $\eta = 8 \cdot 10^{-6}\,\text{Па} \cdot \text{с}$.

Задача 2.63

Определить, во сколько раз отличаются коэффициенты динамической вязкости кислорода η_1 и азота η_2, если температуры газов одинаковы. Эффективные диаметры молекул кислорода и азота соответственно равны $d_1 = 0{,}36$ нм и $d_2 = 0{,}38$ нм.

Дано: $M_1 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $M_2 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $d_1 = 0{,}36 \cdot 10^{-9}$ м; $d_2 = 0{,}38 \cdot 10^{-9}$ м; $T_1 = T_2 = T$.

Найти: $\frac{\eta_1}{\eta_2}$.

Решение. Коэффициент динамической вязкости газа

$$\eta = \frac{\rho \langle \upsilon \rangle \langle \lambda \rangle}{3}, \tag{1}$$

где плотность газа

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT} \qquad (2)$$

(учли, что $pV = \frac{m}{M}RT$).

Средняя скорость молекул

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}; \qquad (3)$$

Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 P} \qquad (4)$$

(давление P газа и концентрация n молекул связаны формулой $P = nkT$).

Подставляя выражения (2) – (4) в формулу (1), получим

$$\eta = \frac{2}{3}\frac{k}{\pi d^2}\sqrt{\frac{MT}{\pi R}}. \qquad (5)$$

Согласно формуле (5) и учитывая условие задачи ($T_1 = T_2$), получаем искомое отношение коэффициентов динамической вязкости

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \sqrt{\frac{M_1}{M_2}};$$

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \left(\frac{0,38 \cdot 10^{-9}}{0,36 \cdot 10^{-9}}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{32 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}}} = 1,19.$$

Ответ: $\frac{\eta_1}{\eta_2} = 1,19$.

Задача 2.64

Вязкость гелия при нормальных условиях $\eta = 13$ мкПа $\cdot$ с. Найти среднюю длину свободного пробега молекул гелия $\langle\lambda\rangle$ при тех же условиях.

Дано: T = 273 К; P = 10^5 Па; M = $4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $\eta = 13 \cdot 10^{-6}$ Па $\cdot$ с.

Найти: $\langle\lambda\rangle$.

Решение. Коэффициент динамической вязкости газа

$$\eta = \frac{\rho\langle\upsilon\rangle\langle\lambda\rangle}{3},$$

откуда

$$\langle\lambda\rangle = \frac{3\eta}{\rho\langle\upsilon\rangle}. \qquad (1)$$

Из уравнения Менделеева – Клапейрона определим плотность газа:

$$\rho = \frac{MP}{RT}. \qquad (2)$$

Средняя арифметическая скорость молекул газа

$$\langle\upsilon\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \qquad (3)$$

Из уравнений (1) – (3) находим:

$$\langle\lambda\rangle = \frac{3\eta}{P}\sqrt{\frac{\pi RT}{8M}};$$

$$[\lambda] = \frac{\text{Па}\cdot\text{с}}{\text{Па}}\sqrt{\frac{\text{Дж}\cdot\text{К}\cdot\text{моль}}{\text{моль}\cdot\text{К}\cdot\text{кг}}} = \text{с}\cdot\sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}} = \text{с}\cdot\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{кг}}} = \text{м};$$

$$\langle\lambda\rangle = \frac{3\cdot 13\cdot 10^{-6}}{10^5}\sqrt{\frac{3{,}14\cdot 8{,}31\cdot 273}{8\cdot 4\cdot 10^{-3}}} = 184\cdot 10^{-9}\,\text{м}.$$

Ответ: $\langle\lambda\rangle = 184\cdot 10^{-9}\,\text{м}$.

Задача 2.65

Вязкость водорода $\eta = 8{,}6\ \text{мкПа}\cdot\text{с}$. Определить коэффициент теплопроводности γ водорода при тех же условиях.

Дано: $M = 2\cdot 10^{-3}$ кг/моль; $\eta = 86\cdot 10^{-7}\,\text{Па}\cdot\text{с}$; $i = 5$.

Найти: γ.

Решение. Коэффициент теплопроводности определяется по формуле

$$\gamma = \frac{c_V \rho \langle \upsilon \rangle \langle \lambda \rangle}{3},$$

а коэффициент вязкости – по формуле

$$\eta = \frac{\rho \langle \upsilon \rangle \langle \lambda \rangle}{3}.$$

Таким образом, коэффициенты теплопроводности и вязкости связаны соотношением

$$\gamma = c_V \eta,$$

где $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{M}$ – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; i – число степеней свободы, для двухатомного газа $i = 5$.

Тогда

$$\gamma = \frac{5R}{2M}\eta;$$

$$[\gamma] = \frac{\text{Дж}\cdot\text{Па}\cdot\text{с}\cdot\text{моль}}{\text{моль}\cdot\text{К}\cdot\text{кг}} = \frac{\text{Дж}\cdot\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{м}^2\cdot\text{К}\cdot\text{кг}} = \frac{\text{Дж}\cdot\text{кг}\cdot\text{с}\cdot\text{м}}{\text{м}^2\cdot\text{К}\cdot\text{кг}\cdot\text{с}^2} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}};$$

$$\gamma = \frac{5\cdot 8{,}31\cdot 86\cdot 10^{-7}}{2\cdot 2\cdot 10^{-3}} = 89{,}3\cdot 10^{-3}\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}} = 89{,}3\,\frac{\text{мВт}}{\text{м}\cdot\text{К}}.$$

Ответ: $89{,}3\ \frac{\text{мВт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$.

Задача 2.66

Температура наружной поверхности кирпичной стены площадью 25 м^2 и толщиной 37 см 259 К, а внутренней поверхности – 293 К. Помещение отапливается электроплитой. Определить ее мощность, если температура в помещении поддерживается постоянной. Теплопроводность кирпича $\gamma = 0{,}4$ Вт/(м $\cdot$ К).

Дано: S = 25 м^2; d = 0,37 м; $T_1 = 259$ К; $T_2 = 293$ К; $\gamma = 0{,}4$ Вт/(м $\cdot$ К).

Найти: N.

Решение. Количество теплоты, прошедшее через наружную стену за интервал времени *t*, определим по закону Фурье:

$$\Delta Q = -\gamma \frac{T_1 - T_2}{d} St, \qquad (1)$$

За это время электроплита должна выделить такое же количество теплоты

$$Q = Nt. \qquad (2)$$

Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем

$$Nt = -\gamma \frac{T_1 - T_2}{\mathrm{d}} St \ ,$$

откуда

$$N = -\gamma \frac{T_1 - T_2}{d} S;$$

$$[N] = \frac{\text{Вт} \cdot \text{К} \cdot \text{м}^2}{\text{м} \cdot \text{К} \cdot \text{м}} = \text{Вт};$$

$$N = -0,4 \frac{259 - 293}{0,37} \cdot 25 = 9,2 \cdot 10^2 \, \text{Вт} = 0,92 \text{ кВт}.$$

Ответ: $N = 0,92$ кВт.

Задача 2.67

Вычислить количество льда, которое образуется в течение часа в бассейне, площадь которого 10 м^2. Толщина льда 15 см, температура воздуха –10 °С, коэффициент теплопроводности льда $\gamma = 2,1$ Вт/(м $\cdot$ К).

Дано: S = 10 м^2; $\Delta x = 0,15$ м; $t_1 = -10$ °С; $t_2 = 0$ °С; $\gamma = 2,1$ Вт/(м $\cdot$ К); $t = 3600$ с; $r = 3,35 \cdot 10^5$ Дж/кг.

Найти: m.

Решение. Считаем процесс установившимся, температуру нижней поверхности льда равной $0\,°\text{C}$, а верхней – температуре воздуха. Через слой льда от воды отводится тепло.

Количество тепла Q, передаваемое через лед толщиной Δx, пропорционально градиенту температуры $\Delta t / \Delta x$, площади передающей поверхности S и времени t и определяется уравнением теплопроводности Фурье

$$\Delta Q = \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x} S\tau.$$

Массу m образующегося льда определяем из уравнения для теплоты плавления Q льда, численно равной теплоте, отводимой от воды в процессе замораживания,

$$Q = mr,$$

где r – удельная теплота плавления льда.

Тогда

$$m = \frac{Q}{r} = \frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{\gamma}{r} S\tau;$$

$$[m] = \frac{\text{К}}{\text{м}} \frac{\text{Вт} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}}{\text{м} \cdot \text{К} \cdot \text{Дж}} = \frac{\text{Вт} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}}{\text{Дж}} = \frac{\text{Дж} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}}{\text{с} \cdot \text{Дж}} = \text{кг};$$

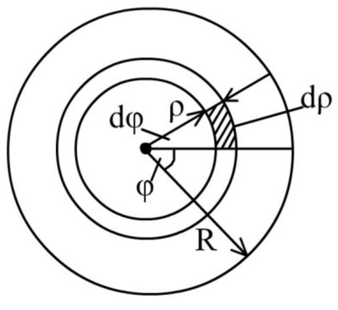
$$m = \frac{10 \cdot 2{,}1 \cdot 10 \cdot 3{,}6 \cdot 10^3}{0{,}15 \cdot 3{,}35 \cdot 10^5} \approx 15 \text{ кг}.$$

Ответ: $m = 15$ кг.

Задача 2.68

Два диска радиусом R = 0,2 м каждый расположены горизонтально друг над другом на расстоянии d = 0,5 см так, что их оси совпадают. Верхний диск неподвижен, а нижний вращается относительно своей оси с частотой $n = 10\ \text{с}^{-1}$. Найти вращающий момент *M*, действующий на верхний диск, если динамическая вязкость воздуха, в котором находятся диски, $\eta = 8{,}6$ мкПа $\cdot$ с.

Дано: R = 0,2 м; $\eta = 86 \cdot 10^{-7}$ Па $\cdot$ с; $d = 5 \cdot 10^{-3}$ м; $n = 10\ \text{с}^{-1}$.



Найти: *M*.

Решение. Выделим на верхнем диске участок (заштрихованный на рисунке) толщиной $d\rho$, расположенный на расстоянии ρ от центра диска.

Его площадь

$$dS = \rho d\rho d\varphi.$$

По закону Ньютона $\left(F = \eta \dfrac{d\upsilon}{dz} \Delta S \right)$ на этот участок действует сила внутреннего трения

$$dF = \eta \frac{d\upsilon}{dz} dS = \eta \frac{d\upsilon}{dz} \rho d\rho d\varphi,$$

где η –динамическая вязкость газа; $\dfrac{d\upsilon}{dz}$ – градиент скорости слоев воздуха.

Вращающий момент dM, действующий на выделенный участок,

$$dM = \rho dF = \eta \frac{d\upsilon}{dz} \rho^2 d\rho d\varphi.$$

Так как $\dfrac{d\upsilon}{dz} = \dfrac{\upsilon}{d}$, а $\upsilon = \omega\rho = 2\pi n\rho$, то

$$dM = \eta \frac{2\pi n}{d} \rho^3 d\rho d\varphi.$$

Полный вращающий момент, действующий на верхний диск, найдем методом интегрирования:

$$M = \iint dM = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \eta \frac{2\pi n}{d} \rho^3 d\rho d\varphi = \eta \frac{2\pi n}{d} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R} \rho^3 d\rho = \eta \frac{2\pi n}{d} \frac{R^4}{4} 2\pi = \frac{\pi^2 n\eta R^4}{d};$$

$$[M] = \frac{\text{Па} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^4}{\text{с} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^2} = \text{Н} \cdot \text{м};$$

$$M = \frac{3{,}14^2 \cdot 10 \cdot 86 \cdot 10^{-7} \cdot 0{,}2^4}{5 \cdot 10^{-3}} = 0{,}54 \cdot 10^{-3}\,\text{Н} \cdot \text{м} = 0{,}54\ \text{мН} \cdot \text{м}.$$

Ответ: $M = 0{,}54$ мН · м.

Задача 2.69

Два тонкостенных коаксиальных цилиндра длиной $l = 10$ см могут свободно вращаться вокруг общей оси z. Радиус R большого цилиндра равен 5 см. Между цилиндрами имеется зазор размером d = 2 мм. Оба цилиндра находятся в воздухе при нормальных условиях. Внутренний цилиндр приводят во вращение с постоянной частотой $n_1 = 20\ \text{с}^{-1}$. Внешний цилиндр заторможен. Определить, через какой промежуток времени с момента освобождения внешнего цилиндра он приобретет частоту вращения $n_2 = 1\ \text{с}^{-1}$. При расчетах изменением относительной скорости цилиндров пренебречь. Масса m внешнего цилиндра равна 100 г.

Дано: $l = 0{,}1$ м; $R = 0{,}05$ м; $d = 2 \cdot 10^{-3}$м; $n_1 = 20\ \text{с}^{-1}$; $n_2 = 1\ \text{с}^{-1}$; $m = 0{,}1$ кг.

Найти: Δt.

Решение. При вращении внутреннего цилиндра слой воздуха увлекается им и начинает участвовать во вращательном движении. Вблизи поверхности этого цилиндра слой воздуха приобретает со временем практически такую же линейную скорость, как и скорость точек на поверхности цилиндра, т.е.

$$\upsilon = 2\pi n_1 (R - d).$$

Так как $d \ll R$, то приближенно можно считать

$$\upsilon \approx 2\pi n_1 R. \tag{1}$$

Вследствие внутреннего трения момент импульса передается соседним слоям газа и в конечном счете – внешнему цилиндру. За интервал времени Δt внешний цилиндр приобретает момент импульса

$$L = PR,$$

где P – импульс, полученный за время Δt внешним цилиндром.

Отсюда

$$P = \frac{L}{R}. \tag{2}$$

С другой стороны,

$$P = \eta \frac{d\upsilon}{dz} S \Delta t, \tag{3}$$

где η – динамическая вязкость газа; $\frac{d\upsilon}{dz}$ – градиент скорости; S – площадь поверхности цилиндра ($S = 2\pi R l$).

Приравняв правые части выражений (2) и (3) и выразив из полученного равенства искомый интервал Δt, получим

$$\Delta t = \frac{L}{\eta R \dfrac{d\upsilon}{dz} S}. \tag{4}$$

Найдем входящие в эту формулу величины L, $\dfrac{d\upsilon}{dz}$ и S.

Момент импульса

$$L = I\omega_2,$$

где I – момент инерции тонкостенного цилиндра ($I = mR^2$); m–его масса; ω_2 – угловая скорость внешнего цилиндра ($\omega_2 = 2\pi n_2$).

С учетом этого запишем:

$$L = mR^2 \cdot 2\pi n_2 = 2\pi m R^2 n_2.$$

Градиент скорости

$$\frac{d\upsilon}{dz} = \frac{\upsilon}{z} = \frac{\upsilon}{d}.$$

Площадь цилиндра

$$S = 2\pi R l.$$

Подставив в (4) выражения L, $\dfrac{d\upsilon}{dz}$, S, получим

$$\Delta t = \frac{m d n_2}{\eta \upsilon l}.$$

Подставив υ, согласно (1) найдем

$$\Delta t = \frac{m d n_2}{2\pi n_1 R l \eta}. \tag{5}$$

Динамическая вязкость воздуха $\eta = 17{,}2$ мкПа · с $= 1{,}72 \cdot 10^{-5}$ Па · с;

$$[\Delta t] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{с} \cdot \text{Па} \cdot \text{с} \cdot \text{м} \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг}}{\text{Па} \cdot \text{с} \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{м}} = \text{с};$$

$$\Delta t = \frac{100 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}72 \cdot 10^{-5} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 10 \cdot 10^{-2} \cdot 20} = 18{,}5 \text{ с}.$$

Ответ: $\Delta t = 18{,}5$ с.

Задача 2.70

Сосуд с азотом делится перегородкой на две части, в которых поддерживается различное давление газа: $P_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ Па и $P_2 = 1 \cdot 10^{-3}$ Па. Перегородка имеет отверстие диаметром d = 1 см (см. рисунок). Определить массу азота, протекающего в единицу времени через отверстие при температуре газа T = 300 К. Газ разряжен, длина свободного пробега молекул $\lambda \gg d$.

Дано: $d = 10^{-2}$ м; $P_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ Па; $P_2 = 1 \cdot 10^{-3}$ Па; T = 300 К; $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

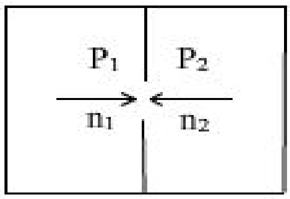
Найти: $\dfrac{m}{\Delta t}$.

Решение. Число N молекул, проходящих через отверстие в единицу времени,

$$N = N_1 - N_2, \qquad (1)$$

где N_1 – число молекул, движущихся слева направо; N_2 – число молекул, движущихся справа налево.

Зная, что среднее число ударов молекул о единицу поверхности в единицу времени выражается формулой



$$\nu = \frac{1}{4} n \langle \upsilon \rangle,$$

можем записать:

$$N_1 = \frac{1}{4} n_1 \langle \upsilon \rangle; \quad N_2 = \frac{1}{4} n_2 \langle \upsilon \rangle, \qquad (2)$$

где n_1 и n_2 – концентрация молекул; $\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi M}}$ – средняя арифметическая скорость движения молекул.

Концентрацию молекул найдем из уравнения состояния газа ($P = nkT$):

$$n_1 = \frac{P_1}{kT}; \quad n_2 = \frac{P_2}{kT}. \qquad (3)$$

Из выражений (1) – (3) получим

$$N = \frac{1}{4}\langle\upsilon\rangle\frac{P_1 - P_2}{kT} = \frac{1}{4}\frac{P_1 - P_2}{kT}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \qquad (4)$$

Формула (4) позволяет определить число молекул, проходящих в единицу времени через единицу площади отверстия. Найдем число молекул, проходящих через отверстие в единицу времени,

$$N \cdot S = \frac{\pi d^2}{4}\frac{1}{4}\frac{P_1 - P_2}{kT}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \qquad (5)$$

где $S = \frac{\pi d^2}{4}$ – площадь отверстия.

Масса газа, протекающего через отверстие за одну секунду,

$$m = m_0 NS, \qquad (6)$$

где $m_0 = \frac{M}{N_A}$ – масса одной молекулы; N_A – постоянная Авогадро.

Тогда из (5) и (6) окончательно получим:

$$\frac{m}{\Delta t} = \frac{M}{N_A}\frac{\pi d^2}{16}\frac{P_1 - P_2}{kT}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \frac{d^2}{8}\left(P_1 - P_2\right)\sqrt{\frac{2\pi M}{RT}};$$

$$\left[\frac{m}{\Delta t}\right] = \text{м}^2 \cdot \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}\sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}}{\text{моль} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К}}} = \text{Н} \cdot \sqrt{\frac{\text{кг}}{\text{Н} \cdot \text{м}}} = \text{Н} \cdot \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}} = \text{Н} \cdot \frac{\text{с}}{\text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг}}{\text{с}};$$

$$\frac{m}{\Delta t} = \frac{\left(10^{-2}\right)^2}{8}\left(5 \cdot 10^{-3} - 1 \cdot 10^{-3}\right)\sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \cdot 300}} = 4 \cdot 10^{-10}\ \frac{\text{кг}}{\text{с}};$$

Ответ: $\frac{m}{\Delta t} = 4 \cdot 10^{-10}\ \frac{\text{кг}}{\text{с}}$.

2.4. Основы термодинамики

Основные формулы

Теплоемкость – отношение элементарного количества теплоты dQ, сообщенного телу (системе) при бесконечно малом изменении его состояния в каком-либо процессе, к соответствующему изменению dT абсолютной температуры этого тела:

$$C = \frac{dQ}{dT}.$$

Удельная теплоемкость газа при постоянном объеме (c_V) и при постоянном давлении (c_p)

$$c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{M}; \qquad c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{M},$$

где i – число степеней свободы; R – молярная газовая постоянная.

Связь между молярной и удельной теплоемкостью:

$$C = cM\ .$$

Молярная теплоемкость при постоянном объеме (C_V) и постоянном давлении (C_P)

$$C_V = \frac{i}{2}R; \qquad C_p = \frac{i+2}{2}R.$$

Связь между молярной теплоемкостью при постоянном объеме и постоянном давлении (при изобарном и изохорном процессах) выражается уравнением Майера:

$$C_p - C_V = R.$$

Удельная теплоемкость смеси газов определяется отношением теплоемкости $C_{см}$ к массе этой смеси $m_{см}$:

$$c_{см} = \frac{C_{см}}{m_{см}}.$$

Внутренняя энергия идеального газа

$$U = \frac{i}{2}\frac{m}{M}RT = \frac{m}{M}C_V T\ ,$$

где i – число степеней свободы молекулы; для одноатомной молекулы $i=3$ (поступательное движение описывается тремя координатами); для двухатомной $i=5$ ($i_{пост}=3$ для поступательного движения, $i_{вр}=2$ для вращательного движения); для трехатомной и более $i=6$ ($i_{пост}=3$ для поступательного движения, $i_{вр}=3$ для вращательного движения).

Первое начало термодинамики:

$$Q=\Delta U+A$$

где Q – количество теплоты, сообщенное системе или отданное ею; ΔU – изменение ее внутренней энергии; A – работа системы против внешних сил.

Первое начало термодинамики в дифференциальной форме:

$$\delta Q=dU+\delta A.$$

Элементарная работа, совершаемая газом при изменении его объема,

$$dA=pdV.$$

Полная работа при изменении объема газа

$$A=\int_{V_1}^{V_2} pdV,$$

где V_1 и V_2 – соответственно начальный и конечный объемы газа.

