Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

Г. М. Макаренко
Н. В. Вабищевич

ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ

Пособие

В четырех частях

Часть 3

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Новополоцк
ПГУ
2011

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73
М15

Рекомендовано к изданию методической комиссией
геодезического факультета в качестве
пособия (протокол № 7 от 16.04.2010)

Рецензенты:

канд. пед. наук, доц., зав. каф. общей физики и астрономии УО «Витебский государственный университет им. П. М. Машерова» И. В. ГАЛУЗО;

канд. техн. наук, доц. каф. физики УО «Полоцкий государственный университет» Д. А. АНТОНОВИЧ

Макаренко, Г. М.

М15 Задачи по физике: пособие. В 4 ч. Ч. 3: Электричество и магнетизм / Г. М. Макаренко, Н. В. Вабищевич. – Новополоцк : ПГУ, 2011. – 200 с.

ISBN 978-985-531-157-8.

Приведены решения 135 задач, используемых при изучении физики (раздел «Электродинамика»). По каждой теме дан перечень основных формул, применяемых при решении.

Предназначен для студентов высших учебных заведений технических специальностей.

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73

ISBN 978-985-531-157-8 (Ч. 3)
ISBN 978-985-531-043-4

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие разработано в соответствии с программой курса общей физики для студентов вузов, для которых физика не является профилирующей дисциплиной, и призвано помочь студентам технических вузов (особенно обучающимся без отрыва от производства) самостоятельно научиться решать задачи по физике. В нем подробно рассмотрены решения числовых задач по данному разделу.

Физика является одной из тех наук, знание которой необходимо для успешного изучения общенаучных и специальных дисциплин. При изучении курса физики студенты должны прочно усвоить основные законы и формулы, овладеть необходимыми приемами умственной деятельности, важным компонентом которой является умение решать задачи по физике.

Хорошо известно, что единственный способ научиться решать задачи – пытаться решать их самостоятельно. Отсюда вытекает диалектичность процесса обучения: знание теории приобретается одновременно с ее использованием для решения задач. Абстрактные поначалу законы, уравнения, определения понятий и физических величин (эта абстрактность и является главным «камнем преткновения» при изучении физики) в процессе их практического применения для описания конкретных физических явлений (т.е. при решении физических задач) начинают постепенно наполняться конкретным содержанием, и только тогда приходит понимание теории. Недаром известный итальянский физик Энрико Ферми утверждал, что «знать физику – означает уметь решать задачи». Другими словами, уровень подготовки по физике определяется уровнем сложности задач, которые студент может решить.

Основная цель пособия – оказать студентам методическую помощь в выполнении самостоятельных и контрольных работ; ознакомить их с некоторыми методами решения физических задач; привить навыки и культуру решения, обратить внимание на наиболее распространенные ошибки.

В пособии рассмотрены типовые задачи, подобные тем, которые наиболее часто используются при изучении общей физики в техническом вузе.

Задачи объединены в разделы, разделенные по темам. В начале каждой темы приведены основные законы, уравнения и формулы, используемые для решения задач.

Решения задач выполнены по одной схеме: составлены необходимые уравнения, приведено решение их в общем виде, подставлены числовые данные, выписан ответ.

Предлагаемое пособие предназначено для студентов вузов, для которых физика не является профилирующей дисциплиной.

Методические указания к решению задач

При решении задач рекомендуется определенная последовательность:

1. Изучите по учебникам [3, 8 – 10] теоретический материал соответствующего раздела курса, запомните законы и основные формулы, а также единицы измерения величин, входящих в них.
2. Несколько раз внимательно прочитайте условие задачи. Сделайте сокращенную запись данных и искомых физических величин, предварительно представив их в системе СИ.

В условиях и при решении задач часто используются множители и приставки СИ для образования десятичных и дольных единиц.

3. Вникните в смысл задачи. Представьте физическое явление, о котором идет речь; введите упрощающие предположения, которые можно сделать при решении. Для этого необходимо использовать такие модели, как материальная точка, абсолютно твердое тело, точечный заряд, луч света и т.д.
4. Если позволяет условие задачи, выполните схематический чертеж, поясняющий содержание и решение.
5. С помощью физических законов установите количественные связи между заданными и искомыми величинами, т.е. составьте замкнутую систему уравнений, в которой число уравнений равнялось бы числу неизвестных.
6. Найдите решение полученной системы уравнений в виде расчетной формулы, отвечающей на вопрос задачи.
7. Проверьте правильность полученного решения, используя правило размерностей: размерности правой и левой частей уравнения должны совпадать. Хотя равенство размерностей не является достаточным подтверждением правильности решения задачи, рекомендуемый метод проверки очень полезен.
8. Подставьте в полученную формулу числовые значения физических величин и проведите вычисления. Обратите внимание на точность численного ответа, которая не может быть больше точности исходных величин.
9. Получив численный ответ, оцените его достоверность.

Заметим, что при решении задач возможны отступления от вышеизложенной схемы.

В пособии не проводится проверка размерностей в некоторых задачах, в которых размерность очевидна.

Для уменьшения объема книги подстановка численных значений в некоторых заданиях не проводится.

3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

3.1. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Основные формулы

Закон сохранения электрического заряда

$$\sum_{i=1}^{k} q_i = \text{const},$$

где k – число зарядов.

В электрически изолированной системе алгебраическая сумма зарядов остается постоянной.

Закон Кулона

$$|F| = K\frac{q_1 q_2}{r^2},$$

где $K = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ = 9·10^9 (Н·м^2)/Кл^2; $\vec{F}$ – сила взаимодействия точечных зарядов q_1 и q_2 в вакууме, r – расстояние между зарядами, ε_0 = 8,85·10^{-12} Ф/м (или Кл^2/(Н·м^2)) – электрическая постоянная.

Сила взаимодействия двух точечных зарядов, находящихся в однородном безграничном диэлектрике,

$$F = \frac{|q_1 q_2|}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2},$$

где ε – диэлектрическая проницаемость.

Напряженность электрического поля в данной точке (т.е. в той точке, в которой на пробный заряд q действует со стороны поля сила $\vec{F}$)

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}.$$

Принцип суперпозиции электрических полей: напряженность поля $\vec{E}$, создаваемая в данной точке системой, состоящей из K точечных зарядов, равна векторной сумме напряженностей, создаваемых в этой точке отдельными зарядами,

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_K .$$

Напряженность электростатического поля равна по модулю и противоположна по направлению градиенту потенциала:

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi .$$

Проекция вектора напряженности электростатического поля на произвольное направление численно равна быстроте убывания потенциала поля на единицу длины в этом направлении:

$$E_l = -\frac{d\varphi}{dl} .$$

Линейная, поверхностная и объемная плотности зарядов

$$\tau = \frac{dq}{dl}; \quad \sigma = \frac{dq}{dS}; \quad \rho = \frac{dq}{dV},$$

где dq – заряд, приходящийся соответственно на единицу длины, площади и объема; dl – длина физически бесконечно малого отрезка нити; dS – физически бесконечно малый участок поверхности; dV – малый элемент объема.

Напряженность поля точечного заряда или заряженной сферы (вне сферы)

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

где r – расстояние от центра сферы до точки.

Напряженность поля, создаваемого в безграничном диэлектрике точечным зарядом или заряженной сферой (вне сферы),

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2} .$$

Напряженность поля бесконечно длинной заряженной нити или цилиндра

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r} .$$

Напряженность поля равномерно заряженной бесконечной плоскости в вакууме

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Напряженность поля, образованного двумя бесконечными равномерно заряженными плоскостями,

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon},$$

где ε – диэлектрическая проницаемость однородного диэлектрика, полностью заполняющего объем между плоскостями.

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль замкнутого контура

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_L E_l dl = 0,$$

где E_l – проекция вектора $\vec{E}$ на направление элементарного перемещения $d\vec{l}$. Интегрирование производится по любому замкнутому контуру L.

Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда q_0 из точки 1 в точку 2,

$$A_{12} = q_0 (\varphi_1 - \varphi_2) \quad \text{или} \quad A_{12} = q_0 U, \quad \text{или}$$

$$A_{12} = q_0 \int_1^2 \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = q_0 \int_1^2 E \cos\left(\vec{E}, d\vec{l}\right) dl,$$

где $(\varphi_1 - \varphi_2) = U$ – разность потенциалов между точками 1 и 2 в электростатическом поле.

Разность потенциалов между точками 1 и 2 в электростатическом поле

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q_0} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \int_1^2 E_l dl,$$

где A_{12} – работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда q_0 из точки 1 в точку 2; E_l – проекция вектора $\vec{E}$ на направление элементарного перемещения $d\vec{l}$ (интегрирование производится вдоль любой линии, соединяющей начальную и конечную точки, так как работа сил электростатического поля не зависит от траектории перемещения).

Разность потенциалов между точками, находящимися на расстоянии x_1 и x_2 от равномерно заряженной бесконечной плоскости,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} E dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_2 - x_1),$$

где σ – поверхностная плотность заряда.

Разность потенциалов между бесконечными разноименными заряженными плоскостями, расстояние между которыми равно d,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E dx = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d.$$

Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от центра равномерно заряженной сферической поверхности (объемно заряженного шара) радиусом R с общим зарядом q, причем $r_1 > R$, $r_2 > R$, $r_2 > r_1$,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от центра заряженного шара радиусом R с общим зарядом q, причем $r_1 < R$, $r_2 < R$, $r_2 > r_1$,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^3} dr = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left(r_2^2 - r_1^2\right).$$

Разность потенциалов между двумя точками, находящимися на расстояниях r_1 и r_2 от оси равномерно заряженного с линейной плотностью τ бесконечного цилиндра радиусом R, причем $r_1 > R$, $r_2 > R$, $r_2 > r_1$,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Поляризованность диэлектрика

$$\vec{P} = \frac{\vec{P}_V}{V} = \frac{\sum_i \vec{P}_i}{V},$$

где V – объем диэлектрика; $\vec{P}_V = \sum_i \vec{P}_i$ – дипольный момент диэлектрика, $\vec{P}_i$ – дипольный момент i-той молекулы.

Связь между поляризованностью диэлектрика и напряженностью электростатического поля можно выразить формулой

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E},$$

где χ – диэлектрическая восприимчивость вещества; ε_0 – электрическая постоянная.

Связь диэлектрической проницаемости ε с диэлектрической восприимчивостью χ можно выразить формулой

$$\varepsilon = 1 + \chi.$$

Связь между напряженностью E поля в диэлектрике и напряженностью E_0 внешнего поля можно записать следующим образом:

$$E = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0}; \quad E = \frac{E_0}{\varepsilon},$$

где P – поляризованность; ε – диэлектрическая проницаемость.

Связь между векторами электрического смещения $\vec{D}$, напряженности электростатического поля $\vec{E}$ и поляризованности $\vec{P}$:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}, \quad \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}.$$

Поток вектора напряженности $\vec{E}$ через поверхность S определяется интегралом

$$\varPhi = \oint_S E_n dS,$$

где E_n – проекция вектора $\vec{E}$ на направление нормали к элементу площади поверхности dS.

Теорема Гаусса: поток вектора напряженности $\vec{E}$ электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри этой поверхности, деленной на ε_0:

$$\oint_S E_n dS = \frac{\sum_{i=1}^{N} q_i}{\varepsilon_0},$$

где N – число зарядов.

Вектор электрического смещения (электрической индукции) для изотропной однородной диэлектрической среды

$$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}.$$

Теорема Гаусса для вектора $\vec{D}$: поток электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности сторонних зарядов:

$$\oint_S D_n dS = \sum_{i=1}^{K} q_i .$$

Сторонними называются заряды, которые находятся в пределах диэлектрика, но не входят в состав его молекул.

Потенциал в какой-либо точке электрического поля равен отношению потенциальной энергии заряда W_n к пробному заряду q_0:

$$\varphi = \frac{W_n}{q_0} .$$

Потенциальная энергия заряда в поле другого точечного заряда

$$W_n = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} .$$

Потенциал поля точечного заряда

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} .$$

Напряженность и потенциал электростатического поля, создаваемого равномерно заряженной сферой с радиусом R и с зарядом q, на расстоянии r от центра сферы:

а) если $r < R$, то $E = 0$, $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$;

б) если $r = R$, то $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$, $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$;

в) если $r > R$, то $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

Электроемкость удлиненного проводника

$$C = \frac{q}{\varphi},$$

где q – заряд проводника; φ – его потенциал.

Электроемкость конденсатора

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2},$$

где $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ – напряжение между пластинами.

Для плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d},$$

где S – площадь одной пластины конденсатора; d – расстояние между пластинами; ε – диэлектрическая проницаемость однородного изотропного диэлектрика, заполняющего полностью пространство между пластинами.

Электроемкость удлиненной металлической сферы радиусом R, находящейся в бесконечной среде с диэлектрической проницаемостью ε,

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R.$$

Электроемкость сферического конденсатора (две концентрические сферы с радиусами R_1 и R_2)

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1 R_2}{(R_2 - R_1)}.$$

Электроемкость цилиндрического конденсатора (два коаксиальных цилиндра с длиной образующей l и радиусами R_1 и R_2)

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln\frac{R_1}{R_2}}.$$

Электроемкость системы конденсаторов:

а) при параллельном соединении $C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$;

если C_i одинаковы, то $C = nC_i$;

б) при последовательном соединении $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}$;

если C_i одинаковы, то $C = \frac{C_i}{n}$.

Энергия заряженного уединенного проводника

$$W = \frac{q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2}.$$

Энергия взаимодействия системы точечных зарядов

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i,$$

где φ_i – потенциал, создаваемый в точке, где находится заряд q_i, всеми зарядами, кроме i-того.

Энергия электрического поля в объеме V

$$W = \int_V \omega dV,$$

где $\omega = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2}$ – объемная плотность энергии; dV – бесконечно малый объем.

Сила притяжения между пластинами плоского конденсатора

$$F = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2 S}{2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S U^2}{2d^2} = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0\varepsilon}.$$

Связь между поверхностной плотностью σ' связанного заряда в однородном диэлектрике с поверхностной плотностью σ стороннего заряда на поверхности прилежащего к нему заряженного проводника

$$\sigma' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\sigma.$$

Решение задач

ЗАДАЧА 3.1

Три одинаковых положительных заряда $q_1 = q_2 = q_3$ = 1 нКл расположены по вершинам равностороннего треугольника (см. рис.). Какой отрицательный заряд q_4 нужно поместить в центре треугольника, чтобы сила притяжения с его стороны уравновесила силы взаимного отталкивания зарядов, находящихся в вершинах?

Дано:
$q_1 = q_2 = q_3$ = 10^{-9} Кл
q_4 – ?

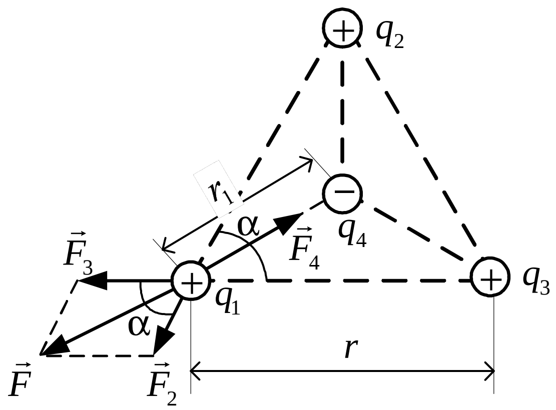
Решение

Все три заряда, расположенные по вершинам треугольника, находятся в одинаковых условиях. Поэтому для решения задачи достаточно выяснить, какой заряд следует поместить в центре треугольника, чтобы один из трех зарядов, например, q_1 находился в равновесии.

В соответствии с принципом суперпозиции на заряд действует каждый заряд независимо от остальных. Поэтому заряд q_1 будет находиться в равновесии, если векторная сумма действующих на него сил будет равна нулю:

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F} + \vec{F}_4 = 0, \qquad (1)$$

где $\vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ – силы, с которыми действуют на заряд q_1 соответственно заряды q_2, q_3 и q_4; $\vec{F}$ – равнодействующая сил $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$.



Так как силы $\vec{F}$ и $\vec{F}_4$ направлены по одной прямой (см. рис.), то векторное равенство (1) можно заменить скалярной суммой:

$$F - F_4 = 0 \quad \text{или} \quad F_4 = F.$$

Выразив в последнем равенстве F через $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ и учитывая, что $F_3 = F_2$, получаем по теореме косинусов

$$F_4 = F_2\sqrt{2(1+\cos\alpha)}.$$

Применив закон Кулона и учитывая, что $q_2 = q_3 = q_1$, найдем

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_4}{\varepsilon r_1^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1^2}{\varepsilon r^2}\sqrt{2(1+\cos\alpha)},$$

откуда

$$q_4 = \frac{q_1 r_1^2}{r^2}\sqrt{2\left(1+\cos\alpha\right)}\,. \qquad (2)$$

В равностороннем треугольнике $\cos\alpha = \cos 60° = \frac{1}{2}$, с учетом этого формула (2) примет вид

$$q_4 = \frac{q_1}{\sqrt{3}}; \quad q_4 = \frac{1\cdot 10^{-9}}{1{,}73} \approx 0{,}58 \text{ нКл}.$$

Ответ: $q_4 = 0{,}58$ нКл, равновесие зарядов будет неустойчивым.

ЗАДАЧА 3.2

Два тонких длинных проводника равномерно заряжены разноименными зарядами с линейной плотностью $|\tau|$ = 200 мкКл/м и расположены параллельно друг другу. Расстояние между проводниками d = 10 см. Какова напряженность E поля в точке, удаленной от первого проводника на расстояние r_1 = 15 см, а от второго – на r_2 = 16 см?

Дано:
d = 0,1 м
τ = $2\cdot 10^{-4}$ Кл/м
r_1 = 0,15 м
r_2 = 0,16 м

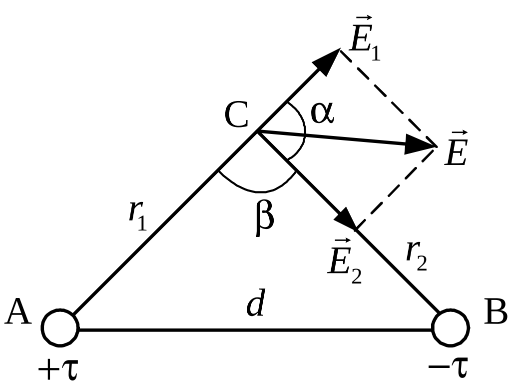
E – ?

Решение

На рисунке показаны сечения проводников A и B. Согласно принципу суперпозиции электрических полей напряженность в точке C

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2\,.$$

Модули напряженностей первого и второго проводников вычисляем по формуле



$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}:$$

$$E_1 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r_1}; \quad E_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r_2}\,.$$

Направление результирующего вектора $\vec{E}$ находим по правилу параллелограмма, а модуль вектора $\vec{E}$ определяем по теореме косинусов

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha},$$

где α – угол между векторами $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$.

Из рисунка видно, что угол $\alpha = 180° - \beta$, а $\cos\alpha = \cos(180° - \beta) = -\cos\beta$.

Тогда расчетная формула примет вид

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} - \frac{2}{r_1r_2}\cos\beta}.$$

Из треугольника ABC также по теореме косинусов запишем:

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\beta.$$

Отсюда найдем

$$\cos\beta = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2};$$

$$\cos\beta = \frac{0{,}1^2 - 0{,}15^2 - 0{,}16^2}{2\cdot 0{,}15\cdot 0{,}16} = 0{,}8.$$

$$[E] = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}}{\text{м}\cdot\text{Ф}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{Кл}\cdot\text{м}} = \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

$$E = \frac{2\cdot 10^{-4}}{2\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\sqrt{\frac{1}{0{,}15^2} + \frac{1}{0{,}16^2} - \frac{2}{0{,}15\cdot 0{,}16}\cos 0{,}8} = 14\cdot 10^6\ \frac{\text{В}}{\text{м}} = 14\ \frac{\text{МВ}}{\text{м}}.$$

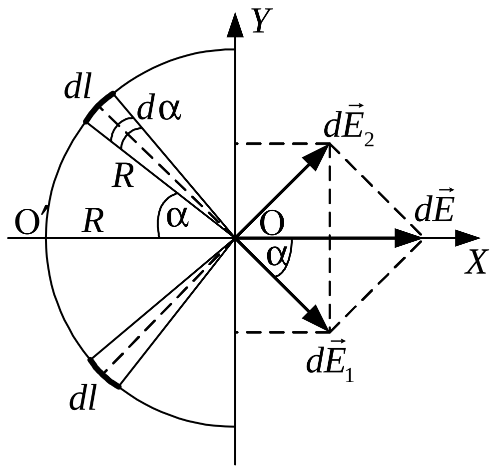
Ответ: $E = 14\ \frac{\text{МВ}}{\text{м}}$.

ЗАДАЧА 3.3

Найти напряженность E и потенциал φ в центре полукольца радиусом R = 5 см, по которому равномерно распределен заряд q = $3\cdot 10^{-9}$ Кл.

Дано:	**Решение**
R = 0,05 м q = $3\cdot 10^{-9}$ Кл	Для определения напряженности $\vec{E}$ и потенциала φ в центре полукольца воспользуемся принципом суперпозиции. Разделим полукольцо на малые элементы дуги dl так, чтобы заряд $dq = \tau dl = \frac{q}{\pi R}dl$
E, φ – ?	

каждой точки дуги можно было считать точечным. Выберем два произвольных симметрично расположенных относительно OO' элемента дуги (см. рис.).



Напряженности электрического поля в точке O, создаваемые выбранными элементами, $d\vec{E}_1$ и $d\vec{E}_2$. Согласно принципу суперпозиции $d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2$.

Из соображений симметрии следует, что алгебраическая сумма проекций напряженностей поля выбранных элементов на ось OY равна нулю. Результирующее поле направлено вдоль оси OX:

$$dE = dE_X = dE_1 \cos\alpha = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\alpha = \frac{q\cos\alpha}{4\pi^2\varepsilon_0 R^3} dl.$$

Так как $dl = Rd\alpha$, то $dE = \dfrac{q\cos\alpha}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2} d\alpha$.

Положение точечного заряда dq на полукольце определяется углом α. Поэтому угол α выбираем в качестве переменной интегрирования;

$$E = E_X = \frac{q}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\alpha d\alpha = \frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2};$$

$$[E] = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}}{\text{Ф}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}\cdot\text{В}}{\text{Кл}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{В}}{\text{м}};$$

$$E = \frac{3\cdot 10^{-9}}{2\cdot(3{,}14)^2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot(0{,}05)^2} = 6{,}88\cdot 10^3\ \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Потенциал φ в центре полукольца определяется алгебраической суммой потенциалов электрического поля $d\varphi$ элементарных зарядов (согласно принципу суперпозиции).

Учитывая, что $d\varphi$ точечного заряда

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{qdl}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2},$$

где $dq = \dfrac{qdl}{\pi R}$,

определяем φ:

$$\varphi = \int_0^{\pi R} d\varphi = \frac{q}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2}\int_0^{\pi R} dl = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R};$$

$$[\varphi] = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}}{\text{Ф}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{Кл}} = \text{В};$$

$$\varphi = \frac{3\cdot 10^{-9}}{4\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}05} = 5{,}39\cdot 10^2\ \text{В}.$$

Ответ: $E = 6{,}88\cdot 10^3\ \dfrac{\text{В}}{\text{м}}$; $\varphi = 5{,}39\cdot 10^2$ В.

ЗАДАЧА 3.4

Тонкий стержень длиной l = 15 см несет равномерно распределенный заряд с линейной плотностью $\tau = 6\ \dfrac{\text{мкКл}}{\text{м}}$. Найти напряженность E, создаваемую этим зарядом, в точке, расположенной на оси стержня и удаленной от ближайшего конца стержня на расстояние r = 10 см.

Дано:

l = 0,15 м

$\tau = 6\cdot 10^{-6}\ \dfrac{\text{Кл}}{\text{м}}$

r = 0,1 м

E – ?

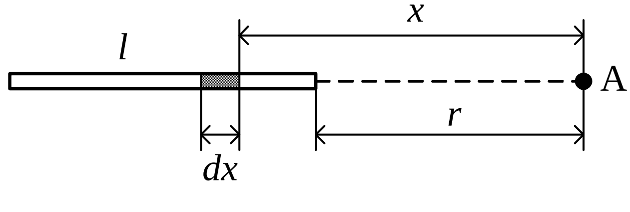
Решение

Заряд, равномерно распределенный по тонкому стержню, не является точечным, поэтому непосредственно вычислить напряженность поля по формуле

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (1)$$

невозможно.

Выделим на стержне бесконечно малый элемент длины dx (см. рис.). Заряд $dq = \tau dx$, находящийся на выделенном элементе, можно считать точечным. По формуле (1) найдем напряженность в точке A, создаваемую зарядом dq:



$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = \frac{\tau dx}{4\pi\varepsilon_0 x^2},$$

где x – расстояние от dx до точки А.

Применяя принцип суперпозиции, определим напряженность поля в точке A, создаваемую заряженным стержнем:

$$E=\int_l dE=\int_r^{r+l}\frac{\tau dx}{4\pi\varepsilon_0 x^2}=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_r^{r+l}=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+l}\right);$$

$$[E]=\frac{\text{Кл}\cdot\text{м}}{\text{Ф}\cdot\text{м}^2}=\frac{\text{Кл}\cdot\text{м}\cdot\text{В}}{\text{Кл}\cdot\text{м}^2}=\frac{\text{В}}{\text{м}};$$

$$E=\frac{6\cdot10^{-6}}{4\cdot3{,}14\cdot8{,}85\cdot10^{-12}}\left(\frac{1}{0{,}1}-\frac{1}{0{,}1+0{,}15}\right)=324\cdot10^3\ \frac{\text{В}}{\text{м}}=324\ \frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

Ответ: $E=324\ \frac{\text{кВ}}{\text{м}}$.

ЗАДАЧА 3.5

На отрезке тонкого прямого провода длиной $l=10$ см равномерно распределен заряд $q = 4\cdot10^{-8}$ Кл. Вычислить напряженность E в точке, расположенной на перпендикуляре к проводу, проведенном через один из его концов, на расстоянии $r_0 = 0{,}08$ м.

Дано:
$l=0{,}1$ м
$q = 4\cdot10^{-8}$ Кл
$r_0 = 0{,}08$ м

E – ?

Решение

Заряд, равномерно распределенный по тонкому проводу AB (см. рис.), не является точечным. Однако если выделить на стержне малый участок длиной dx, то находящийся на нем заряд dq можно рассматривать как точечный.

Введем линейную плотность электрического заряда $\tau=\frac{q}{\ell}$ и $dq=\tau dx$.

Тогда напряженность dE, создаваемая точечным зарядом в точке C,

$$dE=\frac{\tau dx}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \qquad (1)$$

Вектор $d\vec{E}$ можно разложить по координатным осям:

$$dE_x=dE\sin\alpha \quad \text{и} \quad dE_y=dE\cos\alpha. \qquad (2)$$

Рассчитаем dE.

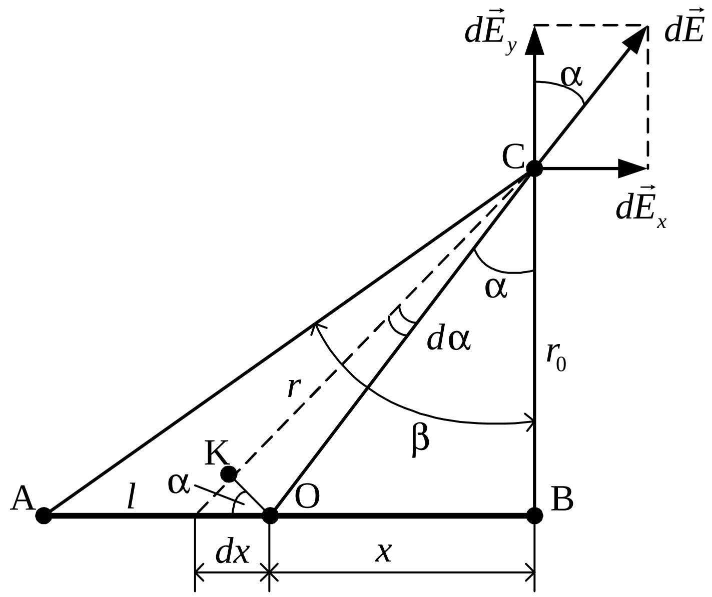
Из рисунка следует, что

$$dx = \frac{\text{KO}}{\cos\alpha} = \frac{r d\alpha}{\cos\alpha}; \quad (3)$$

$$r = \sqrt{r_0^2 + x^2},$$

где

$$x = r_0 \operatorname{tg}\alpha. \qquad (4)$$



Таким образом, используя выражения (1) – (4), получим:

$$dE = \frac{\tau r d\alpha}{\cos\alpha 4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\tau d\alpha}{\cos\alpha 4\pi\varepsilon_0 \sqrt{r_0^2 + r_0^2 \operatorname{tg}^2\alpha}} =$$

$$= \frac{\tau d\alpha}{\cos\alpha 4\pi\varepsilon_0 r_0 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\tau \cos\alpha d\alpha}{\cos\alpha 4\pi\varepsilon_0 r_0} = \frac{\tau d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0}. \qquad (5)$$

Вычислим E_x и E_y.

Используя выражения (2) и (5), запишем:

$$E_x = \int_0^\beta dE \sin\alpha = \int_0^\beta \frac{\tau \sin\alpha d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = -\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \cos\alpha \Big|_0^\beta = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0}(1 - \cos\beta);$$

$$E_y = \int_0^\beta dE \cos\alpha = \int_0^\beta \frac{\tau \cos\alpha d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \sin\alpha \Big|_0^\beta = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \sin\beta.$$

Здесь коэффициент $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{\text{Нм}^2}{\text{Кл}^2}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{r_0}$; $\beta = 51{,}34°$.

По принципу суперпозиции $\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y$, или по модулю

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \sqrt{2(1 - \cos\beta)};$$

$$[E]=\frac{\text{Кл}\cdot\text{м}}{\Phi\cdot\text{м}^2}=\frac{\text{Кл}\cdot\text{м}\cdot\text{В}}{\text{Кл}\cdot\text{м}^2}=\frac{\text{В}}{\text{м}};$$

$$E=\frac{4\cdot10^{-8}\cdot9\cdot10^{9}}{0{,}1\cdot0{,}08}\sqrt{2\left(1-\cos51{,}34^\circ\right)}=39\cdot10^{3}\,\frac{\text{В}}{\text{м}}=39\,\frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

Ответ: $E=39\,\dfrac{\text{кВ}}{\text{м}}$.

ЗАДАЧА 3.6

Две концентрические проводящие сферы радиусами R_1 = 6 см и R_2 = 10 см несут соответственно заряды q_1 = 1 нКл и q_2 = – 0,5 нКл (см. рис.). Найти напряженность E поля в точках, отстоящих от центра сфер на расстояниях r_1 = 5 см, r_2 = 9 см, r_3 = 15 см. Построить график E (r).

Дано:
$R_1 = 6\cdot10^{-2}$ м
$R_2 = 10\cdot10^{-2}$ м
$q_1 = 10^{-9}$ Кл
$q_2 = -0{,}5\cdot10^{-9}$ Кл
$r_1 = 5\cdot10^{-2}$ м
$r_2 = 9\cdot10^{-2}$ м
$r_3 = 15\cdot10^{-2}$ м

E_1, E_2, E_3 – ? $E(r)$ – ?

Решение

Точки, в которых требуется найти напряженность электрического поля, лежат в трех областях: в области I ($r_1 < R_1$), области II ($R_1 < r_2 < R_2$), области III ($r_3 > R_3$).

1. Для определения напряженности E_1 в области I выберем сферу S_1 радиусом r_1 («гауссову» поверхность) и воспользуемся теоремой Остроградского – Гаусса

$$\oint_{S_1} E_n dS = 0$$

(так как суммарный заряд, находящийся внутри «гауссовой» поверхности, равен нулю).

Из соображений симметрии $E_n = E_1$ = const. Следовательно, $E_1\oint_{S_1} dS = 0$, поэтому E_1 (напряженность поля в области I) во всех точках, удовлетворяющих условию $r_1 < R_1$, равна нулю: $E_1 = 0$.

2. В области II «гауссову» поверхность выберем радиусом r_2. В этом случае $\oint_{S_2} E_n dS = \dfrac{q_1}{\varepsilon_0\varepsilon} = \dfrac{q_1}{\varepsilon_0}$, так как $\varepsilon \simeq 1$ для воздуха, или $ES_2 = \dfrac{q_1}{\varepsilon_0}$.

Обозначив напряженность E для области II через E_2, получим

$$E_2 = \frac{q_1}{\varepsilon_0 S_2},$$

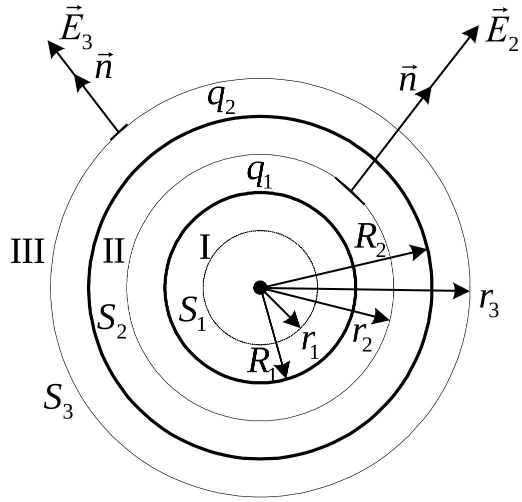
где $S_2 = 4\pi r_2^2$ – площадь «гауссовой» поверхности.

Тогда

$$E_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2};$$

$$[E] = \frac{\text{Кл} \cdot \text{м}}{\text{Ф} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{м} \cdot \text{В}}{\text{Кл} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{В}}{\text{м}};$$

$$E_2 = \frac{10^{-9}}{4\pi / (4\pi \cdot 9 \cdot 10^9)(0{,}09)^2}\,\text{В/м} = 1{,}11\,\frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$



3. В области III «гауссова» поверхность проводится радиусом r_3. Обозначим напряженность E области III через E_3 и учтем, что в этом случае «гауссова» поверхность охватывает обе сферы и, следовательно, суммарный заряд внутри нее равен $q_1 + q_2$.

Тогда

$$E_3 = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_3^2}.$$

Учитывая, что q_2 имеет отрицательный заряд, это выражение перепишем в виде

$$E_3 = \frac{q_1 - |q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r_3^2};$$

$$E_3 = 9 \cdot 10^9 \frac{(1 - 0{,}5) \cdot 10^{-9}}{(0{,}15)^2}\,\frac{\text{В}}{\text{м}} = 200\,\frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

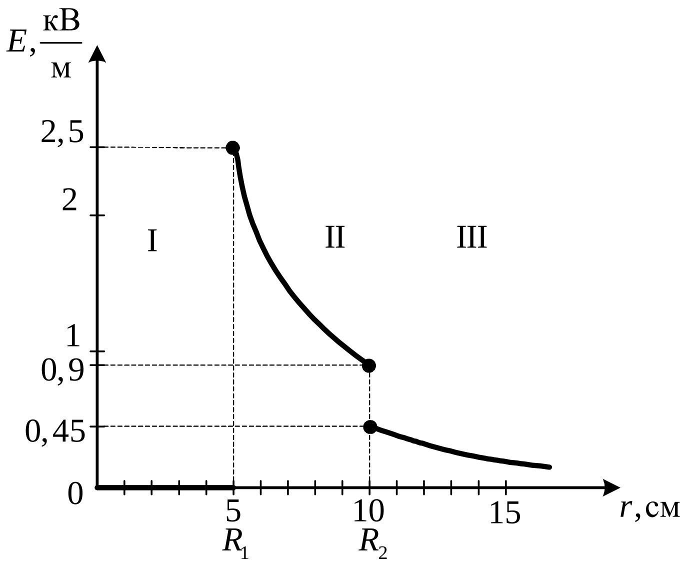
Построим график $E\,(r)$ (см. рис.).