Работа газа:

при изобарном процессе

$$A=p(V_2-V_1)=\frac{m}{M}R(T_2-T_1);$$

при изотермическом процессе

$$A=\frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1}=\frac{m}{M}RT\ln\frac{p_1}{p_2};$$

при изохорном процессе

$$A=0.$$

Уравнение Пуассона, связывающее параметры идеального газа при адиабатическом процессе:

$$pV^{\gamma}=\text{const}; \quad TV^{\gamma-1}=\text{const}; \quad T^{\gamma}p^{1-\gamma}=\text{const},$$

где $\gamma=\frac{C_p}{C_V}=\frac{i+2}{i}$ – показатель адиабаты.

Уравнение политропы:

$$pV^n = \text{const},$$

где $n = \dfrac{(C - C_p)}{(C - C_V)}$ – показатель политропы.

При $C = 0$, $n = \gamma$ получается уравнение адиабаты; при $C = \infty$, $n = 1$ – уравнение изотермы; при $C = C_p$, $n = 0$ – уравнение изобары; при $C = C_V$, $n = \pm\infty$ – уравнение изохоры.

Связь между начальными и конечными параметрами состояний газа при адиабатическом процессе:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma}; \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}; \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Работа в случае адиабатного процесса

$$A = \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2) \quad \text{или} \quad A = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\frac{m}{M}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right],$$

где T_1, T_2 и V_1, V_2 – соответственно начальные и конечные температуры и объемы газа.

Изохорный процесс: $V = \text{const}$; $dA = 0$. Количество теплоты, переданное газу, идет на увеличение внутренней энергии газа: $dQ = dU$.

Изобарный процесс: $p = \text{const}$; $dA = pdV$. Количество теплоты, переданное газу, идет на увеличение его внутренней энергии и на совершение им работы: $dQ = dU + dA$.

Изотермический процесс: $T = \text{const}$; $dU = 0$. Количество теплоты, переданное газу, идет на совершение им работы при изотермическом расширении: $dQ = dA$.

Адиабатный процесс идет без теплообмена с окружающей средой, поэтому $dQ = 0$. Газ при расширении совершает работу за счет уменьшения его внутренней энергии: $dU = -dA$, при этом газ охлаждается.

Коэффициент полезного действия тепловой машины

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \le \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где знак равенства относится к циклу Карно; A – работа, совершенная рабочим веществом в течение цикла (полезная работа); Q_1 – количество теплоты, полученное от нагревателя рабочим веществом; Q_2 – количество теплоты, отданное при этом холодильнику; T_1 и T_2 – температуры нагревателя и холодильника.

Приведенная теплота $\left(\frac{Q}{T}\right)$ для любых изотермических переходов между двумя адиабатами есть величина постоянная:

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}; \quad \frac{Q}{T} = \text{const}.$$

Изменение энтропии тела в любом обратимом процессе, переводящем его из состояния 1 в состояние 2,

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T},$$

где dQ – элементарное количество теплоты, полученное телом при температуре T.

Второе начало термодинамики: энтропия замкнутой системы при любых происходящих в ней процессах не уменьшается – она возрастает при необратимых процессах и остается постоянной в случае обратимых процессов, т.е. $\Delta S \geq 0$.

Если система совершает равновесный переход из состояния 1 в состояние 2, то изменение энтропии

$$\Delta S_{12} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{dU + dA}{T},$$

где подынтегральное выражение и пределы интегрирования надо выразить через величины, характеризующие исследуемый процесс.

Изменение энтропии в процессах идеального газа

$$\Delta S_{12} = S_2 - S_1 = \frac{m}{M}\left(C_V \ln\frac{T_2}{T_1} + R\ln\frac{V_2}{V_1}\right);$$

для *адиабатического* процесса $\Delta S = 0$, т.е. процесс протекает при постоянной энтропии, $S = \text{const}$;

для *изотермического* ($T = \text{const}$, т.е. $T_1 = T_2$) процесса

$$\Delta S_{12} = \frac{m}{M} R\ln\frac{V_2}{V_1};$$

для *изохорического* ($V = \text{const}$, т.е. $V_1 = V_2$) процесса

$$\Delta S_{12} = \frac{m}{M} C_V \ln\frac{T_2}{T_1}.$$

Задача 2.71

Вычислить удельные теплоемкости неона и водорода при постоянных объеме (c_V) и давлении (c_P), принимая эти газы за идеальные.

Дано: $i_1 = 3$; $M_1 = 20 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $i_2 = 5$; $M_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Найти: c_V; c_P.

Решение. Удельная теплоемкость идеальных газов выражается формулами:

$$c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{M}; \quad (1)$$

$$c_P = \frac{i+2}{2}\frac{R}{M}; \quad (2)$$

$$[c] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{кг}} = \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Для неона (одноатомный газ) i = 3,

$$c_{V1} = \frac{3}{2}\frac{8,31}{20 \cdot 10^{-3}} = 624\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}};$$

$$c_{P1} = \frac{5}{2}\frac{8,31}{20 \cdot 10^{-3}} = 1,04\ \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Для водорода (двухатомный газ) i = 5,

$$c_{V2} = \frac{5}{2}\frac{8,31}{2 \cdot 10^{-3}} = 10,4\ \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}};$$

$$c_{P2} = \frac{7}{2}\frac{8,31}{2 \cdot 10^{-3}} = 14,6\ \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Ответ: $c_{V1} = 624\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$; $c_{P1} = 1,04\ \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$; $c_{V2} = 10,4\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$; $c_{P2} = 14,6\ \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$.

Задача 2.72

Вычислить удельную теплоемкость $c_{V\,см}$ смеси двух газов (гелия массой $m_1 = 6$ г и азота массой $m_2 = 10$ г) при постоянном объеме.

Дано: $m_1 = 6 \cdot 10^{-3}$кг; $m_2 = 1 \cdot 10^{-2}$кг; $i_1 = 3$; $i_2 = 5$; $M_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $M_2 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Найти: $c_{V\,см}$.

Решение. Удельная теплоемкость смеси газов определяется отношением теплоемкости $C_{см}$ к массе $m_{см}$ этой смеси:

$$c_{см} = \frac{C_{см}}{m_{см}}.$$

Теплоемкость вещества – величина аддитивная, поэтому для двух газов можно записать:

$$c_{V\,см} = \frac{C_1 + C_2}{m_1 + m_2},$$

где C_1 и C_2 – теплоемкость газов; m_1 и m_2 – их массы.

Теплоемкость газов при постоянном объеме определяется соотношениями

$$C_{V1} = \frac{m_1}{M_1}\frac{i_1 R}{2} \quad \text{и} \quad C_{V2} = \frac{m_2}{M_2}\frac{i_2 R}{2},$$

где M_1 и M_2 – молярные массы газов; i_1 и i_2 – числа степеней свободы; R – молярная газовая постоянная.

Тогда

$$c_{V\,см} = \frac{i_1 \dfrac{m_1}{M_1} + i_2 \dfrac{m_2}{M_2}}{m_1 + m_2}\frac{R}{2};$$

$$c_{V\,см} = \frac{3\dfrac{6 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-3}} + 5\dfrac{10^{-2}}{28 \cdot 10^{-3}}}{6 \cdot 10^{-3} + 10^{-2}}\frac{8,31}{2} = 1,63 \cdot 10^3 \ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} = 1,63 \ \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Ответ: $c_{V\,см} = 1,63 \ \dfrac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$.

Задача 2.73

Найти работу A расширения двухатомного идеального газа, которому при постоянном давлении сообщено количество теплоты $Q = 4{,}9$ кДж.

Дано: $i = 5$; $Q = 4{,}9 \cdot 10^3$ Дж; $P = \text{const}$.

Найти: A.

Решение. Работа газа при изобарическом процессе ($P = \text{const}$) определяется формулой

$$A = P\left(V_2 - V_1\right), \tag{1}$$

где V_1 и V_2 – начальный и конечный объемы газа.

Для двух состояний газа (до и после сообщения газу количества теплоты Q) запишем уравнения Менделеева – Клапейрона:

$$PV_1 = \nu RT_1; \tag{2}$$

$$PV_2 = \nu RT_2, \tag{3}$$

где T_1 и T_2 – температуры газа до и после нагревания.

Вычтем из уравнения (3) уравнение (2):

$$P\left(V_2 - V_1\right) = \nu R\left(T_2 - T_1\right).$$

Тогда из (1) следует:

$$A = \nu R\left(T_2 - T_1\right). \tag{4}$$

Найдем по формуле

$$U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT = \frac{m}{M}C_V T$$

изменение внутренней энергии газа ΔU:

$$\Delta U = \frac{i}{2}\nu R\left(T_2 - T_1\right), \tag{5}$$

где i – число степеней свободы молекулы газа, $i = 5$ для двухатомного газа.

Из сравнения выражений (4) и (5) видно, что

$$\Delta U = \frac{i}{2}A. \tag{6}$$

Согласно первому началу термодинамики теплота, сообщенная телу,

$$Q = \Delta U + A. \tag{7}$$

Подставив (6) в (7), получим:

$$Q = \frac{i}{2}A + A = \frac{i+2}{2}A,$$

откуда

$$A = \frac{2}{i+2}Q;$$

$$A = \frac{2}{5+2}4{,}9 \cdot 10^3 = 1{,}4 \cdot 10^3 \text{Дж} = 1{,}4 \text{ кДж}.$$

Ответ: $A = 1{,}4$ кДж.

Задача 2.74

Идеальный газ, занимавший объем $V_1 = 10$ л при давлении $P = 10^5$ Па и температуре $T_1 = 300$ К, был нагрет при постоянном давлении до температуры $T_2 = 510$ К. Найти работу расширения газа.

Дано: $V_1 = 10^{-2}$ м^3; $P = 10^5$ Па; $T_1 = 300$ К; $T_2 = 510$ К.

Найти: A.

Решение. Работа газа при изобарном процессе определяется формулой

$$A = P\left(V_2 - V_1\right), \tag{1}$$

где V_1 и V_2 – начальный и конечный объемы газа.

Согласно закону Гей-Люссака $\frac{V}{T} = \text{const}$, или для двух состояний газа имеем:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2},$$

откуда

$$V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1}. \tag{2}$$

Подставив (2) в (1), получим:

$$A = P\left(V_1 \frac{T_2}{T_1} - V_1\right) = \frac{PV_1}{T_1}\left(T_2 - T_1\right);$$

$$\left[A\right] = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{К}}{\text{К}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^2} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж};$$

$$A = \frac{10^5 \cdot 10^{-2}}{300}\left(510 - 300\right) = 700 \text{ Дж} = 0,7 \text{ кДж}.$$

Ответ: $A = 0,7$ кДж.

Задача 2.75

Азот массой $m = 100$ г нагрет при постоянном давлении на $\Delta T = 50$ К. Найти работу расширения газа и приращение ΔU его внутренней энергии.

Дано: $m = 0,1$ кг; $\Delta T = 50$ К.

Найти: A; ΔU.

Решение. Работа, совершаемая газом при $P = \text{const}$,

$$A = P\left(V_2 - V_1\right) = P\Delta V,$$

где ΔV – увеличение объема газа.

Используя уравнение состояния, запишем:

$$P\Delta V = \frac{m}{M} R\Delta T,$$

следовательно,

$$A = \frac{m}{M} R\Delta T;$$

$$\left[A\right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}} = \text{Дж};$$

$$A = \frac{0,1 \cdot 8,31 \cdot 50}{28 \cdot 10^{-3}} = 14800 \text{ Дж} = 14,8 \text{ кДж}.$$

Изменение внутренней энергии газа можно определить по формуле

$$\Delta U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R\Delta T;$$

$$\left[\Delta U\right] = \frac{\text{кг}\cdot\text{моль}}{\text{кг}}\cdot\frac{\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{моль}\cdot\text{К}} = \text{Дж};$$

$$\Delta U = \frac{5}{2}\frac{0{,}1\cdot 8{,}31\cdot 50}{28\cdot 10^{-3}} = 37\cdot 10^{3}\ \text{Дж} = 37\ \text{кДж}.$$

Ответ: $A = 14{,}8$ кДж; $\Delta U = 37$ кДж.

Задача 2.76

Найти работу, совершаемую при изотермическом расширении кислорода массой $m = 20$ г, находящегося при температуре $t = -20\ °\text{C}$, если его давление изменяется от $P_1 = 500$ кПа до $P_2 = 50$ кПа.

Дано: $m = 20\cdot 10^{-3}$ кг; $M = 32\cdot 10^{-3}$ кг/моль; $T = 253$ К; $P_1 = 5\cdot 10^{5}$ Па; $P_2 = 5\cdot 10^{4}$ Па.

Найти: A.

Решение. Работа газа при изотермическом процессе $(T = \text{const})$ определяется по формуле

$$A = \frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1}. \qquad (1)$$

Для изотермического процесса справедлив закон Бойля – Мариотта:

$$P_1V_1 = P_2V_2,$$

откуда

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_2}. \qquad (2)$$

Подставив выражение (2) в (1), получим:

$$A = \frac{m}{M}RT\ln\frac{P_1}{P_2};$$

$$[A] = \frac{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}} = \text{Дж};$$

$$A = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot 8{,}31 \cdot 253 \ln \frac{5 \cdot 10^{5}}{5 \cdot 10^{4}} = 3 \cdot 10^{3}\,\text{Дж} = 3\ \text{кДж}.$$

Ответ: $A = 3$ кДж.

Задача 2.77

Баллон емкостью $V = 20$ л с кислородом при давлении $P_1 = 10$ МПа и температуре $t_1 = 7\,^\circ\text{C}$ нагревается до $t_2 = 27\,^\circ\text{C}$. Какое количество теплоты при этом поглощает газ?

Дано: $V = 2 \cdot 10^{-2}\,\text{м}^3$; $P_1 = 10^7\,\text{Па}$; $T_1 = 280$ К; $T_2 = 300$ К; $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Найти: Q.

Решение. Если объем газа не изменяется, то процесс изохорический, первое начало термодинамики запишется так: $dQ = dU$, то есть все тепло идет на приращение внутренней энергии;

$$Q = \Delta U = \frac{m}{M}\frac{i}{2} R \Delta T;$$

где i = 5 (число степеней свободы для двухатомной молекулы);

$$\Delta T = T_2 - T_1.$$

Из уравнения газового состояния найдем число молей газа:

$$P_1 V = \frac{m}{M} R T_1;$$

$$\frac{m}{M} = \frac{P_1 V}{R T_1};$$

$$Q = \frac{i}{2}\frac{P_1 V}{R T_1} R (T_2 - T_1) = \frac{i}{2}\frac{P_1 V}{T_1}(T_2 - T_1);$$

$$[Q] = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{К}}{\text{К}} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \cdot \text{м}^3 = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж};$$

$$Q = \frac{5 \cdot 10^7 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 20}{2 \cdot 280} = 357 \text{ кДж}.$$

Ответ: $Q = 357$ кДж.

Задача 2.78

Найти среднюю квадратичную скорость молекул идеального газа, если известна работа его изотермического расширения от объема V_1 до $V_2 = 4V_1$, равная $A = 600$ Дж. Масса газа $m = 20$ г.

Дано: $V_2 = 4V_1$; $A = 600$ Дж; $m = 20 \cdot 10^{-3}$ кг.

Найти: $\Delta\upsilon_{кв}$.

Решение. Работа изотермического расширения газа определяется по формуле

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1},$$

откуда

$$T = \frac{AM}{mR \ln \frac{V_2}{V_1}}.$$

Средняя квадратичная скорость молекул газа

$$\upsilon_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3A}{m \ln \frac{V_2}{V_1}}};$$

$$[\upsilon_{кв}] = \sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}} = \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\upsilon_{кв} = \sqrt{\frac{3 \cdot 600}{20 \cdot 10^{-3} \ln 4}} = 255 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\upsilon_{кв} = 255 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 2.79

Определить количество теплоты, поглощаемое водородом массой $m = 0,2$ кг при нагревании его от температуры $t_1 = 0\,^\circ\mathrm{C}$ до температуры $t_2 = 100\,^\circ\mathrm{C}$ при постоянном давлении. Найти также изменение внутренней энергии газа и совершаемую им работу.

Дано: $m = 0,2$ кг; $t_1 = 0^\circ\,\mathrm{C}$; $t_2 = 100^\circ\,\mathrm{C}$; $P = \mathrm{const}$.

Найти: Q; ΔU; A.

Решение. Количество теплоты Q, поглощаемое газом при изобарном нагревании, определяется по формуле

$$Q = mc_P \Delta T, \tag{1}$$

где m – масса нагреваемого газа; c_P – его удельная теплоемкость при постоянном давлении; ΔT – изменение температуры газа.

Как известно,

$$c_P = \frac{i+2}{2}\frac{R}{M}.$$

Подставив это выражение c_P в формулу (1), получим

$$Q = m\frac{i+2}{2}\frac{R}{M}\Delta T;$$

$$[Q] = \frac{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}} = \text{Дж};$$

$$Q = 0,2\frac{7}{2}\frac{8,31}{2 \cdot 10^{-3}}100 = 291 \cdot 10^3 \text{Дж} = 291 \text{ кДж}.$$

Внутренняя энергия выражается формулой

$$U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT,$$

а изменение внутренней энергии

$$\Delta U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R\Delta T;$$

$$[\Delta U] = \frac{\text{кг} \cdot \text{моль}}{\text{кг}} \cdot \frac{\text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{моль} \cdot \text{К}} = \text{Дж};$$

$$\Delta U = \frac{5}{2} \cdot \frac{0,2 \cdot 8,31 \cdot 100}{2 \cdot 10^{-3}} = 208 \text{ кДж}.$$

Работу расширения газа определим по формуле, выражающей первое начало термодинамики: $Q = \Delta U + A$, откуда

$$A = Q - \Delta U;$$

$$A = 291 \text{ кДж} - 208 \text{ кДж} = 83 \text{ кДж}.$$

Ответ: $Q = 291$ кДж; $\Delta U = 208$ кДж; $A = 83$ кДж.

Задача 2.80

Кислород массой $m = 2$ кг при температуре $T_1 = 293$ К сжимается адиабатически. Найти конечную температуру газа T_2, если в процессе сжатия была совершена работа $A = 200$ кДж.

Дано: $m = 2$ кг; $T_1 = 293$ К; $A = 200$ кДж.

Найти: T_2.

Решение. Работа адиабатического сжатия газа определяется по формуле

$$A = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\frac{m}{M}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] = \frac{m}{M}\frac{R}{\gamma - 1}(T_1 - T_2) = \frac{m}{M}\frac{R}{\gamma - 1}\Delta T,$$

где $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$ – показатель адиабаты; $c_P = \frac{(i+2)R}{2}$ – молярная теплоемкость при постоянном давлении; $c_V = \frac{iR}{2}$ – молярная теплоемкость при постоянном объеме.

Тогда

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{i+2}{i} = \frac{7}{5} = 1,4.$$

Так как для двухатомного газа число степеней свободы молекулы $i=5$, из выражения работы найдем ΔT:

$$\Delta T = \frac{AM(\gamma-1)}{mR};$$

$$T_2 = T_1 + \Delta T = T_1 + \frac{AM(\gamma-1)}{mR};$$

$$[T_2] = K + \frac{\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{Дж}} = \text{К};$$

$$T_2 = 293 + \frac{2\cdot 10^5\cdot 32\cdot 10^{-3}\cdot 0,4}{2\cdot 8,31} = 447\ \text{К}.$$

Ответ: $T_2 = 447$ К.

Задача 2.81

Температура кислорода массой $m = 40$ г в процессе адиабатического расширения понизилась на $\Delta T = 20$ К. Найти работу расширения газа.

Дано: $m = 40\cdot 10^{-3}$ кг; $M = 32\cdot 10^{-3}$ кг/моль; $\Delta T = 20$ К.

Найти: A.

Решение. Работа газа в адиабатическом процессе совершается за счет уменьшения внутренней энергии газа, т.е. $A = -\Delta U$, с учетом формулы

$$\Delta U = \frac{m}{M} C_V \Delta T$$

получаем:

$$A = -\frac{m}{M} C_V \Delta T,$$

где $C_V = \dfrac{iR}{2}$ – молярная теплоемкость при постоянном объеме.

Для двухатомного газа $i=5$, тогда

$$A = -\frac{m}{M}\frac{iR}{2}\Delta T;$$

$$[A]=\frac{\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{К}}=\text{Дж};$$

$$A=-\frac{40\cdot10^{-3}}{32\cdot10^{-3}}\cdot\frac{5\cdot8,31}{2}\cdot20=-519\ \text{Дж}.$$

Ответ: $A=-519$ Дж.

Задача 2.82

Азот массой $m=20$ г при температуре $T_1=293$ К был сжат адиабатически. Объем газа уменьшился в $n=5$ раз. Найти температуру газа T_2 после сжатия.

Дано: $m=20\cdot10^{-3}$ кг; $T_1=293$ К; $n=\frac{V_1}{V_2}=5.$

Найти: T_2.

Решение. Связь между начальными и конечными значениями температуры T и объема V газа при адиабатическом процессе устанавливается уравнением Пуассона

$$\frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \quad \text{или} \quad \frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{nV_1}{V_1}\right)^{\gamma-1}=n^{\gamma-1},$$

где $\gamma=\frac{c_P}{c_V}=\frac{i+2}{i}$.

Так как газ двухатомный, то $i=5$ и $\gamma=\frac{i+2}{2}=1,4$.

Тогда

$$T_2=T_1n^{0,4};$$

$$T_2=293\cdot5^{0,4}=558\ \text{К}.$$

Ответ: $T_2=558$ К.

Задача 2.83

Азот, занимавший объем $V_1 = 6$ л, адиабатически сжимался до объема $V_2 = 3$л. При этом давление повысилось до $P_2 = 1{,}5$ МПа. Найти давление газа до сжатия.

Дано: $V_1 = 6\cdot 10^{-3}$м^3; $V_2 = 3\cdot 10^{-3}$м^3; $P_2 = 1{,}5\cdot 10^6$ Па.

Найти: P_1.

Решение. Согласно уравнению Пуассона

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma},$$

где $\gamma = \dfrac{c_P}{c_V} = \dfrac{i+2}{i} = 1{,}4$ для двухатомного газа.

Тогда

$$P_1 = P_2\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma};$$

$$P_1 = 1{,}5\cdot 10^6\left(\frac{3\cdot 10^{-3}}{6\cdot 10^{-3}}\right)^{1,4} = 0{,}57\cdot 10^6\,\text{Па} = 0{,}57\ \text{МПа}.$$

Ответ: $P_1 = 0{,}57$ МПа.

Задача 2.84

Кислород занимает объем $V_1 = 1$ м^3 и находится под давлением $P_1 = 200$ кПа. Газ нагрели сначала при постоянном давлении до объема $V_2 = 3$ м^3, а затем при постоянном объеме – до давления $P_2 = 500$ кПа. Построить график процесса и найти: 1) изменение ΔU внутренней энергии газа; 2) совершенную им работу A; 3) количество теплоты Q, переданное газу.

Дано: $V_1 = 1$ м^3; $P_1 = 200$ кПа; $V_2 = 3$ м^3; $P_2 = 500$кПа.

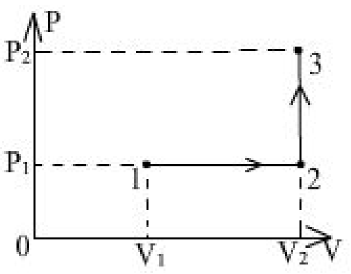
Найти: Q; ΔU; A.

Решение. Построим график процесса (см. рисунок). На графике точками 1, 2, 3 обозначены состояния газа, характеризуемые параметрами ($P_1V_1T_1$), ($P_1V_2T_2$), ($P_2V_2T_3$).

1. Изменение внутренней энергии газа при переходе его из состояния 1 в состояние 3 выражается формулой

$$\Delta U = c_V m \Delta T,$$

где c_V – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; m – масса газа; ΔT – разность температур, соответствующих конечному 3 и начальному 1 состояниям, т.е. $\Delta T = T_3 - T_1$.



Так как $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{M}$, где M – молярная масса газа, то

$$\Delta U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R\left(T_3 - T_1\right), \qquad (1)$$

где $i = 5$.

Температуры T_1 и T_3 выразим из уравнения Менделеева – Клапейрона:

$$PV = \frac{m}{M}RT;$$

$$T_1 = \frac{MP_1V_1}{mR}; \quad T_3 = \frac{MP_2V_2}{mR}.$$

С учетом этого равенство (1) перепишем в виде

$$\Delta U = \frac{i}{2}\left(P_2V_2 - P_1V_1\right);$$

$$\left[\Delta U\right] = \text{Па} \cdot \text{м}^3 = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^2} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж};$$

$$\Delta U = \frac{5}{2}\left(5 \cdot 10^5 \cdot 3 - 2 \cdot 10^5 \cdot 1\right) = 3{,}25 \cdot 10^6\,\text{Дж} = 3{,}25\ \text{МДж}.$$

2. Полная работа, совершенная газом, $A = A_1 + A_2$, где A_1 – работа на участке 1-2; A_2 – работа на участке 2-3. На участке 1-2 давление постоянно $\left(P = \text{const}\right)$. Работа в этом случае выражается формулой $A_1 = P_1\Delta V = P_1\left(V_2 - V_1\right)$. На участке 2-3 объем газа не изменяется, и, следовательно, работа газа на этом участке равна нулю ($A_2 = 0$).

Таким образом,

$$A = A_1 = P_1(V_2 - V_1);$$

$$[A] = \text{Па} \cdot \text{м}^3 = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^2} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж};$$

$$A = 2 \cdot 10^5 \cdot 2 = 4 \cdot 10^5 \,\text{Па} = 0{,}4 \text{ МДж}.$$

3. Согласно первому началу термодинамики количество теплоты Q, переданное газу, равно сумме работы A, совершенной газом, и изменения ΔU внутренней энергии:

$$Q = \Delta U + A;$$

$$Q = 0{,}4 \text{ МДж} + 3{,}25 \text{ МДж} = 3{,}65 \text{ МДж}.$$

Ответ: $\Delta U = 3{,}25$ МДж; $A = 0{,}4$ МДж; $Q = 3{,}65$ МДж.

Задача 2.85

Газ, занимавший объем 20 л при нормальных условиях, был изобарически нагрет до $80\,^\circ$С. Определить работу расширения газа.

Дано: $V_1 = 2 \cdot 10^{-2}\,\text{м}^3$; $P_1 = P_2 = 1{,}01 \cdot 10^5\,\text{Па}$; $T_1 = 273\,\text{К}$; $T_2 = 353\,\text{К}$.

Найти: A.

Решение. Работа расширения газа A при изобарическом процессе определяется по следующей формуле:

$$A = \frac{m}{M} R \Delta T.$$

Число молей газа $\dfrac{m}{M}$ определим из уравнения Менделеева – Клапейрона:

$$P_1 V_1 = \frac{m}{M} R T_1 \quad \text{или} \quad \frac{m}{M} = \frac{P_1 V_1}{R T_1}.$$

Тогда

$$A = \frac{P_1 V_1}{T_1} \Delta T;$$

$$[A] = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{К}}{\text{К}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^2} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж};$$

$$A = \frac{1{,}01 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 80}{273} = 592 \text{ Дж.}$$

Ответ: $A = 592$ Дж.

Задача 2.86

Определить скорость вылета поршня массой 4 кг из цилиндра при адиабатическом расширении воздуха в 40 раз, если начальное давление воздуха 10^7 Па, а объем 0,3 л.

Дано: $m = 4$ кг; $\dfrac{V_2}{V_1} = 40$; $P_1 = 10^7$ Па; $V_1 = 3 \cdot 10^{-4}$ м^3 .

Найти: υ.

Решение. Работа A, совершаемая адиабатически расширяющимся воздухом, в данном случае идет на увеличение кинетической энергии поршня, т.е.

$$A = \frac{m\upsilon^2}{2},$$

где m и υ – масса и скорость поршня.

Для подсчета работы адиабатически расширяющегося газа воспользуемся формулой

$$A = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right],$$

где γ – отношение теплоемкостей газа при постоянном давлении и постоянном объеме, $\gamma = \dfrac{c_P}{c_V} = \dfrac{i+2}{i} = \dfrac{7}{5} = 1{,}4$;

$$A = \frac{10^7 \cdot 0{,}3 \cdot 10^{-3}}{0{,}4}\left[1 - 0{,}22\right] = 5{,}85 \cdot 10^3 \text{Дж.}$$

Так как

$$A = \frac{m\upsilon^2}{2}, \quad \text{то} \quad \upsilon = \sqrt{\frac{2A}{m}};$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2 \cdot 5{,}85 \cdot 10^3}{4}} = 54\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\upsilon = 54\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 2.87

Молекулярный пучок кислорода ударяется о неподвижную стенку. После соударения молекулы отражаются от стенки с той же по модулю скоростью. Определить давление пучка на стенку, если скорость молекул $500\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ и концентрация молекул в пучке $5 \cdot 10^{24}\,\text{м}^{-3}$.

Дано: $\upsilon = 500\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; $n_0 = 5 \cdot 10^{24}\,\text{м}^{-3}$.

Найти: P.

Решение. Давление определяется по формуле

$$P = \frac{F}{S}, \tag{1}$$

где $F -$ сила давления; $S -$ площадь.

Силу давления найдем из второго закона Ньютона:

$$Ft = m\Delta\upsilon, \tag{2}$$

где $m -$ масса кислорода, ударившегося о стенку за время t, $\Delta\upsilon -$ изменение скорости молекул при ударе.

Массу одной молекулы кислорода найдем из закона Авогадро:

$$m_1 = \frac{M}{N_A}, \tag{3}$$

где $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль $-$ молярная масса кислорода; $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$моль$^{-1}$ – постоянная Авагадро.

За время t о стенку ударяются молекулы, находящиеся в объеме $V = S\upsilon t$, масса которых

$$m = m_1 n_0 S \upsilon t. \tag{4}$$

Изменение скорости при соударении

$$\Delta\upsilon = \upsilon - (-\upsilon) = 2\upsilon. \qquad (5)$$

Подставляя выражения (3) – (5) в (2), находим:

$$Ft = \frac{Mn_0 S\upsilon t 2\upsilon}{N_A} = \frac{2Mn_0\upsilon^2 tS}{N_A},$$

откуда

$$P = \frac{F}{S} = \frac{2Mn_0\upsilon^2}{N_A};$$

$$[P] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па};$$

$$P = \frac{2 \cdot 32 \cdot 10^{-3} \cdot 25 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^{24}}{6{,}02 \cdot 10^{23}} = 1{,}33 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Ответ: $P = 1{,}33 \cdot 10^5$ Па.

Задача 2.88

В цилиндре под поршнем находится водород, который имеет массу 0,02 кг и начальную температуру $27\,^\circ$С. Водород сначала расширился адиабатически, увеличив свой объем в 5 раз, а затем был сжат изотермически, причем объем газа уменьшился в 5 раз. Найти температуру в конце адиабатического расширения и работу, совершенную газом. Изобразить процесс графически.

Дано: $m = 0{,}02$ кг; $T_1 = 300$ К; $M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $\frac{V_2}{V_1} = 5$; $i = 5$.

Найти: T_2; A.

Решение. При адиабатном процессе температура и объем газа связаны соотношением

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1},$$

где $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$ – отношение теплоемкостей газа при постоянном давлении и постоянном объеме.

Для водорода $\gamma = 1{,}4$.

Отсюда выражение для конечной температуры T_2 :

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = 300\left(\frac{1}{5}\right)^{0{,}4} = 157 \text{ К}.$$

Работу A_1 газа при адиабатном расширении можно определить по формуле

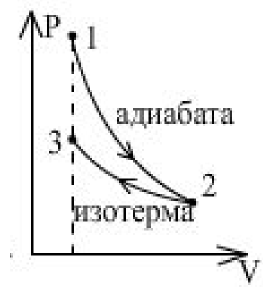
$$A = \frac{m}{M}C_V\left(T_1 - T_2\right) = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R\left(T_1 - T_2\right);$$

$$\left[A\right] = \frac{\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{К}} = \text{Дж};$$

$$A = \frac{0{,}02\cdot 5\cdot 8{,}31}{2\cdot 2\cdot 10^{-3}}\left(300 - 157\right) = 2{,}97\cdot 10^4\,\text{Дж}.$$

Работа A_2 газа при изотермическом процессе может быть выражена в виде:

$$A = RT_2\frac{m}{M}\ln\frac{V_2}{V_1};$$



$$\left[A\right] = \frac{\text{Дж}\cdot\text{К}\cdot\text{кг}\cdot\text{моль}}{\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{К}} = \text{Дж};$$

$$A = \frac{0{,}02\cdot 157\cdot 8{,}31}{2\cdot 10^{-3}}\ln\frac{1}{5} = -2{,}1\cdot 10^4\,\text{Дж}.$$

Знак «минус» показывает, что при сжатии газа работа совершается над газом внешними силами.

Полная работа, совершенная газом при описанных процессах,

$$A = 2{,}97\cdot 10^4 - 2{,}1\cdot 10^4 = 8{,}7\cdot 10^3\,\text{Дж}.$$

График процесса приведен на рисунке.

Ответ: $T_2 = 157$ К; $A = 8{,}7\cdot 10^3\,\text{Дж}$.

Задача 2.89

Азот массой $m = 10$ г, находящийся при нормальных условиях, сжимается до объема $V_2 = 1{,}4$ л. Найти давление P_2, температуру T_2 и работу сжатия A, если азот сжимается: 1) изотермически; 2) адиабатически.

Дано: $m = 0{,}01$ кг; $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $P_1 = 10^5$ Па; $T_1 = 273$ К; $V_1 = 1{,}4 \cdot 10^{-3}$ м^3 .

Найти: P_2; T_2; A.

Решение

1. При изотермическом сжатии газа $T = \text{const}$, поэтому $T_2 = T_1 = 273$ К.

Из уравнения Менделеева – Клапейрона $P_2 V_2 = \frac{m}{M} R T_2$ найдем давление газа:

$$P_2 = \frac{m R T_2}{M V_2};$$

$$[P_2] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^3} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па};$$

$$P_2 = \frac{0{,}01 \cdot 8{,}31 \cdot 273}{28 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-3}} = 5{,}78 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Работа при изотермическом сжатии определяется формулой

$$A = R T_1 \frac{m}{M} \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

По закону Бойля – Мариотта запишем: $P_1 V_1 = P_2 V_2$, откуда найдем соотношение

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{V_2}{V_1}.$$

Тогда

$$A = R T_1 \frac{m}{M} \ln \frac{P_1}{P_2};$$

$$[A] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{кг} \cdot \text{моль}}{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}} = \text{Дж};$$

$$A = \frac{0{,}01 \cdot 273 \cdot 8{,}31}{28 \cdot 10^{-3}} \ln \frac{1}{6} = -1{,}42 \cdot 10^3 \text{ Дж} = -1{,}42 \text{ кДж}.$$

2. Поскольку азот двухатомный газ, то $\gamma = 1{,}4$ (см. предыдущие задачи). Из уравнения Пуассона для адиабатического сжатия запишем:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} \qquad (1)$$

или

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}. \qquad (2)$$

Поделив уравнение (1) на (2), получим:

$$\frac{P_1 T_2}{P_2 T_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{[\gamma-(\gamma-1)]} = \frac{V_2}{V_1},$$

откуда

$$V_1 = \frac{V_2 P_2 T_1}{P_1 T_2}.$$

Согласно уравнению Менделеева – Клапейрона

$$P_1 V_1 = \frac{m}{M} R T_1,$$

тогда

$$V_1 = \frac{m}{M}\frac{RT_1}{P_1}. \qquad (3)$$

Подставив выражение (3) в (1), получим:

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{V_2 M P_1}{mRT_1}\right)^{\gamma},$$

откуда

$$P_2 = \frac{P_1}{\left(\frac{V_2 M P_1}{mRT_1}\right)^{\gamma}};$$

$$[P_2] = \frac{\text{Па}\cdot\text{кг}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}\cdot\text{моль}}{\text{моль}\cdot\text{К}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^3\cdot\text{Па}} = \frac{\text{Па}\cdot\text{м}^2\cdot\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{м}^3\cdot\text{Н}} = \text{Па};$$

$$P_2 = \frac{10^5}{\left(\frac{1{,}4\cdot10^{-3}\cdot28\cdot10^{-3}\cdot10^5}{0{,}01\cdot273\cdot8{,}31}\right)^{1{,}4}} = 11{,}6\cdot10^5\,\text{Па}.$$

Подставив (3) в (2), получим:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2 M P_1}{m R T_1}\right)^{\gamma-1},$$

откуда

$$T_2 = \frac{T_1}{\left(\dfrac{V_2 M P_1}{m R T_1}\right)^{\gamma-1}};$$

$$[T_2] = \frac{\text{К} \cdot \text{кг} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{Па}} = \frac{\text{К} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^3 \cdot \text{Н}} = \text{К};$$

$$T_2 = \frac{273}{\left(\dfrac{1{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot 28 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5}{0{,}01 \cdot 273 \cdot 8{,}31}\right)^{0{,}4}} = 545\,\text{К}.$$

Работу адиабатического сжатия определим по формуле

$$A = \frac{m T_1}{M} \frac{R}{\gamma - 1}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right);$$

$$[A] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{кг} \cdot \text{моль}}{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}} = \text{Дж};$$

$$A = \frac{0{,}01 \cdot 273 \cdot 8{,}31}{28 \cdot 10^{-3}(1{,}4 - 1)}\left(1 - \frac{545}{273}\right) = -2{,}02 \cdot 10^3\,\text{Дж} = -2{,}02\ \text{кДж}.$$

Ответ: 1) $P_1 = 5{,}78 \cdot 10^5$ Па; $T_2 = 273$ К; $A = -1{,}42$ кДж;

2) $P_2 = 11{,}6 \cdot 10^5$ Па; $T_2 = 545$ К; $A = -2{,}02$ кДж.

Задача 2.90

Объем газа при адиабатическом расширении увеличился в два раза, а температура уменьшилась в 1,32 раза. Найти число степеней свободы молекул этого газа.

Дано: $\dfrac{V_2}{V_1} = 2$; $\dfrac{T_1}{T_2} = 1{,}32$.

Найти: i.

Решение. Показатель адиабаты равен $\gamma = \dfrac{i+2}{i}$.

Запишем уравнение Пуассона:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}.$$

По условию $\dfrac{T_1}{T_2}$ =1,32, а $\dfrac{V_2}{V_1}$ = 2, тогда

$$2^{\gamma-1} = 1{,}32 \quad \text{или} \quad \left(\frac{i+2}{i} - 1\right)\ln 2 = \ln 1{,}32,$$

отсюда

$$\frac{i+2-i}{i} = \frac{2}{i} = \frac{\ln 1{,}32}{\ln 2} = 0{,}4$$

или

$$\frac{2}{i} = 0{,}4 \text{ , } \quad \text{откуда} \quad i = \frac{2}{0{,}4} = 5.$$

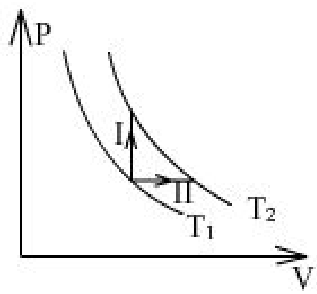
Ответ: $i = 5$.

Задача 2.91

Кислород нагревают от $t_1 = 50\,^\circ\text{C}$ до $t_2 = 60\,^\circ\text{C}$. Масса кислорода $m = 160$ г. Найти количество поглощенной теплоты и изменение внутренней энергии при изохорическом и изобарическом процессах. Начальное давление близко к атмосферному.

Дано: $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $m = 0{,}16$ кг; $T_1 = 323$ К; $T_2 = 333$ К; $P_1 = 10^5$ Па; $R = 8{,}31$ Дж/моль $\cdot$ К; $P = \text{const}$; $V = \text{const}$.

Найти: Q; ΔU_V; ΔU_P.



Решение. При давлении, близком к атмосферному, газ можно считать идеальным. Графики изохорного (I) и изобарного (II) процессов (см. рисунок) лежат между одними и теми же изотермами, следовательно, изменение внутренней энергии газа должно быть одинаковым:

$$\Delta U_P = \Delta U_V = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R\Delta T = 1037{,}5\ \text{Дж},$$

где i = 5 (число степеней свободы двухатомной молекулы кислорода O_2).

Количество поглощенной теплоты характеризуется молярной теплоемкостью. Для изохорического процесса (см. рис.)

$$Q_V = \frac{m}{M}C_V\left(T_2 - T_1\right),$$

где $C_V -$ молярная теплоемкость при постоянном объеме;

$$C_V = \frac{iR}{2}.$$

Первое начало термодинамики для изохорического процесса ($V = \text{const}$; $\Delta V = 0$; $A = 0$):

$$Q_V = \Delta U_V = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\Delta T;$$

$$\left[Q_V\right] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{кг} \cdot \text{моль}}{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}} = \text{Дж};$$

$$Q_V = \frac{0{,}16}{32 \cdot 10^{-3}}\frac{5}{2}8{,}31 \cdot 10 = 1037{,}5\ \text{Дж}.$$

Для изобарического процесса

$$Q_P = \frac{m}{M}C_P\left(T_2 - T_1\right),$$

где $C_P -$ молярная теплоемкость при постоянном давлении, по уравнению Майера

$$C_P = C_V + R; \quad C_P = \frac{iR}{2} + R = \frac{(i+2)R}{2};$$

$$Q_P = \frac{m}{M}\frac{(i+2)R}{2}\left(T_2 - T_1\right);$$

$$\left[Q_P\right] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{кг} \cdot \text{моль}}{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}} = \text{Дж};$$

$$Q_P = \frac{0{,}16}{32\cdot 10^{-3}} \frac{(5+2)}{2} 8{,}31\cdot 10 = 1452{,}5 \text{ Дж};$$

$Q_P > Q_V$ – количество теплоты для нагревания при изобарическом процессе больше, чем при изохорическом процессе, так как часть энергии идет на совершение работы при увеличении объема, очевидно, разность $(Q_P - \Delta U_P)$ равна работе, совершаемой газом при изобарическом нагревании.

Ответ: $\Delta U_P = \Delta U_V = 1037{,}5$ Дж; $Q_V = 1037{,}5$ Дж; $Q_P = 1452{,}5$ Дж.

Задача 2.92

Азот, занимавший при давлении $P = 10^5$ Па объем $V_1 = 10$ л, расширился вдвое: $V_2 = 2V_1$. Найти конечное давление и работу, совершаемую газом, при следующих процессах: 1) изобарном (1-1′); 2) изотермическом (1-2); 3) адиабатном (1-3) (см. рисунок).

Дано: $P = 10^5$ *Па*; $V_1 = 0{,}01$ м^3; $V_2 = 2V_1$;
1) $P = \text{const}$; 2) $T = \text{const}$; 3) $dQ = 0$.

Найти: A; P_2.

Решение. Полная работа

$$A = \int_{V_1}^{V_2} PdV,$$

совершаемая газом при расширении от объема V_1 до объема V_2, определяется площадью, ограниченной осью абсцисс, кривой $P = f(V)$ и прямыми V_1 и V_2 (см. рис.).

Следовательно, наибольшая работа будет совершена при изобарном процессе (1-1′), наименьшая – при адиабатном (1-3), так как работа совершается только за счет убыли внутренней энергии.