В области I ($r_1 < R_1$) $E = 0$.

В области II ($R_1 \le r < R_2$) $E_2\,(r)$ изменяется по закону $1/r^2$.

В точке $r = R_1$ напряженность $E_2(R_1) = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} = 2{,}5\,\dfrac{\text{кВ}}{\text{м}}.$

В точке $r = R_2$ (r стремится к R_2 слева) $E_2(R_2) = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} = 0{,}9\,\dfrac{\text{кВ}}{\text{м}}.$



В области III ($r > R_2$) E_3 (r) изменяется по закону $1/r^2$, причем в точке $r = R_2$ (r стремится к R_2 справа)

$$E_3(R_2) = \frac{(q_1 - q_2)}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} = 0,45\frac{кВ}{м}.$$

Таким образом, функция E (r) в точках $r = R_1$, $r = R_2$ терпит разрыв.

Ответ: $E_1 = 0$ В/м; $E_2 = 1{,}11\frac{кВ}{м}$; $E_3 = 200$ В/м; согласно зависимости E (r) в областях I, II, III напряженность принимает значения $E_1 = 0$; $2{,}5\ \frac{кВ}{м} > E_2 > 0{,}9\ \frac{кВ}{м}$; $0{,}45\ \frac{кВ}{м} > E_3 > 0$.

ЗАДАЧА 3.7

Электрическое поле создано двумя одинаковыми параллельными пластинами площадью 150 см^2 каждая. Пластины расположены на малом (по сравнению с линейными размерами пластин) расстоянии друг от друга. На одной из пластин равномерно распределен заряд q_1 = –50 нКл, на другой – заряд q_2 = +150 нКл. Определить напряженность E электрического поля между пластинами.

Дано:

S = 0,015 м^2

q_1 = –5·10^{-8} Кл

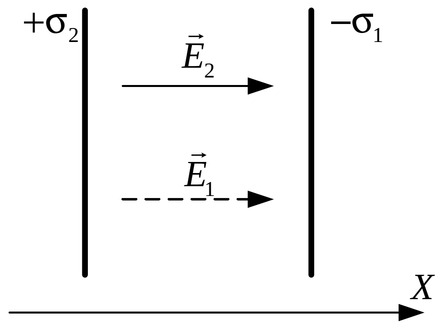
q_2 = 15·10^{-8} Кл

E – ?

Решение

Поскольку по условию задачи расстояние между пластинами много меньше их линейных размеров, то пластины можно считать бесконечно протяженными и равномерно заряженными. Поверхностные плотности зарядов на них соответственно равны $\sigma_1 = \frac{q_1}{S}$ и $\sigma_2 = \frac{q_2}{S}$.

Напряженность поля, создаваемую каждой пластиной, определим по формуле



$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Тогда

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \quad \text{и} \quad E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}.$$

На рисунке показаны направления силовых линий поля с учетом знака зарядов на пластинах. По принципу суперпозиции результирующая напряженность между пластинами $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

В проекции на ось X

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = \frac{q_1}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q_2}{2\varepsilon_0 S};$$

$$E = \frac{1}{2\varepsilon_0 S}(q_1 + q_2);$$

$$[E] = \frac{\text{Кл} \cdot \text{м}}{\text{Ф} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{м} \cdot \text{В}}{\text{Кл} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{В}}{\text{м}};$$

$$E = \frac{1}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}015}\left(-5 \cdot 10^{-8} + 15 \cdot 10^{-8}\right) = 75 \cdot 10^4\,\frac{\text{В}}{\text{м}} = 750\,\frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

Ответ: $E = 750\,\dfrac{\text{кВ}}{\text{м}}$.

ЗАДАЧА 3.8

Определить напряженность поля между двумя бесконечными пластинами и вне их, если площадь каждой пластины S, их заряды q_1 и $q_2 < q_1$. Рассмотреть также случай, когда заряд второй пластины отрицательный.

Дано:	**Решение**
S	В любой точке пространства (между пластинами и вне их), согласно принципу суперпозиции,
q_1	$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i.$$
$q_2 < q_1$	Поэтому
$-q_2$	
E – ?	$$\vec{E}_A = \vec{E}_1' + \vec{E}_2'\ ;\quad \vec{E}_B = \vec{E}_1 + \vec{E}_2'\ ;\quad \vec{E}_C = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

где $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_1'$; $\vec{E}_2$ и $\vec{E}_2'$ – напряженности полей первой и второй пластины справа и слева от них (рис. 1).

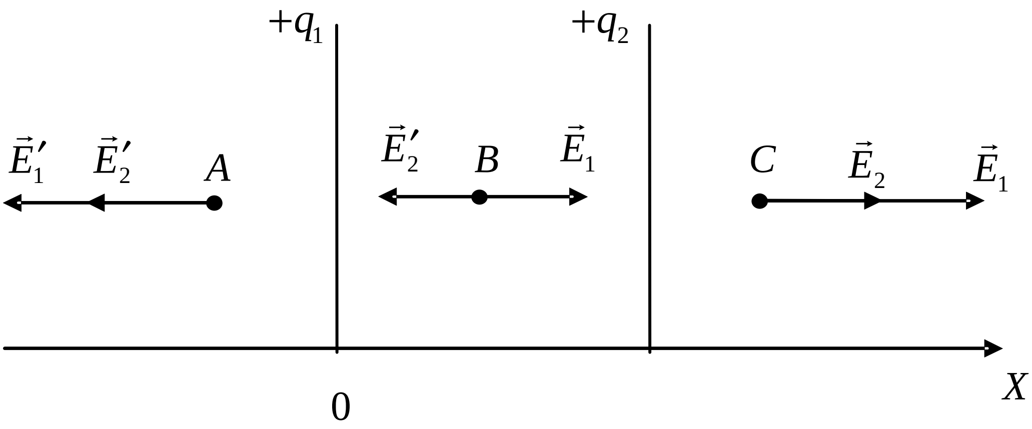


Рис. 1

Направим координатную ось $0X$ перпендикулярно к пластинам. Проецируя векторы напряженности на эту ось, получим:

$$E_A = -(E_1' + E_2'),\quad E_B = E_1 - E_2',\quad E_C = E_1 + E_2.$$

Поскольку размеры пластин велики по сравнению с расстояниями до рассматриваемых точек, то

$$E_1 = E_1' = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{q_1}{2\varepsilon_0\varepsilon S};$$

$$E_2 = E_2' = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{q_2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}.$$

Следовательно, для первого случая

$$E_A = \frac{-(q_1+q_2)}{2\varepsilon_0\varepsilon S};\ E_B = \frac{q_1-q_2}{2\varepsilon_0\varepsilon S};\ E_C = \frac{q_1+q_2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}.$$

Построим график изменения напряженности поля вдоль прямой, соединяющей центры пластин (рис. 2).

Когда заряд второй пластины отрицательный $\sigma_2 < 0$ (рис. 3), напряженность поля между пластинами $E_B = \dfrac{q_1 + q_2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S}$, вне пластин $E = \pm \dfrac{q_1 - q_2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S}$.

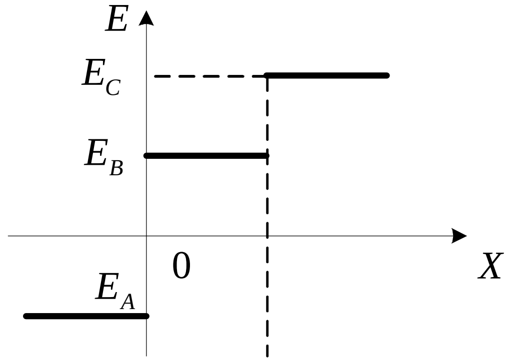


Рис. 2

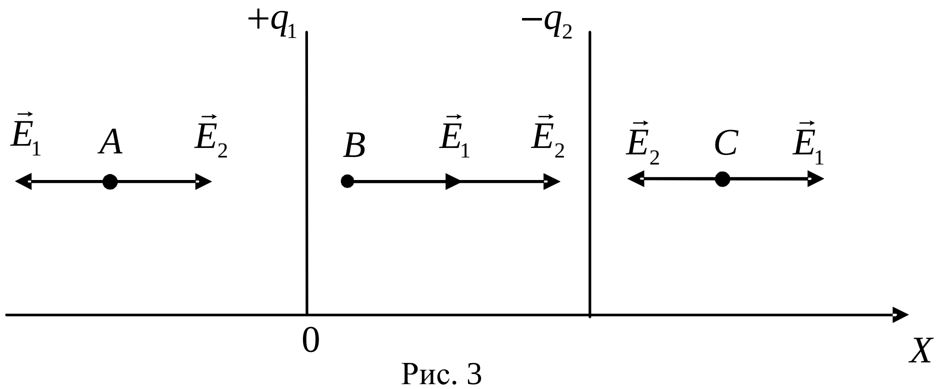


Рис. 3

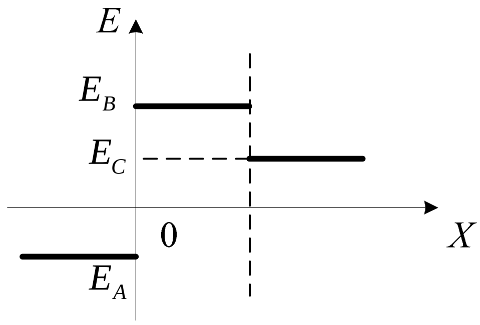


Рис. 4. График изменения напряженности поля вдоль прямой, соединяющей центры пластин

ЗАДАЧА 3.9

Две круглые параллельные пластины находятся на малом (по сравнению с радиусом) расстоянии друг от друга. Пластины равномерно заряжены с поверхностной плотностью σ_1 = 10 нКл/м^2 и σ_2 = –30 нКл/м^2. Определить силу взаимодействия между пластинами, приходящуюся на площадь S, равную 2 м^2.

Дано:	**Решение**
$\sigma_1 = 10^{-8}$ Кл/м^2 $\sigma_2 = -3 \cdot 10^{-8}$ Кл/м^2 $S = 2$ м^2 F – ?	Так как расстояние между пластинами мало по сравнению с размерами самих пластин, то их можно принять за бесконечно протяженные плоскости. Напряженность E такой плоскости определяется по формуле

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \varepsilon},$$

где ε – диэлектрическая проницаемость среды.

В нашем случае $\varepsilon = 1$ (воздух). Пусть плоскость с поверхностной плотностью σ_1 создает поле напряженностью $E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}$. В это поле помещаем вторую пластину с поверхностной плотностью $\sigma_2 = \frac{q_2}{S}$. Тогда на вторую пластину действует сила Кулона (с учетом знаков это будет сила притяжения)

$$F = q_2 E_1,$$

где $q_2 = \sigma_2 S$.

Подставив E_1 и q_2, получим

$$F = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\sigma_2 S = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{2\varepsilon_0} S;$$

$$[F] = \frac{\text{Кл} \cdot \text{Кл} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{Ф}} = \frac{\text{Кл}^2 \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{Ф}} = \frac{\text{Кл}^2 \cdot \text{В}}{\text{м} \cdot \text{Кл}} =$$

$$= \frac{\text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{В}}{\text{м}} = \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}} = \text{Н};$$

$$F = \frac{10^{-8} \cdot 3 \cdot 10^{-8} \cdot 2}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} = 33{,}8 \cdot 10^{-6}\ \text{Н} = 33{,}8\ \text{мкН}.$$

Ответ: $F = 33{,}8$ мкН.

ЗАДАЧА 3.10

Металлическое кольцо радиусом R несет на себе электрический заряд q, при котором натяжение проволоки, из которой сделано кольцо, равно T. Какой заряд Q нужно поместить в центр кольца, чтобы оно разорвалось? Проволока выдерживает максимальное натяжение T_0.

Дано:	**Решение**
R q T T_0	
Q – ?	

Рассмотрим бесконечно малый элемент кольца длиной Δl. Полагая, что электрический заряд кольца q распределен по всей его длине равномерно, найдем заряд Δq на выделенном элементе кольца.

Так как на единицу длины приходится заряд

$$\tau = \frac{q}{2\pi R},$$

то на элементе кольца длиной Δl будет находиться заряд

$$\Delta q = \tau \Delta l = \frac{q\Delta l}{2\pi R}.$$

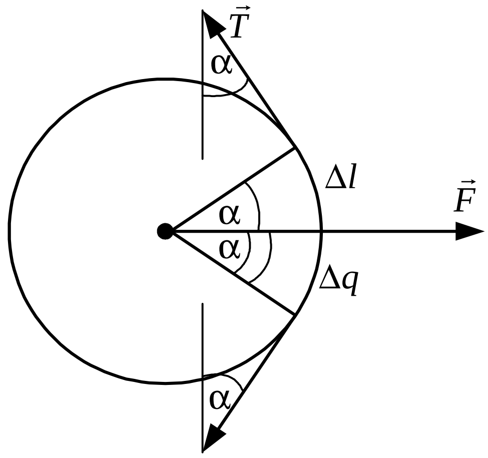


Рис. 1

Если длину Δl выразить через радиус кольца R и центральный угол α (рис. 1), т.е. $\Delta l = 2R\alpha$, то заряд Δq можно представить в виде

$$\Delta q = \frac{q\alpha}{\pi}.$$

На заряд Δq со стороны остальных зарядов кольца будет действовать кулоновская сила $\vec{F}$, направленная по радиусу и стремящаяся разорвать кольцо. Кроме силы $\vec{F}$ на элемент кольца будут действовать со стороны соседних участков силы натяжения $\vec{T}$. Очевидно, что при этом выполняется равенство

$$F = 2T\sin\alpha.$$

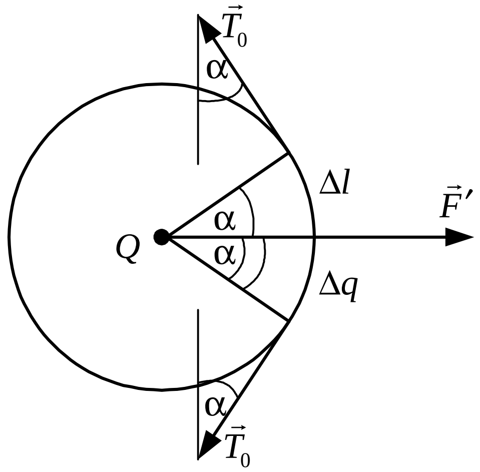


Рис. 2

Если в центр кольца поместить заряд Q, то на выделенный элемент кольца будет действовать сила (рис. 2)

$$\vec{F}' = \vec{F} + \Delta\vec{F},$$

где $\Delta F = \dfrac{\Delta q Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ – сила электростатического взаимодействия Δq, Q и силы натяжения $\vec{T}_0$.

При этом для того, чтобы кольцо разорвалось, должно выполняться неравенство $2T_0 \sin\alpha < F'$,

где $F' = F + \dfrac{\Delta q Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ или $F' = 2T\sin\alpha + \dfrac{\Delta q Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$.

Так как угол α мал, то можно предположить, что $\sin\alpha \approx \alpha$.

Следовательно, с учетом выражения для Δq

$$2T_0\alpha < 2T\alpha + \frac{qQ\alpha}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2}.$$

Отсюда окончательно находим:

$$Q > \frac{8\pi^2\varepsilon_0\left(T_0 - T\right)R^2}{q}.$$

Ответ: $Q > \dfrac{8\pi^2\varepsilon_0\left(T_0 - T\right)R^2}{q}$.

ЗАДАЧА 3.11

Эбонитовый полый шар равномерно заряжен по объему с плотностью ρ = 100 нКл/м^3. Внутренний радиус R_1 шара равен 5 см, а наружный R_2 = 10 см. Вычислить напряженность $\vec{E}$ и смещение $\vec{D}$ электрического поля в точках, отстоящих от центра шара на расстояниях r_1 = 3 см, r_2 = 6 см, r_3 = 12 см. Построить графики зависимостей $E(r)$ и $D(r)$.

Дано:

ρ = 10^{-7} Кл/м^3

R_1 = 0,05 м

R_2 = 0,1 м

r_1 = 0,03 м

r_2 = 0,06 м

r_3 = 0,12 м

ε_1 = 1

ε_2 = 3

ε_3 = 1

D_1 – ? D_2 – ? D_3 – ?

E_1 – ? E_2 – ? E_3 – ?

Решение

Разобьем объем полого шара на три области (см. рис.) и рассчитаем для каждой из них D и E. Для расчета используем теорему Гаусса в интегральной форме

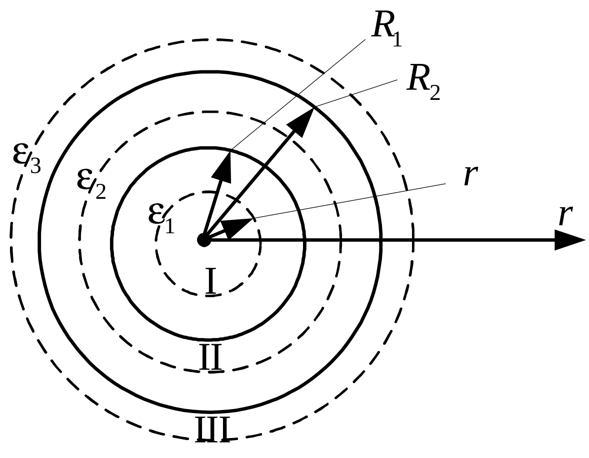
$$\oint\limits_S D_n dS = \sum q_i \qquad (1)$$

и связь между векторами $\vec{D}$ и $\vec{E}$: $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$.

Область I (ε_1 = 1): суммарный заряд $\sum q_i$ в этой области равен нулю, т.к. шар полый ($r < R_1$). Поэтому $D_1 = 0$ и $E_1 = 0$.

Область II (ε_2 = 3): проведем замкнутую поверхность произвольного радиуса r (r – текущая координата) $R_2 > r > R_1$ и вычислим по формуле (1) поток вектора $\vec{D}_2$ сквозь эту поверхность:

$$\oint_S D_n dS = \int_V \rho dV,$$



где $\rho = \dfrac{q}{V}$.

В итоге получим:

$$D_2 4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3}\pi\left(r^3 - R_1^3\right);$$

$$D_2 = \rho\frac{1}{3r^2}\left(r^3 - R_1^3\right) = \frac{\rho r}{3}\left[1 - \left(\frac{R_1}{r}\right)^3\right].$$

Тогда

$$E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_2\varepsilon_0} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_2\varepsilon_0}\left[1 - \left(\frac{R_1}{r}\right)^3\right].$$

Подставив $r = r_2 = 0,06$ м, вычислим E_2 и D_2:

$$D_2 = \frac{10^{-7}\cdot 0,06}{3}\left[1 - \left(\frac{0,05}{0,06}\right)^3\right] = 840\cdot 10^{-12}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2};$$

$$E_2 = \frac{10^{-7}\cdot 0,06}{3\cdot 3\cdot 8,85\cdot 10^{-12}}\left[1 - \left(\frac{0,05}{0,06}\right)^3\right] = 31,6\ \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Область III (ε_3 = 1): проведем замкнутую поверхность произвольного радиуса $r > R_2$ и воспользуемся теоремой Гаусса:

$$\oint_S D_n dS = \rho\left(V_2 - V_1\right);$$

$$D_3 4\pi r^2 = \rho\frac{4}{3}\pi\left(R_2^3 - R_1^3\right);$$

$$D = \frac{\frac{4}{3}\pi\rho\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{4\pi r^2} = \frac{\rho\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3r^2};$$

$$E_3 = \frac{\rho\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3\varepsilon_0 r^2 \varepsilon_3}.$$

Вычислим D_3 и E_3 при $r = r_3 = 0{,}12$ м:

$$D_3 = \frac{10^{-7}\left(0{,}1^3 - 0{,}05^3\right)}{3 \cdot 0{,}12^2} = 2{,}02 \cdot 10^{-9}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} = 2{,}02\,\frac{\text{нКл}}{\text{м}^2};$$

$$E_3 = \frac{10^{-7}\left(0{,}1^3 - 0{,}05^3\right)}{3 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}12^2 \cdot 1} = 228\,\frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

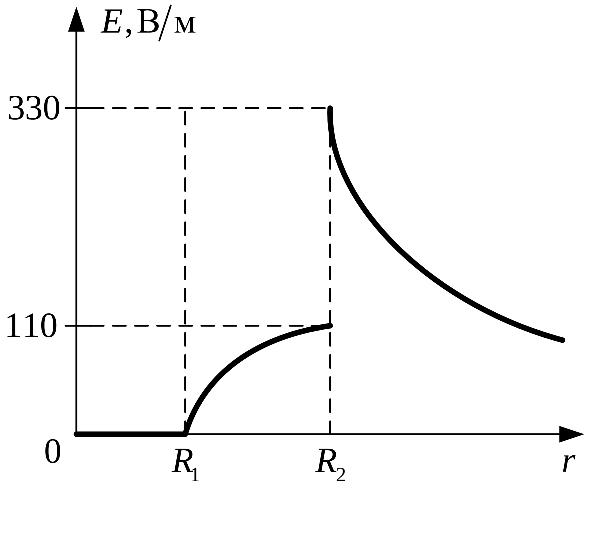
Для построения графиков подсчитаем D_2, E_2 и E_3 на границе $r = R_2$:

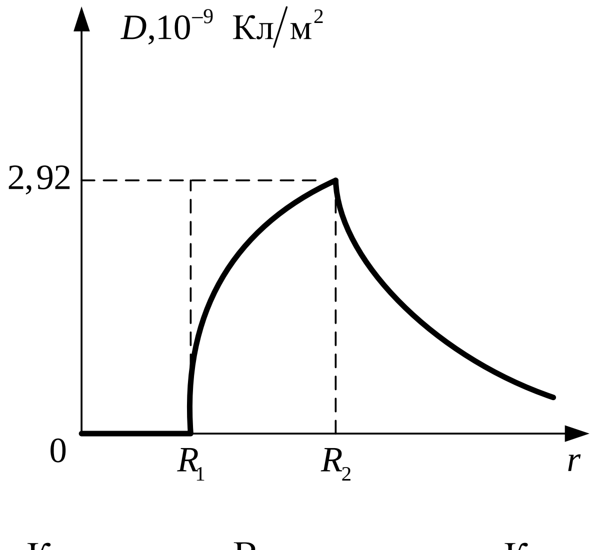
$$E_2 = \frac{\rho R_2}{3\varepsilon_0\varepsilon_2}\left[1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3\right]; \quad [E_2] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3} \cdot \frac{\text{м}}{\text{Ф}} \cdot \text{м} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{В}}{\text{м} \cdot \text{Кл}} = \frac{\text{В}}{\text{м}}; \quad E_2 = 110\,\frac{\text{В}}{\text{м}};$$

$$D_2 = \frac{\rho R_2}{3}\left[1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3\right]; \quad [D_2] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}\text{м} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}; \quad D_2 = 2{,}92 \cdot 10^{-9}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2};$$

$$E_3 = \frac{\rho\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3\varepsilon_0 R_2^2}; \quad [E_3] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3} \cdot \frac{\text{м}}{\text{Ф}} \cdot \frac{\text{м}^3}{\text{м}^2} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{м} \cdot \text{В}}{\text{м}^2 \cdot \text{Кл}} = \frac{\text{В}}{\text{м}}; \quad E_3 = 330\,\frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

На рисунках представлены графики зависимости напряженности и смещения электрического поля заряженного шара от величины r.





Ответ: $D_1 = 0$; $E_1 = 0$; $D_2 = 840 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$; $E_2 = 31{,}6\,\frac{\text{В}}{\text{м}}$; $D_2 = 2{,}02 \cdot 10^{-9}\,\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$;

$E_3 = 228\,\frac{\text{В}}{\text{м}}$.

ЗАДАЧА 3.12

Электростатическое поле создается бесконечно длинным цилиндром R = 7 мм, равномерно заряженным с линейной плотностью τ = 15 нКл/м. Определить: 1) напряженность E поля в точках, лежащих от оси цилиндра на расстояниях $r_1 = 5$ мм, $r_2 = 1$ см; 2) разность потенциалов между двумя точками этого поля, лежащими на расстояниях $r_3 = 1$ см и $r_4 = 2$ см от поверхности цилиндра.

Дано:

$R = 7 \cdot 10^{-3}$ м

$\tau = 15 \cdot 10^{-9}$ Кл/м

$r_1 = 5 \cdot 10^{-2}$ м

$r_2 = 10^{-2}$ м

$r_3 = 10^{-2}$ м

$r_4 = 2 \cdot 10^{-2}$ м

1) E_1, E_2 – ?

2) $(\varphi_3 - \varphi_4)$ – ?

Решение

Воспользуемся теоремой Гаусса

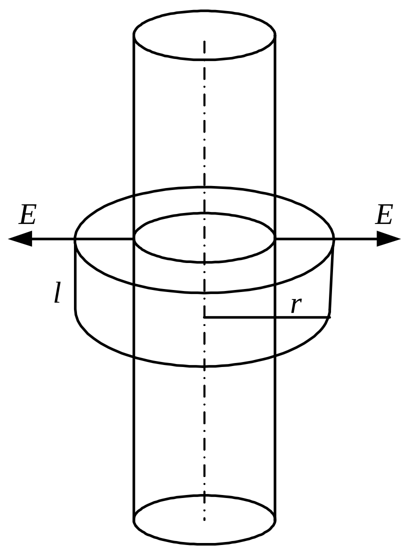
$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i .$$

Возьмем в качестве замкнутой поверхности коаксиальный заряженный цилиндр радиусом r и высотой l (см. рис.). Если $r < R$, то замкнутая поверхность зарядов внутри не содержит, поэтому в этой области $E = 0$. Следовательно, для r_1: $E_1 = 0$.

Поток вектора $\vec{E}$ сквозь торцы коаксиального цилиндра равен нулю (торцы параллельны вектору напряженности).

Поток через боковую поверхность

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 2\pi r l E ,$$



а по теореме Гаусса $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \tau l$,

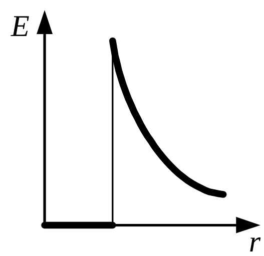
откуда

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}; \quad E_2 = \frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_2} .$$

Следовательно,

$$[E_2] = \frac{\text{Кл} \cdot \text{м}}{\text{м} \cdot \text{Ф} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{В}}{\text{м} \cdot \text{Кл}} = \frac{\text{В}}{\text{м}};$$

$$E_2 = \frac{15 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 9 \cdot 10^{9}}{10^{-2}} = 27 \cdot 10^{3} \, \frac{\text{В}}{\text{м}} = 27 \, \frac{\text{кВ}}{\text{м}} .$$



Так как $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$, то для поля с осевой симметрией можно записать:

$$d\varphi = -Edr.$$

Подставив сюда выражение для напряженности поля, создаваемого бесконечно длинным цилиндром, получаем:

$$d\varphi = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r}.$$

Проинтегрировав это выражение, найдем искомую разность потенциалов:

$$\varphi_3 - \varphi_4 = \int\limits_{R+r_3}^{R+r_4} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R+r_4}{R+r_3};$$

$$\varphi_3 - \varphi_4 = \frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R+r_4}{R+r_3};$$

$$[\varphi_3 - \varphi_4] = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}}{\text{м}\cdot\text{Ф}} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{Кл}} = \text{В};$$

$$\varphi_3 - \varphi_4 = 2\cdot 15\cdot 10^{-9}\cdot 9\cdot 10^{9}\ln\frac{2,7}{1,7} = 125\ \text{В}.$$

Ответ: 1) $E_1 = 0$; $E_2 = 27\ \frac{\text{кВ}}{\text{м}}$; 2) $\varphi_3 - \varphi_4 = 125\ \text{В}$.

ЗАДАЧА 3.13

Точечный заряд q = 100 нКл находится на малом расстоянии от большой металлической пластины напротив ее середины. Найти силу F, действующую на заряд со стороны пластины. Пластина несет равномерно распределенный по поверхности заряд σ = 10 нКл/м^2.

Дано:
$q = 10^{-7}$ Кл
$\sigma = 10^{-8}$ Кл/м^2
F – ?

Решение

По условию задачи пластина большая и находится на малом расстоянии от заряда. Поэтому ее можно принять за бесконечно протяженную плоскость, для которой

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} \qquad (\varepsilon = 1).$$

Сила, действующая на заряд,

$$F = Eq = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} q;$$

$$[F] = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}\cdot\text{Кл}}{\text{м}^2\cdot\text{Ф}} = \frac{\text{Кл}^2\cdot\text{м}}{\text{м}\cdot\text{Кл}} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{м}} = \frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}}{\text{м}} = \frac{\text{Вт}\cdot\text{с}}{\text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{м}} = \text{Н};$$

$$F = \frac{10^{-8}\cdot 10^{-7}}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}} = 56{,}5\cdot 10^{-6} H = 56{,}5\ \text{мкН}.$$

Ответ: $F = 56{,}5$ мкН.

ЗАДАЧА 3.14

Тонкая, бесконечно длинная нить с равномерно распределенным по длине зарядом плотностью τ = 0,2 мкКл/м параллельна безграничной проводящей плоскости с поверхностной плотностью заряда σ = 2 нКл/см^2. С какой силой электрическое поле заряженной бесконечной плоскости действует на каждый метр заряженной бесконечно длинной нити, помещенной в это поле?

Дано:	**Решение**
$\tau = 0{,}2\cdot 10^{-6}$ Кл/м $\sigma = 2\cdot 10^{-5}$ Кл/м^2	Напряженность электрического поля, созданного бесконечной плоскостью,
$\frac{F}{l}$ – ?	$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0},$$

где $\varepsilon = 1$ – диэлектрическая проницаемость среды.

Сила, с которой плоскость действует на нить,

$$F = Fq_H,$$

где $q_H = \tau l$ – заряд нити, l – длина нити.

Следовательно, сила, действующая на каждый метр длины заряженной бесконечно длинной нити,

$$\frac{F}{l} = \frac{\sigma\tau}{2\varepsilon_0};$$

$$\left[\frac{F}{l}\right] = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}\cdot\text{Кл}}{\text{м}^2\cdot\text{м}\cdot\text{Ф}} = \frac{\text{Кл}^2\cdot\text{В}}{\text{м}^2\cdot\text{Кл}} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{м}^2} = \frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Вт}\cdot\text{с}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Н}}{\text{м}};$$

$$\frac{F}{l} = \frac{2\cdot 10^{-5}\cdot 0{,}2\cdot 10^{-6}}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}} = 226\cdot 10^{-3}\ \frac{\text{Н}}{\text{м}} = 226\ \frac{\text{мН}}{\text{м}}.$$

Ответ: $\frac{F}{l} = 226\ \frac{\text{мН}}{\text{м}}$.

ЗАДАЧА 3.15

Электрическое поле создается положительно заряженной бесконечной нитью с постоянной линейной плотностью τ = 1 нКл/см. Какую скорость приобретет электрон, приблизившись под действием поля к нити вдоль линии напряженности с расстояния r_1 = 1,5 см до r_2 = 1 см?

Дано:
$e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл
$m = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг
$\tau = 10^{-7}$ Кл/м
$\upsilon_1 = 0$
$r_1 = 1{,}5\cdot10^{-2}$ м
$r_2 = 10^{-2}$ м
υ_2 – ?

Решение

Элементарная работа по перемещению заряда в электрическом поле

$$dA = Fdr,$$

где F – сила, действующая на заряд; dr – перемещение заряда вдоль силовой линии.

Силу, действующую на заряд, можно определить через напряженность поля:

$$F = Eq,$$

где E – напряженность поля, создаваемого бесконечной заряженной нитью;

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Следовательно, $dA = \frac{e\tau}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r}$ и, интегрируя, получим

$$A = \frac{e\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{e\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

С другой стороны, работа приводит к изменению кинетической энергии:

$$A = E_{K_2} - E_{K_1}.$$

Так как начальная скорость была равна нулю, то

$$A = \frac{m\upsilon_2^2}{2},$$

откуда

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2e\tau}{2\pi\varepsilon_0 m}\ln\frac{r_2}{r_1}};$$

$$[\upsilon_2] = \sqrt{\frac{\text{Кл}\cdot\text{Кл}\cdot\text{м}}{\text{м}\cdot\Phi\cdot\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{Кл}^2\cdot\text{В}}{\text{Кл}\cdot\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}}{\text{кг}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\text{Вт}\cdot\text{с}}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-7} \ln \dfrac{10^{-2}}{1{,}5 \cdot 10^{-2}}}{3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}}} = \sqrt{\frac{1{,}6 \ln 1{,}5}{3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 9{,}1} \cdot 10^{17}} = 16 \cdot 10^6 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\upsilon_2 = 16 \cdot 10^6 \ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

ЗАДАЧА 3.16

Электростатическое поле создается положительным точечным зарядом. Определить числовое значение и направление градиента потенциала этого поля, если на расстоянии r = 10 см от заряда потенциал в точке A φ_A = 100 В.

Дано:	**Решение**
r = 0,1 м	Связь напряженности и градиента потенциала:
φ_A = 100 В	$\vec{E} = -\text{grad}\,\varphi$.
$\text{grad}\,\varphi$ – ?	

Знак «–» говорит о том, что $\vec{E}$ направлен в сторону убывания потенциала (от заряда).

Потенциал и напряженность точечного заряда в точке A

$$\varphi_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}; \quad E_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}; \quad E_A = \frac{\varphi_A}{r};$$

$$|\text{grad}\,\varphi| = \frac{\varphi_A}{r}; \quad [\text{grad}\,\varphi] = \frac{\text{В}}{\text{м}};$$

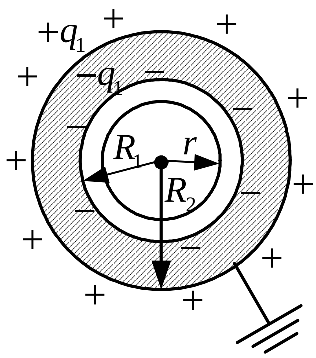
Ответ: $|\text{grad}\,\varphi| = \dfrac{100}{0{,}1} = 10^3 \ \dfrac{\text{В}}{\text{м}} = 1 \dfrac{\text{кВ}}{\text{м}}$ и направлен к заряду.

ЗАДАЧА 3.17

Металлический шарик радиусом r, имеющий заряд q, помещен в центре незаряженного сферического слоя, внутренний и внешний радиусы которого равны R_1 и R_2 (см. рис.). Найти напряженность и потенциал электрического поля, создаваемого системой, если: 1) слой изготовлен из металла; 2) металлический слой заземлен; 3) слой изготовлен из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε.

Дано:	**Решение**
r q R_1 R_2 $E, \varphi - ?$	1. При помещении проводника в электрическое поле на поверхности проводника появляются индуцированные заряды, распределенные таким образом, что результирующее поле внутри проводника равно нулю. На внутренней поверхности металлического слоя появится индуцированный заряд

$-q_1$, на внешней поверхности возникнет такой же заряд противоположного знака $+q_1$. В результате получаются три концентрические заряженные сферы, радиусы которых r, R_1 и R_2, с зарядами $q, -q_1$ и $+q_1$ соответственно.