1. При изобарном процессе $P = \text{const}$;

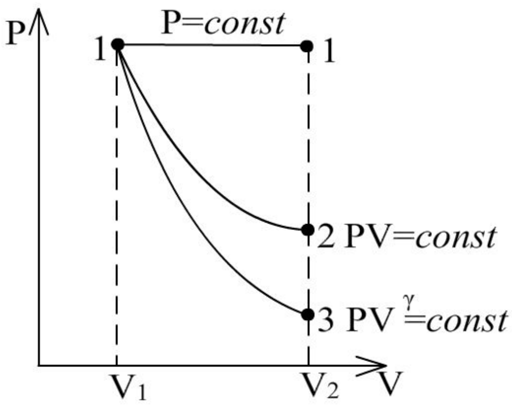
$$P_2 = P_1 = 10^5 \text{Па};$$

$$A_{1-1'} = P_1(V_2 - V_1);$$

$$A_{1-1'} = P_2\left(2V_1 - V_1\right) = P_1V_1;$$

$$A_{1-1'} = 10^5 \cdot 10^{-2} = 10^3 \text{Дж}.$$

2. При изотермическом процессе $T = \text{const}$;



$$P_1V_1 = P_2V_2;$$

$$P_2 = \frac{P_1V_1}{V_2} = \frac{P_1V_1}{2V_1} = \frac{P_1}{2};$$

$$P_2 = \frac{10^5}{2} = 0,5 \cdot 10^5 \text{ Па};$$

$$A_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} PdV;$$

$$P = \frac{P_1V_1}{V};$$

$$A_{1-2} = P_1V_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = P_1V_1 \ln\frac{V_2}{V_1};$$

$$A_{1-2} = 10^5 \cdot 10^{-2} \ln 2 = 10^3 \cdot 0,69 = 690 \text{ Дж}.$$

3. При адиабатном процессе $PV^{\gamma} = \text{const}$;

$$P_1V_1^{\gamma} = P_2V_2^{\gamma}.$$

Конечное давление

$$P_2 = P_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma},$$

где $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$ – показатель адиабаты;

$$\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{5+2}{5} = 1,4.$$

Азот N_2, молекула двухатомная. Чисто степеней свободы $i=5$;

$$P_2 = 10^5\left(\frac{1}{2}\right)^{1,4} = 0,38\cdot 10^5\,\text{Па}.$$

При адиабатном процессе нет теплообмена с окружающей средой, $\Delta Q = 0$; первое начало термодинамики запишется так:

$$0 = \Delta U + A_{1-3};$$

$$A_{1-3} = -\Delta U.$$

Газ расширяется за счет убыли внутренней энергии:

$$A_{1-3} = -\frac{m}{M}\frac{i}{2}R\left(T_2 - T_1\right).$$

Из уравнения газового состояния для первого состояния

$$P_1V_1 = \frac{m}{M}RT_1; \qquad T_1 = \frac{P_1V_1}{\frac{m}{M}R}.$$

Для второго состояния

$$P_2V_2 = \frac{m}{M}RT_2; \qquad T_2 = \frac{P_2V_2}{\frac{m}{M}R}.$$

Подставляем в формулу работы:

$$A_{1-3} = -\frac{i}{2}\left(P_2V_2 - P_1V_1\right);$$

$$\left[A_{1-3}\right] = \text{Па}\cdot\text{м}^3 = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}\cdot\text{м}^3 = \text{Н}\cdot\text{м} = \text{Дж};$$

$$A_{1-3} = -\frac{5}{2}\left(0,38\cdot 10^5\cdot 2\cdot 10^{-2} - 10^5\cdot 10^{-2}\right) = -\frac{5}{2}10^3\left(0,76-1\right) = 600\ \text{Дж}.$$

Ответ: 1) $P = 10^5\,\text{Па}$; $A = 1000$ Дж; 2) $P = 0,5\cdot 10^5\,\text{Па}$; $A = 690$ Дж; 3) $P = 0,38\cdot 10^5\,\text{Па}$; $A = 600$ Дж.

Задача 2.93

Двухатомный идеальный газ, занимавший при давлении $P_1 = 3 \cdot 10^5$ Па объем $V_1 = 4$ л, расширяют до объема $V_3 = 6$ л, при этом давление падает до значения $P_3 = 10^5$Па. Процесс происходит сначала по адиабате, затем по изохоре. Определить работу сил давления газа, изменение его внутренней энергии и количество поглощенной теплоты при этом переходе.

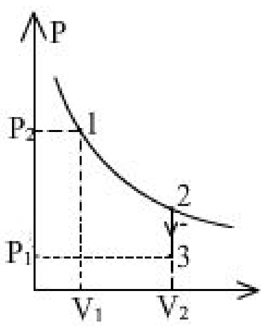
Дано: $i = 5$; $P_1 = 3 \cdot 10^5$ Па; $V_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ м^3; $V_3 = 6 \cdot 10^{-3}$ м^3; $P_3 = 10^5$ Па; (1-2) $PV^\gamma = \text{const}$; (2-3) $V = \text{const}$.

Найти: A, Q, ΔU.

Решение. Газ участвует в двух процессах: 1) адиабатное расширение (1-2), где объем полностью переходит в конечное состояние; 2) изохорный процесс (2-3), который приводит газ к давлению в конечном состоянии (см. рисунок).

Чтобы определить, как проходит изохорный процесс, при нагревании или при охлаждении, надо найти промежуточное давление P_2.

Согласно уравнению адиабаты



$$P_1V_1^\gamma = P_2V_2^\gamma; \quad P_2 = P_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma.$$

$$[P_2] = Па.$$

Газ двухатомный, следовательно,

$$\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{5+2}{5} = 1{,}4;$$

$$P_2 = 3 \cdot 10^5 \left(\frac{4}{6}\right)^{1,4} = 1{,}7 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Это больше, чем $P_3 = 10^5$ Па.

Из этого следует, что при изохорическом переходе давление уменьшается; так как $\frac{P}{T} = \text{const}$, то газ должен охлаждаться.

Чтобы найти работу A_{1-3} и количество поглощенной теплоты Q_{1-3} при переходе из состояния 1 в состояние 3, надо рассмотреть каждый из процессов отдельно.

При этом $A_{1-3} = A_{1-2} + A_{2-3}$; $Q_{1-3} = Q_{1-2} + Q_{2-3}$.

Работа сил давления газа для изохорного процесса (2-3) равна нулю, а для адиабатического процесса (1-2)

$$A_{1-2} = -\Delta U_{1-2};$$

$$A_{1-2} = -\frac{m}{M}\frac{i}{2}R\left(T_2 - T_1\right).$$

Из уравнения газового состояния Менделеева – Клапейрона выразим T_2 и T_1:

$$P_1V_1 = \frac{m}{M}RT_1; \qquad T_1 = \frac{P_1V_1}{\frac{m}{M}R}.$$

$$P_2V_2 = \frac{m}{M}RT_2; \qquad T_2 = \frac{P_2V_2}{\frac{m}{M}R}.$$

Тогда

$$A_{1-2} = -\frac{i}{2}\left(P_2V_2 - P_1V_1\right);$$

$$\left[A_{1-2}\right] = \text{Па}\cdot\text{м}^3 = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}\cdot\text{м}^3 = \text{Н}\cdot\text{м} = \text{Дж};$$

$$A_{1-2} = -\frac{5}{2}\left(1{,}7\cdot10^5\cdot6\cdot10^{-3} - 3\cdot10^5\cdot4\cdot10^{-3}\right) = 450 \text{ Дж}.$$

Следовательно, $A_{1-3} = 450$ Дж.

Количество теплоты для адиабатного процесса $Q_{1-2} = 0$, для изохорного процесса

$$Q_{2-3} = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R\left(T_3 - T_2\right).$$

Используя уравнение Менделеева – Клапейрона, для состояний 2 и 3 получим:

$$Q_{1-3} = Q_{2-3} = \frac{i}{2}\left(P_3V_3 - P_2V_3\right);$$

$$Q_{2-3} = \frac{5}{2}\left(10^5 - 1{,}7 \cdot 10^5\right) \cdot 6 \cdot 10^{-3} = -1050 \text{ Дж}.$$

Общее количество теплоты

$$Q_{1-3} = -1050 \text{ Дж}.$$

Знак «минус» показывает, что газ отдал теплоту окружающим телам.
Изменение внутренней энергии

$$\Delta U_{1-3} = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R\left(T_3 - T_1\right).$$

Используя уравнение Менделеева – Клапейрона, можно записать:

$$\Delta U_{1-3} = \frac{i}{2}\left(P_3 V_3 - P_1 V_1\right);$$

$$\left[\Delta U_{1-3}\right] = \text{Па} \cdot \text{м}^3 = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \cdot \text{м}^3 = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж};$$

$$\Delta U_{1-3} = \frac{5}{2}\left(10^5 \cdot 6 \cdot 10^{-3} - 3 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-3}\right) = -1500 \text{ Дж}.$$

Внутренняя энергия уменьшается, газ охлаждается.

Ответ: $P_2 = 1{,}7 \cdot 10^5$ Па; $A_{1-2} = 450$ Дж; $Q_{1-3} = -1050$ Дж; $\Delta U_{1-3} = -1500$ Дж.

Задача 2.94

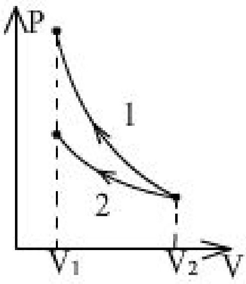
Двухатомный газ необходимо сжать от объема V_1 = 5 л до объема V_2 = 2,5 л. Определить, во сколько раз и как выгоднее сжимать газ, адиабатно или изотермически.

Дано: $i = 5$; $V_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ м^3; $V_2 = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ м^3; $Q = 0$; $T = \text{const}$.

Найти: $\dfrac{A_1}{A_2}$.

Решение. Диаграммы обоих процессов – адиабата (кривая 1) и изотерма (кривая 2) в координатах P,V представляют собой гиперболы (см. рисунок), но адиабата $\left(PV^{\gamma} = \text{const}\right)$ – более крутая, чем изотерма $\left(PV = \text{const}\right)$.

Поскольку работа в обоих процессах численно равна площади, ограниченной осью абсцисс, прямыми V_1 и V_2 и, соответственно, адиабатой и изотермой, из рисунка следует, что газ изотермически сжимать выгоднее (при сжатии газа работа совершается внешними силами).



Подтвердим этот вывод вычислениями. Работа при адиабатическом сжатии

$$A_1 = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\frac{m}{M}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right], \tag{1}$$

где $\gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{i+2}{i}$; $i = 5$; $\gamma = 1{,}4$; $T_1 -$ начальная температура газа; V_1 и V_2 – начальный и конечный объемы газа соответственно.

Работа газа при изотермическом сжатии

$$A_2 = \frac{m}{M} RT \ln\frac{V_2}{V_1}. \tag{2}$$

Из уравнений (1) и (2) следует, что

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}}{(\gamma - 1)\ln\frac{V_2}{V_1}}$$

(учли, что $T = T_1$);

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{1 - \left(\frac{5\cdot 10^{-3}}{2{,}5\cdot 10^{-3}}\right)^{0{,}4}}{(1{,}4 - 1)\ln 0{,}5} = 1{,}15.$$

Изотермически сжимать газ выгоднее.

Ответ: $\frac{A_1}{A_2}$ = 1,15 – изотермически сжимать газ выгоднее.

Задача 2.95

Некоторый двухатомный газ подвергают политропному сжатию, в результате чего давление газа возросло от $P_1 = 10$ кПа до $P_2 = 30$ кПа, а объем газа уменьшился от V_1 = 2,5 л до V_2 = 1 л.

Определить: 1) показатель политропы n; 2) изменение внутренней энергии ΔU газа.

Дано: $i = 5$; $P_1 = 10^4$ Па; $P_2 = 3 \cdot 10^4$ Па; $V_1 = 2,5 \cdot 10^{-3}$ м^3; $V_2 = 10^{-3}$ м^3.

Найти: 1) n; 2) ΔU.

Решение

1. Уравнение политропного процесса для двух состояний газа (начального 1 и конечного 2) можно записать в виде

$$P_1 V_1^{\,n} = P_2 V_2^{\,n},$$

где $n -$ показатель политропы.

Возможна другая форма записи:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^n$$

или, учитывая условие задачи, $\dfrac{P_2}{P_1}$ = 3 и $\dfrac{V_1}{V_2}$ = 2,5, получим

$$3 = (2,5)^n,$$

откуда искомый показатель политропы $n = 1,2$.

2. Внутренняя энергия газа – однозначная функция состояния, при всех процессах изменение внутренней энергии одинаково и равно

$$\Delta U = \nu C_V \left(T_2 - T_1\right), \tag{1}$$

где ν – количество вещества; $C_V = \dfrac{iR}{2}$ – молярная теплоемкость при постоянном объеме.

Записав уравнение Менделеева – Клапейрона для двух состояний газа $P_1V_1 = \nu RT_1$; $P_2V_2 = \nu RT_2$, найдем температуры T_2 и T_1:

$$T_1 = \frac{P_1V_1}{\nu R}; \quad T_2 = \frac{P_2V_2}{\nu R}. \qquad (2)$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), получим:

$$\Delta U = \frac{C_V}{R}\left(P_2V_2 - P_1V_1\right) = \frac{i}{2}\left(3P_1 \cdot 3V_1 - P_1V_1\right) = \frac{8i}{2}P_1V_1 = 20P_1V_1;$$

$$\left[\Delta U\right] = \text{Па} \cdot \text{м}^3 = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \cdot \text{м}^3 = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж};$$

$$\Delta U = 20 \cdot 10^4 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3} = 200 \text{ Дж}.$$

Ответ: 1) $n = 1{,}2$; 2) $\Delta U = 200$ Дж.

Задача 2.96

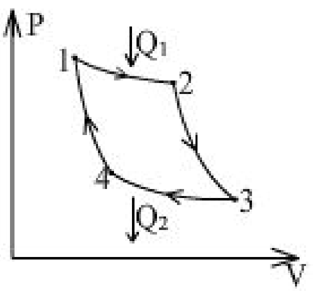
Температура пара, поступающего в паровую машину, $t_1 = 127\,°\text{C}$; температура в холодильнике $t_2 = 27\,°\text{C}$. Определить теоретически максимальную работу при затрате количества теплоты $Q_1 = 4{,}2$ кДж.

Дано: $T_1 = 400$ К; $T_2 = 300$ К; $Q_1 = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж.

Найти: A.

Решение. Для того чтобы работа, совершаемая тепловой машиной (тепловым двигателем), была максимальной, необходимо, чтобы цикл, по которому работает двигатель, был обратимым.

При наличии нагревателя с температурой T_1 и холодильника с температурой T_2 возможен только один обратимый цикл – цикл Карно, состоящий из двух изотерм и двух адиабат (см. рисунок).



Коэффициент полезного действия этого цикла

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Коэффициент полезного действия любого теплового двигателя

$$\eta = \frac{A}{Q_1},$$

где $A-$ полезная работа, совершаемая двигателем; Q_1 – количество теплоты, полученное рабочим телом от нагревателя.

Приравнивая правые части

$$\frac{A}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

найдем полезную работу, совершаемую тепловой машиной:

$$A = Q_1\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right);$$

$$[A] = \text{Дж} \cdot \frac{\text{К}}{\text{К}} = \text{Дж};$$

$$A = 4,2 \cdot 10^3\left(1 - \frac{300}{400}\right) = 1,05 \cdot 10^3 \text{Дж} = 1,05 \text{ кДж}.$$

Ответ: $A = 1,05$ кДж.

Задача 2.97

Идеальный двухатомный газ, содержащий количество вещества ν = 1 моль, находится под давлением $P_1 = 250$ кПа и занимает объем $V_1 = 10$ л. Сначала газ изохорно нагревают до температуры T_2 = 400 К. Далее, изотермически расширяя, доводят его до первоначального давления. После этого путем изобарного сжатия возвращают газ в начальное состояние. Определить термический кпд цикла.

Дано: ν = 1 моль; $P_1 = 25 \cdot 10^4$ Па; $V_1 = 10 \cdot 10^{-3}$ м^3; T_2 = 400 К.

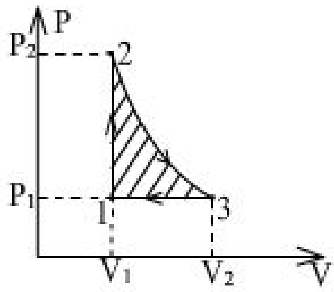
Найти: η.

Решение. Для наглядности построим сначала график цикла, который состоит из изохоры, изотермы и изобары. В координатах P, V этот цикл имеет вид, представленный на рисунке. Характерные точки цикла обозначим 1, 2, 3.

Для любого цикла кпд определяется выражением

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad \text{или} \quad \eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}, \tag{1}$$

где Q_1 – количество теплоты, полученное газом за цикл от нагревателя; Q_2 – количество теплоты, отданное газом за цикл холодильнику.



Заметим, что разность количества теплоты $Q_1 - Q_2$ равна работе A, совершаемой газом за цикл. Эта работа на графике в координатах P, V (см. рис.) изображается площадью цикла (площадь цикла заштрихована).

Рабочее вещество (газ) получает количество теплоты Q_1 на двух участках: Q_{12} на участке 1-2 (изохорный процесс) и Q_{23} на участке 2-3 (изотермический процесс). Таким образом, $Q_1 = Q_{12} + Q_{23}$. Количество теплоты, полученное газом при изохорном процессе,

$$Q_{12} = \nu C_V \left(T_2 - T_1\right),$$

где ν – количество вещества; C_V – молярная теплоемкость при постоянном объеме.

Температуру T_1 начального состояния газа найдем, воспользовавшись уравнением Менделеева – Клапейрона:

$$T_1 = \frac{P_1 V_1}{\nu R};$$

$$[T_1] = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{моль} \cdot \text{К}}{\text{моль} \cdot \text{Дж}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{К}}{\text{м}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{м}} = \text{К};$$

$$T_1 = \frac{250 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 8{,}31} = 300 \text{ К}.$$

Количество теплоты, полученное газом при изотермическом процессе,

$$Q_{23} = \nu R T_2 \ln \frac{V_2}{V_1},$$

где V_2 – объем, занимаемый газом при температуре T_2 и давлении P_1 (точка 3 на графике).

На участке 3-1 газ отдает количество теплоты Q_2, равное

$$Q_2 = Q_{31} = \nu C_P \left(T_2 - T_1\right),$$

где C_P – молярная теплоемкость при изобарном процессе.

Подставим найденные значения Q_1 и Q_2 в формулу (1):

$$\eta = 1 - \frac{\nu C_P \left(T_2 - T_1\right)}{\nu C_V \left(T_2 - T_1\right) + \nu R T_2 \ln \dfrac{V_2}{V_1}}.$$

В полученном выражении заменим отношение $\dfrac{V_2}{V_1}$, согласно закону Гей-Люссака, отношением температур $\left(\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{T_2}{T_1}\right)$ и выразим C_P и C_V через число степеней свободы молекулы: $C_V = \dfrac{iR}{2}$, $C_P = \dfrac{(i+2)R}{2}$. Тогда после сокращения на ν и $\dfrac{R}{2}$ получим:

$$\eta = 1 - \frac{(i+2)\left(T_2 - T_1\right)}{i\left(T_2 - T_1\right) + 2T_2 \ln \dfrac{T_2}{T_1}};$$

$$\eta = 1 - \frac{(5+2)\left(400 - 300\right)}{5\left(400 - 300\right) + 2 \cdot 400 \ln \dfrac{400}{300}} = 0{,}041 = 4{,}1\,\%.$$

Ответ: $\eta = 4{,}1\ \%$.

Задача 2.98

Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, совершает за один цикл работу $1{,}5 \cdot 10^5$ Дж. Температура нагревателя 400 К, температура холодильника 260 К. Найти кпд машины, количество теплоты, получаемое машиной за один цикл от нагревателя, и количество теплоты, отдаваемое за один цикл холодильнику.

Дано: $A = 1,5 \cdot 10^5$ Дж; $T_1 = 400$ К; $T_2 = 260$ К.

Найти: η; Q_1; Q_2.

Решение. Для цикла Карно кпд определяется формулой

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \qquad (1)$$

С другой стороны, термический кпд выражается формулой

$$\eta = \frac{A}{Q_1}, \qquad (2)$$

где $A-$ работа, совершенная рабочим телом тепловой машины; Q_1- теплота, полученная от нагревателя.

Из (1) и (2) имеем:

$$Q_1 = \frac{A}{\eta} = \frac{AT_1}{T_1 - T_2}. \qquad (3)$$

Работа, совершенная рабочим телом машины, определяется разностью полученной от нагревателя теплоты Q_1 и отданной холодильнику теплоты Q_2: $A = Q_1 - Q_2$.

Отсюда $Q_2 = Q_1 - A$ или с учетом (3)

$$Q_2 = \frac{AT_1}{T_1 - T_2} - A = \frac{AT_2}{T_1 - T_2}. \qquad (4)$$

Проверим размерность равенств (1), (3) и (4):

$$[\eta] = \frac{\text{К}}{\text{К}} = 1;$$

$$[Q_1] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{К}} = \text{Дж};$$

$$[Q_2] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{К}} = \text{Дж};$$

$$\eta = \frac{400 - 260}{400} = 0,35 = 35\,\%;$$

$$Q_1 = \frac{1,5 \cdot 10^5 \cdot 400}{400 - 260} = 429 \text{ Дж};$$

$$Q_2 = \frac{1{,}5 \cdot 10^5 \cdot 260}{400 - 260} = 279 \text{ Дж.}$$

Ответ: $\eta = 35\,\%$; $Q_1 = 429$ Дж; $Q_2 = 279$ Дж.

Задача 2.99

Температура нагревателя тепловой машины 500 К. Температура холодильника 400 К. Определить кпд тепловой машины, работающей по циклу Карно, и полезную мощность машины, если нагреватель ежесекундно передает ей 1675 Дж теплоты.

Дано: $T_1 = 500$ К; $T_2 = 400$ К; $Q = 1675$ Дж.