В пространстве между второй и третьей сферой напряженность электрического поля равна нулю, поэтому при $R_1 \le x \le R_2$

$$K\frac{q}{x^2} - K\frac{q_1}{x^2} = 0,$$

откуда

$$q_1 = q.$$

Здесь учтено, что вторая сфера создает снаружи такое поле, как если бы ее заряд находился в центре, а поле третьей сферы в ее внутренней области отсутствует.

Тогда внутри шарика ($0 \le x \le r$)

$$E = 0; \quad \varphi = K\frac{q}{r} - K\frac{q}{R_1} + K\frac{q}{R_2} = Kq\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Между шариком и слоем $\left(r \le x \le R_1\right)$

$$E = K\frac{q}{x^2}; \quad \varphi = K\frac{q}{x} - K\frac{q}{R_1} + K\frac{q}{R_2} = Kq\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Внутри шарового слоя $\left(R_1 \le x \le R_2\right)$

$$E = 0; \quad \varphi = K\frac{q}{x} - K\frac{q}{x} + K\frac{q}{R_2} = K\frac{q}{R_2}.$$

За пределами слоя $\left(R_2 \le x < \infty\right)$

$$E = K\frac{q}{x^2}; \quad \varphi = K\frac{q}{x}.$$

2. У заземленного проводника потенциал равен нулю и заряды на поверхностях сферического слоя неодинаковые: $-q_1$ и $+q_2$. Соотношение между зарядами можно определить из условия, что результирующий потенциал на поверхности слоя ($x = R_2$) будет равен

$$\varphi = K\frac{q}{R_2} - K\frac{q_1}{R_2} + K\frac{q_2}{R_2} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$q_1 - q_2 = q. \qquad (1)$$

Поскольку поле внутри проводника отсутствует, то

$$E = K\frac{q}{x^2} - K\frac{q_1}{x^2} = 0.$$

Откуда

$$q_1 = q_2. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что $q_2 = 0$, т.е. на внешней поверхности заземленного слоя заряда нет, а на внутренней поверхности находится заряд $q_1 = -q$.

Таким образом, задача свелась к нахождению поля двух заряженных концентрических сфер радиусами r и R_1, на которых находятся заряды $+q$ и $-q$. При расчете поля этой системы можно воспользоваться результатами расчетов п. 1, при условии, что во всех полученных формулах заряд третьей сферы равен нулю.

Получаем:

внутри шарика ($0 \le x \le r$)

$$E = 0; \quad \varphi = Kq\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right);$$

между шариком и слоем $\left(r \le x \le R_1\right)$

$$E = K\frac{q}{x^2}; \quad \varphi = Kq\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R_1}\right);$$

при $R_1 \le x < \infty$ поле отсутствует.

3. Если сферический слой сделан из диэлектрика, то при внесении его в поле заряженного шарика произойдет поляризация слоя и на внутренней и внешней поверхностях появятся связанные заряды $-q_{св}$ и $+q_{св}$. Электрическое поле в диэлектрике ослаблено в ε раз, поэтому напряженность электрического поля внутри сферического слоя в точке, удаленной от центра шарика на расстояние x, с одной стороны, будет равна $E = K\dfrac{q}{\varepsilon x^2}$, а с другой, ее можно найти как результат наложения поля шарика и поля связанных зарядов внутренней поверхности оболочки: $E = K\dfrac{q}{x^2} - K\dfrac{q_{св}}{x^2}$.

Приравнивая оба выражения для E, найдем модуль связанных зарядов на поверхности диэлектрика:

$$q_{св} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} q.$$

После этого задача сводится к нахождению поля трех концентрических сфер радиусами r, R_1 и R_2, на которых находятся заряды q, $-\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon}q$, и $+\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon}q$.

Аналогично результатам п. 1 находим:

внутри шарика ($0 \le x \le r$):

$$E = 0; \quad \varphi = Kq\left[\frac{1}{r} - \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\right];$$

между шариком и слоем $\left(r \le x \le R_1\right)$

$$E = K\frac{q}{x^2}; \quad \varphi = Kq\left[\frac{1}{x} - \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\right];$$

при $R_1 \le x \le R_2$

$$E = K\frac{q}{x^2}; \quad \varphi = Kq\left[\frac{1}{x} - \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R_2}\right)\right];$$

при $R_2 \le x < \infty$

$$E = K\frac{q}{x^2}; \quad \varphi = K\frac{q}{x}.$$

Ответ:

1) $E=0$; $\varphi=Kq\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$; $(0\le x\le r)$;

$E=K\frac{q}{x^2}$; $\varphi=Kq\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$; $\left(r\le x\le R_1\right)$;

$E=0$; $\varphi=K\frac{q}{R_2}$; $\left(R_1\le x\le R_2\right)$;

$E=K\frac{q}{x^2}$; $\varphi=K\frac{q}{x}$; $\left(R_2\le x<\infty\right)$;

2) $E=0$; $\varphi=Kq\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_1}\right)$; $(0\le x\le r)$;

$E=K\frac{q}{x^2}$; $\varphi=Kq\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{R_1}\right)$; $\left(r\le x\le R_1\right)$;

при $R_1\le x<\infty$ поле отсутствует;

3) $E=0$; $\varphi=Kq\left[\frac{1}{r}-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\right]$; $(0\le x\le r)$;

$E=K\frac{q}{x^2}$; $\varphi=Kq\left[\frac{1}{x}-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\right]$; $\left(r\le x\le R_1\right)$;

$E=K\frac{q}{x^2}$; $\varphi=Kq\left[\frac{1}{x}-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{R_2}\right)\right]$; $\left(R_1\le x\le R_2\right)$;

$E=K\frac{q}{x^2}$; $\varphi=K\frac{q}{x}$; $\left(R_2\le x\le\infty\right)$.

ЗАДАЧА 3.18

Электрическое поле создано бесконечной плоскостью, заряженной с поверхностной плотностью σ = 400 нКл/м^2, и бесконечной прямой нитью, заряженной с линейной плотностью τ = 100 нКл/м. На расстоянии r = 10 см от нити находится точечный заряд q = 10 нКл. Определить силу, действующую на заряд, и ее направление, если заряд и нить лежат в плоскости, параллельной заряженной плоскости.

Дано:	**Решение**
$\sigma = 4 \cdot 10^{-7}$ Кл/м^2 $\tau = 10^{-7}$ Кл/м $r = 0{,}1$ м $q = 10^{-8}$ Кл	Сила, действующая на заряд, помещенный в поле, $$F = Eq, \qquad (1)$$
F – ? α – ?	где E – напряженность поля в точке, в которой находится заряд q.

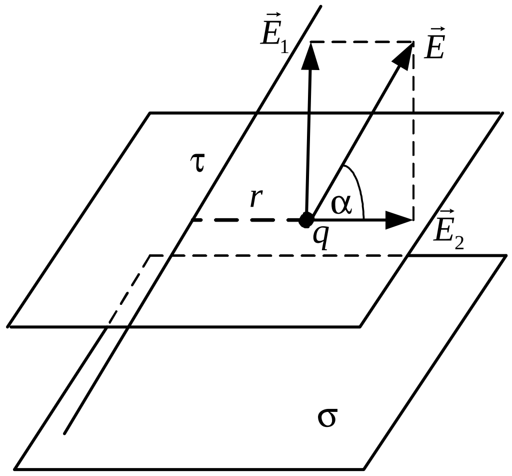
Определим напряженность E поля, создаваемого, по условию задачи, бесконечной заряженной плоскостью и бесконечной заряженной нитью.

Поле, создаваемое бесконечной заряженной плоскостью, однородно, и его напряженность в любой точке

$$E_1 = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \qquad (2)$$

Поле, создаваемое бесконечной заряженной линией, неоднородно. Его напряженность зависит от расстояния и определяется по формуле

$$E_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}. \qquad (3)$$



Согласно принципу суперпозиции электрических полей напряженность поля в точке, где находится заряд q, равна векторной сумме напряженностей $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ (см. рис.):

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

Так как векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ взаимно перпендикулярны, то

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}.$$

Подставив выражения E_1 и E_2 по формулам (2) и (3) в это равенство, получим

$$E = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}\right)^2} \quad \text{или} \quad E = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sqrt{\sigma^2 + \frac{\tau^2}{\pi^2 r^2}}.$$

Теперь найдем силу F, действующую на заряд, подставив выражение E в формулу (1):

$$F = Eq = \frac{q}{2\varepsilon_0}\sqrt{\sigma^2 + \frac{\tau^2}{\pi^2 r^2}};$$

$$[F] = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}}{\text{Ф}}\sqrt{\frac{\text{Кл}^2}{\text{м}^4} + \frac{\text{Кл}^2}{\text{м}^2\cdot\text{м}^2}} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}}{\text{Ф}}\sqrt{\frac{\text{Кл}^2}{\text{м}^4}} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}\cdot\text{Кл}}{\text{Ф}\cdot\text{м}^2} =$$

$$= \frac{\text{Кл}^2\cdot\text{м}\cdot\text{В}}{\text{Кл}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{м}} = \frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}}{\text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{м}} = \text{Н};$$

$$F = \frac{10^{-8}}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\sqrt{\left(4\cdot 10^{-7}\right)^2 + \frac{\left(10^{-7}\right)^2}{(3{,}14)^2(0{,}1)^2}} = 289\cdot 10^{-6}H = 289\ \text{мкН}.$$

Направление силы F, действующей на положительный заряд q, совпадает с направлением вектора напряженности $\vec{E}$ поля. Направление вектора $\vec{E}$ задается углом α к заряженной плоскости.

Из рисунка следует, что

$$\text{tg}\alpha = \frac{E_1}{E_2} = \pi r\frac{\sigma}{\tau}.$$

Откуда

$$\alpha = \text{arctg}\left(\pi r\frac{\sigma}{\tau}\right);$$

$$\alpha = \text{arctg}\left(3{,}14\cdot 0{,}1\frac{4\cdot 10^{-7}}{10^{-7}}\right);$$

$$\alpha = 31{,}5°.$$

Ответ: $F = 289\ \text{мкН}$, $\alpha = 31{,}5°$.

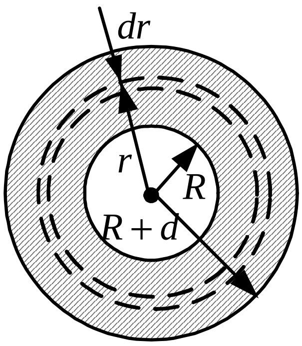
ЗАДАЧА 3.19

Металлический шар радиусом R = 5 см с общим зарядом q = 10 нКл окружен слоем эбонита толщиной d = 3 см. Определить энергию W электростатического поля, заключенного в слое диэлектрика. Диэлектрическая проницаемость эбонита $\varepsilon = 3$.

Дано:	**Решение**
$R = 5\cdot10^{-2}$ м $q = 10^{-8}$ Кл $d = 3\cdot10^{-2}$ м $\varepsilon = 3$	Поле заряженного шара сферически симметрично, поэтому объемная плотность энергии одинакова во всех точках, расположенных на равных расстояниях от центра шара. Энергия в элементарном сферическом слое диэлектрика объемом dV (см. рис.)
W – ?	

$$dW = \omega dV, \tag{1}$$

где $dV = 4\pi r^2 dr$ (r – радиус элементарного сферического слоя; dr – его толщина); $\omega = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}$ – объемная плотность энергии (E – напряженность электростатического поля).



Напряженность поля на расстоянии r от центра шара (внутри шара)

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon r^2}.$$

Подставив эти формулы в выражение (1), найдем

$$dW = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}dr.$$

Энергия, заключенная в слое диэлектрика,

$$W = \int dW = \int\limits_R^{R+d} \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int\limits_R^{R+d}\frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d}\right);$$

$$[W] = \frac{\text{Кл}^2\cdot\text{м}}{\text{Ф}}\left(\frac{1}{\text{м}} - \frac{1}{\text{м}}\right) = \frac{\text{Кл}^2\cdot\text{м}\cdot\text{В}}{\text{Кл}\cdot\text{м}} = \text{Кл}\cdot\text{В} = \text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В} = \text{Дж};$$

$$W = \frac{\left(10^{-8}\right)^2}{8\cdot3{,}14\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot3}\left(\frac{1}{5\cdot10^{-2}} - \frac{1}{5\cdot10^{-2}+3\cdot10^{-2}}\right) = 1{,}12\cdot10^{-6}\ \text{Дж} = 1{,}12\ \text{мкДж}.$$

Ответ: $W = 1{,}12$ мкДж.

ЗАДАЧА 3.20

Сплошной эбонитовый шар $(\varepsilon = 3)$ радиусом R = 5 см заряжен равномерно с объемной плотностью ρ = 5 нКл/м^3. Определить величину энергии электростатического поля, заключенной внутри шара.

Дано:	**Решение**
$\varepsilon = 3$ $R = 5\cdot 10^{-2}$ м $\rho = 5\cdot 10^{-9}$ Кл/м^3	Поле заряженного шара сферически симметрично, поэтому объемная плотность энергии одинакова во всех точках, расположенных на равных расстояниях от центра шара.
W – ?	

В качестве элементарного объема выберем сферический слой внутренним радиусом r и внешним $r + dr$ (см. рис.). Его объем $dV = 4\pi r^2 dr$.

Энергия в этом сферическом слое

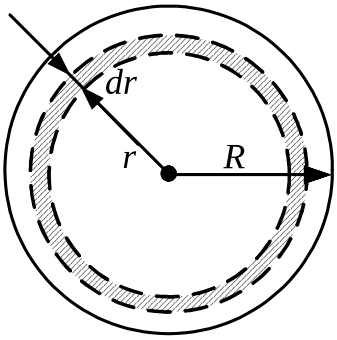
$$dW = \omega dV, \tag{1}$$

где $\omega = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}$ – объемная плотность энергии (E – напряженность электростатического поля).

Напряженность поля на расстоянии r от центра шара (внутри шара) найдем согласно теореме Гаусса для поля в диэлектрике.

В данном случае внутрь поверхности радиусом r попадает заряд

$$q = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho.$$



Тогда

$$D\cdot 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho, \quad \text{откуда} \quad D = \frac{\rho r}{3}.$$

Поскольку $D = \varepsilon_0 \varepsilon E$, напряженность поля

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

Подставив эти формулы в выражение (1), найдем

$$dW = \frac{4\pi\rho^2}{18\varepsilon_0\varepsilon} r^4 dr.$$

Тогда искомая энергия, заключенная внутри шара,

$$W = \int dW = \int_0^R \frac{4\pi\rho^2}{18\varepsilon_0\varepsilon} r^4 dr = \frac{4\pi\rho^2}{18\varepsilon_0\varepsilon}\int_0^R r^4 dr = \frac{2\pi\rho^2}{45\varepsilon_0\varepsilon} R^5;$$

$$[W] = \frac{\text{Кл}^2\cdot\text{м}\cdot\text{м}^5}{\text{м}^6\cdot\text{Ф}} = \frac{\text{Кл}^2\cdot\text{м}^6\cdot\text{В}}{\text{Кл}\cdot\text{м}^6} = \text{Кл}\cdot\text{В} = \text{Дж};$$

$$W = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot\left(5\cdot 10^{-9}\right)^2\cdot\left(5\cdot 10^{-2}\right)^5}{45\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 3} = 4{,}11\cdot 10^{-14}\,\text{Дж}.$$

Ответ: $W = 4{,}11\cdot 10^{-14}$ Дж.

ЗАДАЧА 3.21

Сплошной шар из диэлектрика радиусом R = 5 см заряжен равномерно с объемной плотностью ρ = 5 нКл/м^3. Определить величину энергии электростатического поля, заключенной в окружающем шар пространстве.

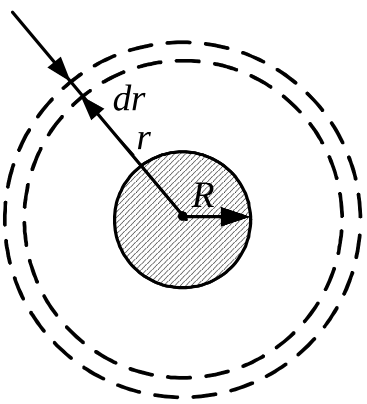
Дано:	Решение
$R = 5\cdot 10^{-2}$ м	Поле заряженного шара сферически симметрично, поэтому объемная плотность энергии одинакова во всех точках, расположенных на равных расстояниях от центра шара.
$\rho = 5\cdot 10^{-9}$ Кл/м^3	
W – ?	

Энергия в элементарном сферическом слое (он выбран за пределами диэлектрика, где следует определить энергию) объемом dV (см. рис.)

$$dW = \omega dV\,, \tag{1}$$

где $dV = 4\pi r^2 dr$ (r – радиус элементарного сферического слоя; dr – его толщина); $\omega = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2}$ ($\varepsilon = 1$ – поле в вакууме; E – напряженность электростатического поля).

Напряженность E найдем по теореме Гаусса для поля в вакууме, причем в качестве замкнутой поверхности мысленно выберем сферу радиусом r (см. рис.).



В данном случае внутрь поверхности попадает весь заряд шара, создающий рассматриваемое поле, и по теореме Гаусса

$$E\cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho V}{\varepsilon_0} = \frac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0}\,,$$

откуда

$$E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\,.$$

Подставив найденное выражение в формулу (1), получим

$$dW = \frac{2\pi}{9}\frac{\rho^2 R^6}{\varepsilon_0 r^2}dr\,.$$

Энергия, заключенная в окружающем шар пространстве,

$$W=\int dW=\int_R^\infty \frac{2\pi}{9}\frac{\rho^2 R^6}{\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{2\pi}{9}\frac{\rho^2 R^6}{\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2}=\frac{2\pi}{9}\frac{\rho^2}{\varepsilon_0}R^5;$$

$$[W]=\frac{\text{Кл}^2\cdot\text{м}\cdot\text{м}^5}{\text{м}^3\cdot\text{Ф}}=\frac{\text{Кл}^2\cdot\text{В}}{\text{Кл}}=\text{Кл}\cdot\text{В}=\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}=\text{Дж};$$

$$W=\frac{2\cdot 3{,}14}{9}\frac{\left(5\cdot 10^{-9}\right)^2}{8{,}85\cdot 10^{-12}}\left(5\cdot 10^{-2}\right)^5=6{,}16\cdot 10^{-13}\,\text{Дж}.$$

Ответ: $W=6{,}16\cdot 10^{-13}\,\text{Дж}$.

ЗАДАЧА 3.22

На пластины плоского конденсатора с диэлектриком, расстояние между которыми d = 4 мм, подана разность потенциалов U_1 = 600 В. Если, отключив источник напряжения, вынуть диэлектрик из конденсатора, то напряжение на пластинах возрастет в три раза. Найти поверхностную плотность связанных зарядов $\sigma_{св}$ на диэлектрике и диэлектрическую восприимчивость χ диэлектрика.

Дано:

d = 4·10⁻³ м → $d = 4\cdot 10^{-3}$ м

U_1 = 600 В

U_2/U_1 = 3

$\sigma_{св}$, χ – ?

Решение

Напряженность поля в конденсаторе первоначально была (при наличии диэлектрика)

$$E_1=\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon},$$

где σ – поверхностная плотность стороннего заряда на проводнике.

С другой стороны,

$$E_1=\frac{U_1}{d}.$$

Тогда

$$U_1=\frac{\sigma d}{\varepsilon_0\varepsilon}.$$

По формуле

$$\sigma'=-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\sigma.$$

Если $\sigma_{св} = -\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\sigma$, то

$$U_1 = \frac{\sigma_{св} d}{\varepsilon_0(\varepsilon-1)}.$$

После отключения источника и удаления диэлектрика разность потенциалов на пластинах изменилась (по условию возросла):

$$E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{U_2}{d}.$$

Отсюда

$$U_2 = \frac{\sigma_{св}\varepsilon}{\varepsilon-1}\frac{d}{\varepsilon_0}.$$

Отношение

$$\frac{U_2}{U_1} = \varepsilon = 3.$$

Поверхностную плотность связанных зарядов найдем через напряжение U_1:

$$\sigma_{св} = \frac{\varepsilon_0 U_1(\varepsilon-1)}{d};$$

$$[\sigma_{св}] = \frac{\text{Ф}\cdot\text{м}}{\text{м}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{В}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2};$$

$$\sigma_{св} = \frac{8{,}85\cdot10^{-12}\cdot600(3-1)}{4\cdot10^{-3}} = 2{,}65\cdot10^{-6}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$

Диэлектрическая восприимчивость χ диэлектрика связана с $\sigma_{св}$ формулой

$$\sigma_{св} = \varepsilon_0\chi E_1 = \varepsilon_0\chi\frac{U_1}{d},$$

откуда

$$\chi = \frac{\sigma_{св} d}{\varepsilon_0 U_1};$$

$$[\chi] = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{м}^2\cdot\text{Ф}\cdot\text{В}} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{Кл}\cdot\text{В}} = 1;$$

$$\chi = \frac{2{,}65\cdot10^{-6}\cdot4\cdot10^{-3}}{8{,}85\cdot10^{-12}\cdot600} = 2.$$

Ответ: $\sigma_{св} = 2{,}65\cdot10^{-6}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$; $\chi = 2$.

ЗАДАЧА 3.23

Пластины плоского конденсатора площадью S = 200 см^2 притягиваются с силой F_1 = 9,84 мН. Между пластинами конденсатора находится точечный заряд q = 30 мКл. Определить, с какой силой F_2 поле конденсатора действует на заряд.

Дано:	**Решение**
S = 0,02 м^2 F_1 = 9,84·10^{-3} Н q = 3·10^{-2} Кл	Сила F_1, с которой притягиваются пластины, $F_1 = E_1 q_2$, где $E_1 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ – напряженность поля одной из пластин, а $q_2 = \sigma S$ – заряд второй пластины.
F_2 – ?	

Тогда

$$F_1 = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0}. \tag{1}$$

Отсюда можно определить поверхностную плотность заряда σ на пластине конденсатора:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 F_1}{S}}. \tag{2}$$

Сила F_2, с которой поле конденсатора действует на заряд q,

$$F_2 = Eq = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} q, \tag{3}$$

где E – напряженность поля конденсатора, определяемая по формуле

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} \quad (\varepsilon = 1).$$

Подставляя выражение (2) в (3), получим

$$F_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} q = q\sqrt{\frac{2F_1}{\varepsilon_0 S}};$$

$$[F] = Кл\sqrt{\frac{Н \cdot м}{Ф \cdot м^2}} = \sqrt{\frac{\text{Кл}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{В}}{\text{Кл} \cdot \text{м}^2}} = \sqrt{\frac{\text{Кл} \cdot \text{Н} \cdot \text{В}}{\text{м}}} = \sqrt{\frac{\text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{Н} \cdot \text{В}}{\text{м}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\text{Вт} \cdot \text{с} \cdot \text{Н}}{\text{м}}} = \sqrt{\frac{\text{Дж} \cdot \text{Н}}{\text{м}}} = \sqrt{\frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{Н}}{\text{м}}} = \sqrt{\text{Н}^2} = \text{Н};$$

$$F_2 = 3\cdot 10^{-2}\sqrt{\frac{2\cdot 9{,}84\cdot 10^{-3}}{8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}02}} = 10^{-4}\ \text{Н} = 10\ \text{мН}.$$

Ответ: $F_2 = 10$ мН.

ЗАДАЧА 3.24

Емкость конденсатора C_1 = 0,4 мкФ, когда он заполнен воздухом. Конденсатор заряжается до разности потенциалов U = 500 В. Определить изменение энергии конденсатора ΔW и работу сил электрического поля при заполнении конденсатора трансформаторным маслом ($\varepsilon = 2{,}5$) для случаев: 1) конденсатор отключен от источника; 2) конденсатор соединен с источником.

Дано:	**Решение**
$\varepsilon = 2{,}5$ C_1 = 0,4·10^{-6} Ф U = 500 В	Работу сил электрического поля можно определить, используя закон сохранения энергии:
ΔW_1, ΔW_2 – ? A_1, A_2 – ?	

$$\Delta W = W_2 - W_1 = -A + A_u, \qquad (1)$$

где W_1, W_2 – энергии конденсатора до и после заполнения его диэлектриком; A – работа сил поля; A_u – работа, совершаемая источником.

При заполнении конденсатора маслом силы поля совершают в обоих рассматриваемых случаях положительную работу: поляризуют диэлектрик и втягивают его в поле с большей напряженностью, т.е. работа сил поля $A > 0$. Поэтому энергия конденсатора уменьшается, если он отключен от источника. При включенном источнике напряжение на пластинах конденсатора не изменяется и при заполнении маслом заряд конденсатора возрастет, т.е. источник, заряжая конденсатор, совершает положительную работу.

В первом случае при $q = \text{const}$ изменение энергии

$$\Delta W_1 = W_2 - W_1 = \frac{q^2}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon C_1} - \frac{1}{C_1}\right) = -A_1, \text{ т.к. } A_u = 0.$$

Поскольку $q = C_1 U$, то $\Delta W_1 = \frac{C_1 U^2}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$;

$$[\Delta W] = \Phi \cdot \text{В}^2 = \frac{\text{Кл} \cdot \text{В}^2}{\text{В}} = \text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{В} = \text{Дж};$$

$$\Delta W_1 = \frac{0,4 \cdot 10^{-6} \cdot 500^2}{2}\left(\frac{1}{2,5} - 1\right) = -3,6 \cdot 10^{-2}\ \text{Дж};$$

$$A_1 = 3,6 \cdot 10^{-2}\ \text{Дж}.$$

Во втором случае, когда конденсатор соединен с источником, $U = \text{const}$ и изменение энергии

$$\Delta W = \frac{U^2}{2}(C_2 - C_1) = \frac{C_1 U^2}{2}(\varepsilon - 1), \qquad (2)$$

где $C_2 = \varepsilon C_1$;

$$\Delta W_2 = \frac{0,4 \cdot 10^{-6} \cdot 500^2}{2}(2,5 - 1) = 7,5 \cdot 10^{-2}\ \text{Дж}.$$

Работа сил поля A_2, согласно уравнению (1),

$$A_2 = A_u - \Delta W_2, \qquad (3)$$

где

$$A_u = \Delta q U = U^2 (C_2 - C_1). \qquad (4)$$

Из уравнений (2) – (4) получим:

$$A_2 = C_1 U^2 \frac{(\varepsilon - 1)}{2};$$

$$A_2 = 0,4 \cdot 10^{-6} \cdot 500^2 \frac{(2,5 - 1)}{2} = 7,5 \cdot 10^{-2}\ \text{Дж}.$$

Ответ: $\Delta W_1 = -3,6 \cdot 10^{-2}$ Дж; $A_1 = 3,6 \cdot 10^{-2}$ Дж; $\Delta W_2 = 7,5 \cdot 10^{-2}$ Дж; $A_2 = 7,5 \cdot 10^{-2}$ Дж.

ЗАДАЧА 3.25

Пространство между пластинами плоского конденсатора заполняется диэлектриком ($\varepsilon = 7$). При присоединении пластин к источнику напряжения напряженность электрического поля в конденсаторе E = 0,4·10^6 В/м. Найти: 1) давление пластин на диэлектрик; 2) электрическую индукцию в диэлектрике; 3) поверхностную плотность связанных зарядов; 4) поверхностную плотность зарядов на пластинах конденсатора; 5) объемную плотность энергии электрического поля в диэлектрике.

Дано:	**Решение**
$\varepsilon = 7$ E = 0,4·10^6 В/м	1. Сила притяжения между пластинами плоского конденсатора определяется по формуле
$P, D, \sigma_{св}, \sigma_D, \omega$ – ?	

$$F = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0\varepsilon}.$$

Тогда давление пластин на диэлектрик

$$P = \frac{F}{S} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0\varepsilon}. \quad (1)$$

Выразив из формулы для напряженности поля, образованного двумя параллельными бесконечными равномерно заряженными плоскостями, $\left(E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}\right)$ поверхностную плотность зарядов σ и подставив в уравнение (1), получим

$$P = \frac{E^2\varepsilon_0\varepsilon}{2};$$

$$[P] = \frac{\text{В}^2 \cdot \text{Ф}}{\text{м}^2 \cdot \text{м}} = \frac{\text{В} \cdot \text{Кл}}{\text{м}^3} = \frac{\text{В} \cdot \text{А} \cdot \text{с}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па};$$

$$P = \frac{\left(0,4 \cdot 10^6\right)^2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 7}{2} = 5\ \text{Па}.$$

2. Электрическую индукцию D вычислим по формуле

$$D = \varepsilon_0\varepsilon E;$$

$$[D] = \frac{\text{Ф} \cdot \text{м}}{\text{м} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{В}}{\text{В} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}; \quad D = 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 7 \cdot 0,4 \cdot 10^6 = 2,5 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$

3. Поверхностная плотность связанных зарядов σ' в однородном диэлектрике связана с поверхностной плотностью σ стороннего заряда на поверхности прилежащего к нему заряженного проводника равенством

$$\sigma' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\sigma.$$

Тогда

$$\sigma_{св} = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\sigma = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E;$$

$$\sigma_{св} = (7-1)\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}4\cdot 10^{6} = 21{,}2\cdot 10^{6}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$

4. Поверхностная плотность зарядов на пластинах конденсатора

$$\sigma_D = D; \quad \sigma_D = 2{,}5\cdot 10^{-5}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$

5. Объемная плотность энергии электрического поля в диэлектрике согласно формуле энергии электрического поля в объеме V $\left(W = \int\limits_V \omega dV\right)$ равна

$$\omega = \frac{W}{V} = \frac{ED}{2}; \quad [\omega] = \frac{\text{В}}{\text{м}}\cdot\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} = \frac{\text{В}\cdot\text{А}\cdot\text{с}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3};$$

$$\omega = \frac{0{,}4\cdot 10^{6}\cdot 2{,}5\cdot 10^{-5}}{2} = 5\ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}.$$

Ответ: $P = 5$ Па; $D = 2{,}5\cdot 10^{-5}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$; $\sigma_{св} = 21{,}2\cdot 10^{6}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$; $\sigma_D = 2{,}5\cdot 10^{-5}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$; $\omega = 5\ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}$.

ЗАДАЧА 3.26

Имеем среду с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$. Определить объемную плотность энергии ω электрического поля в этой среде в точке, находящейся: 1) на расстоянии $x = 2$ см от поверхности заряженного шара радиусом R = 1 см; 2) на расстоянии $x = 2$ см от бесконечно длинной заряженной нити. Поверхностная плотность заряда на шаре σ = 16,7 мкКл/м^2, линейная плотность заряда на нити τ = 167 нКл/м.

Дано	**Решение**
$R = 0{,}01$ м $\varepsilon = 2$ $x = 0{,}02$ м $\sigma = 16{,}7\cdot10^{-6}$ Кл/м^2 $\tau = 167\cdot10^{-9}$ Кл/м	1. Электрическое поле, создаваемое заряженным шаром, подобно полю точечного заряда, который поместили в центр шара: $$E_ш = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q_ш}{(x+R)^2},$$
$\omega_ш$, ω – ?	где $q_ш = \sigma S_ш = \sigma 4\pi R^2$.

Таким образом,

$$E_ш = \frac{\sigma 4\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(x+R)^2}.$$

Электрическое смещение (индукция)

$$D = \varepsilon_0\varepsilon E.$$

Объемная плотность энергии выражается так:

$$\omega = \frac{ED}{2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2}.$$

Таким образом,

$$\omega_ш = \frac{\sigma^2 R^4}{2\varepsilon_0\varepsilon(x+R)^4};$$

$$[\omega_ш] = \frac{\text{Кл}^2\cdot\text{м}^4\cdot\text{м}}{\text{м}^4\cdot\text{Ф}\cdot\text{м}^4} = \frac{\text{Кл}^2\cdot\text{В}}{\text{м}^3\cdot\text{Кл}} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{м}^3} = \frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Вт}\cdot\text{с}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3};$$

$$\omega_ш = \frac{\left(16{,}7\cdot10^{-6}\right)^2\cdot(0{,}01)^4}{2\cdot 8{,}85\cdot10^{-12}\cdot 2(0{,}02+0{,}01)^4} = 9{,}73\cdot10^{-2}\ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}.$$

2. Напряженность поля в диэлектрике, создаваемую бесконечно длинной заряженной нитью, определим по формуле $E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$, получим:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 x\varepsilon}.$$

Тогда объемная плотность энергии электрического поля

$$\omega = \frac{\tau^2}{8\pi^2\varepsilon_0\varepsilon x^2};$$

$$[\omega]=\frac{\text{Кл}^2\cdot\text{м}}{\text{м}^2\cdot\text{Ф}\cdot\text{м}^2}=\frac{\text{Кл}^2\cdot\text{В}}{\text{м}^3\cdot\text{Кл}}=\frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}}{\text{м}^3}=\frac{\text{Вт}\cdot\text{с}}{\text{м}^3}=\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3};$$

$$\omega=\frac{\left(167\cdot10^{-9}\right)^2}{8(3{,}14)^2\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot2\cdot(0{,}02)^2}=0{,}049\ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}.$$

Ответ: $\omega_ш=9{,}73\cdot10^{-2}\ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}$; $\omega=0{,}049\ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}$.

ЗАДАЧА 3.27

Расстояние между пластинами плоского воздушного конденсатора меняют от d_1 = 2 мм дл d_2 = 20 мм. К пластинам приложена разность потенциалов U = 0,1 кВ. Площадь пластины S = 0,01 м^2. Найти энергии W_1 и W_2 конденсатора до и после раздвижения пластин, если источник напряжения перед раздвижением: 1) не отключается; 2) отключается.

Дано:
$d_1 = 2\cdot10^{-3}$ м
$d_2 = 2\cdot10^{-2}$ м
U = 100 В
S = 0,01 м^2
W_1, W_2 – ?

Решение

1. Если пластины конденсатора остаются подключенными к источнику, то разность их потенциалов остается неизменной: $(U=\text{const})$.

Энергию конденсатора удобно считать по формуле

$$W=\frac{q^2}{2C}=\frac{CU^2}{2}=\frac{qU}{2}.$$

Применим выражение $W=\frac{CU^2}{2}$.

Емкость плоского конденсатора с увеличением расстояния d будет уменьшаться, т.к.

$$C=\frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

Таким образом,

$$W_1=\frac{\varepsilon_0 SU^2}{2d_1}\quad\text{и}\quad W_2=\frac{\varepsilon_0 SU^2}{2d_2};$$

$$[W]=\frac{\text{Ф}\cdot\text{м}^2\cdot\text{В}^2}{\text{м}\cdot\text{м}}=\frac{\text{Кл}\cdot\text{В}^2}{\text{В}}=\text{Кл}\cdot\text{В}=\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}=\text{Вт}\cdot\text{с}=\text{Дж};$$

$$W_1=\frac{8{,}85\cdot10^{-12}\cdot0{,}01\cdot100^2}{2\cdot2\cdot10^{-3}}=2{,}2\cdot10^{-7}\,\text{Дж}.$$

3. Систему двух заряженных и отключенных от источника пластин можно рассматривать как изолированную систему. Энергию в данном случае удобно выразить через заряд q на пластинах, т.к. заряд пластин, отключенных от источника, при их раздвижении не изменяется:

$$W_1=\frac{q^2}{2C_1},$$

где $q=C_1U$;

$$W_1=\frac{C_1U^2}{2}=\frac{\varepsilon_0SU^2}{2d_1};$$

$$W_2=\frac{q_2}{2C_2}=\frac{\varepsilon_0SU^2}{2d_2};$$

$$[W]=\frac{\text{Ф}\cdot\text{м}^2\cdot\text{В}^2}{\text{м}\cdot\text{м}}=\text{Ф}\cdot\text{В}^2=\frac{\text{Кл}\cdot\text{В}^2}{\text{В}}=\text{Кл}\cdot\text{В}=\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}=\text{Вт}\cdot\text{с}=\text{Дж};$$

$$W_1=\frac{8{,}85\cdot10^{-12}\cdot0{,}01\cdot100^2}{2\cdot2\cdot10^{-3}}=2{,}2\cdot10^{-7}\ \text{Дж};$$

$$W_2=\frac{8{,}85\cdot10^{-12}\cdot0{,}01\cdot100^2}{2\cdot2\cdot10^{-2}}=22{,}1\cdot10^{-7}\,\text{Дж}.$$

Ответ: 1) $W_1=2{,}2\cdot10^{-7}$ Дж; $W_2=2{,}2\cdot10^{-8}$ Дж;

2) $W_1=2{,}2\cdot10^{-7}$ Дж; $W_2=22{,}1\cdot10^{-7}$ Дж.

ЗАДАЧА 3.28

На пластинах плоского воздушного конденсатора находится заряд 4,95 нКл. Конденсатор подключен к источнику с ЭДС, равной 280 В. Площадь пластины конденсатора S = 0,01 м^2. Найти: 1) напряженность поля E внутри конденсатора; 2) расстояние d между пластинами; 3) скорость υ, которую получит электрон, пройдя в конденсаторе путь от одной пластины до другой; 4) энергию W конденсатора; 5) силу притяжения пластин F.

Дано:	**Решение**
q = 4,95·10^{-9} Кл U = 280 В S = 0,01 м^2 ε = 1	1. Напряженность поля E, созданного двумя пластинами, $$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon},$$
E, d, υ, W, F – ?	где $\sigma=\frac{q}{S}$.

Тогда

$$E=\frac{q}{\varepsilon_0 S};$$

$$[E]=\frac{\text{Кл}\cdot\text{м}}{\text{м}^2\cdot\text{Ф}}=\frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{м}\cdot\text{Кл}}=\frac{\text{В}}{\text{м}};$$

$$E=\frac{4{,}95\cdot10^{-9}}{8{,}85\cdot10^{-12}\cdot0{,}01}=56\cdot10^3\ \frac{\text{В}}{\text{м}}=56\ \frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

2. Разность потенциалов пластин U и напряженность E поля внутри конденсатора связаны соотношением $E=\frac{U}{d}$.

Отсюда

$$d=\frac{U}{E};$$

$$[d]=\frac{\text{В}\cdot\text{м}}{\text{В}}=\text{м};\quad d=\frac{280}{56\cdot10^3}=5\cdot10^{-3}\text{м}.$$

3. По закону сохранения энергии

$$\frac{m\upsilon^2}{2}=q_eU,$$

где m – масса электрона ($m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг); q_e – заряд электрона ($q_e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл).

Отсюда находим скорость электрона:

$$\upsilon=\sqrt{\frac{2q_eU}{m}};$$

$$[\upsilon]=\sqrt{\frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{кг}}}=\sqrt{\frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}}{\text{кг}}}=\sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}}=\sqrt{\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{кг}}}=\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{кг}\cdot\text{с}^2}}=\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\upsilon=\sqrt{\frac{2\cdot1{,}6\cdot10^{-19}\cdot280}{9{,}1\cdot10^{-31}}}=10^7\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

4. Энергию конденсатора рассчитаем по формуле

$$W=\frac{q^2}{2C}=\frac{q^2d}{2\varepsilon_0S};\quad\left(C=\frac{\varepsilon_0S}{d}\right);$$

$$[W] = \frac{\text{Кл}^2 \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{Ф} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Кл}^2 \cdot \text{В}}{\text{Кл}} = \text{Кл} \cdot \text{В} = \text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{В} = \text{Вт} \cdot \text{с} = \text{Дж};$$

$$W = \frac{\left(4,95 \cdot 10^{-9}\right)^2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,01} = 6,9 \cdot 10^{-7}\ \text{Дж}.$$

5. Сила притяжения пластин F в плоском конденсаторе

$$F = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0} = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S};$$

$$[F] = \frac{\text{Кл}^2 \cdot \text{м}}{\text{Ф} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Кл}^2 \cdot \text{В}}{\text{Кл} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{В}}{\text{м}} = \frac{\text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{В}}{\text{м}} = \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}} = \text{Н};$$

$$F = \frac{\left(4,95 \cdot 10^{-9}\right)^2}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,01} = 0,14 \cdot 10^{-3}\ \text{Н}.$$

Ответ: $E = 56\ \frac{\text{кВ}}{\text{м}}$, $d = 5 \cdot 10^{-3}$ м, $\upsilon = 10^7\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $W = 6,9 \cdot 10^{-7}$ Дж, $F = 0,14 \cdot 10^{-3}$ Н.

ЗАДАЧА 3.29

Напряженность E электрического поля на расстоянии x = 5 см от центра сфер воздушного сферического конденсатора равна 44,5 кВ/м. Радиусы внутренней и внешней сфер соответственно равны: r = 2 см, R = 8 см. Найти разность потенциалов U, приложенную между сферическими поверхностями.

Дано:

$E = 44,5 \cdot 10^3$ В/м

$x = 0,05$ м

$r = 0,02$ м

$R = 0,08$ м

$\varepsilon = 1$

U – ?

Решение

Электрическая емкость сферического конденсатора (две концентрические сферы радиусами r и R, пространство между которыми заполнено диэлектриком) определяется по формуле

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r R}{R - r}. \qquad (1)$$

С другой стороны, емкость конденсатора

$$C = \frac{q}{U}, \qquad (2)$$

где U – разность потенциалов между сферами конденсатора.

Из уравнений (1) и (2) получим:

$$\frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon rR}{R-r}=\frac{q}{U},$$

откуда

$$U=\frac{q(R-r)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon rR}.$$

Заряд на сфере q найдем через напряженность поля конденсатора E. Согласно формуле напряженности поля точечного заряда или заряженной сферы (вне среды) $\left(E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)$ имеем:

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}.$$

Отсюда

$$q=4\pi\varepsilon_0 Ex^2.$$

Разность потенциалов U между сферами

$$U=\frac{(R-r)Ex^2}{rR};$$

$$[U]=\frac{\text{м}\cdot\text{В}\cdot\text{м}^2}{\text{м}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}=\text{В};$$

$$U=\frac{(0,08-0,02)\cdot 44,5\cdot 10^3\cdot 0,05^2}{0,05\cdot 0,08}=4,2\cdot 10^3\ \text{В}=4,2\ \text{кВ}.$$

Ответ: $U=4,2$ кВ.

ЗАДАЧА 3.30

Емкость шара, погруженного в масло ($\varepsilon=5$), равна 0,39 пФ, заряд на шаре 1,76 нКл. Каковы потенциал шара φ, радиус шара R, поверхностная плотность заряда σ и энергия шара W?

Дано:
C = $0{,}39\cdot10^{-12}$ Ф
ε = 5
q = $1{,}76\cdot10^{-9}$ Кл

φ, R, σ, W – ?

Решение

Емкость уединенного проводника выражается формулой

$$C=\frac{q}{\varphi}.$$

Отсюда определим потенциал шара:

$$\varphi=\frac{q}{C};$$

$$[\varphi]=\frac{\text{Кл}}{\text{Ф}}=\frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{Кл}}=\text{В};\quad \varphi=\frac{1{,}76\cdot10^{-9}}{0{,}39\cdot10^{-12}}=4{,}5\cdot10^{3}\ \text{В}=4{,}5\ \text{кВ}.$$

С другой стороны, емкость шара

$$C=4\pi\varepsilon_0\varepsilon R=\frac{\varepsilon R}{K},$$

где $K=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}=9\cdot10^{9}\ \dfrac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2}$.

Таким образом, радиус шара

$$R=\frac{KC}{\varepsilon};$$

$$[R]=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2\cdot\text{Ф}}{\text{Кл}^2}=\frac{\text{Дж}\cdot\text{м}\cdot\text{Кл}}{\text{Кл}^2\cdot\text{В}}=\frac{\text{А}\cdot\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{м}}{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}}=\text{м};$$

$$R=\frac{9\cdot10^{9}\cdot0{,}39\cdot10^{-12}}{5}=0{,}7\cdot10^{-3}\ \text{м}.$$

Поверхностная плотность заряда на шаре

$$\sigma=\frac{q}{4\pi R^2};$$

$$\sigma=\frac{1{,}76\cdot10^{-9}}{4\cdot3{,}14\cdot\left(0{,}7\cdot10^{-3}\right)^2}=286\cdot10^{-3}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}=286\ \frac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}.$$

Энергию шара определим по формуле

$$W=\frac{q^2}{2C};$$

$$[W]=\frac{\text{Кл}^2}{\text{Ф}}=\frac{\text{Кл}^2\cdot\text{В}}{\text{Кл}}=\text{Кл}\cdot\text{В}=\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}=\text{Дж};$$

$$W=\frac{\left(1{,}76\cdot10^{-9}\right)^2}{2\cdot0{,}39\cdot10^{-12}}=3{,}97\cdot10^{-6}\ \text{Дж}=3{,}97\ \text{мкДж}.$$

Ответ: $\varphi=4{,}5$ кВ; $R=0{,}7\cdot10^{-3}$ м; $\sigma=286\ \dfrac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}$; $W=3{,}97$ мкДж.

ЗАДАЧА 3.31

Два металлических шарика радиусами R_1 = 6 см и R_2 = 4 см соединены проволочкой, емкостью которой можно пренебречь. До соединения заряд на первом шарике был q_1 = 10 нКл, а потенциал второго шарика φ_2 = 9 кВ. Найти: 1) потенциал φ_1 первого шарика до соединения; 2) заряд q_2 второго шарика до соединения; 3) энергии W_1 и W_2 каждого шарика до соединения; 4) заряд q_1' и потенциал φ_1' первого шарика после соединения; 5) заряд q_2' и потенциал φ_2' второго шарика после соединения; 6) энергию W соединенных проводником шариков.

Дано:	Решение
R_1 = 0,06 м R_2 = 0,04 м $q_1 = 10^{-8}$ Кл φ_2 = 9000 В	Емкость шарика $$C = 4\pi\varepsilon_0 R = \frac{R}{K},$$ где $$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9\ \frac{\text{Нм}^2}{\text{Кл}^2}.$$
φ_1, q_2, W_1, W_2, q_1', φ_1', q_2', φ_2', W – ?	

С другой стороны, емкость уединенного проводника по определению

$$C = \frac{q}{\varphi}.$$

1. Потенциал первого шарика до соединения

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_1 K}{R_1};$$

$$[\varphi_1] = \frac{\text{Кл}\cdot\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2\cdot\text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \text{В}; \quad \varphi_1 = \frac{10^{-8}\cdot 9\cdot 10^9}{0,06} = 1500\ \text{В}.$$

2. Заряд второго шарика до соединения

$$q_2 = C_2\varphi_2 = \frac{R_2}{K}\varphi_2;$$

$$[q_2] = \frac{\text{м}\cdot\text{В}\cdot\text{Кл}}{\text{Н}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{В}\cdot\text{Кл}\cdot\text{А}\cdot\text{с}}{\text{А}\cdot\text{В}\cdot\text{с}} = \text{Кл}; \quad q_2 = \frac{0,04\cdot 9000}{9\cdot 10^9} = 40\cdot 10^{-9}\ \text{Кл} = 40\ \text{нКл}.$$

3. Энергия шариков до соединения определяется формулой

$$W = \frac{q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Тогда

$$W_1 = \frac{q_1^2}{2C_1} = \frac{q_1^2 K}{2R_1}; \quad W_2 = \frac{q_2^2 K}{2R_2};$$

$$W_1 = \frac{\left(10^{-8}\right)^2 \cdot 9 \cdot 10^9}{2 \cdot 0,06} = 0,75 \cdot 10^{-5}\ \text{Дж}; \quad W_2 = \frac{\left(40 \cdot 10^{-9}\right)^2 \cdot 9 \cdot 10^9}{2 \cdot 0,04} = 18 \cdot 10^{-5}\ \text{Дж}.$$

4. Так как потенциалы шариков $\varphi_1 \neq \varphi_2$, то после соединения шариков по проволочке потечет ток. Заряды будут перетекать к шарику с меньшим потенциалом (к первому). Перетекание зарядов будет происходить до тех пор, пока потенциалы шаров не сравняются $\left(\varphi_1' = \varphi_2'\right)$. По закону сохранения электрического заряда в изолированной системе (когда нет притока и оттока зарядов извне)

$$q_1 + q_2 = q_1' + q_2' \quad \text{или} \quad q_1 + q_2 = C_1\varphi_1' + C_2\varphi_2' = \varphi_1'\left(C_1 + C_2\right), \text{ т.к. } \varphi_1' = \varphi_2'.$$

Найдем общий потенциал шаров после соединения:

$$\varphi_1' = \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2} = \frac{K\left(q_1 + q_2\right)}{R_1 + R_2};$$

$$\varphi_1' = \varphi_2' = \frac{9 \cdot 10^9\left(10^{-8} + 40 \cdot 10^{-9}\right)}{0,06 + 0,04} = 4500\ \text{В}.$$

Тогда заряд

$$q_1' = C_1\varphi_1' = \frac{R_1}{K}\varphi_1'; \quad q_1' = \frac{0,06 \cdot 4500}{9 \cdot 10^9} = 30\ \text{нКл}.$$

5. Заряд на втором шарике после соединения

$$q_2' = q_1 + q_2 - q_1';$$

$$q_2' = 10^{-8} + 40 \cdot 10^{-9} - 30 \cdot 10^{-9} = 20 \cdot 10^{-9}\ \text{Кл} = 20\ \text{нКл}.$$

6. Энергия W соединенных проводником шариков

$$W = \frac{\left(C_1 + C_2\right)\varphi_1'^2}{2} = \frac{\left(R_1 + R_2\right)\varphi_1'^2}{2K};$$

$$[W] = \frac{\text{м} \cdot \text{В}^2 \cdot \text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{В}^2 \cdot \text{А}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{Дж}} = \frac{\text{Дж}^2}{\text{Дж}} = \text{Дж};$$

$$W = \frac{\left(0,06 + 0,04\right) \cdot \left(4500\right)^2}{2 \cdot 9 \cdot 10^9} = 112,5 \cdot 10^{-6}\ \text{Дж}.$$

Ответ: $\varphi_1 = 1500$ В; $q_2 = 40$ нКл; $W_1 = 0,75 \cdot 10^{-5}$ Дж; $W_2 = 18 \cdot 10^{-5}$ Дж, $\varphi_1' = \varphi_2' = 4500$ В, $q_1' = 30$ нКл, $q_2' = 20$ нКл, $W = 112,5 \cdot 10^{-6}$ Дж.

3.2. ПОСТОЯННЫЙ ТОК

Основные формулы

Сила тока

$$I = \frac{dq}{dt},$$

где dq – количество электричества, прошедшее через поперечное сечение проводника за время dt.

Плотность электрического тока определяется отношением силы тока dI к площади dS поперечного сечения проводника, перпендикулярной к направлению тока,

$$j = \frac{dI}{dS}.$$

Плотность тока пропорциональна средней скорости $\langle \upsilon \rangle$ направленного движения носителей заряда и их концентрации (n)

$$\vec{j} = en\langle \vec{\upsilon} \rangle,$$

где e – заряд электрона.

Сила тока I через любую поверхность S равна

$$I = \int_S j_n dS,$$

где j_n – проекция вектора $\vec{j}$ на нормаль к поверхности.

Сопротивление R однородного проводника длиной l и площадью поперечного сечения S

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

где ρ – удельное сопротивление материала, из которого изготовлен проводник.

Зависимость от температуры:

а) сопротивления проводника $R = R_0 (1 + \alpha \Delta t)$;

б) удельного сопротивления проводника $\rho = \rho_0 (1 + \alpha \Delta t)$,

где R_0, ρ_0 – сопротивление проводника и удельное сопротивление при 0 °С; α – температурный коэффициент сопротивления; Δt – изменение температуры.

Сопротивление проводников, соединенных:

а) последовательно $R=\sum_{i=1}^{n} R_i$; $R=R_1+R_2+\ldots R_n$;

если R_i одинаковы, то $R=nR_i$;

б) параллельно $\frac{1}{R}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i}$; $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\ldots\frac{1}{R_n}$;

если R_i одинаковы, то $R=\frac{R_i}{n}$.

Здесь R_i – сопротивление i-того проводника; n – число проводников.

Закон Ома для участка цепи, не содержащей ЭДС:

$$I=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{R};, \quad I=\frac{U}{R},$$

где $(\varphi_1-\varphi_2)$ – разность потенциалов на концах участка (напряжение); R – его сопротивление.

Закон Ома для неоднородного участка цепи, содержащей ЭДС:

$$I=\frac{(\varphi_1-\varphi_2)+\sum\varepsilon_i}{\sum R}; \quad I=\frac{(\varphi_1-\varphi_2)+\varepsilon_{12}}{R+r},$$

где $\sum\varepsilon_i$ – алгебраическая сумма всех электродвижущих сил (ЭДС), имеющихся на данном участке; $\sum R$ – сумма всех сопротивлений участка.

Закон Ома для замкнутой цепи $(\varphi_1=\varphi_2)$:

$$I=\frac{\sum\varepsilon_i}{R+r},$$

где R – внешнее сопротивление цепи; r – внутреннее сопротивление источника тока.

Закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j}=\frac{\vec{E}}{\rho}=\sigma\vec{E},$$

где σ – удельная проводимость; $\vec{E}$ – напряженность электрического поля.

Правила Кирхгофа:

1. Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле электрической цепи, равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i=0,$$

где n – число токов, сходящихся в узле.

2. В замкнутом контуре электрической цепи алгебраическая сумма напряжений на всех участках этого контура равна алгебраической сумме ЭДС источников, включенных в контур:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i R_i = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i ,$$

где n – число участков, содержащих сопротивление R; k – число ЭДС, действующих в контуре.

Работа, совершаемая электрическим полем и сторонними силами на участке цепи постоянного тока за время t,

$$A = qU = IUt = I^2 Rt = \frac{U^2}{R} t .$$

Мощность электрического тока на участке цепи – работа, совершаемая в единицу времени,

$$P = \frac{dA}{dt} = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R} .$$

Работа и мощность, развиваемая источником тока с ЭДС ε,

$$A = I\varepsilon t ; \quad P = I\varepsilon .$$

Закон Джоуля – Ленца:

$$dQ = I^2 Rdt = IUdt ,$$

где dQ – количество теплоты, выделяющееся на участке электрической цепи за время dt; U – напряжение, приложенное к концам участка цепи; I – сила тока в цепи; R – сопротивление участка.

Закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме:

$$\omega = jE = \sigma E^2 ,$$

где ω – удельная тепловая мощность тока; j – плотность тока; E – напряженность электростатического поля; σ – удельная электрическая проводимость вещества.

Коэффициент полезного действия электрической цепи

$$\eta = \frac{P_{полез}}{P_{затр}} ,$$

где $P_{полез}$ – полезная мощность (мощность, выделяемая на нагрузке); $P_{затр}$ – затраченная мощность (мощность, развиваемая источником тока).

Короткое замыкание возникает в цепи при $R \to 0$. Ток короткого замыкания

$$I_{к.з} = \frac{\varepsilon}{n} .$$

Решение задач

ЗАДАЧА 3.32

К источнику с ЭДС, равной ε, и внутренним сопротивлением r_1 присоединили сопротивление R = 0,1 Ом. При этом амперметр показал силу тока I_1 = 0,5 А. Если же к источнику присоединить последовательно еще один источник с такой же ЭДС, но с внутренним сопротивлением r_2 = 4,5 Ом, то сила тока I_2 в том же сопротивлении окажется равной 0,4 А. Определить внутреннее сопротивление r_1 и ЭДС источника ε.

Дано:

R = 0,1 Ом

I_1 = 0,5 А

I_2 = 0,4 А

r_2 = 4,5 Ом

ε, r_1 – ?

Решение

Запишем закон Ома для замкнутой цепи в первом случае (рис. 1):

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R + r_1},$$

где r_1 – внутреннее сопротивление первого источника.

Во втором случае (рис. 2) закон Ома будет иметь вид:

$$I_2 = \frac{2\varepsilon}{R + r_1 + r_2}.$$

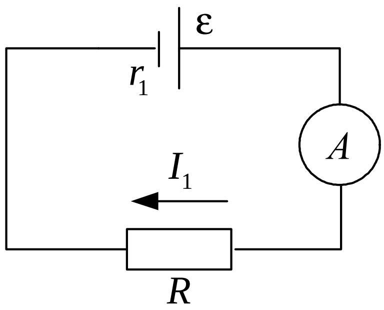


Рис. 1

Найдем сопротивление r_1 для первого источника, разделив одно уравнение на другое и подставив значения I_1 и I_2:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R + r_1 + r_2}{2(R + r_1)} = \frac{5}{4}.$$

Тогда

$$r_1 = \frac{2}{3} r_2 - R; \quad r_1 = \frac{2}{3} 4{,}5 - 0{,}1 = 2{,}9 \text{ Ом}.$$

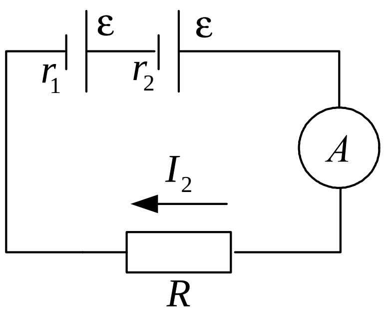


Рис. 2

Источник имеет ЭДС $\varepsilon = I_1 (R + r_1)$;

$$[\varepsilon] = \text{А} \cdot \text{Ом} = \text{В}; \quad \varepsilon = 0{,}5(0{,}1 + 2{,}9) = 1{,}5 \text{ В}.$$

Ответ: $r_1 = 2{,}9$ Ом; $\varepsilon = 1{,}5$ В.

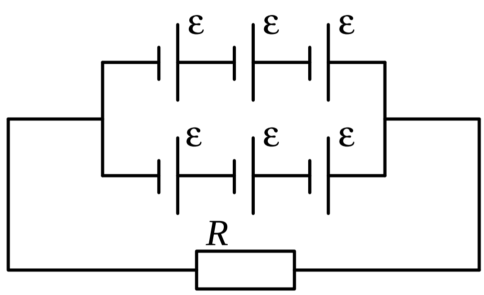
ЗАДАЧА 3.33

В схеме (см. рис.) ЭДС каждого элемента ε = 1,2 В, внутреннее сопротивление r = 0,2 Ом. Полученная батарея замкнута на внешнее сопротивление R и дает во внешнюю цепь ток I = 2 А. Найти сопротивление R.

Дано:	**Решение**
ε = 1,2 В r = 0,2 Ом I = 2 А	Батарея имеет смешанное соединение элементов: две параллельно соединенные ветви с тремя последовательно соединенными элементами (см. рис.).
R – ?	

По закону Ома для замкнутой цепи

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}.$$



Найдем внешнее сопротивление:

$$R = \frac{3\varepsilon}{I} - r_{об},$$

так как суммарная ЭДС равна 3ε.

Найдем $r_{об}$.

Внутреннее сопротивление элементов в одной ветви $r_в = 3r$, так как элементы соединены последовательно. Две такие ветви, соединенные параллельно, образуют цепь с общим внутренним сопротивлением элементов, определяемым по формуле

$$\frac{1}{r_{об}} = \frac{1}{3r} + \frac{1}{3r} = \frac{2}{3r},$$

откуда

$$r_{об} = \frac{3}{2} r.$$

Тогда

$$R = \frac{3\varepsilon}{I} - \frac{3r}{2};$$

$$R = \frac{3 \cdot 1{,}2}{2} - \frac{3 \cdot 0{,}2}{2} = 1{,}5 \text{ Ом}.$$

Ответ: $R = 1{,}5$ Ом.

ЗАДАЧА 3.34

Два одинаковых резистора сопротивлением R_1 = 10 Ом и резистор сопротивлением R_2 = 20 Ом подключены к источнику ЭДС (см. рис.). К участку AB подключен плоский конденсатор емкостью C = 0,1 мкФ. Заряд q на обкладках конденсатора равен 2 мкКл. Определить ЭДС источника, пренебрегая его внутренним сопротивлением.

Дано:
R_1 = 10 Ом
R_2 = 20 Ом
C = 10^{-7} Ф
q = $2\cdot10^{-6}$ Кл
ε – ?

Решение

Электродвижущая сила источника

$$\varepsilon = U_1 + U_2, \tag{1}$$

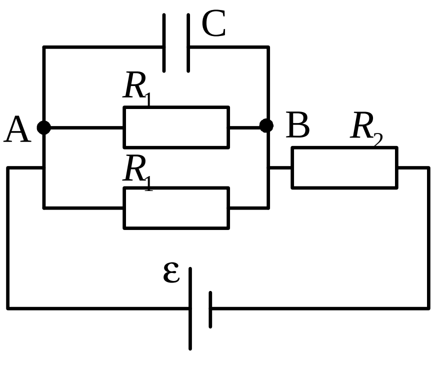
где U_1 – напряжение между обкладками конденсатора (равно напряжению на параллельно включенных резисторах сопротивлением R_1); U_2 – падение напряжения на резисторе сопротивлением R_2.

Учитывая, что резисторы сопротивлением R_1 включены параллельно и их сопротивления равны

$$U_1 = I\frac{R_1}{2} = \frac{q}{C}, \tag{2}$$

где I – сила тока в общей цепи, имеем:

$$I = \frac{2q}{CR_1}. \tag{3}$$



Падение напряжения

$$U_2 = IR_2 = \frac{2qR_2}{CR_1}. \tag{4}$$

Учли формулу (3).

Подставив выражения (2) и (4) в формулу (1), найдем искомую ЭДС источника:

$$\varepsilon = \frac{q}{C} + \frac{2qR_2}{CR_1} = \frac{q}{C}\left(1 + \frac{2R_2}{R_1}\right);$$

$$[\varepsilon] = \frac{\text{Кл}}{\text{Ф}} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{Кл}} = \text{В}; \quad \varepsilon = \frac{2\cdot10^{-6}}{10^{-7}}\left(1 + \frac{2\cdot20}{10}\right) = 100\,\text{В}.$$

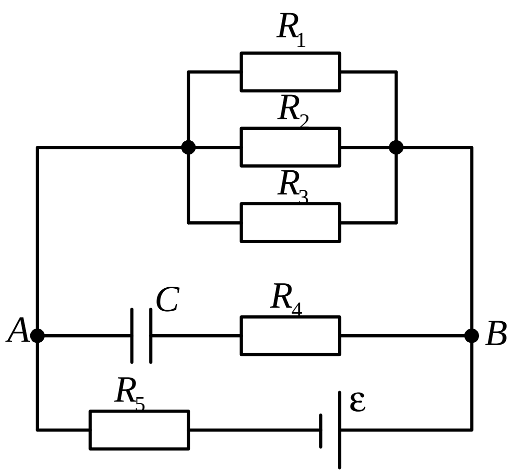
Ответ: $\varepsilon = 100\,\text{В}$.

ЗАДАЧА 3.35

Определить разность потенциалов на обкладках конденсатора в схеме, приведенной на рисунке. ЭДС источника $\varepsilon = 20\,\text{В}$, сопротивления всех резисторов равны. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

Дано:	**Решение**
$\varepsilon = 20\,\text{В}$ $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5$ U – ?	Сопротивление конденсатора постоянному току бесконечно велико, поэтому через резистор сопротивлением R_4 ток протекать не будет.

Следовательно, разность потенциалов между обкладками конденсатора определяется падением напряжения на участке AB, состоящем из трех параллельно включенных резисторов сопротивлениями R_1, R_2 и R_3;



$$U = IR, \tag{1}$$

где R – результирующее сопротивление трех сопротивлений – R_1, R_2 и R_3.

Ток в общей цепи, согласно закону Ома для замкнутой цепи,

$$I = \frac{\varepsilon}{R_5 + R}, \tag{2}$$

где $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} = \dfrac{3}{R_1}$, так как $R_1 = R_2 = R_3$.

Отсюда

$$R = \frac{R_1}{3}. \tag{3}$$

Подставив выражение (2) в формулу (1) и учитывая (3), найдем искомую разность потенциалов на обкладках конденсатора:

$$U = \frac{\varepsilon}{R_5 + R} R = \frac{\varepsilon}{R_5 + R_1/3} \frac{R_1}{3} = \frac{\varepsilon}{4};$$

$$U = \frac{20}{4} = 5\,\text{В}.$$

Ответ: $U = 5\,\text{В}$.

ЗАДАЧА 3.36

Конденсатор емкостью C = 0,2 мкФ подключен последовательно с резистором R = 10 МОм к источнику с электродвижущей силой ε = 10 В (см. рис.). Найти закон изменения со временем заряда на обкладках конденсатора. Определить работу, совершаемую источником при зарядке конденсатора, и количество теплоты, выделяющейся при этом в цепи. Определить время, в течение которого заряд увеличивается в e раз.

Дано:
$C = 2\cdot10^{-7}$ Ф
$R = 10^7$ Ом
ε = 10 В
$q = f(t)$, $A_{ист}$, Q, τ – ?

Решение

Процесс зарядки начинается при замыкании ключа $(t = 0)$ и длится до тех пор, пока напряжение на обкладках конденсатора не достигнет своего наибольшего значения $q = C\varepsilon$.

Во время зарядки сила тока в цепи

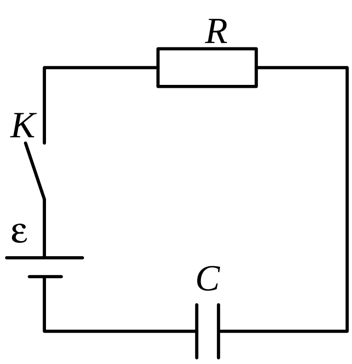
$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Из закона сохранения энергии следует, что работа источника тока $A_{ист}$ равна сумме количества теплоты Q и электрической энергии заряженного конденсатора W. Записав уравнение по закону сохранения энергии для произвольного промежутка времени dt, можно получить дифференциальное уравнение относительно искомой функции:

$$dA_{ист} = dQ + dW,$$

где dW – приращение энергии заряженного конденсатора за время dt;

$$dA_{ист} = I\varepsilon dt; \quad dQ = I^2 R dt;$$



$$dW = d\left(\frac{q^2}{2C}\right) = \frac{qdq}{C}.$$

Тогда уравнение закона сохранения энергии:

$$I\varepsilon dt = I^2 R dt + \frac{q}{C}dq;$$

$$\varepsilon\frac{dq}{dt}dt = \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 Rdt + \frac{q}{C}dq;$$

$$\varepsilon = \frac{dq}{dt}R + \frac{q}{C}; \quad \varepsilon C = \frac{RC}{dt}dq + q; \quad \frac{dt}{RC} = \frac{dq}{\varepsilon C - q}.$$

Разделим переменные:

$$\frac{dt}{RC} = \frac{dq}{\varepsilon C - q}.$$

При изменении времени от $t = 0$ до некоторого момента t заряд меняется от $q = 0$ до q. Проинтегрируем в указанных пределах:

$$\frac{t}{CR} = -\ln\frac{\varepsilon C - q}{\varepsilon C}$$

и получим: $q = C\varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{CR}}\right).$

Время, в течение которого заряд на конденсаторе увеличивается в e раз,

$$\tau = CR;$$

$$[\tau] = \text{Ф} \cdot \text{Ом} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{В}}{\text{В} \cdot \text{А}} = \frac{\text{А} \cdot \text{с}}{\text{А}} = \text{с};$$

$$\tau = 2 \cdot 10^{-7} \cdot 10^{7} = 2 \text{ с}.$$

Видно, что заряд приближается к своему наибольшему значению, равному $C\varepsilon$, асимптотически.

Работа, совершаемая источником за все время зарядки конденсатора,

$$A_{ист} = \int_0^\infty \varepsilon I dt.$$

Учитывая, что $Idt = dq$ – заряд, проходящий через источник за время dt, и что за время всего процесса заряд, прошедший через источник, равен $q = C\varepsilon$, получим:

$$A_{ист} = \varepsilon \int_0^q dq = \varepsilon^2 C;$$

$$[A_{ист}] = \text{В}^2 \cdot \text{Ф} = \frac{\text{В}^2 \cdot \text{Кл}}{\text{В}} = \text{Кл} \cdot \text{В} = \text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{В} = \text{Дж};$$

$$A_{ист} = 10^2 \cdot 2 \cdot 10^{-7} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Дж} = 20 \text{ мкДж}.$$

Количество теплоты, выделившееся за время зарядки на сопротивлении R, найдем из закона сохранения энергии:

$$Q = A_{ист} - W,$$

где $W = \dfrac{q^2}{2C} = \dfrac{C\varepsilon^2}{2}$ – энергия заряженного конденсатора;

$$W = \frac{C\varepsilon^2}{2};$$

$$[W] = \text{Ф} \cdot \text{В}^2 = \frac{\text{В}^2 \cdot \text{Кл}}{\text{В}} = \text{Кл} \cdot \text{В} = \text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{В} = \text{Дж};$$

$$W = \frac{2 \cdot 10^{-7} \cdot 10^2}{2} = 10^{-5}\ \text{Дж} = 10\ \text{мкДж}.$$

Тогда $Q = A_{ист} - W$; $Q = 20\ \text{мкДж} - 10\ \text{мкДж} = 10\ \text{мкДж}$.

Ответ: $\tau = 2$ с, $A_{ист} = 20$ мкДж, $Q = 10$ мкДж.

ЗАДАЧА 3.37

Какую наибольшую мощность $P_{\max}$ можно получить во внешней цепи от батареи аккумуляторов? Электродвижущая сила батареи $\varepsilon = 12\,\text{В}$. Ток короткого замыкания 6 А.

Дано:	**Решение**
$\varepsilon = 12\,\text{В}$	Мощность, выделяющаяся во внешней цепи,
$I_{кз} = 6$ А	равна $P = I^2R$, где, согласно закону Ома для пол-
$P_{\max}$ – ?	ной цепи,

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}.$$

Отсюда

$$P = \frac{\varepsilon^2 R}{(R + r)^2}.$$

По условию задачи необходимо найти наибольшую мощность $P_{\max}$. Выясним, при каком сопротивлении R внешней цепи это возможно. Найдем производную $\dfrac{dP}{dR}$ и приравняем ее нулю:

$$\frac{dP}{dR}=\frac{\varepsilon^2\left(R+r\right)^2-2\left(R+r\right)\varepsilon^2 R}{\left(R+r\right)^4}=0.$$

Если $R=r$, то $\frac{dP}{dR}=0$.

При $R=r$ можно получить во внешней цепи наибольшую мощность:

$$P_{\max}=\frac{\varepsilon^2 r}{\left(2r\right)^2}=\frac{\varepsilon^2}{4r}.$$

Зная ток короткого замыкания, выразим внутреннее сопротивление батареи:

$$r=\frac{\varepsilon}{I_{кз}}.$$

Тогда

$$P_{\max}=\frac{\varepsilon I_{кз}}{4};\quad \left[P_{\max}\right]=В\cdot А=\text{Вт};$$

$$P_{\max}=\frac{12\cdot 6}{4}=18\ \text{Вт}.$$

Ответ: $P_{\max}=18\ \text{Вт}$.

ЗАДАЧА 3.38

Определите ЭДС ε и внутреннее сопротивление r источника тока, если во внешней цепи при силе тока 4 А развивается мощность 10 Вт, а при силе тока 2 А – мощность 8 Вт.