Найти: η, N.

Решение. Коэффициент полезного действия машины определяется по формуле

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad \text{или} \quad \eta = \frac{A}{Q_1}.$$

Из этих выражений находим:

$$A = \eta Q_1 = Q_1 \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Произведем вычисления:

$$\eta = \frac{500 - 400}{500} = 0{,}2;$$

$$A = 0{,}2 \cdot 1675 = 335 \text{ Дж.}$$

Эта работа совершается за 1 с, следовательно, полезная мощность машины

$$N = \frac{A}{t} = 335 \ \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = 335 \text{ Вт.}$$

Ответ: $N = 335$ Вт; $\eta = 20\,\%$.

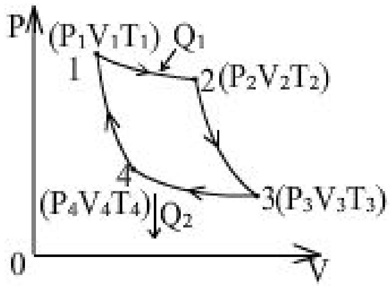
Задача 2.100

Кислород массой 1 кг совершает цикл Карно. При изотермическом расширении газа его объем увеличивается в 2 раза, а при последующем адиабатическом расширении совершается работа 3000 Дж. Определить работу, совершенную за цикл.

Дано: $i = 5$; $V_2 = 2V_1$; $A_{23} = 3000$ Дж;

Найти: A.

Решение. Идеальный цикл Карно состоит из двух изотерм и двух адиабат (см. рисунок). На рисунке участок 1-2 соответствует изотермическому расширению газа $(T_1 = T_2)$, участок 2-3 – адиабатическому расширению газа, участок 3-4 – изотермическому сжатию $(T_3 = T_4)$ и участок 4-1 – адиабатическому сжатию.



При изотермическом расширении внутренняя энергия идеального газа остается постоянной, следовательно, все подводимое тепло Q_1 идет на работу по расширению газа на участке 1-2, т.е.

$$Q_1 = A_{12} = \frac{m}{M} RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1}. \tag{1}$$

При изотермическом сжатии на участке 3-4 тепло отдается холодильнику (Q_2), и это количество теплоты определяется работой, затраченной на сжатие газа:

$$Q_2 = A_{34} = \frac{m}{M} RT_3 \ln\frac{V_4}{V_3}. \tag{2}$$

Состояния 2 и 3 лежат на одной адиабате, поэтому можно записать:

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1}. \tag{3}$$

Для состояний 4 и 1 , которые отвечают одной адиабате, имеем:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_4 V_4^{\gamma-1}. \tag{4}$$

Поделив выражения (3) на (4), получим

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}. \tag{5}$$

Так как $T_1 = T_2$ и $T_3 = T_4$, работа при адиабатическом расширении на участке 2-3 равна

$$A_{23} = -\Delta U_{23} = -\frac{m}{M}\frac{i}{2}R\left(T_2 - T_3\right). \qquad (6)$$

Работа при адиабатическом сжатии на участке 4-1

$$A_{41} = -\Delta U_{41} = -\frac{m}{M}\frac{i}{2}R\left(T_1 - T_4\right).$$

Так как

$$T_1 = T_2, \quad \text{а} \quad T_3 = T_4, \quad \text{то} \ A_{23} = -A_{41},$$

т.е. полная работа по адиабатическому сжатию и расширению равна нулю.

Следовательно, работа цикла

$$A = A_{12} - A_{34}.$$

Из уравнений (1), (2) и (5) получим:

$$A = \frac{m}{M}R\left(T_1 - T_4\right)\ln\frac{V_2}{V_1}. \qquad (7)$$

Из уравнения (6) выразим разность температур $T_2 - T_3$, равную $T_1 - T_4$, и подставим в выражение (7):

$$A = \frac{2}{i}A_{23}\ln\frac{V_2}{V_1};$$

$$A = \frac{2}{5}\cdot 3000\cdot 0{,}693 = 831{,}6 \text{ Дж.}$$

Ответ: $A = 831{,}6$ Дж.

Задача 2.101

При давлении 10^5 Па 0,2 моля двухатомного газа занимает объем 10 л. Газ изобарно сжимают до объема 4 л, затем сжимают адиабатно, после чего газ изотермически расширяют до начального объема и давления. Построить график процесса в координатах *P*, *V*. Найти работу, совершенную газом за один цикл; температуру, давление и объем в характерных точках процесса; количество теплоты, полученное газом от нагревателя и отданное газом холодильнику, а также термический кпд цикла.

Дано: ν = 0,2 моль; $P_1 = 10^5$ Па; $V_1 = 10^{-2}$ м^3; $V_2 = 4\cdot 10^{-3}$ м^3; $T_3 = T_1$; $P_1 = P_2$; $i = 5$.

Найти: A; T_1; T_2; P_3; V_3; Q_1; Q_2; η.

Решение. Из уравнения Менделеева – Клапейрона $PV_1 = \nu RT_1$ находим:

$$T_1 = \frac{P_1 V_1}{\nu R};$$

$$[T_1] = \frac{\text{Па}\cdot\text{м}^3\cdot\text{моль}\cdot\text{К}}{\text{моль}\cdot\text{Дж}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^3\cdot\text{К}}{\text{м}^2\cdot\text{Н}\cdot\text{м}} = \text{К};$$

$$T_1 = \frac{10^5\cdot 10^{-2}}{0{,}2\cdot 8{,}31} = 602\ \text{К}.$$

Из уравнения изобарного процесса $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$ находим:

$$T_2 = \frac{T_1 V_2}{V_1}.$$

$$[T_2] = \frac{\text{К}\cdot\text{м}^3}{\text{м}^3} = \text{К};$$

$$T_2 = \frac{602\cdot 4\cdot 10^{-3}}{10^{-2}} = 241\ \text{К}.$$

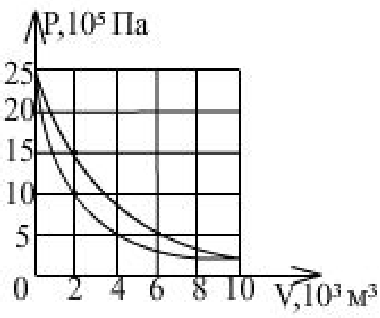
Найдем координаты точки пересечения адиабаты и изотермы. Из уравнения адиабатического процесса $T_2 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_3^{\gamma-1}$ (γ = 1,4 для двухатомного газа), откуда

$$V_3 = V_2\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}};$$

$$[V_3] = \text{м}^3\cdot\frac{\text{К}}{\text{К}} = \text{м}^3;$$

$$V_3 = 4\cdot 10^{-3}\left(\frac{241}{602}\right)^{\frac{1}{0,4}} = 4{,}05\cdot 10^{-4}\,\text{м}^3.$$

Из уравнения изотермического процесса $P_3V_3 = P_1V_1$



$$P_3 = \frac{P_1V_1}{V_3};$$

$$[P_3] = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^3} = \text{Па};$$

$$P_3 = \frac{10^5 \cdot 10^{-2}}{4,05 \cdot 10^{-4}} = 2,47 \cdot 10^6 \,\text{Па}.$$

Зная координаты точек пересечения изотермы и адиабаты между собой и с изобарой, строим график процесса (см. рисунок). Количество теплоты, полученное газом от нагревателя, определим по первому закону термодинамики:

$$dQ = \nu C_V dT + PdV.$$

При изотермическом процессе $dU = \nu C_V dT = 0$ и $dQ = PdV$ (работа расширения); следовательно,

$$Q_1 = \frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_1}{V_3};$$

$$Q_1 = \frac{\text{моль} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{моль} \cdot \text{К}} = \text{Дж};$$

$$Q_1 = 0,2 \cdot 8,31 \cdot 602 \cdot 3,2 = 3,2 \cdot 10^3 \,\text{Дж} = 3,2 \text{ кДж}.$$

Количество теплоты, отданное газом холодильнику при изобарном процессе,

$$Q_2 = \nu C_P (T_1 - T_2);$$

$$Q_2 = \frac{\text{моль} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{моль} \cdot \text{К}} = \text{Дж};$$

$$Q_2 = 0,2 \cdot \frac{7}{2} \cdot 8,31 \cdot (602 - 241) = 2,1 \cdot 10^3 \text{Дж} = 2,1 \text{ кДж}.$$

Работа, совершенная газом,

$$A = Q_1 - Q_2;$$

$$A = 3,2 - 2,1 = 1,1 \text{ кДж}.$$

Находим кпд цикла:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad \text{или} \quad \eta = \frac{A}{Q_1};$$

$$\eta = \frac{1{,}1}{3{,}2} = 0{,}344 = 34{,}4\ \%.$$

Ответ: $A = 1{,}1$ кДж; $T_1 = 602$ К; $T_2 = 241$ К; $P_3 = 2{,}47 \cdot 10^6$ Па; $\eta = 34{,}4\ \%$; $Q_1 = 3{,}2$ кДж; $Q_2 = 2{,}1$ кДж; $V_3 = 4{,}05 \cdot 10^{-4}$ м^3.

Задача 2.102

Холодильная машина работает по обратимому циклу Карно в интервале температур $t_1 = 27\ °\text{C}$ и $t_2 = -3\ °\text{C}$. Рабочее тело – азот, масса которого $m = 0{,}2$ кг. Найти количество теплоты, отбираемое от охлажденного тела, и работу внешних сил за цикл, если максимальный объем больше минимального в 5 раз. Вычислить холодильный коэффициент.

Дано: $\mu = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $m = 0{,}2$ кг; $T_1 = 300$ К; $T_2 = 270$ К; $\dfrac{V_4}{V_1} = 5.$

Найти: Q_2; A; ε.

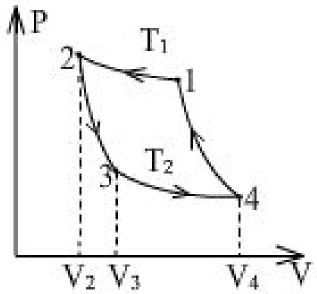
Решение. Холодильная машина – это машина, которая за счет работы внешних сил отнимает теплоту от охлаждаемого тела и передает ее более нагретой окружающей среде. Если холодильная машина работает по циклу Карно, то изотермическое сжатие рабочего тела (1-2), сопровождаемое работой внешних сил, происходит при более высокой температуре T_1. При этом рабочее тело отдает в окружающую среду, играющую роль термостата, количество теплоты $Q_1 = Q_{21}$ (см. рисунок).

На участке (3-4) при более низкой температуре T_2 $(T_1 > T_2)$ происходит изотермическое расширение рабочего тела, при этом от охлаждаемого тела (термостат при температуре T_2) отбирается количество теплоты $Q_2 = Q_{34}$. При изотермическом расширении $Q_{34} = A_{34}$,

$$Q_{34} = \frac{m}{M} R T_2 \ln \frac{V_4}{V_3}.$$

Второе и третье состояния лежат на одной адиабате, проведенной в интервале температур от T_1 к T_2

Следовательно,



$$\frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1}; \qquad \frac{V_2}{V_3}=\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}};$$

$$V_3=V_2\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}};$$

$$Q_{34}=\frac{m}{M}RT_2\ln\frac{V_4}{V_2\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{-1}}};$$

$$Q_{34}=\frac{m}{M}RT_2\left(\ln\frac{V_4}{V_2}+\frac{1}{\gamma-1}\ln\frac{T_2}{T_1}\right),$$

где $\gamma=\dfrac{i+2}{2}=1{,}4$;

$$Q_{34}=\frac{0{,}2}{28\cdot10^{-3}}8{,}31\cdot270\left(\ln\,5+\frac{1}{1{,}4-1}\ln\frac{270}{300}\right)=21{,}6\cdot10^{3}\,\text{Дж}=21{,}6\ \text{кДж}.$$

Поскольку в задаче рассматривается обратимый цикл Карно, то для него справедливо соотношение

$$\frac{Q_1-Q_2}{Q_1}=\frac{T_1-T_2}{T_1}\quad\text{или}\quad\frac{Q_2}{Q_1}=\frac{T_2}{T_1}.$$

Согласно первому закону термодинамики работа за цикл равна полному количеству теплоты, полученному и отдаваемому за цикл: $A=-Q_1+Q_2$

Из графика видно, что работа газа за цикл при указанном направлении процесса отрицательна. Следовательно, работа внешних сил за цикл

$$A^*=-A=Q_1+Q_2;$$

$$A^*=Q_2\frac{T_1}{T_2}-Q_2=Q_2\left(\frac{T_1}{T_2}-1\right)=Q_2\left(\frac{T_1-T_2}{T_2}\right);$$

$$A^*=21{,}6\cdot10^{3}\left(\frac{300-270}{270}\right)=2{,}4\cdot10^{3}\,\text{Дж}=2{,}4\ \text{кДж}.$$

Холодильный коэффициент ε равен отношению количества теплоты, отбираемого от охлаждаемого тела, к работе внешних сил, затраченной на этот цикл:

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{A^*} = \frac{Q_2}{Q_2\left(\frac{T_1 - T_2}{T_2}\right)} = \frac{T_2}{T_1 - T_2};$$

$$\varepsilon = \frac{270}{300 - 270} = 9.$$

Ответ: $Q_2 = 21{,}6$ кДж; $A^* = 2{,}4$ кДж; $\varepsilon = 9$.

Задача 2.103

Тепловая машина работает по циклу Карно. При изотермическом расширении двухатомного газа его объем увеличивается в 3 раза, а при последующем адиабатическом расширении – в 5 раз. Определить кпд цикла. Какую работу совершает 1 кмоль газа за один цикл, если температура нагревателя 300 К? Какое количество теплоты получит от холодильника машина, если она будет совершать тот же цикл в обратном направлении, и какое количество теплоты будет передано нагревателю?

Дано: $\frac{V_2}{V_1} = k = 3$; $\frac{V_3}{V_2} = n = 5$; $\nu = 10^3$ моль; $T_1 = 300$ К.

Найти: Q_2; A; Q_1; η.

Решение. Для цикла Карно кпд определяется формулой

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \tag{1}$$

где T_1 – температура нагревателя; T_2 – температура холодильника.

При адиабатическом процессе 2-3 (см. рисунок)

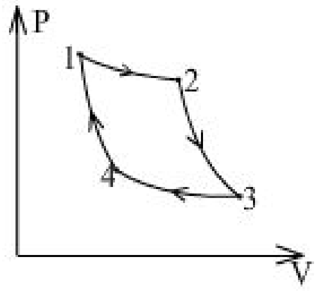
$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}, \tag{2}$$

где $\gamma = 1{,}4$ – показатель степени адиабаты (для двухатомного газа $i = 5$).

Из равенства (2) находим

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^{\gamma - 1} = T_1 n^{1-\gamma}.$$

Из равенства (1) получаем



$$\eta = \frac{T_1 - T_1 n^{1-\gamma}}{T_1} = 1 - n^{1-\gamma},$$

где $n^{1-\gamma} = 5^{1-1,4} = 0,525.$

Следовательно,

$$\eta = 1 - 0,525 = 0,475;$$

$$\eta = 47,5\ \%.$$

Работа в цикле Карно определяется разностью количества теплоты Q_1, полученного в процессе 1-2, и Q_2, отданного в процессе 3-4:

$$A = Q_1 - Q_2. \tag{3}$$

При изотермическом процессе

$$Q_1 = \nu R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = \nu R T_1 \ln k. \tag{4}$$

Так как $\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1}$, то $Q_2 = \nu R T_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -\nu R T_2 \ln k,$ где знак «минус» показывает, что теплота отдается холодильнику.

Следовательно,

$$A = \nu R \ln k \left(T_1 - T_2 \right) = \nu R \ln k \Delta T, \tag{5}$$

где $\Delta T = T_1 - T_2 = T_1 - T_1 n^{1-\gamma} = T_1 \left(1 - n^{1-\gamma} \right) = T_1 \eta;$

$$\Delta T = 300 \cdot 0,475 = 142,5\ \text{К},$$

тогда $$T_2 = 157,5\ \text{К};$$

$$A = 10^3 \cdot 8,31 \cdot 1,1 \cdot 142,5 = 1,3 \cdot 10^6\ \text{Дж} = 1,3\ \text{МДж}.$$

При обратном цикле Карно газ расширяется по адиабате 1-4, затем по изотерме 4-3, получая при этом от холодильника количество теплоты Q_2; далее газ сжимается по адиабате 3-2, затем по изотерме 2-1, отдавая при этом количество теплоты Q_1. По формуле (4) находим:

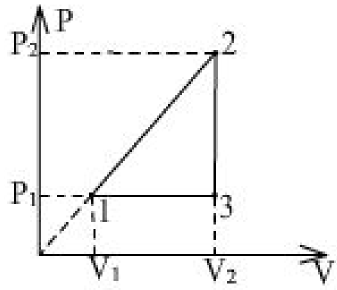
$$Q_1 = 10^3 \cdot 8,31 \cdot 1,1 \cdot 300 = 2,74\ \text{МДж};$$

$$Q_2 = 10^3 \cdot 8{,}31 \cdot 1{,}1 \cdot 156 = 1{,}44 \text{ МДж}.$$

Ответ: $\eta = 47{,}5\ \%$; $A = 1{,}3$ МДж; $Q_1 = 2{,}74$ МДж; $Q_2 = 1{,}44$ МДж.

Задача 2.104

Гелий массой m = 4 г совершает цикл, изображенный на рисунке. Найти работу A, совершенную газом за один цикл, а также количество теплоты, принятое от нагревателя Q_1 и переданное холодильнику Q_2 за цикл, если $P_1 = 200$ кПа, $P_2 = 600$ кПа; $V_1 = 1$ л, $V_2 = 3$ л.



Дано: $i = 3$; $m = 4 \cdot 10^{-3}$ кг; $P_1 = 2 \cdot 10^5$ Па; $P_2 = 6 \cdot 10^5$ Па; $V_1 = 10^{-3}$ м^3; $V_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ м^3.

Найти: Q_1; Q_2; A.

Решение. Из условия следует, что количество гелия – 1 моль. На участке 1-2 давление P пропорционально объему:

$$P = kV,$$

где $k = \dfrac{P_1 - P_2}{V_2 - V_1}$, а $P_1 V_2 = P_2 V_1$.

Работу на участке 1-2 определим по формуле

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} P dV = k \int_{V_1}^{V_2} V dV = k \frac{V^2}{2}\bigg|_{V_1}^{V_2} = \frac{k}{2}\left(V_2{}^2 - V_1{}^2\right) = \frac{1}{2}\left(P_2 - P_1\right)\left(V_2 + V_1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(P_2 V_2 - P_1 V_1\right).$$

В последнем равенстве учтено, что $P_1 V_2 = P_2 V_1$.

На участке 2-3 $V = \text{const}$, следовательно, $A_{23} = 0$.

На участке 3-1 $P = \text{const}$, поэтому $A_{31} = P_1\left(V_1 - V_2\right)$.

Работа, совершенная газом за цикл,

$$A = A_{12} + A_{31} = \frac{1}{2}\left(P_2V_2 + P_1V_1\right) - P_1V_2;$$

$$[A] = \text{Па}\cdot\text{м}^3 = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}\cdot\text{м}^3 = \text{Н}\cdot\text{м} = \text{Дж};$$

$$A = \frac{1}{2}\left(6\cdot10^5\cdot3\cdot10^{-3} + 2\cdot10^5\cdot10^{-3}\right) - 2\cdot10^5\cdot3\cdot10^{-3} = 400\ \text{Дж}.$$

Для нахождения Q_1 и Q_2 определим изменение внутренней энергии по формуле $\Delta U = \frac{3}{2}R\Delta T$ с учетом того, что $P_1V_1 = RT_1$, $P_2V_2 = RT_2$, $P_1V_2 = RT_3$.

Тогда

$$Q_1 = Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12};$$

$$Q_1 = \frac{1}{2}\left(P_2V_2 + P_1V_1\right) + \frac{3}{2}R\left(T_2 - T_1\right) = \frac{1}{2}\left(P_2V_2 + P_1V_1\right) + \frac{3}{2}\left(P_2V_2 - P_1V_1\right) = \\ = 2\left(P_2V_2 - P_1V_1\right);$$

$$Q_1 = 2\left(6\cdot10^5\cdot3\cdot10^{-3} - 2\cdot10^5\cdot10^{-3}\right) = 3200\ \text{Дж};$$

$$Q_2 = Q_{23} + Q_{31} = \Delta U_{23} + \Delta U_{31} + A_{31} = \frac{3}{2}R\left(T_3 - T_2\right) + \frac{3}{2}R\left(T_1 - T_3\right) + P_1\left(V_1 - V_2\right) =$$

$$= \frac{3}{2}R\left(T_2 - T_1\right) + P_1\left(V_1 - V_2\right) = \frac{3}{2}P_2V_2 - \frac{3}{2}P_1V_1 + P_1V_1 + P_1V_2 = \frac{3}{2}P_2V_2 + P_1\left(V_2 - V_1\right);$$

$$Q_2 = \frac{3}{2}6\cdot10^5\cdot3\cdot10^{-3} + 2\cdot10^5\left(3\cdot10^{-3} - 10^{-3}\right) = 2300\ \text{Дж}.$$

Ответ: $A = 400$ Дж; $Q_1 = 3200$ Дж; $Q_2 = 2300$ Дж.

Задача 2.105

Кислород массой m = 20 г нагревается от температуры t_1 = 20 °C до температуры t_2 = 220 °C. Найти изменение энтропии ΔS, если нагревание происходит: 1) изохорически; 2) изобарически.

Дано: $m = 2 \cdot 10^{-2}$ кг; $T_1 = 293$ К; $T_2 = 493$ К; $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Найти: ΔS.

Решение

1. При изохорическом нагревании $A = 0$, и количество теплоты, согласно первому началу термодинамики $(Q = \Delta U + A)$, равно

$$dQ = dU = \frac{m}{M} C_V dT,$$

где $C_V = \dfrac{iR}{2}$ – молярная теплоемкость.

Изменение энтропии $\Delta S = \int\limits_A^B \dfrac{dQ}{T}$ равно:

$$\Delta S = \int\limits_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{m}{M} C_V \int\limits_1^2 \frac{dT}{T} = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R \ln \frac{T_2}{T_1};$$

$$[\Delta S] = \frac{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Для кислорода число степеней свободы $i = 5$,

$$\Delta S = \frac{5}{2} \frac{2 \cdot 10^{-2}}{32 \cdot 10^{-3}} 8{,}31 \ln \frac{493}{293} = 6{,}75 \ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

2. При изобарическом процессе количество теплоты, согласно первому началу термодинамики,

$$dQ = dU + A = \frac{m}{M} C_V dT + \frac{m}{M} R dT = \frac{m}{M} C_P dT$$

и изменение энтропии

$$\Delta S = \int\limits_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{m}{M} C_P \int\limits_1^2 \frac{dT}{T};$$

$$[\Delta S] = \frac{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Так как $C_P = C_V + R$ (по уравнению Майера), то

$$C_P = \frac{5}{2}R + R = \frac{7}{2}R \quad \text{и} \quad \Delta S = \frac{7}{2}\frac{m}{M}R\ln\frac{T_2}{T_1};$$

$$\Delta S = \frac{7}{2}\frac{2\cdot 10^{-2}}{32\cdot 10^{-3}}8{,}31\ln\frac{493}{293} = 9{,}45\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Ответ: 1) $\Delta S = 6{,}75\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$; 2) $\Delta S = 9{,}45\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

Задача 2.106

Определить изменение ΔS энтропии при изотермическом расширении кислорода массой $m = 10$ г от объема $V_1 = 25$ л до объема $V_2 = 100$ л.

Дано: $i = 5$; $V_1 = 25\cdot 10^{-3}\text{м}^3$; $V_2 = 100\cdot 10^{-3}\text{м}^3$; $m = 10^{-2}$кг.

Найти: ΔS.

Решение. Так как процесс изотермический (T = const), то в выражении для энтропии

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

можно вынести температуру за знак интеграла. Выполнив это, получим

$$\Delta S = \frac{1}{T}\int_1^2 dQ = \frac{Q}{T}. \qquad (1)$$

Количество теплоты Q, полученное газом, найдем по первому началу термодинамики: $Q = \Delta U + A$.

Для изотермического процесса $\Delta U = 0$, следовательно,

$$Q = A, \qquad (2)$$

и работа A для этого процесса определяется по формуле

$$A=\frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1}. \qquad (3)$$

С учетом (2) и (3) равенство (1) примет вид

$$\Delta S=\frac{m}{M}R\ln\frac{V_2}{V_1};$$

$$[\Delta S]=\frac{\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{К}}=\frac{\text{Дж}}{\text{К}};$$

$$\Delta S=\frac{10\cdot10^{-3}}{32\cdot10^{-3}}8,31\ln\frac{100\cdot10^{-3}}{25\cdot10^{-3}}=3,6\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Ответ: $\Delta S=3,6\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$

Задача 2.107

В результате адиабатического процесса один моль двухатомного идеального газа перешел из состояния 1 с температурой T_1 в состояние 2 с температурой T_2. Определить изменение энтропии газа при этом процессе.

Дано: $i=5$; T_1; T_2.

Найти: ΔS.

Решение. Изменение энтропии

$$\Delta S=\int_1^2\frac{dQ}{T}.$$

По первому закону термодинамики $dQ=dU+A$, тогда

$$\Delta S=\int_1^2\frac{dQ}{T}=\int_1^2\left(\frac{dU}{T}+\frac{dA}{T}\right).$$

Рассчитаем отдельно оба интеграла. Изменение внутренней энергии одного моля двухатомного идеального газа $dU=\frac{5}{2}RdT$, следовательно,

$$\int_1^2 \frac{dU}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{5}{2}\, R\frac{dT}{T} = \frac{5}{2} R\ln\Big|_{T_1}^{T_2} = \frac{5}{2} R\ln\frac{T_2}{T_1}\ .$$

Поскольку работа $dA = PdV$, то

$$\int_1^2 \frac{dA}{T} = \int_1^2 \frac{PdV}{T}.$$

Используя формулу адиабатического процесса, выразим P и T через V. Пусть давление и температура в состоянии 1 равны соответственно P_1 и T_1. Тогда из соотношений $PV^{\gamma} = \mathrm{const}$, $TV^{\gamma-1} = \mathrm{const}$ получаем $P_1V_1^{\gamma} = PV^{\gamma}$ и $T_1V_1^{\gamma-1} = TV^{\gamma-1}$, где P, T и V – текущие термодинамические параметры системы. Из двух последних равенств следует:

$$P = \frac{P_1V_1^{\gamma}}{V^{\gamma}} \quad \text{и} \quad T = \frac{T_1V_1^{\gamma-1}}{V^{\gamma-1}}.$$

Подставляя эти значения в подынтегральное выражение, получаем

$$\int_1^2 \frac{PdV}{T} = \int_1^2 \frac{P_1V_1^{\gamma}V^{\gamma-1}dV}{V^{\gamma}T_1V_1^{\gamma-1}} = \frac{P_1V_1}{T_1}\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = R\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

В последнем преобразовании воспользовались уравнением Менделеева – Клапейрона для ν = 1: $P_1V_1 = RT_1$.

Используя соотношение $T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$, получим

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Следовательно,

$$\int_1^2 \frac{PdV}{T} = \frac{R}{\gamma-1}\ln\frac{T_2}{T_1}.$$

Окончательно получаем:

$$\Delta S = \frac{5}{2}R\ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{R}{\gamma-1}\ln\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{\gamma-1}\right)R\ln\frac{T_2}{T_1}.$$

Ответ: $\Delta S = \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{\gamma-1}\right)R\ln\frac{T_2}{T_1}.$

Задача 2.108

Кислород, масса которого m = 200 г, нагревают от температуры t_1 = 27 °C до t_2 = 127 °C. Найти изменение энтропии, если известно, что начальное и конечное давление одинаково и близко к атмосферному.

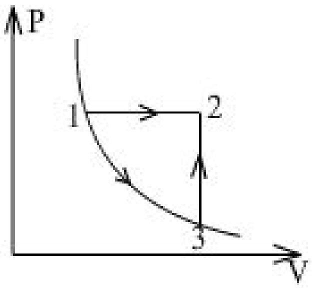
Дано: m = 0,2 кг; $T_1 = 300$ К; $T_2 = 400$ К; M = 32·10^{-3} кг/моль; $i = 5$; $R = 8{,}31\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$; $P_1 = P_2 = 10^5$ Па.

Найти: ΔS.

Решение. Так как давление близко к атмосферному, то можно считать газ идеальным. Характер процесса неизвестен. Так как энтропия является функцией состояния системы, то изменение энтропии определяется только параметрами этих состояний и не зависит от характера процесса.

Найти изменение энтропии можно, рассмотрев произвольный обратимый процесс, в результате которого идеальный газ можно перевести из состояния 1 в состояние 2 (см. рисунок). Из рисунка видно, что возможны два таких процесса: 1) изобарный 1-2; 2) изотермический процесс 1-3 с последующим нагреванием 3-2.

Для процесса 1-2



$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ_P}{T},$$

где $dQ_P = \dfrac{m}{M} C_P dT$; $C_P = \dfrac{(i+2)R}{2}$.

Тогда

$$\Delta S = \frac{m}{M}\frac{(i+2)R}{2}\int_1^2 \frac{dT}{T} = \frac{m}{M}\frac{(i+2)R}{2}\ln\frac{T_2}{T_1};$$

$$[\Delta S] = \frac{\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{К}} = \frac{\text{Дж}}{\text{К}};$$

$$\Delta S = \frac{0{,}2}{32\cdot 10^{-3}}\frac{5+2}{2}8{,}31\ln\frac{400}{300} = 52\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Проверим, изменяется ли результат при переходе 1-3-2:

$$\Delta S = \frac{1}{T}\int_1^3 dQ_T + \int_3^2 \frac{dQ_V}{T},$$

где dQ_T – количество тепла, полученное при изотермическом процессе $(T = \text{const};\ dT = 0;\ dU = 0)$.

Из первого начала термодинамики $dQ_T = dA = PdV$.

Из уравнения Менделеева – Клапейрона

$$PV = \frac{m}{M}RT; \quad P = \frac{m}{M}\frac{RT}{V}; \quad dQ_V = \frac{m}{M}RT\frac{dV}{V},$$

где dQ_V – количество тепла, полученное при изохронном процессе;

$$dQ_V = \frac{m}{M}C_V dT; \quad C_V = \frac{iR}{2}.$$

Тогда изменение энтропии при переходе 1-3-2 будет равно:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{1}{T}\frac{m}{M}RT\int_1^3 \frac{dV}{V} + \frac{i}{2}\frac{m}{M}R\int_3^2 \frac{dT}{T};$$

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{m}{M}R\left(\ln\frac{V_3}{V_1} + \frac{i}{2}\ln\frac{T_2}{T_3}\right).$$

Учитывая, что $T_1 = T_3$ (изотермический процесс); $V_3 = V_2$ (изохорный процесс); $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$ (изобарный процесс); $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$, получим:

$$\Delta S = \frac{m}{M}R\left(\ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{i}{2}\ln\frac{T_2}{T_1}\right);$$

$$\Delta S = \frac{m}{M}\frac{(i+2)R}{2}\ln\frac{T_2}{T_1}.$$

Мы получили то же выражение, что и для 1-2.

Ответ: $\Delta S = 52\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

Задача 2.109

Теплоизолированный сосуд разделен на две равные части перегородкой. В одной половине сосуда содержится m = 10 г водорода. Вторая половина откачана до высокого вакуума. Перегородку убирают, и газ заполняет весь объем. Считая газ идеальным, найти приращение его энтропии.

Дано: $m = 10^{-2}$ кг; $M = 2\cdot 10^{-3}$ кг/моль; $R = 8{,}31\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$.

Найти: ΔS.

Решение. Расширение газа здесь является процессом необратимым. Поэтому формула

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$$

напрямую здесь неприменима. Если сосуд теплоизолирован, то $dQ = 0$ и $dS = 0$, что в действительности, как это следует из второго начала термодинамики, невозможно. Энтропия при необратимом расширении должна увеличиваться.

Воспользуемся тем, что энтропия – функция состояния и ее изменение полностью определяется начальным и конечным состояниями системы, независимо от того процесса, в ходе которого система перешла из начального состояния 1 в конечное 2. Поэтому представим такой процесс расширения газа, который переводил бы его в то же самое конечное состояние 2, но являлся бы обратимым процессом.

Так как данный газ изолирован от окружающей среды $(Q = 0;\ A = 0)$, то его внутренняя энергия, как это следует из первого начала термодинамики, должна оставаться постоянной. При этом будет постоянной температура идеального газа во время его расширения,

$$U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT.$$

Значит, в качестве обратимого процесса, переводящего газ в то же конечное состояние, что и данный процесс, можно рассматривать процесс обратимого изотермического расширения, в ходе которого объем увеличивается в 2 раза. Так как в этом процессе $T = \text{const}$; $\Delta U = 0$, следовательно, работа расширения будет равна поступающему количеству теплоты $(Q = A)$,

$$S_2 - S_1 = \frac{1}{T}\int_1^2 dQ = \frac{Q}{T} = \frac{1}{T}\frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1};$$

$$S_2 - S_1 = \frac{m}{M}R\ln 2;$$

$$S_2 - S_1 = \frac{10^{-2}\cdot 8,31\cdot 0,69}{2\cdot 10^{-3}} = 28,6\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Ответ: $\Delta S = 28,6\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

Задача 2.110

Лед массой 2 кг, находящийся при температуре $t_1 = -10$ °С, нагрели и превратили в пар. Определить изменение энтропии.

Дано: $m = 2$ кг; $T_1 = 263$ К; $T_2 = 273$ К; $T_3 = 373$ К; $C_1 = 2,1\cdot 10^3\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$; $\lambda = 3,35\cdot 10^5\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$; $C_2 = 4,19\cdot 10^3\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$; $r = 2,26\cdot 10^6\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$.

Найти: ΔS.

Решение. Изменение энтропии определяется по формуле

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

Общее изменение энтропии равно сумме $\sum\Delta S_i$, где ΔS_i – изменение энтропии, происходящее на отдельных этапах процесса;

$$\Delta S = \sum_{i=1}^{n}\Delta S_i.$$

Изменение энтропии ΔS_1 происходит при нагревании льда от начальной температуры $T_1 = 263$ К до температуры плавления $T_2 = 273$ К;

$$\Delta S_1 = \int_1^2 \frac{dQ_1}{T};$$

так как $dQ_1 = mc_1 dT$, то

$$\Delta S_1 = mc_1 \ln \frac{T_2}{T_1},$$

где m – масса льда; c_1 – удельная теплоемкость льда.

Изменение энтропии ΔS_2 происходит при плавлении льда. В этом случае $dQ_2 = m$, тогда

$$\Delta S_2 = \frac{m\lambda}{T_2},$$

где T_2– температура плавления льда; λ – удельная теплота плавления.

Изменение энтропии ΔS_3 происходит при нагревании воды от температуры T_2 до температуры кипения $T_3 = 373$ К. Величина вычисляется аналогично ΔS_1:

$$\Delta S_3 = mc_2 \ln \frac{T_3}{T_2},$$

где c_2 – удельная теплоемкость воды.

Изменение энтропии ΔS_4 происходит при испарении воды; так как $dQ = mr$,то

$$\Delta S_4 = \frac{mr}{T_3},$$

где r – удельная теплота парообразования.

Общее изменение энтропии

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4 = m\left(c_1 \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{\lambda}{T_2} + c_2 \ln \frac{T_3}{T_2} + \frac{r}{T_3}\right);$$

$$\Delta S = 2\left(2{,}1 \cdot 10^3 \ln \frac{273}{263} + \frac{3{,}35 \cdot 10^5}{273} + 4{,}19 \cdot 10^3 \ln \frac{373}{273} + \frac{2{,}26 \cdot 10^6}{373}\right) =$$

$$= 1{,}73 \cdot 10^4 \ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Ответ: $\Delta S = 1{,}73 \cdot 10^4 \ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$

Задача 2.111

Определить изменение энтропии ΔS при изотермическом расширении азота массой $m = 10$ г, если давление газа уменьшилось от $P_1 = 0{,}1$ МПа до $P_2 = 50$ кПа.

Дано: $m = 10^{-2}$ кг; $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $P_1 = 10^5$ Па; $P_2 = 4 \cdot 10^4$ Па;

Найти: ΔS.

Решение. Изменение энтропии, учитывая, что процесс изотермический,

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\int_1^2 dQ = \frac{Q}{T}. \qquad (1)$$

Согласно первому началу термодинамики количество теплоты, полученное газом, $Q = \Delta U + A$. Для изотермического процесса $\Delta U = 0$, поэтому $Q = A$.

Работа газа в изотермическом процессе

$$A = \frac{m}{M} RT \ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln\frac{P_1}{P_2}. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), найдем искомое изменение энтропии:

$$\Delta S = \frac{m}{M} RT \ln\frac{P_1}{P_2};$$

$$[\Delta S] = \frac{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Дж}}{\text{К}};$$

$$\Delta S = \frac{10^{-2} \cdot 8{,}31}{28 \cdot 10^{-3}} \ln\frac{10^5}{5 \cdot 10^4} = 2{,}06\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Ответ: $\Delta S = 2{,}06\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

Задача 2.112

Азот массой $m = 100$ г был изобарно нагрет так, что его объем увеличился в 2 раза, а затем был изохорно охлажден так, что его давление уменьшилось в 2 раза. Определить изменение энтропии ΔS в ходе указанных процессов.

Дано: $m = 10^{-1}$ кг; $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $\frac{V_2}{V_1} = 2$; $\frac{P_1}{P_3} = 2$.

Найти: ΔS.

Решение. Энтропия – величина аддитивная, поэтому общее изменение энтропии складывается из изменений ее в рассматриваемых процессах – изобарном 1-2 и изохорном 2-3 (см. рисунок):

$$\Delta S = \Delta S_{12} + \Delta S_{23}. \tag{1}$$

Изменение энтропии в изобарном процессе 1-2

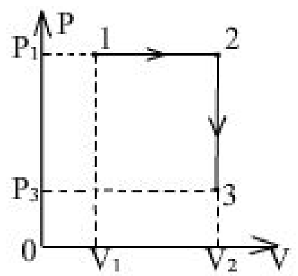
$$\Delta S_{12} = \int_1^2 \frac{dQ_{12}}{T} = \frac{m}{M} C_P \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \frac{m}{M} C_P \ln \frac{T_2}{T_1}; \tag{2}$$

учли, что $dQ_{12} = \frac{m}{M} C_P dT$, где C_P – молярная теплоемкость при постоянном давлении.

Изменение энтропии в изохорном процессе 2-3

$$\Delta S_{23} = \int_2^3 \frac{dQ_{23}}{T} = \frac{m}{M} C_V \int_{T_2}^{T_3} \frac{dT}{T} = \frac{m}{M} C_V \ln \frac{T_3}{T_2}; \tag{3}$$

учли, что $dQ_{23} = \frac{m}{M} C_V dT$, где C_V – молярная теплоемкость при постоянном объеме.



Для изобарного процесса 1-2 $(P = \text{const})$

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}, \quad \text{откуда} \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_1} = 2.$$

Для изохорного процесса 2-3 $(V = \text{const})$

$$\frac{P_1}{T_2} = \frac{P_3}{T_3}, \quad \text{откуда} \quad \frac{T_3}{T_2} = \frac{P_3}{P_1} = \frac{1}{2}.$$

Подставив полученные значения в формулы (2) и (3), которые, в свою очередь, подставим в выражение (1), получаем искомое изменение энтропии в ходе указанных процессов:

$$\Delta S = \frac{m}{M} C_P \ln 2 + \frac{m}{M} C_V \ln \frac{1}{2} = \frac{m}{M}(C_P - C_V)\ln 2 = \frac{m}{M} R \ln 2;$$

$$[\Delta S] = \frac{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Дж}}{\text{К}};$$

$$\Delta S = \frac{10^{-1} \cdot 8,31}{28 \cdot 10^{-3}} \ln 2 = 20,6\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Ответ: $\Delta S = 20,6\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

2.5. Реальные газы, жидкости и твердые тела

Основные формулы

Уравнение состояния реального газа (уравнение Ван-дер-Ваальса) для одного моля газа:

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT,$$

где V_m – молярный объем; a и b – постоянные Ван-дер-Ваальса, различные для разных газов.

Уравнение Ван-дер-Ваальса для произвольной массы газа:

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{\nu} - b\right) = RT,$$

где $\nu = \frac{m}{M}$ – количество вещества; $V = \nu V_m$.

Внутреннее давление газа, обусловленное силами взаимодействия молекул,

$$p' = \frac{a}{V_m^2},$$

где a – постоянная Ван-дер-Ваальса, характеризующая силы межмолекулярного притяжения.

Критические параметры – объем $V_к$, давление $p_к$ и температура $T_к$ связаны с постоянными a и b Ван-дер-Ваальса соотношениями

$$V_к = 3b; \quad p_к = \frac{a}{27b^2}; \quad T_к = \frac{8a}{27Rb},$$

где R – молярная газовая постоянная.

Внутренняя энергия реального газа:

одного моля

$$U_m = C_V T - \frac{a}{V_m};$$

произвольной массы

$$U_m = \frac{m}{M}\left(C_V T - \frac{a}{V_m}\right),$$

где C_V – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме.

Энтальпия системы

$$U_1 + p_1 V_1 = U_2 + p_2 V_2,$$

индексы 1 и 2 соответствуют начальному и конечному состояниям системы.

Поверхностное натяжение

$$\sigma = \frac{F}{l}; \quad \sigma = \frac{\Delta E}{\Delta S},$$

где F – сила поверхностного натяжения, действующая на контур l, ограничивающий поверхность жидкости; ΔE – изменение свободной энергии поверхностной пленки жидкости, связанной с изменением площади ΔS поверхности этой пленки.

Формула Лапласа, позволяющая определить избыточное давление для произвольной поверхности жидкости двоякой кривизны:

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

где R_1 и R_2 – радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных нормальных сечений поверхности жидкости; радиус кривизны положителен, если центр кривизны находится внутри жидкости (выпуклый мениск), и отрицателен, если центр кривизны находится вне жидкости (вогнутый мениск). В случае сферической поверхности

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}.$$

Высота подъема жидкости в капиллярной трубке

$$h = \frac{2\sigma \cos\theta}{\rho g r},$$

где θ – краевой угол; r – радиус капилляра; ρ – плотность жидкости; g – ускорение свободного падения.

Высота подъема жидкости между двумя близкими и параллельными плоскостями

$$h=\frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g d},$$

где d – расстояние между плоскостями.

Закон Дюлонга и Пти:

$$C_V=3R,$$

где C_V – молярная (атомная) теплоемкость химически простого твердого тела.

Уравнение Клапейрона – Клаузиуса, позволяющее определить изменение температуры фазового перехода в зависимости от изменения давления при равновесно протекающем процессе:

$$\frac{dp}{dT}=\frac{L}{T\left(V_2-V_1\right)},$$

где L – теплота фазового перехода; $(V_2 - V_1)$ – изменение объема вещества при переходе его из первой фазы во вторую; T – температура перехода (процесс изотермический).

При повышении температуры длина твердых тел возрастает в первом приближении линейно с температурой, т.е.

$$l_1=l_0\left(1+at\right),$$

где l_1 – длина тела при температуре t; l_0 – его длина при температуре 0° C, a – коэффициент линейного теплового расширения.