Дано:	**Решение**
I_1 = 4 А P_1 = 10 Вт I_2 = 2 А P_2 = 8 Вт	Полная мощность источника тока $$P=I\varepsilon.$$ Полезная мощность меньше полной мощности на величину мощности, выделяемой на внутреннем участке цепи:
ε, r – ?	

$$P_1=I_1\varepsilon-I_1^2 r,\quad \text{откуда}\quad r=\frac{I_1\varepsilon-P_1}{I_1^2};\qquad (1)$$

$$P_2 = I_2\varepsilon - I_2^2 r; \quad r = \frac{I_2\varepsilon - P_2}{I_2^2}. \qquad (2)$$

Приравнивая (1) и (2), получим:

$$\frac{I_1\varepsilon - P_1}{I_1^2} = \frac{I_2\varepsilon - P_2}{I_2^2};$$

$$I_1 I_2^2\varepsilon - I_2^2 P_1 = I_2 I_1^2\varepsilon - I_1^2 P_2. \qquad (3)$$

Из (3) определим ЭДС ε:

$$\varepsilon = \frac{I_2^2 P_1 - I_1^2 P_2}{I_1 I_2^2 - I_2 I_1^2};$$

$$[\varepsilon] = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{Вт}}{\text{А} \cdot \text{А}^2} = \frac{\text{Вт}}{\text{А}} = \frac{\text{А} \cdot \text{В}}{\text{А}} = \text{В};$$

$$\varepsilon = \frac{2^2 \cdot 10 - 4^2 \cdot 8}{4 \cdot 2^2 - 2 \cdot 4^2} = 5{,}5\,\text{В}.$$

Подставив полученное значение ЭДС в равенство (1), найдем внутреннее сопротивление r:

$$r = \frac{I_1\varepsilon - P_1}{I_1^2};$$

$$[r] = \frac{\text{А} \cdot \text{В} - \text{Вт}}{\text{А}^2} = \frac{\text{А} \cdot \text{В}}{\text{А}^2} = \frac{\text{В}}{\text{А}} = \text{Ом}.$$

$$r = \frac{4 \cdot 5{,}5 - 10}{4^4} = 0{,}75\ \text{Ом}.$$

Ответ: $\varepsilon = 5{,}5\,\text{В}$; $r = 0{,}75\ \text{Ом}$.

ЗАДАЧА 3.39

Батарея состоит из двух последовательно соединенных элементов с одинаковыми ЭДС $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2\,\text{В}$ и внутренними сопротивлениями $r_1 = 1\,\text{Ом}$ и $r_2 = 1{,}5\ \text{Ом}$. Разность потенциалов на зажимах второго элемента $U_2 = 0$. При каком внешнем сопротивлении R это возможно?

Дано:

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2\,\text{В}$

$r_1 = 1\,\text{Ом}$

$r_2 = 1{,}5\ \text{Ом}$

$U_2 = 0$

R – ?

Решение

Разность потенциалов на зажимах второго элемента

$$U_2 = \varepsilon_2 - I r_2.$$

Исходя из условия $U_2 = 0$ найдем силу тока:

$$I = \frac{\varepsilon_2}{r_2};$$

$$I = \frac{2}{1,5} = 1,33\,\text{А}.$$

Согласно закону Ома для замкнутой цепи при последовательном соединении элементов сила тока в цепи

$$I = \frac{2\varepsilon}{R + r_1 + r_2}.$$

Отсюда находим внешнее сопротивление R:

$$R = \frac{2\varepsilon}{I} - r_1 - r_2;$$

$$[R] = \frac{В}{А} - \text{Ом} = \text{Ом};$$

$$R = \frac{2 \cdot 2}{1,33} - 1 - 1,5 = 0,5\ \text{Ом}.$$

Ответ: $R = 0,5$ Ом.

ЗАДАЧА 3.40

Батарея аккумуляторов с ЭДС $\varepsilon = 12$ В и внутренним сопротивлением r = 2,4 Ом замкнута на внешнее сопротивление R = 9 Ом. Найти падение напряжения U во внешней цепи и падение напряжения U_r внутри батареи. С каким кпд η работает батарея?

Дано:
$\varepsilon = 12$ В
r = 2,4 Ом
R = 9 Ом

U, U_r, η – ?

Решение

По закону Ома для полной цепи определим силу тока: $I = \frac{\varepsilon}{R + r}$. Тогда падение напряжения U во внешней цепи, согласно закону Ома для однородного участка цепи,

$$U = IR = \frac{\varepsilon R}{R + r};$$

$$U = \frac{12 \cdot 9}{9 + 2,4} = 9,5\ \text{В}.$$

Падение напряжения U_r внутри батареи

$$U_r = Ir = \frac{\varepsilon r}{R + r};$$

$$U_r = \frac{12 \cdot 2,4}{9 + 2,4} = 2,53\,\text{В}.$$

Коэффициент полезного действия источника тока равен отношению мощности P_1, выделяемой внешним участком цепи (полезная мощность), к полной мощности P, развиваемой источником:

$$\eta = \frac{P_1}{P},$$

где $P_1 = I^2 R$, $P = I\varepsilon$.

Тогда кпд источника

$$\eta = \frac{IR}{\varepsilon} = \frac{R}{R + r};$$

$$\eta = \frac{9}{9 + 2,4} = 0,79.$$

Ответ: $U = 9,5$ В; $U_r = 2,53$ В; $\eta = 0,79$.

ЗАДАЧА 3.41

Определить ток короткого замыкания для батареи, если при силе тока $I_1 = 3$ А во внешней цепи батареи аккумуляторов выделяется мощность P_1 = 18 Вт, при силе тока I_2 = 1 А P_2 = 10 Вт.

Дано:
$I_1 = 3$А
P_1 = 18 Вт
I_2 = 1 А
P_2 = 10 Вт
$I_{кз}$ – ?

Решение

Ток короткого замыкания

$$I_{кз} = \frac{\varepsilon}{r}.$$

Следовательно, задача сводится к нахождению ЭДС батареи ε и ее внутреннего сопротивления r.

Используем закон Ома для полной цепи для двух случаев:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + r}; \quad I_2 = \frac{\varepsilon}{R_2 + r}. \qquad (1)$$

Сопротивления внешней цепи R_1 и R_2 определим через значения мощности $\left(P = \frac{A}{t} = IU = I^2 R\right)$:

$$R_1 = \frac{P_1}{I_1^2}; \quad R_2 = \frac{P_2}{I_2^2}. \tag{2}$$

Подставим значения сопротивлений (2) в уравнения (1):

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{\frac{P_1}{I_1^2} + r}; \quad I_2 = \frac{\varepsilon}{\frac{P_2}{I_2^2} + r}. \tag{3}$$

Разделив I_1 на I_2 в уравнениях (3), получим:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{P_2}{I_2^2} + r}{\frac{P_1}{I_1^2} + r};$$

$$\frac{P_1}{I_1} + I_1 r = \frac{P_2}{I_2} + I_2 r. \tag{4}$$

Из уравнения (4) найдем значение внутреннего сопротивления:

$$r = \frac{\frac{P_1}{I_1} - \frac{P_2}{I_2}}{I_2 - I_1};$$

$$r = \frac{\frac{18}{3} - \frac{10}{1}}{1 - 3} = 2 \text{ Ом}.$$

Выразим ЭДС батареи аккумуляторов из уравнения (3):

$$\varepsilon = I_1 \left(\frac{P_1}{I_1^2} + r \right) = \frac{P_1}{I_1} + I_1 r;$$

$$[\varepsilon] = \frac{\text{Вт}}{\text{А}} + \text{А} \cdot \text{Ом} = \frac{\text{А} \cdot \text{В}}{\text{А}} + \text{В} = \text{В};$$

$$\varepsilon = \frac{18}{3} + 3 \cdot 2 = 12 \text{ В}.$$

Ток короткого замыкания

$$I_{кз} = \frac{\varepsilon}{r}; \quad I_{кз} = \frac{12}{2} = 6 \text{ А}.$$

Ответ: $I_{кз} = 6$ А.

ЗАДАЧА 3.42

Источник ЭДС вначале замыкают на резистор сопротивлением R_1, а затем – на резистор сопротивлением R_2, при этом в обоих случаях выделяется одинаковое количество теплоты. Определить внутреннее сопротивление r источника ЭДС.

Дано:	**Решение**
R_1 R_2 $Q_1 = Q_2$	Согласно закону Джоуля – Ленца за время t в резисторе сопротивлением R_1 выделяется теплота
r – ?	

$$Q_1 = I_1^2 R_1 t = \frac{\varepsilon^2 R_1 t}{\left(R_1 + r\right)^2}. \qquad (1)$$

Здесь учли, что согласно закону Ома для замкнутой цепи $I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + r}$, где ε – ЭДС источника.

Аналогично

$$Q_2 = I_2^2 R_2 t = \frac{\varepsilon^2 R_2 t}{\left(R_2 + r\right)^2}. \qquad (2)$$

Согласно условию задачи $Q_1 = Q_2$, т.е., приравняв (1) и (2), получаем:

$$\frac{\varepsilon^2 R_1 t}{\left(R_1 + r\right)^2} = \frac{\varepsilon^2 R_2 t}{\left(R_2 + r\right)^2} \quad \text{или} \quad \frac{R_1}{\left(R_1 + r\right)^2} = \frac{R_2}{\left(R_2 + r\right)^2}.$$

Откуда искомое внутреннее сопротивление

$$r = \sqrt{R_1 R_2}.$$

Ответ: $r = \sqrt{R_1 R_2}$.

ЗАДАЧА 3.43

Определить количество теплоты Q, выделившееся в проводнике сопротивлением R = 50 Ом при пропускании по нему электрического тока. Сила тока в проводнике равномерно нарастает с I_0 = 0 до I = 10 А в течение времени τ = 30 с.

Дано:	**Решение**
R = 50 Ом I_0 = 0 I = 10 А τ = 30 с	Нарастание силы тока в проводнике происходит по закону $I = b + Kt$. Найдем коэффициенты b и K, используя начальные условия. При $t = 0$ $\quad I = I_0$, $b = I_0 = 0$. При $t = \tau$ $\quad I = I_{\max}$, $K = \dfrac{I_{\max}}{\tau}$; $K = 0{,}33\ \dfrac{\text{А}}{\text{с}}$.
Q – ?	

Таким образом,

$$I = Kt.$$

По закону Джоуля – Ленца количество теплоты

$$Q = \int_0^\tau I^2 R dt = \int_0^\tau K^2 t^2 R dt;$$

$$Q = K^2 R \frac{\tau^3}{3};$$

$$[Q] = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{Ом} \cdot \text{с}^3}{c^2} = \text{А}^2 \cdot \text{Ом} \cdot \text{с} = \text{А} \cdot \text{В} \cdot \text{с} = \text{Дж};$$

$$Q = 0{,}33^2 \cdot 50 \cdot \frac{10^3}{3} = 5 \cdot 10^4 \text{ Дж} = 50 \text{ кДж}.$$

Ответ: $Q = 50$ кДж.

ЗАДАЧА 3.44

По проводнику сопротивлением R = 3 Ом течет равномерно возрастающий ток. Количество теплоты, выделившееся в проводнике за время τ = 8 с, равно Q = 200 Дж. Определить количество электричества q, протекшее за это время по проводнику. В начальный момент сила тока в проводнике была равна нулю.

Дано:	**Решение**
R = 3 Ом τ = 8 с Q = 200 Дж	По условию задачи сила тока нарастает по линейному закону, т.е. $I = Kt$. Количество теплоты, выделяющееся за элементарно малое время dt, выражается формулой $dQ = I^2 R dt$.
q – ?	

Тогда количество теплоты Q, выделяющееся за все время τ,

$$Q = \int_0^\tau I^2(t) R dt = \int_0^\tau (Kt)^2 R dt = K^2 R \int_0^\tau t^2 dt = \frac{K^2 R}{3} t^3 \Big|_0^\tau = \frac{K^2 R \tau^3}{3}.$$

Отсюда можно определить скорость нарастания тока с течением времени:

$$K = \left(\frac{3Q}{R\tau^3} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Элементарный заряд, протекающий по проводнику за промежуток времени dt, равен $dq = Idt$. Тогда полный заряд q, протекший по проводнику за все время τ,

$$q = \int_0^\tau I(t) dt = \int_0^\tau Kt dt = \frac{K\tau^2}{2} \Big|_0^\tau = \frac{K\tau^2}{2} = \sqrt{\frac{3Q}{R\tau^3}} \frac{\tau^2}{2} = \sqrt{\frac{3Q\tau}{4R}};$$

$$[q] = \sqrt{\frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{Ом}}} = \sqrt{\frac{\text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{А}}{\text{В}}} = \sqrt{\text{А}^2 \cdot \text{с}^2} = \text{А} \cdot \text{с} = \text{Кл};$$

$$q = \sqrt{\frac{3 \cdot 200 \cdot 8}{4 \cdot 3}} = 20 \text{ Кл}.$$

Ответ: $q = 20$ Кл.

ЗАДАЧА 3.45

В проводнике в течение времени τ = 10 с равномерно убывает сила тока от I_0 = 5 А до $I = 0$. При этом в нем выделяется количество теплоты Q = 1 кДж. Каково сопротивление R проводника?

Дано:

τ = 10 с

I_0 = 5 А

$I = 0$

Q = 10^3 Дж

R – ?

Решение

Сила тока в проводнике убывает равномерно по линейному закону $I = b - Kt$.

Коэффициенты b и K найдем из начальных условий.

При $t = 0$ $I = I_0$, $b = I_0$, а при $t = \tau$ $I = 0$ и

$$K = \frac{I_0}{\tau};$$

$$K = \frac{5}{10} = 0,5\ \frac{\text{А}}{\text{с}}.$$

Окончательно закон убывания тока примет вид

$$I = I_0 - Kt.$$

Согласно закону Джоуля – Ленца количество теплоты, выделившееся в проводнике за бесконечно малый промежуток времени,

$$dQ = I^2 R dt = \left(I_0 - Kt\right)^2 R dt.$$

Проинтегрируем полученное выражение:

$$Q = \int_0^{\tau} \left(I_0 - Kt\right)^2 R dt; \qquad Q = R\left[I_0^2\tau - 2K\frac{\tau^2}{2}I_0 + K^2\frac{\tau^3}{3}\right].$$

Отсюда найдем сопротивление проводника:

$$R = \frac{Q}{I_0^2\tau - I_0 K\tau^2 + \dfrac{K^2\tau^3}{3}};$$

$$\left[R\right] = \frac{\text{Дж}}{\text{А}^2 \cdot \text{с}} = \frac{\text{А} \cdot \text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}^2 \cdot \text{с}} = \frac{\text{В}}{\text{А}} = \text{Ом};$$

$$R = \frac{10^3}{5^2 \cdot 10 - 5 \cdot 0,5 \cdot 10^2 + \dfrac{0,5^2 \cdot 10^3}{3}} = 12\ \text{Ом}.$$

Ответ: $R = 12$ Ом.

ЗАДАЧА 3.46

Определить заряд, прошедший по проводу с сопротивлением R = 3 Ом при равномерном нарастании напряжения на концах провода от U_1 = 2 В до U_2 = 4 В в течение времени t = 20 с.

Дано:	**Решение**
R = 3 Ом U_1 = 2 В U_2 = 4 В t = 20 с	Так как сила тока в проводнике изменяется, то воспользуемся для подсчета заряда формулой $dq = Idt$
q – ?	и проинтегрируем:

$$q = \int_1^2 I dt.$$

Выразив силу тока по закону Ома, получим:

$$q = \int_1^2 \frac{U}{R} dt.$$

Напряжение U растет по линейному закону:

$$U = U_1 + Kt.$$

Подставляя это выражение в формулу заряда, найдем:

$$q = \int_1^2 \left(\frac{U_1}{R} + \frac{Kt}{R} \right) dt = \frac{U_1}{R} \int_1^2 dt + \frac{K}{R} \int_1^2 t dt,$$

где $t_1 = 0$; $t_2 = 20$ с.

Найдем коэффициент пропорциональности K:

$$K = \frac{U_2 - U_1}{t}; \qquad K = \frac{4-2}{20} = 0{,}1\ \frac{\text{В}}{\text{с}}.$$

После интегрирования получим:

$$q = \frac{U_1}{R} t_2 + \frac{K t_2^2}{2R};$$

$$[q] = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{Ом}} + \frac{\text{В} \cdot \text{с}^2}{\text{с} \cdot \text{Ом}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{Ом}} = \frac{\text{А} \cdot \text{Ом} \cdot \text{с}}{\text{Ом}} = \text{А} \cdot \text{с} = \text{Кл};$$

$$q = \frac{2 \cdot 20}{3} + \frac{0{,}1 \cdot 20^2}{2 \cdot 3} = 20\ \text{Кл}.$$

Ответ: $q = 20$ Кл.

ЗАДАЧА 3.47

Сила тока в проводнике сопротивлением R = 20 Ом нарастает по линейному закону от $I_0 = 0$ до I_{max} = 6 А за t = 2 с. Определить количество теплоты Q_1, выделившейся за первую секунду, и Q_2 – за вторую секунду.

Дано:

R = 20 Ом

$I_0 = 0$

I_{max} = 6 А

t = 2 с

Q_1, Q_2 – ?

Решение

По закону Джоуля – Ленца количество выделившейся теплоты при прохождении тока по проводнику

$$Q = I^2 R t,$$

где I – постоянный ток, протекающий по проводнику за время t.

Если же сила тока в проводнике изменяется, то указанный закон справедлив для бесконечно малого промежутка времени и запишется в виде

$$dQ = I^2 R dt .$$

Здесь сила тока I является некоторой функцией времени. Так как ток меняется по линейному закону,

$$I = I_0 + Kt ; \qquad \Delta I = Kt ,$$

где K – коэффициент пропорциональности, численно равный приращению силы тока в единицу времени:

$$K = \frac{\Delta I}{t} .$$

С учетом изменения тока

$$dQ = K^2 R t^2 dt .$$

Для определения теплоты, выделившейся за конечный промежуток времени Δt, следует проинтегрировать последнее выражение в пределах от $t_1 = 0$ до t_2:

$$Q = K^2 R \int_{t_1}^{t_2} t^2 dt = \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta I}{\Delta t}\right)^2 R\left(t_2^3 - t_1^3\right);$$

$$[Q] = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{Ом} \cdot \text{с}^3}{\text{с}^2} = \text{А}^2 \cdot \text{Ом} \cdot \text{с} = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}} = \text{А} \cdot \text{В} \cdot \text{с} = \text{Дж} .$$

Количество теплоты, выделившееся за первую секунду,

$$Q_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{6}{2}\right)^2 \cdot 20(1-0) = 60 \text{ Дж} .$$

Количество теплоты, выделившееся за вторую секунду,

$$Q_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{6}{2}\right)^2 \cdot 20\left(2^3 - 1^3\right) = 420 \text{ Дж} .$$

За вторую секунду теплоты выделяется в 7 раз больше.

Ответ: $Q_1 = 60$ Дж, $Q_2 = 420$ Дж.

ЗАДАЧА 3.48

По медному проводнику сечением 0,8 мм^2 течет ток 80 мА. Найти среднюю скорость упорядоченного движения электронов вдоль проводника, предполагая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон. Плотность меди ρ = 8,9·10^3 кг/м^3.

Дано:

S = 0,8·10^{-6} м^2

I = 8·10^{-2} А

μ = 63,5·10^{-3} кг/моль

ρ = 8,9·10^3 кг/м^3

e = 1,6·10^{-19} Кл

N_A = 6,02·10^{23} 1/моль

$\langle \upsilon \rangle$ – ?

Решение

Плотность тока, текущего по проводнику,

$$j = en\langle \upsilon \rangle,$$

где n – концентрация носителей заряда.

По условию задачи концентрация носителей заряда равна концентрации атомов, которую можно найти, зная число Авогадро.

Число молей меди определим, зная молярную массу меди: m/μ.

Умножив число молей на число Авогадро, получим число атомов, а разделив на объем V – концентрацию:

$$n = \frac{\frac{m}{\mu} N_A}{V},$$

где m – масса проводника, равная $m = \rho V$.

Тогда

$$n = \frac{\rho N_A}{\mu}.$$

Выразим среднюю скорость электронов:

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{j}{ne}; \quad \langle \upsilon \rangle = \frac{I\mu}{S\rho N_A e};$$

$$\left[\langle \upsilon \rangle\right] = \frac{\text{А} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{Кл}} = \frac{\text{А} \cdot \text{м}}{\text{Кл}} = \frac{\text{А} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{с}} = \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{0{,}08 \cdot 63{,}5 \cdot 10^{-3}}{0{,}8 \cdot 10^{-6} \cdot 8{,}9 \cdot 10^3 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 7{,}4 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

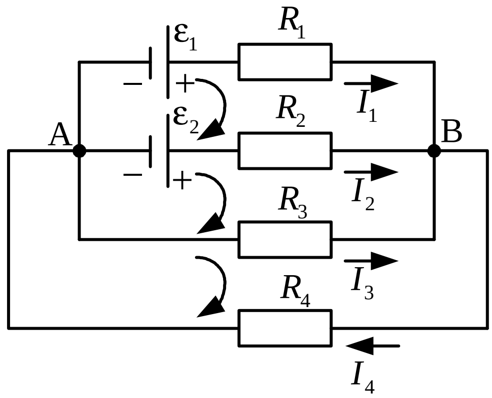
Ответ: $\langle \upsilon \rangle = 7{,}4 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

ЗАДАЧА 3.49

Источники с электродвижущими силами ε_1 и ε_2 включены в цепь, как показано на рисунке. Определить силу токов, текущих в сопротивлениях R_2 и R_3, если ε_1 = 10 В и ε_2 = 4 В, $R_1 = R_4$ = 2 Ом и $R_2 = R_3$ = 4 Ом. Сопротивлением источников пренебречь.

Дано:	**Решение**
ε_1 = 10 В ε_2 = 4 В $R_1 = R_4$ = 2 Ом $R_2 = R_3$ = 4 Ом I_2, I_3 – ?	Силу токов в разветвленной цепи определим, используя законы Кирхгофа. Для этого выберем направления токов, как показано на рисунке (направление тока выбирается произвольно). По первому закону Кирхгофа составляется $(n-1)$ уравнение, где n – число узлов в цепи.

Рассматриваемая схема имеет два узла – A и B. При составлении уравнения необходимо соблюдать правило знаков: ток, подходящий к узлу, входит в уравнение со знаком «плюс»; ток, отходящий от узла – со знаком «минус».



Запишем уравнение для узла B:

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0. \qquad (1)$$

В уравнении (1) четыре неизвестных. Недостающие три уравнения составим по второму закону Кирхгофа. Выбираем замкнутый контур таким образом, чтобы в каждый новый контур входила хотя бы одна ветвь, не учитывавшаяся ни в одном из ранее использованных контуров. Например, контуры AR_1BR_2A, AR_1BR_3A и AR_3BR_4A.

При составлении уравнений для контуров по второму правилу Кирхгофа необходимо соблюдать следующее правило знаков:

а) если направление тока совпадает с выбранным направлением обхода контура, то соответствующее произведение IR входит в уравнение со знаком «плюс», в противном случае следует ставить знак «минус»;

б) если ЭДС повышает потенциал в направлении обхода контура, т.е. если при обходе контура приходится идти от минуса к плюсу внутри источника, то соответствующая ЭДС входит в уравнение со знаком «плюс», в противоположном случае – со знаком «минус».

Условимся обходить выбранные контуры по часовой стрелке. Получим следующие уравнения:

$$I_1R_1 - I_2R_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2; \tag{2}$$

$$I_1R_1 - I_3R_3 = \varepsilon_1; \tag{3}$$

$$I_3R_3 + I_4R_4 = 0. \tag{4}$$

Подставив в равенства (2) – (4) значения сопротивлений и ЭДС, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} &I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0; \\ &2I_1 - 4I_2 = 6; \\ &2I_1 - 4I_3 = 10\ ; \\ &4I_3 + 2I_4 = 0. \end{aligned}$$

Поскольку нужно найти только два тока, то удобно воспользоваться методом определителей (детерминантов). С этой целью перепишем систему уравнений в виде:

$$\begin{aligned} &I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0; \\ &2I_1 - 4I_2 + 0 + 0 = 6; \\ &2I_1 + 0 - 4I_3 + 0 = 10; \\ &0 + 0 + 4I_3 + 2I_4 = 0. \end{aligned}$$

Искомые значения токов найдем из выражений

$$I_2 = \frac{\Delta I_2}{\Delta}; \quad I_3 = \frac{\Delta I_3}{\Delta},$$

где Δ – определитель системы уравнений; ΔI_2, ΔI_3 – определители, полученные заменой соответствующих столбцов определителя Δ столбцами, составленными из свободных членов четырех вышеприведенных уравнений.

Находим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 96; \quad \Delta I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -96.$$

Отсюда получим:

$$I_2 = 0; \quad I_3 = -1 \text{ А}.$$

Знак «минус» у значения силы тока I_3 свидетельствует о том, что истинное направление тока в резисторе R_3 противоположно выбранному.

Примечание. Задачу можно решить методом подстановки.

Ответ: $I_2 = 0$; $I_3 = -1$ А.

ЗАДАЧА 3.50

Два источника (ε_1 = 8 В, r_1 = 2 Ом, ε_2 = 6 В, r_2 = 1,5 Ом) и резистор сопротивлением R = 10 Ом соединены, как показано на рисунке. Вычислить силу тока I_1, текущую через источник с ЭДС ε_1.

Дано:

ε_1 = 8 В

ε_2 = 6 В

r_1 = 2 Ом

r_2 = 1,5 Ом

R = 10 Ом

I_1 – ?

Решение

Выберем направления токов на отдельных участках цепи (см. рис.) и запишем для узла A уравнение по первому правилу Кирхгофа:

$$I_1 - I_2 - I = 0. \qquad (1)$$

Рассмотрим внешний (1) и внутренний (2) контуры, которые будем обходить по часовой стрелке.

По второму правилу Кирхгофа запишем для них уравнения:

$$I_1 r_1 + IR = \varepsilon_1; \qquad (2)$$

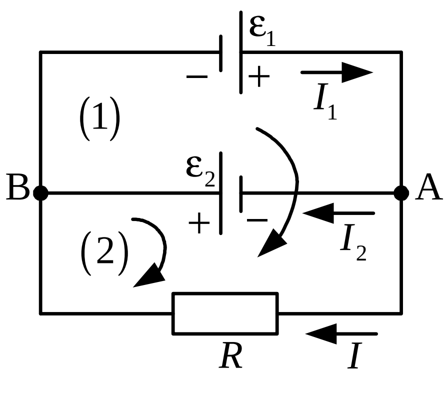
$$-I_2 r_2 + IR = -\varepsilon_2. \qquad (3)$$

Решая систему уравнений (1) – (3), получим выражение для силы тока, текущего через источник с ЭДС ε_1:

$$I_1 = \frac{\varepsilon_1 (R + r_2) + \varepsilon_2 R}{R r_1 + R r_2 + r_1 r_2};$$

$$[I] = \frac{\text{В} \cdot \text{Ом}}{\text{Ом}^2} = \frac{\text{В}}{\text{Ом}} = \text{А};$$

$$I_1 = \frac{8(10 + 1{,}5) + 6 \cdot 10}{10 \cdot 2 + 10 \cdot 1{,}5 + 2 \cdot 1{,}5} = 4 \text{ А}.$$



Ответ: $I_1 = 4$ А.

ЗАДАЧА 3.51

Элементы цепи имеют параметры ε_1 = 1,5 В; ε_2 = 1,6 В; R_1 = 1 кОм; R_2 = 2 кОм (см. рис.). Определить показания вольтметра, если его сопротивление R_V = 2 кОм. Сопротивлением источников тока и соединительных проводов пренебречь.

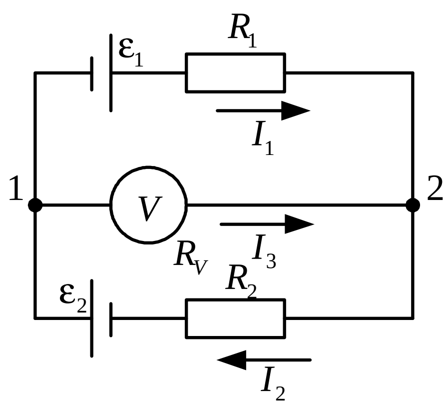
Дано:	**Решение**
ε_1 = 1,5 В ε_2 = 1,6 В R_1 = 10^3 Ом R_2 = $2\cdot10^3$ Ом R_V = $2\cdot10^3$ Ом ——— U_{12} – ?	Надо найти разность потенциалов между точками 1 и 2, которую измеряет вольтметр, подключенный к этим точкам. Сопротивление вольтметра R_V одного порядка с R_1 и R_2, поэтому пренебречь током I_3 в цепи вольтметра нельзя. Таким образом, здесь имеется разветвленная цепь, по трем участкам которой текут разные токи – I_1, I_2, I_3.

По закону Ома искомая разность потенциалов

$$\varphi_1 - \varphi_2 = IR_V .$$

Чтобы определить силу тока I_3 в цепи вольтметра, применим правила Кирхгофа. Обозначим направления всех токов и, согласно первому правилу Кирхгофа, запишем для узла 1:

$$I_2 - I_1 - I_3 = 0 .$$



Для составления еще двух уравнений воспользуемся вторым правилом Кирхгофа. Предварительно выбрав направление обхода замкнутых контуров – по часовой стрелке и учитывая правило знаков, получим соответственно для контуров 1-R_1-2-1 и 1-R_2-2-1:

$$I_1R_1 - I_3R_V = \varepsilon_1;$$

$$I_3R_V + I_2R_2 = \varepsilon_2 .$$

Решая систему из трех уравнений, найдем ток I_3:

$$\frac{(\varepsilon_2 - I_3R_V)}{R_2} - \frac{(\varepsilon_1 - I_3R_V)}{R_1} - I_3 = 0 ;$$

$$\varepsilon_2R_1 - I_3R_1R_V - \varepsilon_1R_2 - I_3R_2R_V - I_3R_1R_2 = 0 ;$$

$$I_3 = \frac{\varepsilon_2R_1 - \varepsilon_1R_2}{R_V(R_1 + R_2) + R_1R_2} ;$$

$$[I_3]=\frac{В\cdot Ом-В\cdot Ом}{Ом(Ом+Ом)+Ом\cdot Ом}=\frac{В\cdot Ом}{Ом^2}=\frac{В}{Ом}=\frac{А\cdot Ом}{Ом}=А;$$

$$I_3=\frac{1{,}6\cdot 10^3-1{,}5\cdot 2\cdot 10^3}{2\cdot 10^3\left(10^3+2\cdot 10^3\right)+10^3\cdot 2\cdot 10^3}=-0{,}175\cdot 10^{-3}\ А.$$

Следовательно, ток через вольтметр течет от 2 к 1;

$$U_{12}=I_3R_V=-0{,}175\cdot 10^{-3}\cdot 2\cdot 10^3=-0{,}35\ В.$$

Знак «минус» говорит о том, что потенциал точки 2 больше, чем точки 1.

Ответ: $U_{12}=-0{,}35\ В$.

ЗАДАЧА 3.52

Если соединить два элемента одноименными полюсами, то сила тока в цепи I = 0,5 А. Для первого элемента ЭДС ε_1 = 1,2 В и внутреннее сопротивление r_1 = 0,1 Ом. Для второго элемента ЭДС ε_2 = 0,9 В и внутреннее сопротивление r_2 = 0,3 Ом. Определить сопротивление R соединительных проводов.

Дано:
I = 0,5 А
ε_1 = 1,2 В
r_1 = 0,1 Ом
ε_2 = 0,9 В
r_2 = 0,3 Ом

R – ?

Решение

Рассмотрим схему (см. рис.) соединения двух элементов, предложенную в условии.

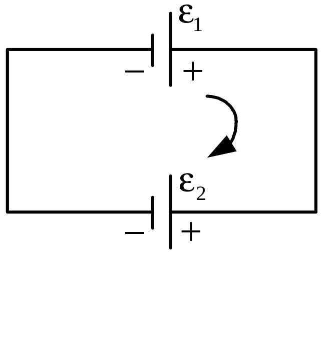
Ток в цепи идет по часовой стрелке, так как $\varepsilon_1>\varepsilon_2$. Выберем направление обхода контура тоже по часовой стрелке и запишем второе правило Кирхгофа: $Ir_1+Ir_2+IR=\varepsilon_1-\varepsilon_2$,

откуда

$$R=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2-I(r_1+r_2)}{I};$$

$$[R]=\frac{В-В-А\cdot Ом}{А}=\frac{А\cdot Ом-А\cdot Ом-А\cdot Ом}{А}=\frac{А\cdot Ом}{А}=Ом;$$

$$R=\frac{1{,}2-0{,}9-0{,}5(0{,}1+0{,}3)}{0{,}5}=0{,}2\ Ом.$$



Если изменить полярность второго источника, то знак перед ε_2 изменится на противоположный.

Ответ: $R=0{,}2\ Ом$.

ЗАДАЧА 3.53

Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных источника, реостата и амперметра. При температуре t_0 = 0 °С сопротивление реостата R_0 = 120 Ом, сопротивление амперметра R_A = 20 Ом. Амперметр показывает ток I_0 = 22 мА. Если же реостат нагреется на Δt = 50 °С, то амперметр покажет силу тока I = 17,5 мА. Каков температурный коэффициент сопротивления проволоки, из которой сделан реостат?

Дано:

t_0 = 0 °С

R_0 = 120 Ом

R_A = 20 Ом

$I_0 = 22\cdot10^{-3}$ А

Δt = 50 °С

$I = 17{,}5\cdot10^{-3}$ А

α – ?

Решение

Запишем закон Ома для первоначального состояния цепи:

$$I_0 = \frac{U}{R_0 + R_A}.$$

После того, как реостат нагрелся, его сопротивление R_0 изменилось и стало равным R.

Амперметр показал новую силу тока:

$$I = \frac{U}{R + R_A}.$$

Сопротивление реостата можно найти по формуле $R = \rho\dfrac{l}{S}$, где ρ – удельное сопротивление, которое зависит от температуры:

$$\rho = \rho_0\left(1 + \alpha\Delta t\right).$$

Тогда $R = R_0\left(1 + \alpha\Delta t\right)$, где $R_0 = \rho_0\dfrac{l}{S}$.

Найдем отношение токов: $\dfrac{I_0}{I} = \dfrac{R_0\left(1 + \alpha\Delta t\right) + R_A}{R_0 + R_A}$,

откуда определим искомую величину:

$$\alpha = \frac{\left(\dfrac{I_0}{I} - 1\right)\left(R_0 + R_A\right)}{R_0\Delta t}; \quad [\alpha] = \frac{\text{Ом}}{\text{Ом}\cdot\text{К}} = \text{К}^{-1};$$

$$\alpha = \frac{\left(\dfrac{22\cdot10^{-3}}{17{,}5\cdot10^{-3}} - 1\right)\left(120 + 20\right)}{120\cdot50} = 0{,}006\ \text{К}^{-1}.$$

Ответ: $\alpha = 0{,}006\ \text{К}^{-1}$.

ЗАДАЧА 3.54

Вольфрамовая нить электрической лампочки при температуре t_1 = 20 °С имеет сопротивление R_1 = 35,8 Ом. Какова температура t_2 нити лампочки, если при включении в сеть напряжением U = 120 В по нити идет ток I = 0,33 А? Температурный коэффициент сопротивления вольфрама α = 4,6·10^{-3} К$^{-1}$.

Дано:	Решение
U = 120 В I = 0,33 А t_1 = 20 °С α = 4,6·10^{-3} К$^{-1}$ R_1 = 35,8 Ом	Зависимость сопротивления нити от температуры выражается соотношением $R_1 = R_0\left(1+\alpha\Delta t\right)$, где R_0 – сопротивление нити при температуре $t_0 = 0\,^\circ\text{C}$; $\Delta t = t_1 - t_0 = t_1$.
t_2 – ?	Тогда $R_1 = R_0\left(1+\alpha t_1\right)$.

Аналогично запишем: $R_2 = R_0\left(1+\alpha t_2\right)$.

Разделим одно уравнение на другое:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_0\left(1+\alpha t_1\right)}{R_0\left(1+\alpha t_2\right)}$$

и выразим сопротивление R_2 из закона Ома $\left(I = \dfrac{U}{R}\right)$:

$$\frac{R_1}{\dfrac{U}{I}} = \frac{1+\alpha t_1}{1+\alpha t_2}.$$

Отсюда найдем t_2:

$$t_2 = \frac{\left(1+\alpha t_1\right)U}{I\alpha R_1} - \frac{1}{\alpha}; \quad \left[t_2\right] = \frac{\text{В}\cdot{}^\circ\text{C}}{\text{А}\cdot\text{Ом}} - {}^\circ\text{C} = {}^\circ\text{C};$$

$$t_2 = \frac{\left(1+4,6\cdot 10^{-3}\right)\cdot 120}{0,33\cdot 4,6\cdot 10^{-3}\cdot 35,8} - \frac{1}{4,6\cdot 10^{-3}} = 2200\ {}^\circ\text{C}.$$

Ответ: $t_2 = 2200\ {}^\circ\text{C}$.

ЗАДАЧА 3.55

Через лампу накаливания течет ток $I = 1$ А. Температура t вольфрамовой нити диаметром $d_1 = 0{,}2$ мм равна 2000 °С. Ток подводится медным проводом сечением $S_2 = 5$ мм^2. Определить напряженность электростатического поля: 1) в вольфраме; 2) в меди. Удельное сопротивление вольфрама при 0 °С $\rho_0 = 55$ нОм·м, его температурный коэффициент сопротивления $\alpha_1 = 0{,}0045$ град$^{-1}$, удельное сопротивление меди $\rho_2 = 17$ нОм·м.

Дано:
$I = 1$ А
$d_1 = 2 \cdot 10^{-4}$ м
$t = 2000$ °С
$S_2 = 5 \cdot 10^{-6}$ м^2
$\rho_0 = 55 \cdot 10^{-8}$ Ом·м
$\alpha_1 = 0{,}0045$ град$^{-1}$
$\rho_2 = 17 \cdot 10^{-8}$ Ом·м

$E_1,\ E_2$ – ?

Решение

Согласно закону Ома в дифференциальной форме плотность тока

$$j = \sigma E = \frac{E}{\rho}, \tag{1}$$

где $\sigma = \dfrac{1}{\rho}$ – удельная электрическая проводимость проводника; E – напряженность электростатического поля.

Удельное сопротивление вольфрама изменяется с температурой по линейному закону:

$$\rho_1 = \rho_0 \left(1 + \alpha t\right). \tag{2}$$

Плотность тока в вольфраме

$$j_1 = \frac{I}{S_1} = \frac{I}{\dfrac{\pi d_1^2}{4}}. \tag{3}$$

Подставив выражения (2) и (3) в формулу (1), найдем искомую напряженность электростатического поля в вольфраме:

$$E_1 = j_1 \rho_1 = \frac{4I}{\pi d_1^2} \rho_0 \left(1 + \alpha t\right);$$

$$\left[E_1\right] = \frac{\text{А} \cdot \text{Ом} \cdot \text{м}}{\text{м}^2} = \frac{\text{А} \cdot \text{В}}{\text{м} \cdot \text{А}} = \frac{\text{В}}{\text{м}};$$

$$E_1 = \frac{4 \cdot 1 \cdot 5{,}5 \cdot 10^{-8} \left(1 + 0{,}0045 \cdot 2000\right)}{3{,}14 \cdot \left(2 \cdot 10^{-4}\right)^2} = 17{,}5\ \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Напряженность электростатического поля в меди

$$E_2 = j_2\rho_2 = \frac{I\rho_2}{S_2}.$$

Здесь учли, что $j_2 = \frac{I}{S_2}$;

$$[E_2] = \frac{\text{А} \cdot \text{Ом} \cdot \text{м}}{\text{м}^2} = \frac{\text{А} \cdot \text{В}}{\text{м} \cdot \text{А}} = \frac{\text{В}}{\text{м}};$$

$$E_2 = \frac{1 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-8}}{5 \cdot 10^{-6}} = 3{,}4 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Ответ: $E_1 = 17{,}5\ \frac{\text{В}}{\text{м}}$; $E_2 = 3{,}4 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{В}}{\text{м}}$.

ЗАДАЧА 3.56

По медному проводу длиной l = 1000 м и диаметром d = 4 мм течет ток I. При каком значении тока падение напряжения U на проводе будет равно 10,8 В?

Дано:

l = 1000 м

d = 0,004 м

U = 10,8 В

ρ = 0,017·10^{-6} Ом·м

I – ?

Решение

Ток, текущий по участку однородного проводника, подчиняется закону Ома

$$I = \frac{U}{R},$$

где $R = \rho\frac{l}{S}$ – сопротивление провода.

Так как $S = \frac{\pi d^2}{4}$, то $R = \rho\frac{4l}{\pi d^2}$.

Тогда сила тока

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U\pi d^2}{\rho 4l};$$

$$[I] = \frac{\text{В} \cdot \text{м}^2}{\text{Ом} \cdot \text{м} \cdot \text{м}} = \frac{\text{В}}{\text{Ом}} = \frac{\text{В} \cdot \text{А}}{\text{В}} = \text{А};$$

$$I = \frac{10{,}8 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}004^2}{0{,}017 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 1000} = 8\ \text{А}.$$

Ответ: $I = 8$ А.

ЗАДАЧА 3.57

На катушку намотана медная проволока диаметром d = 1 мм. Какое сопротивление имеет проволока, если масса ее m = 3,41 кг?

Дано:	Решение
$d = 10^{-3}$ м m = 3,41 кг	Сопротивление проводника
R – ?	$$R = \rho \frac{l}{S},$$

где $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м – удельное сопротивление медного провода; l - длина проволоки, намотанной на катушку; $S = \frac{\pi d^2}{4}$ – сечение проволоки.

Длину l проволоки найдем, зная ее массу:

$$m = DlS,$$

где $D = 8{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3 – плотность меди.

Тогда

$$l = \frac{m}{DS},$$

а сопротивление

$$R = \rho \frac{m}{DS^2} = \rho \frac{16m}{D\pi^2 d^4};$$

$$[R] = \frac{\text{Ом} \cdot \text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{м}^4} = \text{Ом};$$

$$R = 1{,}7 \cdot 10^{-8} \frac{16 \cdot 3{,}41}{8{,}6 \cdot 10^3 (3{,}14)^2 \left(10^{-3}\right)^4} = 10{,}8 \text{ Ом}.$$

Ответ: $R = 10{,}8$ Ом.

ЗАДАЧА 3.58

Чтобы изготовить печь сопротивлением R = 40 Ом, при комнатной температуре t = 20 °С на фарфоровый цилиндр диаметром d = 5 см наматывают никелиновую проволоку радиусом r = 0,5 мм. Сколько витков проволоки потребуется для изготовления такой печи? Удельное сопротивление никелина $\rho = 4 \cdot 10^{-7}$ Ом·м при температуре t = 20 °С.

Дано:	Решение
R = 40 Ом d = 0,05 м r = $5\cdot10^{-4}$ м ρ = $4\cdot10^{-7}$ Ом·м t = 20 °C	Сопротивление проводника можно рассчитать по формуле $$R=\rho\frac{l}{S}, \quad (1)$$ где ρ – удельное сопротивление; l – длина проводника; S – площадь его поперечного сечения.
N – ?	

Длина одного витка равна $2\pi\frac{d}{2}$, тогда длина всей намотанной проволоки $l=\pi dN$, где N – число витков.

Площадь поперечного сечения провода $S=\pi r^2$. Подставив l и S в формулу (1), получим:

$$R=\rho\frac{\pi dN}{\pi r^2}.$$

Откуда

$$N=\frac{Rr^2}{\rho d};$$

$$[N]=\frac{\text{Ом}\cdot\text{м}^2}{\text{Ом}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}=1; \quad N=\frac{40\cdot\left(5\cdot10^{-4}\right)^2}{4\cdot10^{-7}\cdot0{,}05}=500.$$

Ответ: $N=500$.

ЗАДАЧА 3.59

Электрический ток силой I = 8 А протекает по стальной проволоке круглого сечения. Радиус сечения r = 0,5 мм. Рассчитать скорость направленного движения (дрейфа) электронов в проволоке. Концентрацию электронов проводимости принять равной 10^{29} м^{-3}.

Дано:	Решение
I = 8 А r = $0{,}5\cdot10^{-3}$ м n = 10^{29} м^{-3}	Используя формулу $$j=en\langle\upsilon\rangle,$$ выразим среднюю скорость направленного движения через плотность тока:
$\langle\upsilon\rangle$ – ?	

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{j}{en},$$

где $j = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi r^2}$.

Тогда

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{I}{en\pi r^2};$$

$$[\langle \upsilon \rangle] = \frac{\text{А} \cdot \text{м}^3}{\text{Кл} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{А} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{с}} = \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{8}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{29} \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}25 \cdot 10^{-6}} = 6{,}4 \cdot 10^{-4}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\langle \upsilon \rangle = 6{,}4 \cdot 10^{-4}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

ЗАДАЧА 3.60

В цепь источника постоянного тока с ЭДс ε = 6 В включен резистор сопротивлением R = 80 Ом. Определить: 1) плотность тока в соединительных проводах площадью поперечного сечения S = 2 мм^2; 2) число N электронов, проходящих через сечение проводов за время t = 1 с. Сопротивлением источника тока и соединительных проводов пренебречь.

Дано:	**Решение**
ε = 6 В R = 80 Ом S = 2·10^{-6} м^2 t = 1 с	1. Плотность тока по определению – отношение силы тока I к площади поперечного сечения провода:
1) j – ?; 2) N – ?	$$j = \frac{I}{S}. \quad (1)$$

Силу тока в этой формуле выразим по закону Ома:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + R_1 + r}, \quad (2)$$

где R – сопротивление резистора; R_1 – сопротивление соединительных проводов; r – внутреннее сопротивление источника тока.

Пренебрегая сопротивлениями R_1 и r (по условию задачи), из (2) получим:

$$I = \frac{\varepsilon}{R}.$$

Подставив это выражение силы тока в (1), найдем:

$$j = \frac{\varepsilon}{RS};$$

$$[j] = \frac{\text{В}}{\text{Ом}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{В}\cdot\text{А}}{\text{В}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{А}}{\text{м}^2}; \qquad j = \frac{6}{80\cdot 2\cdot 10^{-6}} = 3{,}75\cdot 10^4\ \frac{\text{А}}{\text{м}^2}.$$

2. Число электронов, проходящих за время t через поперечное сечение, найдем, разделив заряд q, протекающий за это время через сечение, на элементарный заряд:

$$N = \frac{q}{e},$$

или с учетом того, что $q = It$ и $I = \dfrac{\varepsilon}{R}$,

$$N = \frac{\varepsilon t}{eR}; \quad [N] = \frac{\text{В}\cdot\text{с}}{\text{Кл}\cdot\text{Ом}} = \frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}}{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}} = 1;$$

$$N = \frac{6\cdot 1}{80\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}} = 4{,}69\cdot 10^{17}\ \text{электронов.}$$

Ответ: 1) $j = 3{,}75\cdot 10^4\ \dfrac{\text{А}}{\text{м}^2}$; 2) $N = 4{,}69\cdot 10^{17}$ электронов.

ЗАДАЧА 3.61

По железному проводнику (ρ = 7,87 г/см^3, M = 56·10^{-3} кг/моль) сечением S = 0,5 мм^2 течет ток I = 0,1 А. Определить среднюю скорость упорядоченного (направленного) движения электронов, считая, что число n свободных электронов в единице объема проводника равно числу атомов n' в единице объема проводника.

Дано:
ρ = 7,87·10^{-3} кг/м^3
M = 56·10^{-3} кг/моль
I = 0,1 А
S = 0,5·10^{-6} м^2

$\langle\upsilon\rangle$ – ?

Решение

Плотность тока в проводнике

$$j = en\langle\upsilon\rangle, \tag{1}$$

где $\langle\upsilon\rangle$ – средняя скорость упорядоченного движения электронов в проводнике; n – концентрация электронов (число электронов в единице объема); $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл – заряд электрона.

Согласно условию задачи

$$n = n' = \frac{N}{V} = \frac{\frac{m}{M}N_A}{V} = \frac{\rho N_A}{M}. \qquad (2)$$

Здесь учли, что $N = \frac{m}{M}N_A$, где m – масса проводника; M – его молярная масса; N_A = 6,02·10^{23} моль$^{-1}$ – постоянная Авогадро; $\rho = \frac{m}{V}$ – плотность железа.

Учитывая формулу (2) и то, что плотность тока $j = \frac{I}{S}$, выражение (1) можно записать в виде:

$$\frac{I}{S} = \frac{\rho N_A}{M} e\langle\upsilon\rangle,$$

откуда искомая скорость упорядоченного движения электронов

$$\langle\upsilon\rangle = \frac{IM}{\rho N_A eS};$$

$$[\langle\upsilon\rangle] = \frac{\text{А}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^3\cdot\text{моль}}{\text{моль}\cdot\text{кг}\cdot\text{Кл}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{А}\cdot\text{м}}{\text{Кл}} = \frac{\text{А}\cdot\text{м}}{\text{А}\cdot\text{с}} = \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\langle\upsilon\rangle = \frac{0{,}1\cdot 56\cdot 10^{-3}}{7{,}87\cdot 10^{-3}\cdot 6{,}02\cdot 10^{23}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 0{,}5\cdot 10^{-6}} = 14{,}8\cdot 10^{-6}\ \frac{\text{м}}{\text{с}} = 14{,}8\ \text{мкм/с}.$$

Ответ: $\langle\upsilon\rangle = 14{,}8$ мкм/с.

ЗАДАЧА 3.62

Определить плотность тока в медной проволоке длиной l = 100 м, если разность потенциалов на ее концах $\varphi_1 - \varphi_2$ = 10 В. Удельное сопротивление меди ρ = 17 нОм·м.

Дано:
l = 100 м
$\varphi_1 - \varphi_2$ = 10 В
ρ = 1,7·10^{-8} Ом·м
j – ?

Решение

Согласно закону Ома в дифференциальной форме

$$j = \sigma E, \qquad (1)$$

где $\sigma = \frac{1}{\rho}$ – удельная электрическая проводимость проводника; $E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l}$ – напряженность электрического поля внутри однородного проводника, выраженная через разность потенциалов на концах проводника и его длину.

Подставив приведенные формулы в выражение (1), найдем искомую плотность тока:

$$j = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\rho l}; \qquad [j] = \frac{\text{В}}{\text{Ом} \cdot \text{м} \cdot \text{м}} = \frac{\text{В} \cdot \text{А}}{\text{В} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{А}}{\text{м}^2};$$

$$j = \frac{10}{1{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot 100} = 5{,}88 \cdot 10^6 \ \frac{\text{А}}{\text{м}^2} = 5{,}88 \ \frac{\text{МА}}{\text{м}^2}.$$

Ответ: $j = 5{,}88 \ \frac{\text{МА}}{\text{м}^2}$.

ЗАДАЧА 3.63

Определить плотность j электрического тока в медном проводе (удельное сопротивление ρ = 17 нОм·м), если удельная тепловая мощность тока ω = 1,7 $\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}$.

Дано:

$\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м

$\omega = 1{,}7 \ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}$

j – ?

Решение

Согласно законам Джоуля – Ленца и Ома в дифференциальной форме

$$\omega = \sigma E^2 = \frac{E^2}{\rho}; \qquad (1)$$

$$j = \sigma E = \frac{E}{\rho}, \qquad (2)$$

где σ и ρ – соответственно удельные проводимость и сопротивление проводника.

Из закона (2) получим, что $E = \rho j$. Подставив это выражение в (1), найдем искомую плотность тока: $j = \sqrt{\frac{\omega}{\rho}}$;

$$[j] = \sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{с} \cdot \text{Ом} \cdot \text{м}}} = \sqrt{\frac{\text{А} \cdot \text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{А}}{\text{м}^3 \cdot \text{с} \cdot \text{В} \cdot \text{м}}} = \sqrt{\frac{\text{А}^2}{\text{м}^4}} = \frac{\text{А}}{\text{м}^2};$$

$$j = \sqrt{\frac{1{,}7}{1{,}7 \cdot 10^{-8}}} = 10^4 \ \frac{\text{А}}{\text{м}^2} = 10 \ \text{кА/м}^2.$$

Ответ: $j = 10$ кА/м^2.

ЗАДАЧА 3.64

Пространство между пластинами плоского конденсатора имеет объем V = 375 см^3 и заполнено водородом, который частично ионизирован. Площадь пластин конденсатора S = 250 см^2. При каком напряжении U между пластинами конденсатора сила тока (I), протекающего через конденсатор, достигнет значения 2 мкА, если концентрация n ионов обоих знаков в газе равна 5,3·10^7 см$^{-3}$? Принять подвижность ионов равной $b_+ = 5,4\cdot 10^{-4}\ \dfrac{\text{м}^2}{\text{В}\cdot\text{с}}$; $b_- = 7,4\cdot 10^{-4}\ \dfrac{\text{м}^2}{\text{В}\cdot\text{с}}$.

Дано:

V = 375·10^{-6} м^3

S = 25·10^{-3} м^2

I = 2·10^{-6} А

n = 53 м$^{-3}$

$b_+ = 5,4\cdot 10^{-4}\ \dfrac{\text{м}^2}{\text{В}\cdot\text{с}}$

$b_- = 7,4\cdot 10^{-4}\ \dfrac{\text{м}^2}{\text{В}\cdot\text{с}}$

U – ?

Решение

Напряжение U на пластинах конденсатора связано с напряженностью E электрического поля между пластинами и расстоянием d между ними соотношением

$$U = Ed. \tag{1}$$

Напряженность поля может быть найдена из выражения плотности тока

$$j = qn(b_+ + b_-)E,$$

где q – заряд иона.

Отсюда

$$E = \frac{j}{qn(b_+ + b_-)} = \frac{I}{qn(b_+ + b_-)S}.$$

Расстояние d между пластинами найдем из соотношения $d = \dfrac{V}{S}$.

Подставив выражения для E и d в (1), получим:

$$U = \frac{IV}{qn(b_+ + b_-)S^2}; \quad U = 100\ \text{В}.$$

$$[U] = \frac{\text{А}\cdot\text{м}^3}{\text{Кл}\cdot\text{м}^{-3}\left[\text{м}^3/(\text{В}\cdot\text{с})\right]\text{м}^4} = \frac{\text{А}\cdot\text{м}^6\cdot\text{с}\cdot\text{В}}{\text{Кл}\cdot\text{м}^6} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{Кл}} = \text{В}.$$

Ответ: U = 100 В.

3.3. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Основные формулы

Закон Био – Савара – Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0 I\left[d\vec{l},\vec{r}\right]}{4\pi r^3},$$

где $d\vec{B}$ – магнитная индукция в точке поля, создаваемая элементом длины проводника $d\vec{l}$ с током I; $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный от середины элемента проводника к точке, в которой определяется магнитная индукция; μ – магнитная проницаемость среды; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная.

Направление $\vec{B}$ определяют по правилу правого винта (буравчика).

Модуль вектора $d\vec{B}$ выражается формулой

$$dB = \frac{\mu\mu_0 I dl \sin\alpha}{4\pi r^2},$$

где α – угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{r}$.

Связь магнитной индукции $\vec{B}$ и напряженности магнитного поля $\vec{H}$:

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}.$$

Магнитная индукция поля бесконечно длинного прямого проводника с током

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r},$$

где r – кратчайшие расстояние от оси проводника до точки, в которой определяется магнитная индукция.

Магнитная индукция в центре кругового витка с током

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2R},$$

где R – радиус кривизны проводника.

Магнитная индукция поля, создаваемая отрезком проводника,

$$B = \frac{\mu\mu_0 I\left(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\right)}{4\pi r}.$$

Вектор $\vec{B}$ в точке A (рис. 1) направлен за чертеж перпендикулярно к его плоскости.

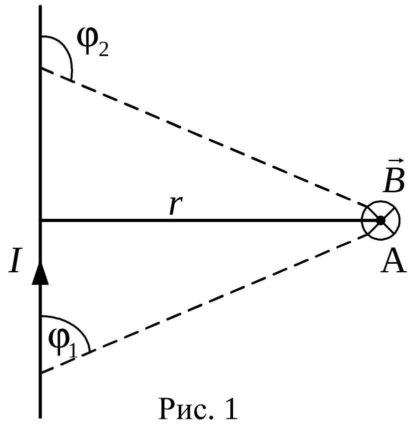


Рис. 1

Магнитная индукция поля, создаваемого длинным соленоидом в средней его части,

$$B = \mu\mu_0 nI,$$

где n – число витков, приходящихся на единицу длины соленоида; I – сила тока в соленоиде.

Индукция магнитного поля на оси соленоида конечной длины

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2} In\left(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\right),$$

где α_1 и α_2 – углы между осью соленоида и радиусом-вектором, проведенным из рассматриваемой точки к концам соленоида.

Магнитная индукция поля внутри тороида (в вакууме)

$$B = \mu_0 \frac{NI}{2\pi r},$$

где N – число витков тороида; I – сила тока; r – внутренний радиус тороида.

Индукция $\left|\vec{B}\right|$ магнитного поля в центре (точка O) дуги AC окружности длиной l с током I (рис. 2)

$$B = \frac{\mu\mu_0 Il}{4\pi R^2},$$

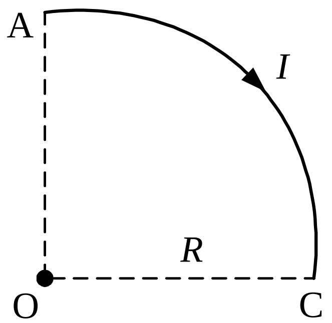


Рис. 2

где R – радиус окружности.

Магнитная индукция $\left|\vec{B}\right|$ на оси кругового тока (рис. 3)

$$B = \frac{\mu\mu_0 IR^2}{2\left(R^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

где R – радиус кругового контура с током I; a – расстояние от точки C, где определяется магнитная индукция, до плоскости контура; направление вектора $\vec{B}$ определяется правилом правого винта.

Принцип суперпозиции магнитных полей

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \ldots + \vec{B}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i ,$$

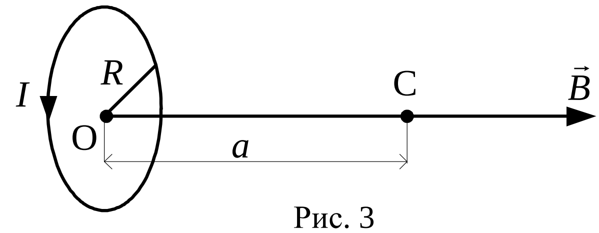


Рис. 3

где $\vec{B}$ – магнитная индукция результирующего поля; $\vec{B}_i$ – магнитная индукция поля с индексом i.

Закон Ампера: сила, действующая на элемент проводника $d\vec{l}$ с током I в магнитном поле, равна

$$d\vec{F} = \left[d\vec{l}, \vec{B} \right] I ,$$

где $\left[d\vec{l}, \vec{B} \right]$ – векторное произведение элемента длины проводника $d\vec{l}$ и магнитной индукции поля $\vec{B}$.

Модуль силы Ампера

$$dF = IBdl \sin\alpha ,$$

где α – угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{B}$.

Сила взаимодействия двух прямых бесконечных параллельных проводников с токами I_1 и I_2, приходящаяся на единицу длины каждого из проводников,

$$F = \frac{\mu\mu_0 2 I_1 I_2}{4\pi b} ,$$

где b – расстояние между проводниками.

Сила Лоренца: сила, действующая на заряд q, движущийся в магнитном поле со скоростью $\vec{\upsilon}$:

$$\vec{F} = q\left[\vec{\upsilon}, \vec{B} \right].$$

Модуль силы Лоренца

$$F = q\upsilon B \sin\alpha ,$$

где α – угол между векторами $\vec{\upsilon}$ и $\vec{B}$.

Результирующая сила, действующая на заряженную частицу с электрическим зарядом q, находящуюся в электрическом и магнитном полях,

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\left[\vec{\upsilon}, \vec{B} \right],$$

где $\vec{E}$ – вектор напряженности электрического поля.

Поток вектора магнитной индукции (магнитный поток) Φ через произвольную поверхность S в случае однородного магнитного поля

$$\Phi = BS\cos\alpha = B_n S,$$

где α – угол между вектором магнитной индукции $\vec{B}$ и нормалью $\vec{n}$ к поверхности; $B_n = B\cos\alpha$ – проекция вектора $\vec{B}$ на нормаль $\vec{n}$.

В случае неоднородного поля поток Φ вектора $\vec{B}$ выражается интегралом

$$\Phi = \int_S B_n dS,$$

где B_n – проекция вектора $\vec{B}$ на направление нормали к элементу площади dS.

Работа dA перемещения замкнутого контура с током силы I в магнитном поле определяется соотношением

$$dA = Id\Phi,$$

где $d\Phi$ – изменение магнитного потока, пронизывающего поверхность, ограниченную контуром.

Холловская поперечная разность потенциалов

$$\Delta\varphi = R\frac{IB}{d},$$

где B – магнитная индукция; I – сила тока; d – толщина пластинки; $R=\dfrac{1}{en}$ – постоянная Холла (n – концентрация электронов, e – заряд электрона).

Закон полного тока для магнитного поля в вакууме (теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$)

$$\oint_l \vec{B}d\vec{l} = \oint_l B_l dl = \mu_0 \sum_{k=1}^{n} I_k,$$

где $d\vec{l}$ – вектор элементарной длины контура, направленный вдоль обхода контура; $B_l = B\cos\alpha$ – составляющая вектора $\vec{B}$ в направлении касательной контура l произвольной формы (с учетом выбранного направления обхода); α – угол между векторами $\vec{B}$ и $d\vec{l}$; $\sum_{k=1}^{n} I_k$ – алгебраическая сумма n токов, охватываемых контуром.

Теорема о циркуляции вектора напряженности $\vec{H}$ магнитного поля:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = I,$$

где I – алгебраическая сумма токов проводимости, охватываемых контуром l.

Намагниченность

$$\vec{j} = \frac{\vec{P}_m}{V} = \frac{\sum \vec{P}}{V},$$

где $\vec{P}_m = \sum \vec{P}$ – магнитный момент магнетика, равный векторной сумме магнитных моментов отдельных молекул.

Связь между намагниченностью и напряженностью магнитного поля:

$$\vec{j} = \chi \vec{H},$$

где χ – магнитная восприимчивость вещества.

Связь между векторами $\vec{B}, \vec{H}, \vec{j}$:

$$\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{j} \right) = \mu_0 \left(\vec{H} + \chi \vec{H} \right) = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H}.$$

Связь между магнитной проницаемостью и магнитной восприимчивостью вещества:

$$\mu = 1 + \chi.$$

Закон полного тока для магнитного поля в веществе (теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$):

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \mu_0 \left(I + I' \right),$$

где $d\vec{l}$ – вектор элементарной длины контура, направленный вдоль обхода контура; B_l – составляющая вектора $\vec{B}$ в направлении касательной к контуру L произвольной формы; I и I' – соответственно алгебраические суммы макротоков (токов проводимости) и микротоков (молекулярных токов), охватываемых заданным вектором.

Решение задач

ЗАДАЧА 3.65

Соленоид длиной l = 20 см содержит N = 1000 витков. Радиус катушки соленоида R = 10 см. Определить магнитную индукцию B в точке, лежащей на оси соленоида на расстоянии a = 5 см от его конца. По обмотке соленоида идет ток I = 5 А.

Дано:

$l = 0{,}2$ м

$N = 1000$

$R = 0{,}1$ м

$a = 0{,}05$ м

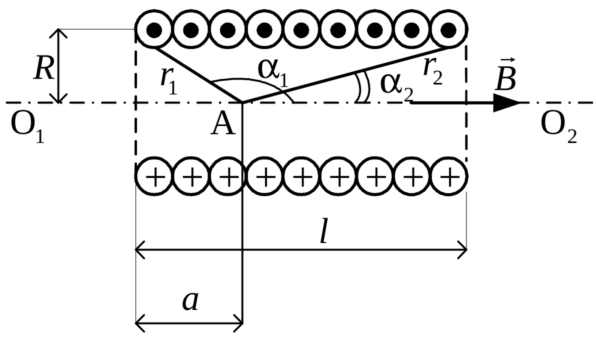
$I = 5$ А

B – ?

Решение

Соленоид можно рассматривать как систему последовательно соединенных круговых токов одинакового радиуса, имеющих общую ось.

На рисунке показано сечение соленоида длиной l с током I. Кружки с точками представляют собой сечения витков радиусом R, в которых ток направлен из-за чертежа к нам, а кружки с крестиками – сечения витков, в которых ток направлен за чертеж; n – число витков, приходящихся на единицу длины соленоида, $\left(n = \dfrac{N}{l}\right)$.



По правилу буравчика магнитная индукция $\vec{B}$ в любой точке, лежащей на оси O_1O_2 соленоида, направлена вдоль оси и ее модуль равен алгебраической сумме индукций, создаваемых всеми витками в этой точке. Магнитная индукция в произвольной точке А соленоида определяется по формуле

$$B = \frac{1}{2}\mu\mu_0 nI\left(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\right),$$

где $\alpha_2 < \alpha_1$; $\mu = 1$ (для вакуума); $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная.

Из рисунка видно, что

$$\cos\alpha_1 = \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}}; \quad \cos\alpha_2 = \frac{l - a}{\sqrt{R^2 + (l - a)^2}}.$$

Таким образом,

$$B = \frac{1}{2}\mu\mu_0 \frac{N}{l} I \left(\frac{l-a}{\sqrt{R^2 + (l-a)^2}} - \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right);$$

$$[B] = \frac{\text{Гн} \cdot \text{А}}{\text{м} \cdot \text{м}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{А}}{\text{м}^2 \cdot \text{А}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{А}} = \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}} = \text{Тл};$$

$$B = \frac{1}{2} 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{1000}{0,2} 5 \left(\frac{0,2 - 0,05}{\sqrt{0,1^2 + (0,2 - 0,05)^2}} - \frac{0,05}{\sqrt{0,1^2 + 0,05^2}} \right) =$$

$$= 40,2 \cdot 10^{-3} \text{ Тл} = 40,2 \text{ мТл}.$$

Примечание. Можно доказать, что при прочих равных условиях индукция B наибольшая в точке, лежащей на середине оси соленоида, причем $B_{\max} = \frac{\mu\mu_0 nIl}{\sqrt{4R^2 + l^2}}$.

Ответ: $B = 40,2$ мТл.

ЗАДАЧА 3.66

Найти напряженность H магнитного поля внутри прямого длинного соленоида при силе тока I = 4 А. Витки намотаны из проволоки радиусом r = 0,25 мм. Толщиной изоляции пренебречь.

Дано:	Решение
I = 4 А r = $25 \cdot 10^{-5}$ м	По условию соленоид можно считать бесконечно длинным, тогда напряженность поля внутри
H – ?	него определим по формуле $H = nI$.

Предполагается, что витки плотно прилегают друг к другу, поэтому длина соленоида $l = N2r$.

Итак,

$$H = I\frac{N}{l} = I\frac{N}{N2r} = \frac{I}{2r};$$

$$H = \frac{4}{2 \cdot 25 \cdot 10^{-5}} = 8 \cdot 10^3 \ \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

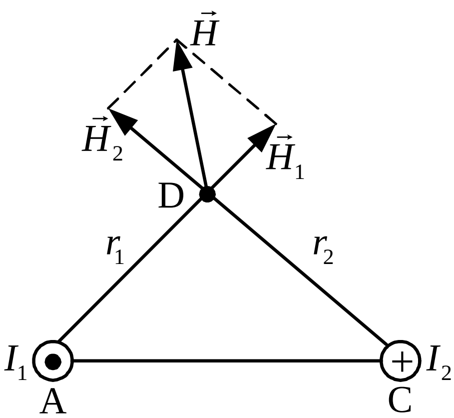
Ответ: $H = 8 \cdot 10^3 \ \frac{\text{А}}{\text{м}}$.

ЗАДАЧА 3.67

По двум длинным параллельным проводам текут токи $I_1 = I_2 = 30$ А в противоположных направлениях. Расстояние между проводами d = 5 см. Найти модуль и направление напряженности $\vec{H}$ магнитного поля в точке, находящейся на расстоянии r_1 = 4 см от одного и r_2 = 3 см от другого провода.

Дано:	**Решение**
$I_1 = I_2 = 30$ А d = 0,05 м r_1 = 0,04 м r_2 = 0,03 м H – ?	Согласно принципу суперпозиции напряженность магнитного поля в точке D (см. рис.) $$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2,$$ где $H_1 = \dfrac{I_1}{2\pi r_1}$; $H_2 = \dfrac{I_2}{2\pi r_2}$ (проводники бесконечно длинные).

Направления векторов H_1 и H_2 определяются по правилу буравчика. Треугольник ADC – прямоугольный (треугольник Пифагора), $\angle \mathrm{ADC} = \angle H_1 \mathrm{D} H_2 = 90°$.



Поэтому напряженность в точке D

$$H = \sqrt{H_1^2 + H_2^2}$$

или

$$H = \sqrt{\left(\frac{I_1}{2\pi r_1}\right)^2 + \left(\frac{I_2}{2\pi r_2}\right)^2};$$

$$[H] = \frac{\text{А}}{\text{м}};$$

$$H = \sqrt{\left(\frac{30}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}04}\right)^2 + \left(\frac{30}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}03}\right)^2} = 200\ \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

Ответ: $H = 200\ \dfrac{\text{А}}{\text{м}}$.

ЗАДАЧА 3.68

Два параллельных бесконечно длинных провода расположены на расстоянии d = 4 см друг от друга. Определить магнитную индукцию $\vec{B}$ в точке, отстоящей от одного проводника на расстоянии r_1 = 5 см и от другого – на расстоянии r_2 = 8 см. Токи в проводах I_1 = 50 А и I_2 = 100 А текут в одном направлении.

Дано:
d = 0,04 м
r_1 = 0,05 м
r_2 = 0,08 м
I_1 = 50 А
I_2 = 100 А
B – ?

Решение

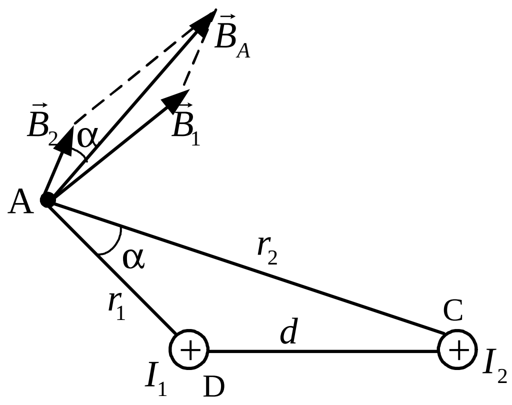
Для нахождения магнитной индукции в указанной точке А (см. рис.) определим направления векторов $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ полей, создаваемых каждым проводником в отдельности, и сложим их геометрически: $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$.