Для твердых изотропных тел $a=\frac{1}{3}b$, где b – коэффициент объемного теплового расширения.

Относительное изменение длины стержня по закону Гука в случае деформации продольного растяжения (или одностороннего сжатия) стержня

$$\frac{\Delta l}{l}=\alpha p_н=\frac{1}{E}p_н,$$

где $p_н$ – удельная нагрузка, $p_н=\frac{F}{S}$; F – растягивающая (сжимающая) сила, S – площадь поперечного сечения; α – коэффициент упругости; $E=\frac{1}{\alpha}$ – модуль упругости (модуль Юнга).

Относительное изменение толщины стержня при продольном растяжении

$$\frac{\Delta d}{d} = \beta\, p_н,$$

где β – коэффициент поперечного сжатия.

Коэффициент Пуассона

$$\sigma = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Для закручивания стержня (проволоки) на некоторый угол φ необходимо приложить момент пары сил

$$M = \frac{\pi N r^4 \varphi}{2l},$$

где l – длина проволоки, r – ее радиус; N – модуль сдвига материала проволоки.

Задача 2.113

Углекислый газ массой $m = 10$ г находится в сосуде вместимостью $V = 1$ л. Определить: 1) собственный объем V' молекул газа; 2) внутреннее давление P' газа. Поправки Ван-дер-Ваальса: $a = 0{,}361$ Н $\cdot$ м^4 / моль^2 и $b = 4{,}28 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль^2.

Дано: $M = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $m = 10^{-2}$ кг; $V = 10^{-3}$ м^3; $a = 0{,}361$ Н $\cdot$ м^4 / моль^2; $b = 4{,}28 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль^2.

Найти: V'; P'.

Решение. Уравнение Ван-дер-Ваальса – уравнение состояния реальных газов

$$\left(P + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT, \qquad (1)$$

где $\nu = \dfrac{m}{M}$ – количество вещества; a и b – поправки Ван-дер-Ваальса; R – молярная газовая постоянная.

В уравнении (1) поправка b определяет учетверенный объем молекул всего газа, т.е. $\nu b = 4V'$, откуда искомый собственный объем молекул газа

$$V' = \frac{\nu b}{4} = \frac{mb}{4M};$$

$$[V'] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{кг}} = \text{м}^3;$$

$$V' = 2{,}43 \text{ см}^3.$$

Как следует из уравнения (1), внутреннее давление газа

$$P' = \frac{\nu^2 a}{V^2} = \frac{m^2 a}{M^2 V^2};$$

$$[P'] = \frac{\text{кг}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{м}^4 \cdot \text{моль}^2}{\text{моль}^2 \cdot \text{кг}^2 \cdot \text{м}^6} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па};$$

$$P' = 18{,}6 \text{ кПа}.$$

Ответ: 1) $V' = 2{,}43 \text{ см}^3$; 2) $P' = 18{,}6$ кПа.

Задача 2.114

Давление P кислорода равно 8 МПа, его плотность $\rho = 100$ кг/м^3. Определить температуру газа, если: 1) газ идеальный (T_1); 2) газ реальный (T). Поправки Ван-дер-Ваальса: $a = 0{,}136$ Н $\cdot$ м^4/моль и $b = 3{,}17 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль^2.

Дано: $M = 32 \cdot 10^{-3}$кг/моль; $P = 8 \cdot 10^6$Па; $\rho = 100$ кг/м^3; $a = 0{,}136$ Н$\cdot$м^4/моль; $b = 3{,}17 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль^2.

Найти: T_1; T.

Решение. Идеальный газ подчиняется уравнению Клапейрона – Менделеева

$$PV = \frac{m}{M} RT_1, \qquad (1)$$

где m – масса газа; M – молярная масса; R – молярная газовая постоянная.

Учитывая, что плотность газа $\rho = \frac{m}{V}$, из уравнения (1) найдем искомую температуру T_1:

$$T_1 = \frac{PM}{\rho R};$$

$$[T_1] = \frac{\text{Н} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}{\text{м}^2 \cdot \text{моль} \cdot \text{кг} \cdot \text{Дж}} = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{Дж}} = \text{К};$$

$$T_1 = \frac{8 \cdot 10^6 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{100 \cdot 8{,}31} = 308\ \text{К}.$$

Реальный газ подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса

$$\left(P + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT, \qquad (2)$$

где ν – количество вещества; a и b – поправки Ван-дер-Ваальса.

Подставим $\nu = \frac{m}{M} = \frac{\rho V}{M}$ в уравнение (2) и после его преобразования получим:

$$\left(P + \frac{\rho^2 a}{M^2}\right)(M - \rho b) = \rho RT,$$

откуда искомая температура

$$T = \left(P + \frac{\rho^2 a}{M^2}\right)(M - \rho b) / \rho R;$$

$$[T] = \frac{\left(\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} + \frac{\text{кг}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{м}^4 \cdot \text{моль}^2}{\text{м}^6 \cdot \text{моль}^2 \cdot \text{кг}^2}\right)\left(\frac{\text{кг}}{\text{моль}} - \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^3 \cdot \text{моль}}\right)}{\frac{\text{кг} \cdot \text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{моль} \cdot \text{К}}} = \frac{\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \cdot \frac{\text{кг}}{\text{моль}}}{\frac{\text{кг} \cdot \text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{моль} \cdot \text{К}}} =$$

$$= \frac{\text{Н} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}{\text{м}^2 \cdot \text{моль} \cdot \text{кг} \cdot \text{Дж}} = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{Дж}} = \text{К};$$

$$T = 324\ \text{К}.$$

Ответ: $T_1 = 308$ К; $T = 324$ К.

Задача 2.115

Вычислить поправки Ван-дер-Ваальса для кислорода, если критическая температура $T_{кр} = 15$ К и критическое давление $P_{кр} = 5{,}08$ МПа.

Дано: $T_{кр} = 15$ К; $P_{кр} = 5{,}08 \cdot 10^6$ Па.

Найти: a, b.

Решение. Поправки Ван-дер-Ваальса a и b присутствуют в уравнении состояния реальных газов (уравнении Ван-дер-Ваальса)

$$\left(P + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT,$$

где ν – количество вещества.

Это уравнение можно привести к виду

$$PV^3 - (\nu RT + \nu bP)V^2 + \nu^2 aV - \nu^3 ab = 0. \qquad (1)$$

Подставляя в (1) критическую температуру и критическое давление, получим:

$$P_{кр}V^3 - \left(\nu RT_{кр} + \nu bP_{кр}\right)V^2 + \nu^2 aV - \nu^3 ab = 0. \qquad (2)$$

С другой стороны, поскольку в критической точке все три корня полученного уравнения совпадают и равны $V_{кр}$, уравнение (2) можно записать также в виде

$$P_{кр}\left(V - V_{кр}\right)^3 = 0$$

или

$$P_{кр}V^3 - 3P_{кр}V_{кр}V^2 + 3P_{кр}V_{кр}{}^2V - P_{кр}V_{кр}{}^3 = 0.$$

Так как уравнения (2) и (3) тождественны, в них должны быть равны и коэффициенты при известных соответствующих степеней. Поэтому можно записать:

$$P_{кр}V_{кр}{}^3 = \nu^3 ab\,; \quad 3P_{кр}V_{кр}{}^2 = \nu^2 a\,; \quad 3P_{кр}V_{кр} = \nu RT_{кр} + \nu bP_{кр}.$$

Решая полученные уравнения, найдем

$$a = \frac{27R^2T_{кр}{}^2}{64P_{кр}}; \qquad b = \frac{RT_{кр}}{8P_{кр}}.$$

Ответ: $a = 0{,}138$ Н $\cdot$ м^4/моль^2; $b = 3{,}17 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль^2.

Задача 2.116

Углекислый газ массой $m = 10$ кг адиабатно расширяется в вакуум от $V_1 = 1$ м^3 до $V_2 = 2$ м^3. Принимая поправку Ван-дер-Ваальса $a = 0{,}361$ Н·м^4/моль^2, определить понижение температуры ΔT газа при этом расширении.

Дано: $m = 10$ кг; $M = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $Q = 0$; $i = 6$; $V_1 = 1$ м^3; $V_2 = 2$ м^3; $a = 0{,}361$ Н·м^4/моль^2.

Найти: ΔT.

Решение. Согласно первому началу термодинамики количество теплоты Q, переданное газу, идет на изменение ΔU внутренней энергии газа и работу A газа против внешних сил:

$$Q = \Delta U + A. \qquad (1)$$

Согласно условию задачи газ адиабатно ($Q = 0$) расширяется в вакуум ($A = 0$), поэтому из (1) следует, что

$$\Delta U = U_2 - U_1 = 0 \quad \text{и} \quad U_2 = U_1. \qquad (2)$$

Внутреннюю энергию реального газа количеством вещества ν $U = \nu\left(C_V T - \dfrac{\nu a}{V}\right)$ запишем для двух состояний газа – 1 (до расширения) и 2 (после расширения):

$$U_1 = \nu\left(C_V T_1 - \frac{\nu a}{V_1}\right) \quad \text{и} \quad U_2 = \nu\left(C_V T_2 - \frac{\nu a}{V_2}\right), \qquad (2)$$

где C_V – молярная теплоемкость при постоянном объеме; a – постоянная Ван-дер-Ваальса, характеризующая силы межмолекулярного притяжения.

Приравняв, согласно (2), выражения (3), получаем:

$$C_V T_1 - \frac{\nu a}{V_1} = C_V T_2 - \frac{\nu a}{V_2},$$

откуда искомая разность температур

$$\Delta T = T_2 - T_1 = -\frac{\nu a}{C_V}\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) = -\frac{2am}{iMR}\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) = -1{,}65 \text{ К},$$

учли, что $C_V = \dfrac{iR}{2}$ и $\nu = \dfrac{m}{M}$.

$$[\Delta T] = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^4\cdot\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{К}\cdot\text{моль}}{\text{м}^3\cdot\text{моль}^2\cdot\text{кг}\cdot\text{Дж}} = \frac{\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{Дж}} = \text{К}.$$

Ответ: $\Delta T = -1{,}65$ К.

Задача 2.117

В цилиндре под поршнем находится хлор массой $m = 20$ г. Определить изменение ΔU внутренней энергии хлора при изотермическом расширении его от $V_1 =$ 200 см^3 до $V_2 =$ 500 см^3.

Дано: $m = 20\cdot 10^{-3}$кг; $V_1 = 2\cdot 10^{-4}$м^3; $V_2 = 5\cdot 10^{-4}$м^3.

Найти: ΔU.

Решение. Внутренняя энергия U реального газа определяется выражением

$$U = \nu\left(C_V T - \frac{a}{V_m}\right).$$

Выразив молярный объем V_m через объем V и количества вещества ν $(V_m = V/\nu)$ и учтя, что $\nu = \dfrac{m}{M}$, получим

$$U = \frac{m}{M}\left(C_V T - \frac{ma}{VM}\right).$$

Изменение ΔU внутренней энергии в результате изотермического расширения найдем как разность двух значений внутренней энергии при объемах V_2 и V_1:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{m^2 a(V_2 - V_1)}{M^2 V_1 V_2};$$

$$[\Delta U]=\frac{\text{кг}^2\cdot\text{Н}\cdot\text{м}^4\cdot\text{м}^3\cdot\text{моль}^2}{\text{моль}^2\cdot\text{кг}^2\cdot\text{м}^3\cdot\text{м}^3}=\text{Н}\cdot\text{м}=\text{Дж};$$

$$\Delta U=\frac{\left(20\cdot10^{-3}\right)^2\cdot0{,}650(5-2)\cdot10^{-4}}{\left(71\cdot10^{-3}\right)2\cdot10^{-4}\cdot5\cdot10^{-4}}=154\text{ Дж}.$$

Ответ: $\Delta U=154$ Дж.

Задача 2.118

Азот количеством вещества $\nu=2$ моль, занимавший при температуре $T=350$ К объем $V_1=2\cdot10^{-3}\text{м}^3$, расширяется изотермически до объема $V_2=3V_1$. Принимая поправки Ван-дер-Ваальса $a=0{,}136\text{ Н}\cdot\text{м}^4/\text{моль}^2$ и $b=3{,}86\cdot10^{-5}\text{ м}^3/\text{моль}^2$, определить: 1) работу A расширения газа; 2) изменение внутренней энергии ΔU газа.

Дано: $\nu=2$ моль; $T=350$ К = const; $V_1=2\cdot10^{-3}\text{м}^3$; $V_2=3V_1$; $a=0{,}136\text{ Н}\cdot\text{м}^4/\text{моль}^2$; $b=3{,}86\cdot10^{-5}\text{ м}^3/\text{моль}^2$.

Найти: A; ΔU.

Решение. Работа расширения газа от объема V_1 до объема V_2

$$A=\int_{V_1}^{V_2}PdV, \tag{1}$$

где $P-$ давление, производимое газом на стенки сосуда.

Найдем P из уравнения Ван-дер-Ваальса для произвольного количества вещества ν:

$$\left(P+\frac{\nu^2a}{V^2}\right)(V-\nu b)=\nu RT,$$

откуда

$$P=\frac{\nu RT}{V-\nu b}-\frac{\nu^2a}{V^2}. \tag{2}$$

Выражение (1) после подстановки (2) имеет вид:

$$A=\int\limits_{V_1}^{V_2}\left(\frac{\nu RT}{V-\nu b}-\frac{\nu^2 a}{V^2}\right)dV=\nu RT\ln\frac{V_2-\nu b}{V_1-\nu b}+\nu^2 a\left(\frac{1}{V_2}-\frac{1}{V_1}\right);$$

$$[A]=\frac{\text{моль}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{моль}\cdot\text{К}}+\frac{\text{моль}^2\cdot\text{Н}\cdot\text{м}^4}{\text{моль}^2\cdot\text{м}^3}=\text{Дж}+\text{Дж}=\text{Дж}.$$

Внутренняя энергия реального газа для состояний 1 и 2

$$U_1=\nu\left(C_V T-\frac{\nu a}{V_1}\right)\ \text{и}\ U_2=\nu\left(C_V T-\frac{\nu a}{V_2}\right),$$

учли, что T = const.

Искомое изменение внутренней энергии газа в результате изотермического расширения

$$\Delta U=U_2-U_1=\nu^2 a\left(\frac{1}{V_1}-\frac{1}{V_2}\right);$$

$$[\Delta U]=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^4\cdot\text{моль}^2}{\text{моль}^2\langle\text{м}^3}=\text{Н}\cdot\text{м}=\text{Дж}.$$

Ответ: $A=6{,}36$ кДж; $\Delta U=181$ Дж.

Задача 2.119

Определить, какую силу F следует приложить к горизонтальному медному кольцу высотой $h=15$ мм с внутренним диаметром $d_1=$ 40 мм и внешним $d_2=$ 42 мм, чтобы оторвать его от поверхности воды. Плотность меди $\rho=8{,}93$ г/см^3, поверхностное натяжение воды $\sigma=73$ мН/м.

Дано: $h=15\cdot10^{-3}$ м; $d_1=4\cdot10^{-2}$м; $d_2=4{,}2\cdot10^{-2}$м; $\rho=893$ кг/м^3; $\sigma=73\cdot10^{-3}$ Н/м.

Найти: F.

Решение. Сила, которую следует приложить для отрыва кольца от поверхности воды,

$$F=F_1+F_2, \qquad (1)$$

где F_1 – вес кольца; F_2 – сила поверхностного натяжения.

Вес кольца

$$F_1 = \rho g h \frac{\pi}{4}\left(d_2^{\,2} - d_1^{\,2}\right), \qquad (2)$$

где g – ускорение свободного падения.

При отрыве кольца поверхностная пленка разрывается по внутренней и внешней поверхностям кольца, поэтому сила поверхностного натяжения

$$F_2 = \sigma l = \sigma\pi\left(d_1 + d_2\right). \qquad (3)$$

Подставив формулы (2) и (3) в равенство (1), получим искомую силу

$$F = \rho g h \frac{\pi}{4}\left(d_2^{\,2} - d_1^{\,2}\right) + \sigma\pi\left(d_1 + d_2\right) = 35{,}7 \cdot 10^{-3} H = 35{,}7 \text{ мН};$$

$$\left[F\right] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}\cdot\text{м}^2}{\text{м}^3\cdot\text{с}^2} + \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{м}} = \text{Н} + \text{Н} = \text{Н}.$$

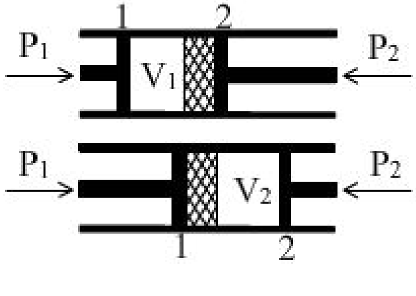
Ответ: $F = 35{,}7$ мН.

Задача 2.120

Докажите, что эффект Джоуля – Томсона будет всегда положительным, если дросселируется газ, для которого можно пренебречь собственным объемом молекул.

Дано: $b = 0$.

Найти: ΔT.



Решение. Эффект Джоуля – Томсона (изменение температуры реального газа в результате его адиабатного дросселирования – медленного прохождения газа (см. рисунок) под действием перепада давлений сквозь дроссель, например, пористую перегородку) принято называть положительным, если газ в процессе дросселирования охлаждается $(\Delta T < 0)$. В случае эффекта Джоуля – Томсона сохраняется (остается неизменной) функция состояния – энтальпия;

$$P_1V_1 + U_1 = P_2V_2 + U_2, \tag{1}$$

где $P_1, V_1, U_1 -$ давление, объем и внутренняя энергия газа под поршнем 1; $P_2, V_2, U_2 -$ то же, под поршнем 2.

Внутренняя энергия реального газа

$$U_1 = \nu\left(C_V T_1 - \frac{\nu a}{V_1}\right) \quad \text{и} \quad U_2 = \nu\left(C_V T_2 - \frac{\nu a}{V_2}\right), \tag{2}$$

где ν – количество вещества; $C_V -$ молярная теплоемкость при постоянном объеме; $a -$постоянная Ван-дер-Ваальса, характеризующая силы межмолекулярного притяжения; T_1 и $T_2 -$ температуры газа под поршнями 1 и 2.

Уравнение Ван-дер-Ваальса для произвольного количества вещества

$$\left(P + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{\nu} - b\right) = RT, \tag{3}$$

где $b -$ поправка Ван-дер-Ваальса, учитывающая собственный объем молекул.

Запишем уравнение (3) для двух состояний газа, приняв, согласно условию задачи, $b = 0$:

$$P_1V_1 + \frac{\nu^2 a}{V_1} = \nu R T_1 \quad \text{и} \quad P_2V_2 + \frac{\nu^2 a}{V_2} = \nu R T_2,$$

откуда

$$P_1V_1 = \nu R T_1 - \frac{\nu^2 a}{V_1} \quad \text{и} \quad P_2V_2 = \nu R T_2 - \frac{\nu^2 a}{V_2}. \tag{4}$$

Подставив выражения (2) и (4) в равенство (1), имеем:

$$\nu R T_1 - \frac{\nu^2 a}{V_1} + \nu C_V T_1 - \frac{\nu^2 a}{V_1} = \nu R T_2 - \frac{\nu^2 a}{V_2} + \nu C_V T_2 - \frac{\nu^2 a}{V_2},$$

откуда после преобразований получаем искомую разность температур

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{2\nu a}{C_V + R}\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right) < 0,$$

поскольку $V_2 \gg V_1$.

Таким образом, расчет показывает, что газ в процессе дросселирования, если пренебречь собственным объемом молекул, охлаждается, т.е. эффект Джоуля – Томсона положительный.

Задача 2.121

Определить изменение свободной энергии ΔE поверхности мыльного пузыря при изотермическом увеличении его объема от $V_1 = 10$ см^3 до $V_2 = 2V_1$.

Дано: $V_1 = 10^{-5}$ м^3; $V_2 = 2V_1$; $\sigma = 40 \cdot 10^{-3}$ Н/м.

Найти: ΔE.

Решение. Свободная энергия E поверхности жидкости пропорциональна площади S этой поверхности:

$$E = \sigma S,$$

где σ – поверхностное натяжение.

У мыльного пузыря имеются две поверхности – внешняя и внутренняя, площади которых практически равны из-за малой толщины мыльной пленки. Поэтому свободная энергия поверхности (внешней и внутренней вместе) мыльного пузыря

$$E = 2\sigma S. \tag{1}$$

Так как по условию задачи процесс изотермический, то поверхностное натяжение, являющееся для данной жидкости функцией только температуры, остается постоянным. Следовательно, по формуле (1) изменение свободной энергии

$$\Delta E = 2\sigma \Delta S, \tag{2}$$

где ΔS – изменение поверхности пузыря (одной – внутренней или внешней).

Считая, что мыльный пузырь имеет форму сферы, найдем изменение площади поверхности:

$$\Delta S = 4\pi r_2^{\ 2} - 4\pi r_1^{\ 2}, \tag{3}$$

где r_1 и r_2 – радиусы сфер, соответствующие начальному V_1 и конечному V_2 объемам:

$$r_1 = \left(\frac{3V_1}{4\pi}\right)^{1/3}; \qquad r_2 = \left(\frac{3V_2}{4\pi}\right)^{1/3}.$$

Теперь формула (3) примет вид:

$$\Delta S = 4\pi\left[\left(\frac{3V_2}{4\pi}\right)^{2/3} - \left(\frac{3V_1}{4\pi}\right)^{2/3}\right].$$

Учитывая, что $V_2 = 2V_1$, получим после вынесения общего члена $\left(\frac{3V_1}{4\pi}\right)^{2/3}$ за скобку:

$$\Delta S = 4\pi\left(\frac{3V_1}{4\pi}\right)^{2/3}\left(2^{2/3} - 1\right).$$

Подставим выражение ΔS в формулу (2):

$$\Delta E = 8\pi\sigma\left(\frac{3V_1}{4\pi}\right)^{2/3}\left(2^{2/3} - 1\right) = 106\cdot 10^{-6}\,\text{Дж}.$$

Ответ: $\Delta E = 106\cdot 10^{-6}$ Дж.