Модуль индукции найдем по теореме косинусов

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2\cos\alpha}\,. \qquad (1)$$

Значения индукций B_1 и B_2 вычислим по формулам

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}; \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}.$$



Подставив выражения для B_1 и B_2 в формулу (1) и вынеся $\frac{\mu_0}{2\pi}$ за знак корня, получим:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{I_1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{I_2}{r_2}\right)^2 + 2\frac{I_1I_2}{r_1r_2}\cos\alpha}\,; \qquad (2)$$

$$[B] = \frac{\text{Гн}}{\text{м}}\cdot\frac{\text{А}}{\text{м}} = \frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}}{\text{А}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{А}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{м}} = \text{Тл}.$$

Из треугольника ADC по теореме косинусов запишем:

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\alpha.$$

Отсюда $\cos\alpha = \dfrac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}$; $\cos\alpha$ = 0,912;

$$B=\frac{4\pi\cdot10^{-7}}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{50}{0{,}05}\right)^2+\left(\frac{100}{0{,}08}\right)^2+2\frac{50\cdot100}{0{,}05\cdot0{,}08}\cdot0{,}912}=443\cdot10^{-6}\text{ Тл}.$$

Ответ: $B=443$ мкТл.

ЗАДАЧА 3.69

Стороны прямоугольника, изготовленного из тонкого провода, равны a = 30 см и b = 40 см. Магнитная индукция $\vec{B}_0$ в точке пересечения диагоналей равна 400 мкТл, если по проводнику пропустить ток I. Определить величину тока I.

Дано:
a = 0,3 м
b = 0,4 м
B_0 = $4\cdot10^{-4}$ Тл
I – ?

Решение

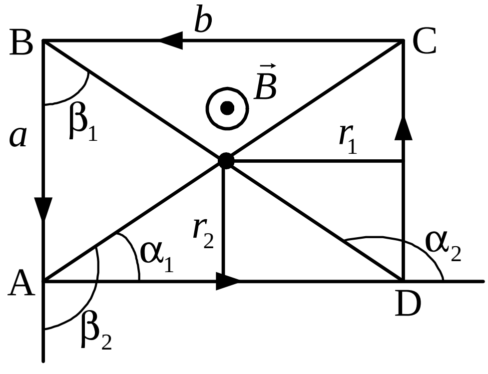
Обозначим индукции магнитных полей, создаваемых в точке O прямоугольника проводами AB, BC, CD, DA, соответственно $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$, $\vec{B}_3$ и $\vec{B}_4$ (см. рис.). Они имеют одинаковое направление – перпендикулярно к плоскости контура «от нас». Поэтому индукция результирующего магнитного поля в точке O равна

$$B_O=B_1+B_2+B_3+B_4.$$

Стороны прямоугольника AB и CD обозначены a, BC и DA – b. В силу симметрии $B_1=B_3$ и $B_2=B_4$.

Таким образом,

$$B_O=2B_1+2B_2.$$



Величины B_1 и B_2 можно вычислить по формуле

$$B=\frac{\mu\mu_0 I\left(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2\right)}{4\pi r},$$

тогда

$$B_1=\frac{\mu_0 I}{4\pi r_1}\left(\cos\beta_1-\cos\beta_2\right);$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_2}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right).$$

Из рисунка можно также определить:

$$\cos\beta_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$\cos\beta_2 = \cos\left(180 - \beta_1\right) = -\cos\beta_1;$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \cos\alpha_2 = \cos\left(180 - \alpha_1\right) = -\cos\alpha_1;$$

$$r_1 = \frac{b}{2}; \quad r_2 = \frac{a}{2}.$$

Следовательно, индукция магнитного поля в точке O пересечения диагоналей

$$B_O = 2\frac{\mu_0 I}{4\pi\frac{b}{2}}\left(2\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) + 2\frac{\mu_0 I}{4\pi\frac{a}{2}}\left(2\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \frac{8\mu_0 I}{4\pi ab}\frac{a + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Из последней формулы находим:

$$I = \frac{B_O 4\pi ab}{8\mu_0\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$\left[I\right] = \frac{\text{Тл}\cdot\text{м}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{Гн}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2\cdot\text{А}}{\text{А}\cdot\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{А}}{\text{Дж}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{А}}{\text{Н}\cdot\text{м}} = \text{А};$$

$$I = \frac{4\cdot 10^{-4}\cdot 4\cdot 3{,}14\cdot 0{,}3\cdot 0{,}4}{8\cdot 4\cdot 3{,}14\cdot 10^{-7}\sqrt{0{,}3^2 + 0{,}4^2}} = 120\ \text{А}.$$

Ответ: $I = 120$ А.

ЗАДАЧА 3.70

По тонкому проволочному контуру в виде треугольника течет ток. Не изменяя силы тока, контуру придали форму квадрата. Во сколько раз изменилась магнитная индукция в центре контура?

Решение

Рассмотрим контур в виде равностороннего треугольника (рис. 1) и выберем направление тока. По принципу суперпозиции

$$\vec{B}_{\text{O}} = \vec{B}_{\text{AC}} + \vec{B}_{\text{AD}} + \vec{B}_{\text{DC}}.$$

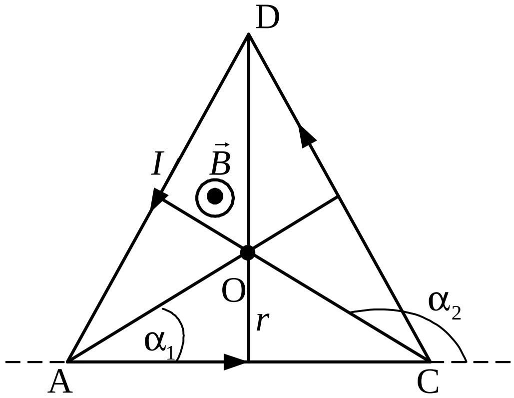


Рис. 1

Все эти векторы направлены перпендикулярно к плоскости чертежа «от нас» и в силу симметрии равны по модулю. Следовательно, $B_{\Delta} = 3B_{\text{AC}}$.

Тогда

$$B_{\text{AC}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right);$$

$$\cos\alpha_1 = -\cos\alpha_2; \quad \alpha_1 = 30°.$$

Пусть длина проволочного контура l, тогда сторона треугольника $\frac{l}{3}$, а $r = \frac{l}{6\sqrt{3}}$.

Таким образом, магнитная индукция в центре треугольника

$$B_{\Delta} = 3\frac{\mu_0 I 6\sqrt{3}}{4\pi l} 2\cos\alpha_1 = \frac{54\mu_0 I}{4\pi l}.$$

Рассмотрим теперь контур из того же проводника, но имеющий форму квадрата (рис. 2). Выбрав направление тока и проведя аналогичные рассуждения, будем иметь:

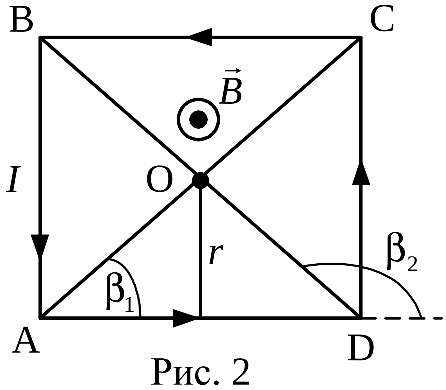


Рис. 2

$$\vec{B}_O = \vec{B}_{\text{AD}} + \vec{B}_{\text{AB}} + \vec{B}_{\text{BC}} + \vec{B}_{\text{CD}};$$

$$B_{\text{O}} = 4B_{\text{AD}} = 4\frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left(\cos\beta_1 - \cos\beta_2\right);$$

$$\cos\beta_1 = -\cos\beta_2, \quad \beta_1 = 45°.$$

Сторона квадрата (длина контура не изменилась) $a = \frac{l}{4}$, а $r = \frac{l}{8}$.

Окончательно имеем:

$$B_{\square} = 4\frac{8\mu_0 I}{4\pi l} 2\cos\beta_1 = \frac{32\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi l}.$$

Вычислим, во сколько раз изменилась магнитная индукция в центре контура:

$$\frac{B_\Delta}{B_\square} = \frac{54\mu_0 I \; 4\pi l}{4\pi l \; 32\sqrt{2}\mu_0 I} = 1{,}19 .$$

Ответ: уменьшилась в 1,19 раз.

ЗАДАЧА 3.71

Длинный прямой провод с током I = 50 А изогнут под углом α = 150°. Определить магнитную индукцию $\vec{B}$ в точках, лежащих на биссектрисе угла и удаленных от его вершины на расстояние a = 5 см.

Дано:	Решение
I = 50 А α = 150° $\mathrm{OA} = \mathrm{OC} = a$ = 0,05 м B_A, B_C – ?	Изогнутый провод можно рассматривать как два длинных провода, концы которых сходятся в точке O (см. рис.). В соответствии с принципом суперпозиции магнитных полей магнитная индукция $\vec{B}$ в точке A

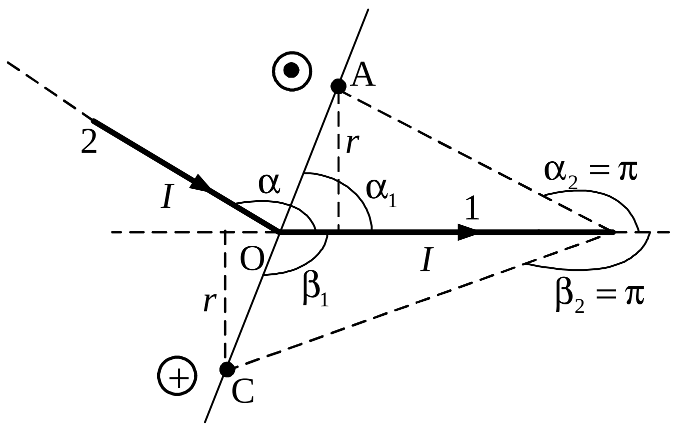
будет равна геометрической сумме $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ полей, создаваемых проводниками 1 и 2:

$$\vec{B}_\mathrm{A} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 .$$

В силу симметрии $\left|\vec{B}_1\right| = \left|\vec{B}_2\right|$, а векторы направлены перпендикулярно к плоскости чертежа «от нас».

Следовательно, в точке A результирующая индукция

$$B_\mathrm{A} = 2B_1 .$$



Магнитную индукцию B_1 можно вычислить по формуле

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right),$$

где $\alpha_1 = 75°$; $\alpha_2 = \pi$ для бесконечно длинного провода и $r = a\sin\alpha_1$.

Следовательно,

$$B_{\text{A}} = 2\frac{\mu_0 I}{4\pi a \sin\alpha_1}\left(\cos\alpha_1 + 1\right);$$

$$[B] = \frac{\text{Гн}\cdot\text{А}}{\text{м}\cdot\text{м}} = \frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}}{\text{А}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{А}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{м}} = \text{Тл};$$

$$B_{\text{A}} = 2\frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 50}{4\pi\cdot 0{,}05\cdot\sin 75^\circ}\left(\cos 75^\circ + 1\right) = 261\cdot 10^{-6}\ \text{Тл}.$$

Аналогичные рассуждения можно провести относительно точки C:

$$\vec{B}_{\text{C}} = \vec{B}_1' + \vec{B}_2'; \quad B_{\text{C}} = 2B_1'.$$

Направление вектора $\vec{B}_{\text{C}}$, определяемое по правилу буравчика, противоположно $\vec{B}_{\text{A}}$, при этом

$$B_1' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left(\cos\beta_1 - \cos\beta_2\right),$$

где $\beta_1 = \pi - \alpha_1 = 105^\circ$; $\beta_2 = \pi$.

Таким образом,

$$B_{\text{C}} = 2\frac{\mu_0 I}{4\pi a \sin\alpha_1}\left(-\cos\alpha_1 + 1\right);$$

$$B_{\text{C}} = 2\frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 50}{4\pi\cdot 0{,}05\cdot\sin 75^\circ}\left(-\cos 75^\circ + 1\right) = 153\cdot 10^{-6}\ \text{Тл}.$$

Ответ: $B_{\text{A}} = 261\cdot 10^{-6}$ Тл; $B_{\text{C}} = 153\cdot 10^{-6}$ Тл.

ЗАДАЧА 3.72

По контуру ABCA идет ток I = 10 А. Определить вектор индукции $\vec{B}$ магнитного поля в точке O, если радиус дуги AB R = 10 см, φ = 60° (см. рис.).

Дано:

I = 10 А

R = 0,1 м

φ = 60°

μ = 1

$\vec{B}$ – ?

Решение

Индукция $\vec{B}$ магнитного поля в точке O по принципу суперпозиций полей равна векторной сумме индукций магнитного поля, создаваемых всеми элементами контура с током. Разобьем весь контур на три участка – дугу AB и прямолинейные отрезки BC и CA.

Тогда будем иметь: $\vec{B} = \vec{B}_{AB} + \vec{B}_{BC} + \vec{B}_{CA}$.

Вычислим модули всех трех слагаемых. Индукция $\vec{B}_{AB}$ магнитного поля от дуги AB вычисляется по формуле

$$B = \frac{\mu_0 \mu I l}{4\pi R^2},$$

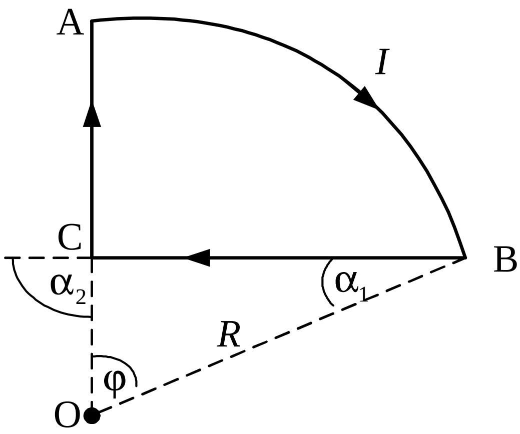
где длина дуги $l = \dfrac{2\pi R}{6}$, так как угол φ = 60°.

Тогда

$$B_{AB} = \frac{\mu\mu_0 I}{12R}.$$

Индукция $\left|\vec{B}_{BC}\right|$ магнитного поля от отрезка BC вычисляется по формуле для величины индукции линейного проводника конечной длины:

$$B_{BC} = \frac{\mu\mu_0 I\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right)}{4\pi a}.$$



Из рисунка видно, что α_1 = 30°; α_2 = 90°; длина a отрезка OC

$$a = \text{OC} = R\sin\alpha_1 = R\sin 30°.$$

Тогда

$$B_{BC} = \frac{\mu\mu_0 I\sqrt{3}\cdot 2}{4\pi R\cdot 2} = \frac{\mu\mu_0 I\sqrt{3}}{4\pi R}.$$

Индукция $\left|\vec{B}_{CA}\right|$ магнитного поля от проводника CA в точке O будет равна нулю, так как в формуле индукции для конечного проводника в данном случае $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi$ и, следовательно, $B_{CA} = 0$. Тогда результирующий вектор $\vec{B}$ индукции магнитного поля

$$\vec{B} = \vec{B}_{AB} + \vec{B}_{BC}.$$

Оба эти векторы перпендикулярны к плоскости рисунка; по правилу правого винта вектор $\vec{B}_{AB}$ направлен от наблюдателя, а вектор $\vec{B}_{BC}$ – к наблюдателю. Если принять направление вектора $\vec{B}_{BC}$ за положительное, то модуль $\left|\vec{B}\right|$ результирующего вектора $\vec{B}$ будет равен:

$$B = B_{BC} - B_{AB}; \quad B = \frac{\mu\mu_0 I\sqrt{3}}{4\pi R} - \frac{\mu\mu_0 I}{12R}.$$

Вектор $\vec{B}$ направлен к нам перпендикулярно к плоскости листа, а модуль результирующего вектора $\vec{B}$ определяется следующим образом:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2R}\left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi} - \frac{1}{6}\right);$$

$$[B] = \frac{\text{Гн}\cdot\text{А}}{\text{м}\cdot\text{м}} = \frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}}{\text{м}^2\cdot\text{А}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2\cdot\text{А}} = \frac{\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{м}} = \text{Тл};$$

$$B = \frac{1\cdot 4\pi\cdot 10^{7}\cdot 10}{2\cdot 10^{-1}}(0,28 - 0,17) = 0,69\cdot 10^{-5}\ \text{Тл} = 6,9\ \text{мкТл}.$$

Ответ: $B = 6,9$ мкТл.

ЗАДАЧА 3.73

По прямому горизонтально расположенному проводу пропускают ток силой I_1 = 27 А. Под ним на расстоянии a = 1,5 см находится параллельный ему алюминиевый провод, по которому пропускают ток I_2 = 1,5 А. Определить, какой должна быть площадь поперечного сечения алюминиевого провода, чтобы он удерживался незакрепленным. Плотность алюминия 2,7 г/см^3. Равновесие будет устойчивым или неустойчивым?

Дано:
I_1 = 27 А
I_2 = 1,5 А
ρ = 2,7·10^3 кг/м^3
μ = 1
g = 10 м/с^2
$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м
a = 1,5·10^{-2} м

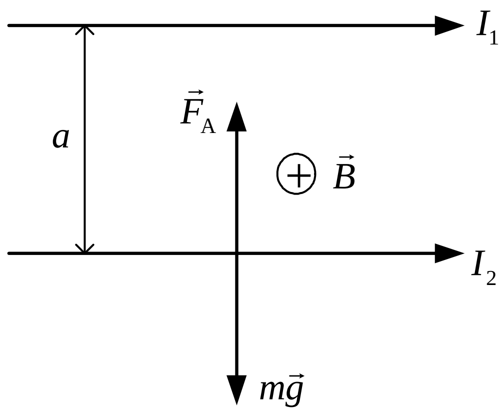
S – ?

Решение

Проводник с током силой I_1 образует вокруг себя на расстоянии a магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. На проводник с током силой I_2 будет действовать сила Ампера $\vec{F}_A$ со стороны этого магнитного поля. По правилу левой руки эта сила направлена вверх (см. рис.). Чтобы проводник удерживался незакрепленным, сила Ампера $\vec{F}_\text{А}$, приходящаяся на единицу длины проводника, должна быть равна силе тяжести $m\vec{g}$, приходящейся на единицу длины проводника:

$$\frac{F_\text{А}}{l} = BI_2; \quad \frac{mg}{l} = \rho S g;$$

$$B = \frac{\mu\mu_0 I_1}{2\pi a}; \quad \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} = \rho S g .$$



Отсюда выразим площадь S поперечного сечения алюминиевого проводника:

$$S = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a \rho g};$$

$$[S] = \frac{\text{Гн} \cdot \text{А} \cdot \text{А} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{с}^2}{\text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{А}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{А} \cdot \text{кг}} = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}^2}{\text{кг}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{кг}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}} = \text{м}^2;$$

$$S = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 27 \cdot 1{,}5}{2\pi \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot 2{,}7 \cdot 10^3 \cdot 10} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2 .$$

Равновесие будет неустойчивым, так как при малейшем смещении проводники в исходное положение не возвращаются.

Ответ: $S = 2 \cdot 10^{-8}$ м^2.

ЗАДАЧА 3.74

Два прямолинейных длинных параллельных проводника находятся на расстоянии a_1 = 10 см друг от друга. По проводникам в одном направлении текут токи силой 20 А и 30 А. Какую работу A_l на каждый метр длины проводника нужно совершить, чтобы раздвинуть эти проводники до расстояния a_2 = 20 см (см. рис.)?

Дано:

I_1 = 20 А

I_2 = 30 А

a_1 = 0,1 м

a_2 = 0,2 м

μ = 1

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м

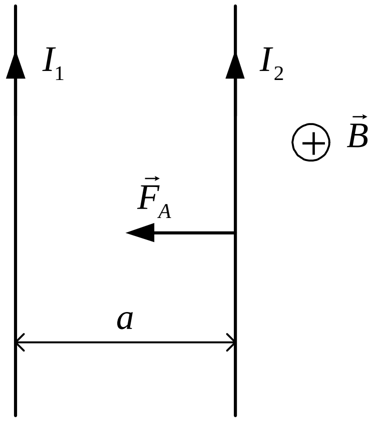
A_l – ?

Решение

Элементарная работа A_l при перемещении второго проводника от первого на расстояние dx равна

$$dA = F_A dx,$$

где F_A – сила Ампера, действующая на проводник с током силой I_2 со стороны проводника с током силой I_1.



При этом сила Ампера F_A равна:

$$F_A = BI_2 l,$$

где B – модуль магнитной индукции поля первого проводника на расстоянии x от него;

$$B = \frac{\mu\mu_0 I_1}{2\pi x}.$$

Тогда элементарная работа dA_l, приходящаяся на единицу длины,

$$dA_l = \frac{dA}{l} = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\frac{dx}{x}.$$

Конечное ее значение получается интегрированием по смещению x второго проводника:

$$\frac{A}{l} = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_{a_1}^{a_2}\frac{dx}{x} = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{a_2}{a_1};$$

$$\left[\frac{A}{l}\right] = \frac{\text{Гн}\cdot\text{А}\cdot\text{А}}{\text{м}} = \frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}^2}{\text{А}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Дж}\cdot\text{А}}{\text{А}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}};$$

$$\frac{A}{l} = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 20\cdot 30\cdot 0,69}{2\pi} = 8,28\cdot 10^{-5}\ \frac{\text{Дж}}{\text{м}}.$$

Ответ: $\frac{A}{l} = 8,28\cdot 10^{-5}\ \frac{\text{Дж}}{\text{м}}$.

ЗАДАЧА 3.75

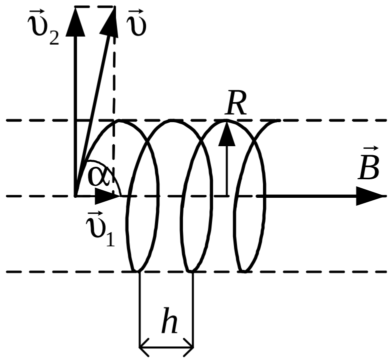
В однородное магнитное поле с индукцией B = 0,1 Тл влетает протон под углом 30° к направлению поля. Кинетическая энергия протона W = 433 эВ. Определить радиус R винтовой линии, по которой будет двигаться протон.

Дано:	**Решение**
B = 0,1 Тл α = 30° W = 693·10^{-19} Дж m_p = 1,67·10^{-27} кг q_p = 1,6·10^{-19} Кл R – ?	Движение протона в однородном магнитном поле со скоростью υ, направленной под углом α к вектору магнитной индукции $\vec{B}$, происходит по винтовой линии (спирали). Разложим скорость протона на две составляющие – параллельную линиям индукции и перпендикулярную к ним (см. рис.):

$$\upsilon_1 = \upsilon \cos\alpha; \quad (1)$$

$$\upsilon_2 = \upsilon \sin\alpha. \quad (2)$$

Благодаря наличию перпендикулярной составляющей скорости υ_2 на протон действует сила Лоренца, заставляя его двигаться по окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю. Радиус окружности определяется условием



$$\frac{m\upsilon_2^2}{R} = q\upsilon_2 B,$$

так как сила Лоренца сообщает протону центростремительное ускорение.

Отсюда

$$R = \frac{m\upsilon_2}{qB} = \frac{m\upsilon \sin\alpha}{qB}. \quad (3)$$

Вдоль направления вектора $\vec{B}$ силы не действуют, поэтому частица движется равномерно со скоростью υ_1.

В результате сложения двух движений протон движется по спирали радиусом R с шагом винта h;

$$h = \upsilon_1 T, \quad (4)$$

где T – период обращения протона по окружности;

$$T = \frac{2\pi R}{\upsilon_2}. \quad (5)$$

Учитывая соотношения (1) – (3) и (5), из уравнения (4) получаем:

$$h = \frac{2\pi \upsilon m \cos\alpha}{qB}.$$

Скорость протона входит в кинетическую энергию:

$$W = \frac{m\upsilon^2}{2}; \quad \upsilon = \sqrt{\frac{2W}{m}};$$

$$[\upsilon] = \sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}}} = \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2 \cdot 693 \cdot 10^{-19}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}}} = 2{,}9 \cdot 10^5\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Протон, обладающий такой скоростью, не является релятивистским, так как $\upsilon \ll c$.

Таким образом,

$$R = \frac{\sqrt{2mW}\sin\alpha}{qB};$$

$$h = \frac{2\pi\sqrt{2mW}\cos\alpha}{qB}; \qquad h = 16{,}3 \text{ см};$$

$$[R] = \frac{\sqrt{\text{Дж}\cdot\text{кг}}}{\text{Кл}\cdot\text{Тл}} = \frac{\sqrt{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{кг}}\cdot\text{А}\cdot\text{м}}{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{Н}} = \frac{\sqrt{\dfrac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}}\cdot\text{м}}{\text{Н}\cdot\text{с}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}\cdot\text{Н}\cdot\text{с}} = \frac{\text{м}\cdot\text{Н}}{\text{Н}} = \text{м};$$

$$R = \frac{\sqrt{2\cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}\cdot 693\cdot 10^{-19}}\sin 30^\circ}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 0{,}1} = 1{,}5\cdot 10^{-2}\text{ м} = 1{,}5\text{ см}.$$

Ответ: $R = 1{,}5$ см.

ЗАДАЧА 3.76

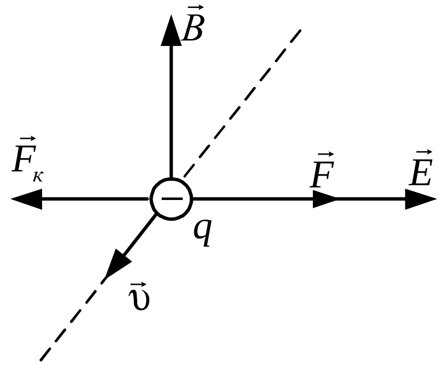
Перпендикулярно к магнитному полю с индукцией B = 0,1 Тл возбуждено электрическое поле напряженностью E = 100 кВ/м. Перпендикулярно к обоим полям движется, не отклоняясь от прямолинейной траектории, заряженная частица. Вычислить скорость частицы.

Дано:
B = 0,1 Тл
$E = 10^5$ В/м
υ – ?

Решение

Чтобы движение заряженной частицы было равномерным и прямолинейным, должно выполняться условие (см. рис.)

$$F_л = F_к, \tag{1}$$



где $F_л$ – сила Лоренца, $F_к$ – кулоновская сила;

$$F_л = q\upsilon B\sin\alpha; \quad (\sin\alpha = 1);$$

$$F_к = qE.$$

Подставим выражения для этих сил в равенство (1):

$$q\upsilon B = qE,$$

откуда

$$\upsilon = \frac{E}{B};$$

$$[\upsilon] = \frac{\text{В} \cdot \text{А} \cdot \text{м}}{\text{м} \cdot \text{Н}} = \frac{\text{В} \cdot \text{А}}{\text{Н}} \cdot \frac{\text{с}}{\text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Н} \cdot \text{с}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{Н} \cdot \text{с}} = \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\upsilon = \frac{10^5}{0{,}1} = 10^6\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\upsilon = 10^6\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

ЗАДАЧА 3.77

Протон влетает в электромагнитное поле со скоростью υ = 100 км/с. Магнитное поле напряженностью H = 2,6 кА/м и электрическое поле напряженностью E = 210 В/м направлены одинаково. Найти нормальное a_n, тангенциальное a_τ и полное ускорения протона. Задачу решить, если скорость протона направлена: 1) параллельно направлению электрического поля; 2) перпендикулярно к направлению электрического поля.

Дано:
$\upsilon = 10^5$ м/с
$H = 2{,}6 \cdot 10^3$ А/м
$E = 210$ В/м
$m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг
$q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

a_n, a_τ, a – ?

Решение

1. При совпадающих по направлению полях $\vec{H}$ и $\vec{E}$ (рис. 1), когда скорость протона совпадает с общим направлением полей, на него действует только кулоновская сила (сила Лоренца равна нулю):

$$F_к = qE.$$

По второму закону Ньютона эта сила равна ma_τ:

$$ma_\tau = qE; \quad a_\tau = \frac{qE}{m};$$

$$a_\tau = a = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 210}{1{,}67 \cdot 10^{-27}} = 20{,}1 \cdot 10^9\ \text{м/с}^2.$$

2. Если направление вектора скорости протона перпендикулярно к направлению векторов $\vec{H}$ и $\vec{E}$ (рис. 2), то к кулоновской силе добавляется сила Лоренца:

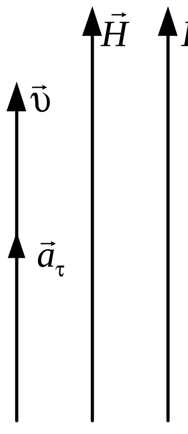


Рис. 1

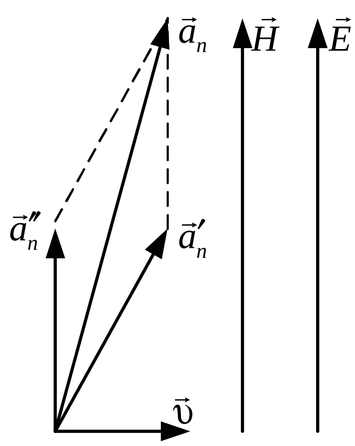


Рис. 2

$$F_л = qB\upsilon \sin\alpha; \quad (\sin\alpha = 1).$$

Сила Лоренца перпендикулярна к вектору скорости протона и создает нормальное ускорение:

$$ma'_n = qB\upsilon; \quad a'_n = \frac{qB\upsilon}{m}.$$

Поскольку $B = \mu\mu_0 H$, считая μ = 1, получим:

$$a'_n = \frac{q\mu_0 H\upsilon}{m};$$

$$[\upsilon] = \frac{\text{Кл}\cdot\text{Гн}\cdot\text{А}\cdot\text{м}}{\text{м}\cdot\text{м}\cdot\text{с}\cdot\text{кг}} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}\cdot\text{м}}{\text{А}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}\cdot\text{кг}} = \frac{\text{А}\cdot\text{В}\cdot\text{с}^2\cdot\text{м}}{\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}} = \frac{\text{Дж}\cdot\text{м}\cdot\text{с}}{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{кг}\cdot\text{м}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{кг}\cdot\text{с}^2} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Электрическое поле действует перпендикулярно к движению протона, поэтому $a_\tau = 0$, а нормальное ускорение $a''_n = \dfrac{qE}{m}$. Векторы $\vec{a}'_n$ и $\vec{a}''_n$ взаимно перпендикулярны, поэтому нормальное ускорение

$$a_n = \sqrt{(a'_n)^2 + (a''_n)^2} = \sqrt{\left(\frac{q\mu_0 H\upsilon}{m}\right)^2 + \left(\frac{qE}{m}\right)^2};$$

$$[a''_n] = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{м}\cdot\text{кг}} = \frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}}{\text{м}\cdot\text{кг}} = \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{кг}\cdot\text{м}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{м}\cdot\text{с}^2} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a_n = a = \sqrt{\left(\frac{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot4\pi\cdot10^{-7}\cdot2{,}6\cdot10^3\cdot10^5}{1{,}67\cdot10^{-27}}\right)^2 + \left(\frac{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot210}{1{,}67\cdot10^{-27}}\right)^2} = 37{,}5\cdot10^9\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Ответ: 1) $a_\tau = a = 20{,}1\cdot10^9\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$; 2) $a_n = a = 37{,}5\cdot10^9\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

ЗАДАЧА 3.78

В однородное магнитное поле напряженностью H = 200 кА/м влетает заряженная частица со скоростью υ = 10^6 м/с перпендикулярно к магнитному полю. В результате частица движется по окружности радиусом R = 8,3 см. Найти удельный заряд частицы.

Дано:	**Решение**
$H = 2\cdot10^5$ А/м $\upsilon = 10^6$ м/с $R = 0{,}083$ м	На заряженную частицу в магнитном поле действует сила Лоренца $$F_л = q\upsilon B,$$
$\dfrac{q}{m}$ – ?	которая сообщает ей центростремительное ускорение, заставляя частицу двигаться по окружности, т.е.

$$F_ц = F_л, \quad \frac{m\upsilon^2}{R} = qB\upsilon.$$

Отсюда

$$\frac{q}{m} = \frac{\upsilon}{RB} = \frac{\upsilon}{\mu_0 RH};$$

$$\left[\frac{q}{m}\right] = \frac{\text{м}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}\cdot\text{Гн}\cdot\text{м}\cdot\text{А}} = \frac{\text{м}^2\cdot\text{А}}{\text{с}\cdot\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}} = \frac{\text{м}^2\cdot\text{Кл}}{\text{Дж}\cdot\text{с}^2} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}^2}{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{с}^2\cdot\text{м}}{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2} = \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}.$$

Например, для α-частицы

$$\frac{q}{m} = \frac{2q_p}{4m_p},$$

где $q_p = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл – заряд протона; $m_p = 1{,}67\cdot10^{-27}$ кг – масса протона;

$$\left(\frac{q}{m}\right)_\alpha = \frac{2\cdot1{,}6\cdot10^{-19}}{4\cdot1{,}67\cdot10^{-27}} = 4{,}8\cdot10^7\ \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}.$$

Ответ: в магнитном поле движется α-частица; $\left(\dfrac{q}{m}\right)_\alpha = 4{,}8\cdot10^7\ \dfrac{\text{Кл}}{\text{кг}}$.

ЗАДАЧА 3.79

Протон и α-частица влетают в однородное магнитное поле, направление которого перпендикулярно к направлению их движения. Найти отношение периода обращения T_1 протона в магнитном поле к периоду обращения T_2 α-частицы.

Дано:	**Решение**
$m_1 = 1{,}67\cdot10^{-27}$ кг $m_2 = 6{,}64\cdot10^{-27}$ кг $q_1 = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл $q_2 = 3{,}2\cdot10^{-19}$ Кл	Период обращения заряженной частицы $$T = \frac{2\pi R}{\upsilon}. \quad (1)$$
$\frac{T_1}{T_2}$ – ?	Скорость частицы υ найдем из условия, что на частицу при ее движении в магнитном поле действует сила Лоренца $F_л = qB\upsilon\sin\alpha$ ($\sin\alpha = 1$ по условию), которая сообщает частице центростремительное ускорение, т.е.

$$F_л = ma_ц = \frac{m\upsilon^2}{R}.$$

Тогда

$$qB\upsilon = \frac{m\upsilon^2}{R}. \quad (2)$$

Из уравнения (2) найдем скорость частицы и подставим ее в формулу (1):

$$T = \frac{2\pi m}{qB}. \quad (3)$$

Учитывая, что заряженные частицы влетают в одно и то же магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, используя выражение (3), найдем отношение их периодов обращения:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{m_1 q_2}{q_2 m_2}, \quad (4)$$

где m_1, q_1 – масса и заряд протона; m_2, q_2 – масса и заряд α-частицы.

Из уравнения (4) найдем отношение их периодов:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1{,}67\cdot10^{-27}\cdot3{,}2\cdot10^{-19}}{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot6{,}64\cdot10^{-27}} = 0{,}5.$$

Ответ: $\frac{T_1}{T_2} = 0{,}5$.

ЗАДАЧА 3.80

В магнитном поле с индукцией B = 0,6 Тл по круговой орбите радиусом R = 4 см движется заряженная частица. Скорость движения частицы $\upsilon = 10^6$ м/с. Найти заряд q частицы и частоту n обращения ее в магнитном поле, если известно, что ее энергия W = 24 кэВ.

Дано:	**Решение**
B = 0,6 Тл R = 0,04 м υ = 10^6 м/с W = $38{,}4 \cdot 10^{-16}$ Дж	
q, n – ?	