Задача 2.122

Ртуть массой $m = 5$ г помещена между двумя параллельными стеклянными пластинками. Считая, что ртуть стекло не смачивает, определить силу F, которую следует приложить, чтобы расплющить каплю до толщины $h = 0{,}15$ мм. Плотность ртути $\rho = 13{,}6$ г/см^3, а ее поверхностное натяжение $\sigma = 0{,}5$ Н/м.

Дано: $m = 5\cdot 10^{-3}$ кг; $h = 0{,}15\cdot 10^{-3}$ м; $\rho = 1{,}36\cdot 10^4$ кг/м^3; $\sigma = 0{,}5$ Н/м.

Найти: F.

Решение. При помещении капли ртути между двумя стеклянными пластинками капля примет вид тонкого диска с выпуклой боковой поверхностью. Возникшее из-за кривизны поверхности избыточное давление определяется формулой Лапласа

$$\Delta P = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \tag{1}$$

где $R_1 -$ радиус кривизны поверхности ртути в плоскости, параллельной стеклянным пластинкам (радиус диска); $R_2 = \dfrac{h}{2}$ – радиус кривизны поверхности ртути в плоскости, перпендикулярной к стеклянным пластинкам.

Избыточное давление (1) уравновешивается внешним давлением

$$\Delta P = \frac{F}{S}, \tag{2}$$

где $S -$ площадь соприкосновения капли ртути с пластинкой;

$$S = \frac{V}{h} = \frac{m}{\rho h} = \pi R_1{}^2, \tag{3}$$

где $V -$ объем ртути.

Тогда

$$R_1 = \sqrt{\frac{m}{\pi\rho h}}. \tag{4}$$

Согласно (2) искомая сила, учитывая (3), (1), (4),

$$F = S\Delta P = \frac{m\sigma}{\rho h}\left(\sqrt{\frac{\pi\rho h}{m}} + \frac{2}{h}\right) = 16,4 \text{ Н};$$

$$[F] = \frac{\text{кг}\cdot\text{Н}\cdot\text{м}^3}{\text{м}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}}\left(\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{м}^3\cdot\text{кг}}} + \frac{1}{\text{м}}\right) = \text{Н}\cdot\text{м}\left(\frac{1}{\text{м}} + \frac{1}{\text{м}}\right) = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{м}} = \text{Н}.$$

Ответ: $F = 16,4$ Н.

Задача 2.123

В сосуд с ртутью опущен открытый капилляр. Разность уровней ртути в сосуде и капилляре $h=37$ мм. Принимая плотность ртути $\rho=13,6$ г/см^3, а ее поверхностное натяжение $\sigma=0,5$ Н/м, определить радиус кривизны R ртутного мениска в капилляре.

Дано: $h=3,7\cdot10^{-3}$м; $\rho=1,36\cdot10^4$ кг/м^3; $\sigma=0,5$ Н/м.

Найти: R.

Решение. Избыточное давление, вызванное кривизной мениска,

$$\Delta P=\frac{2\sigma}{R},$$

где $\sigma-$ поверхностное натяжение; $R-$ радиус кривизны ртутного мениска.

Ртуть – несмачивающая жидкость, поэтому в капилляре опускается на такую глубину, при которой давление столба жидкости (гидростатическое давление) ρgh уравновешивается избыточным давлением ΔP, т.е.

$$\frac{2\sigma}{R}=\rho gh,$$

где $\rho-$ плотность ртути; $g-$ускорение свободного падения.

Откуда искомый радиус кривизны ртутного мениска

$$R=\frac{2\sigma}{\rho gh};$$

$$[R]=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^3\cdot\text{с}^2}{\text{м}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{кг}}=\text{м};$$

$$R=\frac{2\cdot0,5}{1,36\cdot10^4\cdot9,81\cdot3,7\cdot10^{-3}}=2,03\cdot10^{-3}\text{м}=2,03\text{ мм}.$$

Ответ: $R=2,03$ мм.

Задача 2.124

Вертикальный капилляр с внутренним диаметром $d=0,04$ см погружен в воду. Определить, на какую высоту h поднимется вода в капилляре, если поверхностное натяжение воды $\sigma=73$ мН/м, а ее плотность $\rho=1$ г/см^3. Считать, что вода полностью смачивает стекло.

Дано: $d = 4 \cdot 10^{-4}$м; $\sigma = 73 \cdot 10^{-3}$Н/м; $\rho = 1000$ кг/м^3; $\theta = 0$.

Найти: h.

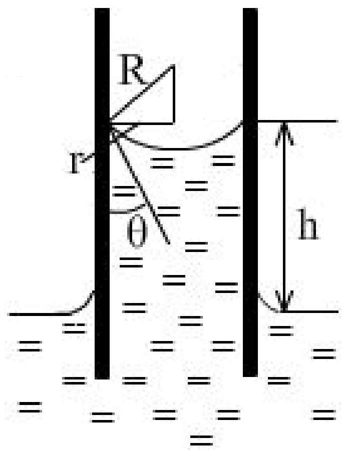
Решение. Жидкость в капилляре поднимется на такую высоту h, при которой давление столба жидкости (гидростатическое давление) $\rho g h$ уравновешивается избыточным давлением ΔP, т.е.

$$\frac{2\sigma}{R} = \rho g h,$$

где $g-$ускорение свободного падения; $R-$ радиус свободной поверхности жидкости, имеющей форму полусферы (радиус мениска).

Если $r-$ радиус капилляра, $\theta-$ краевой угол, то из рисунка следует, что

$$R = \frac{r}{\cos\theta}.$$



Тогда

$$\rho g h = \frac{2\sigma\cos\theta}{r},$$

откуда высота капиллярного подъема

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r}. \qquad (1)$$

Если считать, что вода полностью смачивает стекло (условие задачи), то $\theta = 0$ и $\cos\theta = 1$. Тогда, согласно (1), искомая высота, на которую поднимется вода в капилляре,

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r} = \frac{4\sigma}{\rho g d};$$

$$[h] = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{с}^2}{\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}} = \text{м};$$

$$h = \frac{4 \cdot 73 \cdot 10^{-3}}{1000 \cdot 9{,}81 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 7{,}44 \cdot 10^{-2}\text{м} = 7{,}44 \text{ см}.$$

Ответ: $h = 7{,}44$ см.

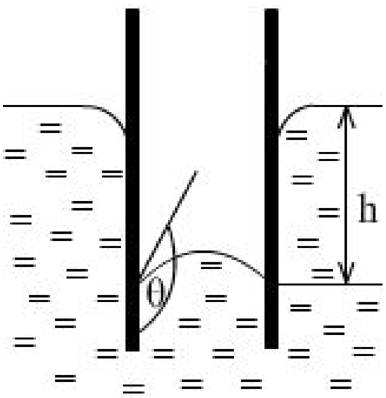
Задача 2.125

Вертикальный стеклянный капилляр с внутренним радиусом $r = 0,2$ мм помещен в ртуть, которая опускается в капилляре на глубину $h = 3,75$ см (см. рисунок). Определить поверхностное натяжение σ ртути, если ее плотность $\rho = 13,6$ г/см^3. Считать, что ртуть не смачивает стекло.

Дано: $r = 2 \cdot 10^{-4}$ м; $h = 3,75 \cdot 10^{-2}$ м; $\rho = 1,36 \cdot 10^{4}$ кг/м^3; $\theta = \pi$.

Найти: σ.

Решение. Ртуть в капилляре будет находиться в равновесии, если гидростатическое давление $p = \rho g h$ и давления под искривленной поверхностью $\Delta P = \dfrac{2\sigma\cos\theta}{r}$ будут уравновешивать друг друга:



$$\rho g h = \frac{2\upsilon\cos\theta}{r},$$

где g – ускорение свободного падения; θ – краевой угол; r – радиус капилляра.

Из этого выражения следует, что

$$\sigma = \frac{\rho g r h}{2\cos\theta}. \qquad (1)$$

Если считать, что ртуть не смачивает стекло (условие задачи), то $\theta = \pi$ и $\cos\theta = -1$. Тогда, согласно (1), искомое поверхностное натяжение ртути

$$\sigma = -\frac{\rho g r h}{2};$$

$$[\sigma] = \frac{\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н}}{\text{м}};$$

$$\sigma = -\frac{1,36 \cdot 10^4 \cdot 9,81 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 3,75 \cdot 10^{-2}}{2} = 0,5 \text{ Н/м}.$$

Ответ: $\sigma = 0,5$ Н/м.

Задача 2.126

Две одинаковые длинные плоскопараллельные пластины, расстояние между которыми $d = 1$ мм, погружены в воду (см. рисунок). Считая смачивание полным, определить, на какую высоту h поднимется вода в зазоре. Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3, а ее поверхностное натяжение $\sigma = 73$ мН/м.

Дано: $d = 10^{-3}$м; $\sigma = 73 \cdot 10^{-3}$Н/м; $\rho = 1000$ кг/м^3; $\theta = 0$.

Найти:

Решение. Избыточное давление ΔP уравновешивается давлением столба жидкости (гидростатическим давлением) $\rho g h$, т.е.

$$\Delta P = \rho g h. \tag{1}$$

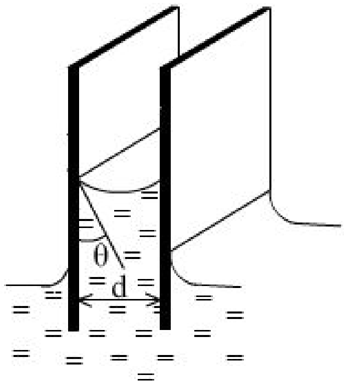
Избыточное давление под вогнутой поверхностью жидкости, согласно формуле Лапласа,

$$\Delta P = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \tag{2}$$

где $R_1 = \dfrac{d}{2\cos\theta}$ ($\theta -$ краевой угол); $R_2 = \infty$ (поверхность цилиндрическая).

Подставив R_1 и R_2 в формулу (2), найдем

$$\Delta P = \frac{2\sigma\cos\theta}{d}. \tag{3}$$



Тогда, согласно (1) и (3),

$$\frac{2\sigma\cos\theta}{d} = \rho g h,$$

откуда искомая высота

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g d};$$

$$[h] = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{с}^2}{\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}} = \text{м};$$

$$h = \frac{2 \cdot 73 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{1000 \cdot 9{,}81 \cdot 10^{-3}} = 1{,}49 \cdot 10^{-2}\text{м} = 1{,}49 \text{ см}.$$

Ответ: $h = 1{,}49$ см.

Задача 2.127

Как изменится высота поднятия спирта между двумя пластинками, погруженными в спирт, если расстояние между ними уменьшить с 1 мм до 0,5 мм? Смачивание пластинок считать полным.

Дано: $\sigma = 0{,}022$ Н/м; $\rho = 0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3; $r_1 = 10^{-3}$м; $r_2 = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$м.

Найти: Δh.

Решение. Поверхность смачивающей жидкости между пластинами принимает вид полуцилиндра (см. рисунок к задаче 2.126).

Лапласовское давление равно

$$P = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

где R_1 и R_2 – радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных нормальных сечений поверхности жидкости.

В этом случае одно из нормальных сечений – сечение, идущее вдоль образующей полуокружности. Для него $R_1 = \infty$. Второе, перпендикулярное к нему сечение, дает окружность радиусом $R_2 = \frac{d}{2}$, где d – расстояние между плоскостями.

Поэтому добавочное давление

$$P = \frac{\sigma}{R_2} = \frac{2\sigma}{d}.$$

Это давление уравновешивает давление столба жидкости высотой h, поэтому

$$\frac{2\sigma}{d} = \rho g h.$$

Отсюда

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g d}.$$

В нашем случае

$$h_1 = \frac{2\sigma}{\rho g d_1}; \qquad h_2 = \frac{2\sigma}{\rho g d_2}.$$

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{2\sigma}{\rho g}\left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right);$$

$$[\Delta h] = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{с}^2}{\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}}\left(\frac{1}{\text{м}} - \frac{1}{\text{м}}\right) = \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}} = \text{м};$$

$$\Delta h = \frac{2 \cdot 0,022}{0,8 \cdot 10^3 \cdot 9,81}\left(\frac{1}{0,5 \cdot 10^{-3}} - \frac{1}{10^{-3}}\right) = 5,61 \cdot 10^{-3}\text{м}.$$

Ответ: $\Delta h = 5,61 \cdot 10^{-3}$м.

Задача 2.128

Из капиллярной трубки с радиусом канала 0,2 мм по капле вытекает жидкость. Масса 100 капель равна 0,282 г. Определить коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Дано: $r = 2 \cdot 10^{-4}$м; $n = 100$; $m = 2,82 \cdot 10^{-4}$кг.

Найти: σ.

Решение. Капля отрывается в тот момент, когда ее сила тяжести равна силе поверхностного натяжения. Считая радиус шейки капли равным радиусу капилляра, можно записать:

$$2\pi r\sigma = \frac{mg}{n},$$

откуда

$$\sigma = \frac{mg}{2\pi rn};$$

$$[\sigma] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}} = \frac{\text{Н}}{\text{м}};$$

$$\sigma = \frac{2,82 \cdot 10^{-4} \cdot 9,8}{2 \cdot 3,14 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 100} = 2,2 \cdot 10^{-2}\,\text{Н/м}.$$

Ответ: $\sigma = 2,2 \cdot 10^{-2}$ Н/м.

Задача 2.129

Найти добавочное давление внутри мыльного пузыря диаметром 10 см. Какую работу нужно совершить, чтобы выдуть этот пузырь?

Дано: $d = 0{,}1$ м.

Найти: $P; A$.

Решение. Пленка мыльного пузыря имеет две сферические поверхности – внешнюю и внутреннюю. Обе поверхности оказывают давление на воздух, заключенный внутри пузыря. Так как толщина пленки чрезвычайно мала, то диаметры обеих поверхностей практически одинаковы. Поэтому добавочное давление

$$P = 2\frac{2\sigma}{r},$$

где r – радиус пузыря.

Так как $r = \frac{d}{2}$, то

$$P = \frac{8\sigma}{d};$$

$$[P] = \frac{\text{Н}}{\text{м} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}.$$

Коэффициент поверхностного натяжения мыльной воды $\sigma = 40$ мН/м, диаметр пузыря $d = 0{,}1$ м. Следовательно,

$$P = \frac{8 \cdot 40 \cdot 10^{-3}}{0{,}1} = 3{,}2 \text{ Па}.$$

Работа, которую нужно совершить, чтобы, растягивая пленку, увеличить ее поверхность на ΔS, выражается формулой

$$A = \sigma\Delta S \quad \text{или} \quad A = \sigma\left(S - S_0\right).$$

В данном случае S – общая площадь двух сферических поверхностей пленки мыльного пузыря; S_0 – общая площадь двух поверхностей плоской пленки, затягивающей отверстие трубки до выдувания пузыря.

Пренебрегая S_0, получаем:

$$A \approx \sigma\Delta S = 2\pi d^2\sigma;$$

$$[A] = \frac{м^2 \cdot Н}{м} = Н \cdot м = Дж;$$

$$A = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}1^2 \cdot 40 \cdot 10^{-3} \approx 2{,}5 \cdot 10^{-3}\,Дж.$$

Ответ: $A = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ Дж.

Задача 2.130

В сообщающихся капиллярных трубках с диаметрами $d_1 =$ 1 мм и $d_2 =$ 1,5 мм разность уровней ртути $\Delta h = 5$ мм. Определить поверхностное натяжение ртути. Смачивание считать полным.

Дано: $d_1 = 10^{-3}$м; $d_2 = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$м; $\Delta h = 5 \cdot 10^{-3}$м; $\rho = 1{,}36 \cdot 10^4$ кг/м^3.

Найти: σ.

Решение. Высота поднятия жидкости в капилляре

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r}.$$

Тогда для каждой трубки

$$h_1 = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r_1} \quad и \quad h_2 = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r_2}.$$

Так как по условию смачивание полное, то $\theta = 0$, следовательно, $\cos\theta = 1$.

Тогда перепад высот в трубках

$$\Delta h = h_1 - h_2 = \frac{2\sigma}{\rho g}\left(\frac{2}{d_1} - \frac{2}{d_2}\right),$$

откуда

$$\sigma = \frac{\rho g \Delta h d_1 d_2}{4(d_2 - d_1)};$$

$$[\sigma] = \frac{м \cdot кг \cdot м \cdot м \cdot м}{м^3 \cdot с^2 \cdot м} = \frac{Н}{м};$$

$$\sigma = \frac{1{,}36 \cdot 10^4 \cdot 9{,}81 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3}}{4(1{,}5 \cdot 10^{-3} - 10^{-3})} = 0{,}5\ Н/м.$$

Ответ: $\sigma = 0{,}5$ Н/м.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антошина, Л. Г. Общая физика. Сборник задач: учеб. пособие / Л.Г. Антошина, С.В. Павлов, Л.А. Скипетрова; под ред. проф. Б.А. Струкова. – М.: ИНФРА-М, 2006. – 336 с.
2. Гладской, В.М. Сборник задач по физике с решениями: пособие для вузов / В.М. Гладской, П.И.Самойленко. – 2-е изд. – М.:Дрофа, 2004. – 288с. :ил.
3. Демков, В.П. Физика. Теория. Методика. Задачи / В.П. Демков, О.Н. Третьякова. – М.: Высш. шк., 2001. – 669 с.: ил.
4. Зиновьев, В.А. Краткий физико-технический справочник. Т. 2 / В.А. Зиновьев, Г.Н. Свешников, И.К. Снитко. – М.: Физматгиз, 1960. – 411 с.
5. Калашников, Н.П. Основы физики. Упражнения и задачи: учеб. пособие для вузов / Н.П. Калашников, М.А. Смондырев. – М.: Дрофа, 2004. – 464 с.
6. Кириллов, В.М. Решение задач по физике: учеб. пособие / В.М. Кириллов [и др.]. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: КомКнига, 2006. – 248 с.
7. Кирьянов, А.П. Общая физика. Сборник задач: учеб. пособие / А.П. Кирьянов [и др.]; под ред. И.П. Шапкарина. – М.: КНОРУС, 2008. – 304 с.
8. Кошкин, Н.И. Справочник по элементарной физике / Н.И. Кошкин, М.Г. Ширкевич. – М.: Физматгиз. 1960. – 208 с.
9. Курс физики: учебник для вузов: В 2 т. / под ред. В.Н. Лозовского. – СПб.: Изд-во «Лань», 2001. – Т. 1. – 576 с.; Т. 2. – 592 с.
10. Лунц, Г.Л. Краткий физико-технический справочник Т. 1. – М.: Физматгиз, 1960. – 446 с.
11. Макаренко, Г.М. Курс общей физики / Г.М. Макаренко. – Минск: Дизайн ПРО, 2003. – 640 с.
12. Макаренко, Г.М. Физические основы механики. Молекулярная физика и термодинамика: сб. заданий В 3 ч. / Г.М. Макаренко. – Новополоцк: ПГУ, 2008. – 304 с.
13. Наркевич, И.И. Физика: учебник / И.И. Наркевич, Э.И. Волмянский, С.И. Лобко – Минск: Новое знание, 2004. – 680 с.
14. Новиков, С.М. Сборник заданий по общей физике: учеб. пособие для студентов вузов / С.М. Новиков. – М.: ООО «Издательство Оникс»; ООО «Издательство “Мир и образование”», 2006. – 512 с.: ил.
15. Новодворская, Е.М. Сборник задач по физике с решениями для вузов / Е.М. Новодворская, Э.М. Дмитриев. – М.: ООО «Издательский дом “Оникс XXI век”»; ООО «Издательство Минобразования», 2005. – 386 с.: ил.
16. Решение задач по курсу общей физики: учеб. пособие. – 2-е изд., испр. / под ред. Н.М. Рогачева. – СПб.: Изд-во «Лань», 2008. – 304 с.
17. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т.И. Трофимова. – М.: Высш. шк., 1990. – 478 с.
18. Трофимова, Т. И. Курс физики. Задачи и решения: учеб. пособие для втузов / Т.И. Трофимова, А.В. Фирсов. – М.: Изд. центр «Академия», 2004. – 592 с.
19. Трофимова, Т.И. Курс физики. Колебания и волны. Теория, задачи и решения: учеб. пособие для студентов техн. специальностей вузов / Т.И. Трофимова, А.В. Фирсов. – М.: Изд. центр «Академия», 2003. – 256 с.
20. Фирганг, Е.В. Руководство к решению задач по курсу общей физики / Е.В. Фирганг. – СПб.: Изд-во «Лань», 2007. – 368 с.
21. Чертов, А.Г. Задачник по физике: учеб. пособие для втузов / А.Г Чертов, А.А. Воробьев. – 7-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во физико-математической литературы, 2003. – 640 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

МАКАРЕНКО Геннадий Макарович
АНТОНОВИЧ Дмитрий Анатольевич

ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ

Пособие

В четырех частях

Часть 2

ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

Редактор *Т.В. Булах*

Дизайн обложки *В.А. Виноградовой*

Подписано в печать 20.05.2010. Формат 60×84 1/16. Гарнитура Таймс. Бумага офсетная.
Ризография. Усл. печ. л. 10,44. Уч.-изд. л. 9,8. Тираж 120 экз. Заказ 682.

Издатель и полиграфическое исполнение –
учреждение образования «Полоцкий государственный университет»

ЛИ № 02330/0548568 от 26.06.2009 ЛП № 02330/0494256 от 27.05.2009

211440 г. Новополоцк, ул. Блохина, 29