Частица не является релятивистской, так как $\upsilon \ll c$. Ее кинетическая энергия

$$W = \frac{m\upsilon^2}{2}, \qquad (2)$$

где υ – скорость частицы, которую найдем из равенства

$$F_л = ma_ц = \frac{m\upsilon^2}{R}.$$

Здесь $F_л$ – сила Лоренца; $a_ц$ – центростремительное ускорение.

$$qB\upsilon = \frac{m\upsilon^2}{R}; \quad \upsilon = \frac{qBR}{m}. \qquad (2)$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), получим:

$$W = \frac{q^2B^2R^2}{2m}. \qquad (3)$$

Из уравнения (3) найдем заряд частицы:

$$q = \sqrt{\frac{2mW}{B^2R^2}}. \qquad (4)$$

Массу частицы m выразим из формулы (1):

$$m = \frac{2W}{\upsilon^2}. \qquad (5)$$

Подставляя выражение (5) в (4), получим:

$$q = \sqrt{\frac{2W \cdot 2W}{\upsilon^2 B^2 R^2}} = \frac{2W}{\upsilon BR};$$

$$[q] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{м} \cdot \text{Тл} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{А} \cdot \text{м}}{\text{м} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}} = \text{А} \cdot \text{с} = \text{Кл};$$

$$q = \frac{2 \cdot 38{,}4 \cdot 10^{-16}}{10^6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}04} = 3{,}2 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}.$$

Для определения частоты обращения n воспользуемся соотношением между циклической частотой ω и частотой n: $\omega = 2\pi n$.

Сила Лоренца при вращении электрона создает нормальное ускорение

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R},$$

тогда

$$m\frac{\upsilon^2}{R} = q\upsilon B; \quad \upsilon = \frac{qBR}{m};$$

$$\upsilon = \omega R; \quad \upsilon = 2\pi n R; \quad n = \frac{\upsilon}{2\pi R};$$

$$n = \frac{Bq}{2\pi m} = \frac{Bq\upsilon^2}{2\pi 2W};$$

$$[n] = \frac{\text{Тл} \cdot \text{Кл}}{\text{кг}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{Кл}}{\text{А} \cdot \text{м} \cdot \text{кг}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{А} \cdot \text{с}}{\text{с}^2 \cdot \text{А} \cdot \text{м} \cdot \text{кг}} = \frac{1}{\text{с}} = \text{Гц};$$

$$n = \frac{0,6 \cdot 3,2 \cdot 10^{-19} \cdot \left(10^6\right)^2}{2 \cdot 3,14 \cdot 2 \cdot 38,4 \cdot 10^{-16}} = 4 \cdot 10^6 \text{ Гц}.$$

Ответ: $q = 3,2 \cdot 10^{-19}$ Кл; $n = 4 \cdot 10^6$ Гц.

ЗАДАЧА 3.81

В однородное магнитное поле влетают протон и α-частица, ускоренные одинаковой разностью потенциалов. Во сколько раз радиус кривизны R_1 траектории протона отличается от радиуса кривизны R_2 траектории α-частицы? Магнитное поле перпендикулярно к скоростям частиц.

Дано:

$m_p = m_1$

$q_p = q_1$

$m_\alpha = 4m_p = m_2$

$q_\alpha = 2q_p = q_2$

$\frac{R_1}{R_2}$ – ?

Решение

На заряженные частицы, влетающие в магнитное поле перпендикулярно к вектору магнитной индукции, действует сила Лоренца

$$F_л = qB\upsilon, \tag{1}$$

которая сообщает им центростремительное ускорение.

Поэтому

$$qB\upsilon = \frac{m\upsilon^2}{R}. \tag{2}$$

Из (2) находим радиус траектории:

$$R = \frac{m\upsilon}{qB}. \tag{3}$$

По закону сохранения энергии работа электрического поля qU, ускоряющая частицу, равна кинетической энергии частицы:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = qU\,, \tag{4}$$

где U – ускоряющая разность потенциалов.

Из уравнения (4) определяется скорость частицы:

$$U = \sqrt{\frac{2qU}{m}}\,. \tag{5}$$

Подставив выражение (5) в (3), найдем радиус кривизны траектории частицы:

$$R = \frac{m}{qB}\sqrt{\frac{2qU}{m}} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{q}}\,. \tag{6}$$

По формуле (6) запишем радиусы R_1 и R_2 для протона и α-частицы:

$$R_1 = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_1U}{q_1}}\,; \quad R_2 = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_2U}{q_2}}\,.$$

Найдем отношение радиусов:

$$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{m_1q_2}{q_1m_2}}\,;$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{m_1 2q_1}{q_1 4m_1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7\,.$$

Ответ: $\frac{R_1}{R_2} = 0{,}7$.

ЗАДАЧА 3.82

Плоский квадратный контур со стороной 10 см, по которому течет ток силой I = 100 А, свободно установился в однородном магнитном поле индукцией 1 Тл (рис. 1). Определить работу A, совершаемую внешними силами при повороте контура относительно оси, проходящей через середину его противоположных сторон, на угол 90°. Считать, что при повороте сила тока не меняется.

Дано:	**Решение**
$I = 100$ А $B = 1$ Тл $b = 0{,}1$ м $\alpha = 90°$	
$A - ?$	

На контур с током в магнитном поле $\vec{B}$ действует вращающий момент $\vec{M}$, величина которого

$$M = P_m B \sin\alpha,$$

где P_m – магнитный момент контура $(P_m = IS)$; B – модуль индукции магнитного поля; α – угол между вектором $\vec{P}_m$, направленным по нормали $\vec{n}$ к контуру, и вектором $\vec{B}$.

В начальный момент контур свободно установился в магнитном поле (рис. 2). Вектор $\vec{B}$ перпендикулярен к плоскости витка. При этом момент сил равен нулю $(M = 0)$, так как силы, действующие на каждую сторону рамки, направлены в разные стороны и лежат в плоскости рисунка, угол $\alpha = 0$, так как направления нормали к рамке $(\vec{n})$ и вектора $\vec{B}$ совпадают. (Нормаль $\vec{n}$ и $\vec{B}$ направлены от нас).

Если внешние силы выведут контур из положения равновесия, то возникший момент будет стремиться вернуть контур в исходное положение. Против этого момента и будет совершаться работа внешних сил (рис. 3).

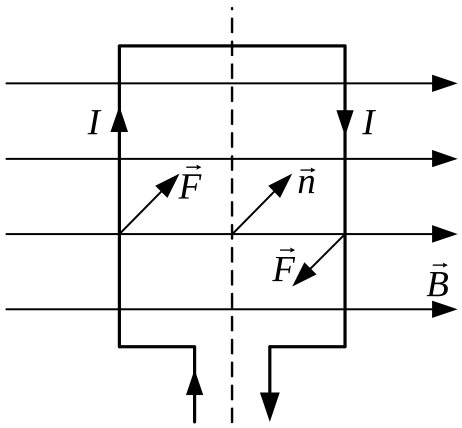


Рис. 1

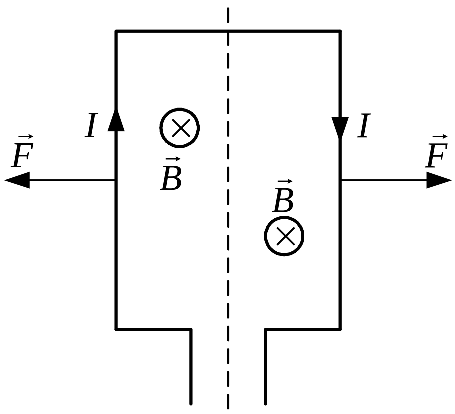


Рис. 2

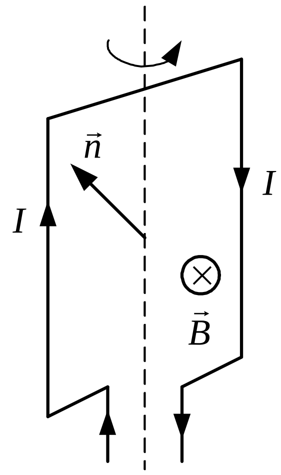


Рис. 3

Элементарная работа при повороте на угол $d\alpha$ равна:

$$dA = Md\alpha; \quad dA = P_m B d\alpha \sin\alpha; \quad dA = Ib^2 B d\alpha \sin\alpha.$$

Полная работа A при повороте на конечный угол $\pi/2$ будет равна интегралу от этого выражения:

$$A = Ib^2 B \int\limits_{\alpha_1=0}^{\alpha_2=\pi/2} \sin\alpha d\alpha = Ib^2 B(-\cos\alpha)\Big|_0^{\pi/2} = Ib^2 B;$$

$$[A] = А \cdot м^2 \cdot Тл = \frac{А \cdot м^2 \cdot Н}{А \cdot м} = Н \cdot м = Дж;$$

$$A = 10^2 \cdot 10^{-2} \cdot 1 \cdot 1 = 1\ Дж.$$

Ответ: $A = 1$ Дж.

ЗАДАЧА 3.83

Длинный провод имеет изгиб в форме правильного треугольника, удаленная сторона которого параллельна проводу. Провод без трения может вращаться вокруг горизонтальной оси в поле тяжести Земли и в однородном вертикальном магнитном поле с постоянной индукцией магнитного поля B = 0,5 Тл. При какой силе постоянного тока I в проводе его треугольный изгиб отклонится на угол 45° от вертикали, если линейная плотность материала провода γ = 12,5 кг/м?

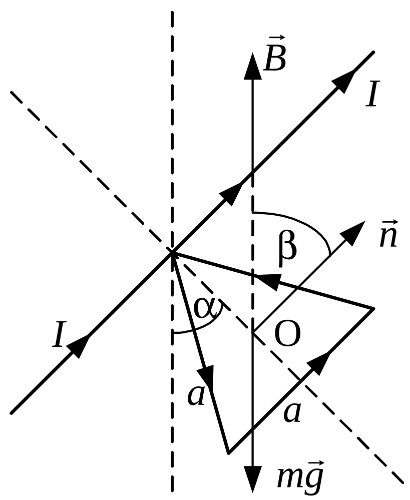
Дано:
γ = 12,5 кг/м
B = 0,5 Тл
α = 45°

I – ?

Решение

Пусть I – искомая сила тока в проводе; B – магнитная индукция; $m\vec{g}$ – сила тяжести треугольного изгиба провода; α – угол плоскости изгиба с вертикалью; О – точка пересечения медиан треугольного изгиба провода или центр масс этого изгиба; a – длина стороны треугольника (см. рис.).

По условию механического равновесия треугольного изгиба момент силы тяжести и момент сил Ампера равны. Поэтому для модулей этих моментов имеем равенство:



$$mg\frac{2}{3}a\sin 60°\sin\alpha = P_m B\sin\beta,$$

где $\vec{P}_m = IS\vec{n}$ – магнитный момент контура с током; S – площадь треугольника;

$$S = \frac{1}{2}a^2\cos 60°.$$

Масса треугольного изгиба провода

$$m = \gamma 3a.$$

Тогда

$$I = \frac{4\gamma g}{B};$$

$$[I] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{м}\cdot\text{с}^2\cdot\text{Тл}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{А}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{Н}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{А}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{кг}\cdot\text{м}} = \text{А};$$

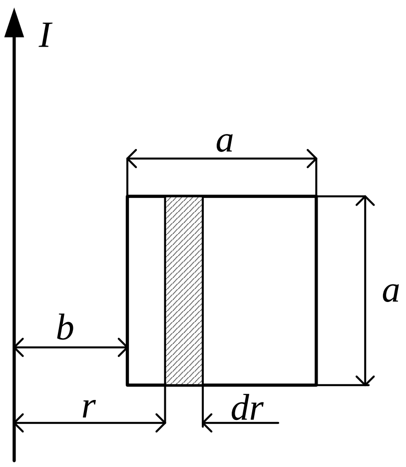
$$I = \frac{4\cdot 12{,}5\cdot 9{,}81}{0{,}5} = 981\ \text{А}.$$

Ответ: $I = 981$ А.

ЗАДАЧА 3.84

В одной плоскости с бесконечным прямолинейным проводом с током I = 20 А расположена квадратная рамка со стороной a = 10 см, причем две стороны рамки параллельны проводу, а расстояние от провода до ближайшей стороны рамки b = 5 см (см. рис.). Определить магнитный поток Φ, пронизывающий рамку.

Дано:	**Решение**
I = 20 А $a = 10^{-1}$ м $b = 5\cdot 10^{-2}$ м μ = 1	Магнитная индукция B бесконечно длинного проводника с током I обратно пропорциональна расстоянию r до той точки, в которой надо ее определить:
Φ – ?	$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r}.$$



Магнитный поток

$$\Phi = \int B dS.$$

Площадь рамки разобьем на узкие элементарные площадки шириной dr и площадью adr (см. рис.), в пределах которых магнитную индукцию можно считать постоянной. Тогда поток сквозь элементарную площадку

$$d\Phi = BdS = \frac{\mu_0 \mu I a}{2\pi r} dr. \tag{1}$$

Проинтегрировав выражение (1) в пределах от b до $b+a$, найдем искомый магнитный поток:

$$\Phi = \int_b^{b+a} \frac{\mu_0 \mu I a}{2\pi} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 \mu I a}{2\pi} \ln \frac{b+a}{b};$$

$$[\Phi] = \frac{\text{Гн} \cdot \text{А} \cdot \text{м}}{\text{м}} = \text{Гн} \cdot \text{А} = \text{Вб};$$

$$\Phi = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 20 \cdot 10^{-1}}{2\pi} \ln 3 = 4{,}4 \cdot 10^{-7}\ \text{Вб} = 0{,}44\ \text{мкВб}.$$

Ответ: $\Phi = 0{,}44$ мкВб.

ЗАДАЧА 3.85

В одной плоскости с бесконечным прямым проводником с током I = 10 А расположена прямоугольная проволочная рамка (стороны a = 25 см, b = 10 см), по которой протекает ток I_1 = 2 А. Длинные стороны рамки параллельны прямому току, причем ближайшая из них находится от прямого тока на расстоянии c = 10 см и ток в ней сонаправлен току I. Определить силы, действующие на каждую из сторон рамки.

Дано:
I = 10 А
a = 0,25 м
b = 0,1 м
I_1 = 2 А
c = 0,1 м

F_1, F_2, F_3, F_4 – ?

Решение

Прямоугольная рамка находится в неоднородном поле прямого тока с индукцией

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \tag{1}$$

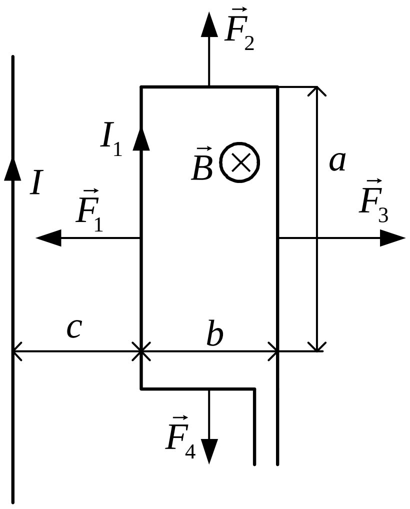
где μ = 1; r – расстояние от прямого тока до рассматриваемой точки.

Сила, с которой действует поле прямого тока, может быть найдена суммированием элементарных сил, определяемых законом Ампера,

$$dF = IBdl \sin\alpha,$$

где α – угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{B}$.

Вектор $\vec{B}$ в пределах рамки направлен перпендикулярно к ее плоскости за чертеж, и в пределах каждой стороны угол $\alpha = \frac{\pi}{2}$.



Это означает, что в пределах одной стороны элементарные силы параллельны друг другу и сложение векторов можно заменить сложением их модулей:

$$F = \int_l dF = \int_l I_1 B dl , \qquad (2)$$

где интегрирование ведется по соответствующей стороне рамки.

Короткие стороны рамки расположены одинаково относительно провода, поэтому действующие на них силы численно равны, но направлены противоположно. Их направления, как и направления других сил (см. рис.), определяются по правилу левой руки. Вдоль каждой из коротких сторон прямоугольника магнитная индукция изменяется (см. формулу (1).

Тогда, произведя интегрирование с учетом (2),

$$F_2 = F_4 = \int_c^{c+b} \frac{\mu_0 I_1 I}{2\pi l} dl = \frac{\mu_0 I_1 I}{2\pi} \ln \frac{c+b}{c} .$$

Длинные стороны рамки параллельны прямому току, находясь от него соответственно на расстояниях c и $c+b$.

Тогда

$$F_1 = \int_0^a I_1 B_1 dl = \int_0^a \frac{\mu_0 I_1 I}{2\pi c} dl = \frac{\mu_0 I_1 I a}{2\pi c} ;$$

$$F_3 = \int_0^a I_1 B_2 dl = \int_0^a \frac{\mu_0 I_1 I}{2\pi (c+b)} dl = \frac{\mu_0 I_1 I a}{2\pi (c+b)} ,$$

где $B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi c}$ и $B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi (c+b)}$;

$$[F_2]=\frac{\text{Гн}\cdot\text{А}\cdot\text{А}}{\text{м}}=\frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}}{\text{м}}=\frac{\text{Дж}}{\text{м}}=\text{Н};$$

$$[F_1]=\frac{\text{Гн}\cdot\text{А}\cdot\text{А}\cdot\text{м}}{\text{м}\cdot\text{м}}=\frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}^2\cdot\text{м}}{\text{А}\cdot\text{м}^2}=\frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}}{\text{м}}=\frac{\text{Дж}}{\text{м}}=\text{Н};$$

$$F_1=\frac{4\pi\cdot10^{-7}\cdot2\cdot10\cdot0{,}25}{2\pi\cdot0{,}1}=16\cdot10^{-6}H=16\text{ мкН};$$

$$F_2=F_4=\frac{4\pi\cdot10^{-7}\cdot2\cdot10}{2\pi}\ln2=5\cdot10^{-6}H=5\text{ мкН};$$

$$F_3=\frac{4\pi\cdot10^{-7}\cdot2\cdot10\cdot0{,}25}{2\pi\cdot0{,}2}=10\cdot10^{-6}H=10\text{ мкН}.$$

Ответ: $F_1=16$ мкН; $F_2=5$ мкН; $F_3=10$ мкН; $F_4=5$ мкН.

ЗАДАЧА 3.86

В однородном магнитном поле (B = 1 мТл) в плоскости, перпендикулярной к линиям магнитной индукции, расположено тонкое проволочное полукольцо длиной l = 50 см, по которому течет ток I = 5 А. Определить результирующую силу, действующую на полукольцо.

Дано:	Решение
$B = 10^{-3}$ Тл $l = 0{,}5$ м $I = 5$ А F – ?	Согласно условию задачи полукольцо расположили (см. рис.) перпендикулярно к линиям магнитной индукции (вектор $\vec{B}$ направлен перпендикулярно к чертежу от нас). На полукольце выделим малый элемент dl с током I.

На этот элемент будет действовать по закону Ампера сила

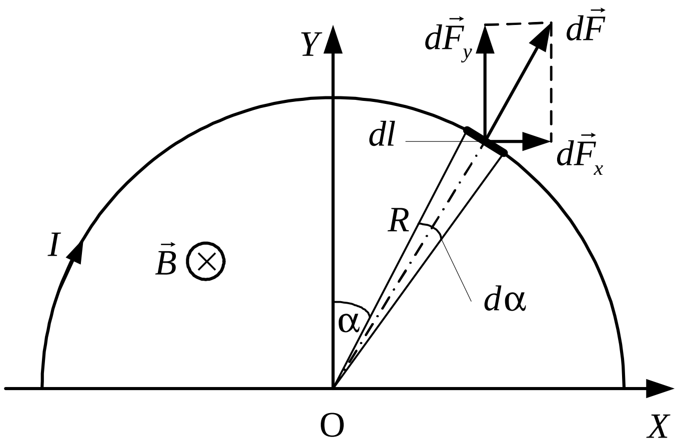
$$d\vec{F}=I\left[d\vec{l},\vec{B}\right], \tag{1}$$

направление которой определяется правилом левой руки (см. рис.).

По условию задачи во всех точках полукольца угол между $d\vec{l}$ и $\vec{B}$ равен $\pi/2$, поэтому уравнение (1) в скалярной форме примет вид

$$dF=IBdl. \tag{2}$$

Все элементарные силы dF (при указанном на рисунке направлении тока они растягивают кольцо) лежат в одной плоскости, совпадающей с плоскостью рисунка. Однако при переходе от одного элемента полукольца к другому их направления меняются (они всегда направлены вдоль радиуса полукольца). Для нахождения результирующей силы необходимо найти ее проекции на оси координат, которые выбраны с учетом симметрии полукольца (см. рис.).



Тогда

$$F_x = \int_l dF_x \quad \text{и} \quad F_y = \int_l dF_y ,$$

где интеграл берется по полукольцу; dF_x и dF_y – проекции элементарных сил на оси координат; F_x и F_y – проекции результирующей силы на те же оси координат.

Из соображений симметрии проекция результирующей силы на ось ОX

$$F_x = \int_l dF_x = 0 . \tag{3}$$

Проекция элементарной силы на ось ОY

$$dF_y = dF\cos\alpha = IBdl\cos\alpha = IBR\cos\alpha d\alpha .$$

Здесь учли формулу (2) и то, что $dl = Rd\alpha$, где R – радиус полукольца.

Проинтегрировав по полукольцу (из рисунка следует, что α изменяется от $-\pi/2$ до $+\pi/2$), найдем:

$$F_y = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} IBR\cos\alpha d\alpha = 2IBR .$$

Учитывая, что $R = \dfrac{l}{\pi}$, получим:

$$F_y = \frac{2IBl}{\pi} .$$

Ясно, что сила $F = F_y$ и направлена вдоль оси ОY .

Таким образом, сила, действующая на полукольцо,

$$F = \frac{2IBl}{\pi};$$

$$[F] = \text{А} \cdot \text{Тл} \cdot \text{м} = \frac{\text{А} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{м}} = \text{Н};$$

$$F = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}5}{3{,}14} = 1{,}59 \cdot 10^{-3} H = 1{,}59 \text{ мН}.$$

Ответ: $F = 1{,}59$ мН.

ЗАДАЧА 3.87

Определить индукцию B и напряженность H магнитного поля на оси тороида без сердечника, по обмотке которого, содержащей N = 200 витков, идет ток I = 5 А. Внешний диаметр d_1 тороида равен 30 см, внутренний d_2 = 20 см.

Дано:
I = 5 А
N = 200
d_1 = 0,3 м
d_2 = 0,2 м
B_0, H – ?

Решение

Для определения напряженности магнитного поля внутри тороида вычислим циркуляцию вектора $\vec{H}$ вдоль линии магнитной индукции поля:

$$\oint Hdl.$$

Из условия симметрии следует, что линии магнитной индукции тороида представляют собой окружности и что во всех точках этих линий напряженности одинаковы. Поэтому в выражении циркуляции напряженность H можно вынести за знак интеграла, а интегрирование проводить в пределах от нуля до $2\pi r$, где r – радиус окружности, совпадающей с линией индукции, вдоль которой определяется циркуляция, т.е.

$$\oint_l Hdl = H \int_0^{2\pi r} dl = 2\pi r H. \qquad (1)$$

С другой стороны, в соответствии с законом полного тока циркуляция вектора напряженности магнитного поля равна сумме токов, охватываемых контуром, вдоль которого вычисляется циркуляция:

$$\oint_l H_l dl = \sum_{i=1}^{n} I_i. \qquad (2)$$

Приравняв правые части равенств (1) и (2), получим:

$$2\pi rH = \sum_{i=1}^{n} I_i \,. \qquad (3)$$

Линия, проходящая вдоль тороида, охватывает число токов, равное числу витков тороида. Сила тока во всех витках одинакова. Поэтому формула (3) примет вид

$$2\pi rH = NI \,.$$

Откуда

$$H = \frac{NI}{2\pi r}. \qquad (4)$$

Для средней линии тороида

$$r = \left(\frac{1}{2}\right)(R_1 + R_2) = \left(\frac{1}{4}\right)(d_1 + d_2).$$

Подставив это выражение r в формулу (4), найдем:

$$H = \frac{2NI}{\pi(d_1 + d_2)}.$$

Магнитная индукция B_0 в вакууме связана с напряженностью поля соотношением

$$B_0 = \mu_0 H \,.$$

Следовательно,

$$B_0 = \frac{2\mu_0 NI}{\pi(d_1 - d_2)};$$

$$[H] = \frac{\text{А}}{\text{м}}; \quad [B_0] = \frac{\text{Гн} \cdot \text{А}}{\text{м} \cdot \text{м}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{А}}{\text{А} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{А} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}} = \text{Тл};$$

$$H = \frac{2 \cdot 200 \cdot 5}{3{,}14(0{,}3 + 0{,}2)} = 1{,}37 \cdot 10^3 \ \frac{\text{А}}{\text{м}} = 1{,}37 \ \frac{\text{кА}}{\text{м}};$$

$$B_0 = \frac{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 200 \cdot 5}{\pi(0{,}3 + 0{,}2)} = 1{,}6 \cdot 10^{-3} \ \text{Тл} = 1{,}6 \ \text{мТл}.$$

Ответ: $H = 1{,}37 \ \frac{\text{кА}}{\text{м}}$; $B_0 = 1{,}6$ мТл.

ЗАДАЧА 3.88

Чугунное кольцо имеет воздушный зазор длиной l_0 = 5 мм. Длина l средней линии кольца равна 1 м. Сколько витков N содержит обмотка на кольце, если при силе тока I = 4 А индукция B магнитного поля в воздушном зазоре равна 0,5 Тл? Рассеянием магнитного потока в воздушном зазоре можно пренебречь. Явление гистерезиса не учитывать.

Дано:

$l_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ м

l = 1 м

I = 4 А

B = 0,5 Тл

N – ?

Решение

Пренебрегая рассеянием магнитного потока, мы можем принять, что индукция поля в воздушном зазоре равна индукции поля в чугуне. На основании закона полного тока запишем:

$$IN = Hl + H_0 l_0 .$$

По графику (см. рис.) находим, что при B = 0,5 Тл напряженность H магнитного поля в чугуне равна 1,5 кА/м.

Так как для воздуха $\mu = 1$, то напряженность поля в воздушном зазоре

$$H_0 = \frac{B}{\mu_0};$$

$$H_0 = \frac{0{,}5}{4\pi \cdot 10^{-7}} = \frac{0{,}5}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7}} = 4 \cdot 10^5 \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

Искомое число витков

$$N = \frac{Hl + H_0 l_0}{I};$$

$$[N] = \frac{\frac{\text{А}\cdot\text{м}}{\text{м}} + \frac{\text{А}\cdot\text{м}}{\text{м}}}{\text{А}} = \frac{\text{А}\cdot\text{м}}{\text{м}\cdot\text{А}} = 1;$$

$$N = \frac{1{,}5 \cdot 10^3 \cdot 1 + 4 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{4} = 875.$$

Ответ: $N = 875$.

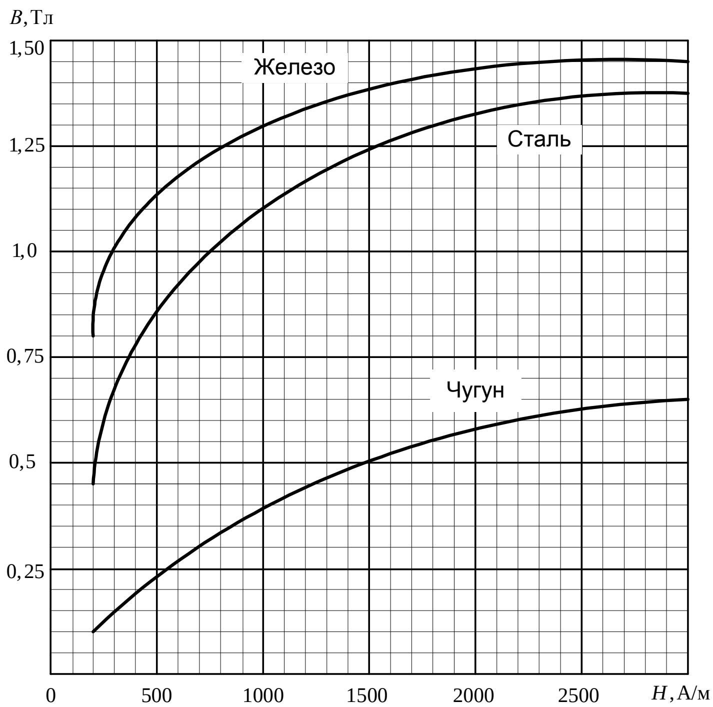


График зависимости магнитной индукции B от напряженности H магнитного поля

ЗАДАЧА 3.89

На железном сердечнике в виде тора со средним диаметром d = 70 мм намотана обмотка с общим числом витков N = 600. В сердечнике сделана узкая поперечная прорезь шириной b = 1,5 мм (см. рис.). При силе тока через обмотку I = 4 А магнитная индукция в прорези B_0 = 1,5 Тл. Пренебрегая рассеянием поля на краях прорези, определить магнитную проницаемость железа при данных условиях.

Дано:
$d = 7\cdot10^{-2}$ м
$N = 600$
$I = 4$ А
$B_0 = 1{,}5$ Тл
$b = 1{,}5\cdot10^{-3}$ м
μ – ?

Решение

Теорема о циркуляции вектора H:

$$\oint\limits_L \vec{H}dl = \oint\limits_L H_l dl = I,$$

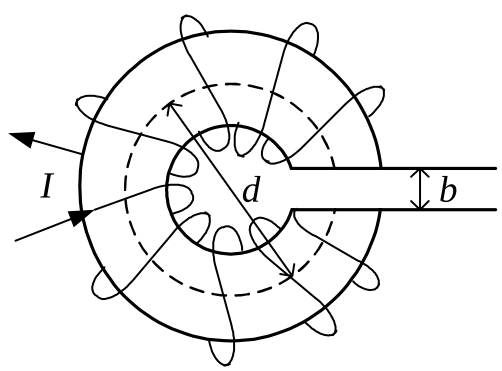
где I – алгебраическая сумма токов проводимости, охватываемых контуром. Выбрав в качестве контура окружность диаметром d (см. рис., штриховая линия), теорему можно записать в виде:

$$H(\pi d - b) + H_0 b = NI, \qquad (1)$$

где H и H_0 – соответственно модули вектора $\vec{H}$ в железе и прорези; N – число витков тороида.

Поскольку рассеяние поля на краях прорези отсутствует, магнитная индукция поля в железе и прорези одинакова:

$$B = B_0. \qquad (2)$$



Учитывая равенство (2) и то, что $B = \mu_0\mu H$ (μ – магнитная проницаемость железа) и $B_0 = \mu_0 H$ (магнитная проницаемость вакуума равна 1), выражение (1) можем записать в виде:

$$\frac{B_0}{\mu_0\mu}(\pi d - b) + \frac{B_0}{\mu_0} b = NI.$$

Откуда искомая магнитная проницаемость железа при рассматриваемых условиях

$$\mu = \frac{(\pi d - b)B_0}{\mu_0 NI - bB_0};$$

$$[\mu]=\frac{\text{м}\cdot\text{Тл}}{\frac{\text{Гн}}{\text{м}}\cdot\text{А}-\text{м}\cdot\text{Тл}}=\frac{\text{м}\cdot\text{Тл}}{\frac{\text{Гн}}{\text{м}}\cdot\text{А}-\text{м}\cdot\text{Тл}}=\frac{\frac{\text{м}\cdot\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{м}}}{\frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}}{\text{А}\cdot\text{м}}-\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{А}\cdot\text{м}}}=$$

$$=\frac{\frac{\text{Дж}}{\text{А}\cdot\text{м}}}{\frac{\text{Дж}}{\text{А}\cdot\text{м}}-\frac{\text{Дж}}{\text{А}\cdot\text{м}}}=\frac{\text{Дж}\cdot\text{А}\cdot\text{м}}{\text{А}\cdot\text{м}\cdot\text{Дж}}=1;$$

$$\mu=\frac{\left(3{,}14\cdot 7\cdot 10^{-2}-1{,}5\cdot 10^{-3}\right)\cdot 1{,}5}{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 600\cdot 4-1{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 1{,}5}=428.$$

Ответ: $\mu=428$.

ЗАДАЧА 3.90

Через сечение медной пластинки толщиной d = 0,2 мм пропускается ток силой I = 6 А. Пластинка помещается в однородное магнитное поле с индукцией B = 1 Тл, перпендикулярное к ребру пластинки и к направлению тока. Считая концентрацию электронов проводимости равной концентрации атомов, определить возникшую в пластинке поперечную (холловскую) разность потенциалов. Плотность меди 8,93 г/см^3.

Дано:

d = $2\cdot 10^{-4}$ м
I = 6 А
B = 1 Тл
ρ = $8{,}93\cdot 10^{3}$ кг/м^3
μ = $6{,}5\cdot 10^{-3}$ кг/моль
N_A = $6{,}02\cdot 10^{23}$ 1/моль
e = $1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл

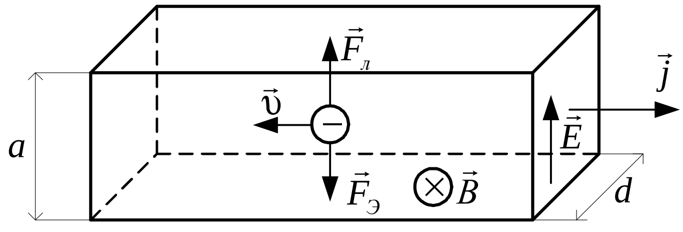
$\Delta\varphi$ – ?

Решение

Техническое направление тока показано на рисунке (вектор $\vec{j}$), следовательно, свободные электроны в медной пластине движутся в противоположном направлении.

Так как пластина помещена в магнитное поле, направленное перпендикулярно к направлению движения свободных электронов, то на электроны будет действовать сила Лоренца, направленная вверх.

Следовательно, на верхней грани пластины будет избыток электронов, а на нижней грани – недостаток. Смещение электронов продолжается до тех пор, пока в образовавшемся



электрическом поле не будет уравновешена сила Лоренца $F_л = e\upsilon B$ действием силы со стороны образовавшегося электрического поля $F_Э = eE$. Получим выражение $E = \upsilon B$.

Так как электрическое поле напряженностью E однородное, то разность потенциалов между нижней и верхней гранями

$$\Delta\varphi = Ea; \quad \Delta\varphi = \upsilon Ba,$$

где a – вертикальный размер образца.

Скорость движения электронов υ можно найти, используя плотность тока: $j = \frac{I}{S} = \frac{I}{ad}$, где d – толщина образца;

$$j = en\upsilon; \text{ отсюда } \quad \upsilon = \frac{I}{enad},$$

где n – концентрация свободных электронов в медной пластинке.

Так как концентрация свободных электронов равна концентрации атомов, то

$$n = \frac{N}{V} = \frac{mN_A}{\mu V} = \frac{\rho N_A}{\mu},$$

где N_A – число Авогадро; μ – молярная масса меди.

Тогда

$$\upsilon = \frac{I\mu}{ead\rho N_A}.$$

Искомая разность потенциалов

$$\Delta\varphi = \frac{I\mu B}{ed\rho N_A};$$

$$[\Delta\varphi] = \frac{\text{А} \cdot \text{кг} \cdot \text{Тл} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{Кл} \cdot \text{м} \cdot \text{кг}} = \frac{\text{А} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{А} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{А} \cdot \text{с}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{А}}{\text{А} \cdot \text{с}} = \text{В};$$

$$\Delta\varphi = \frac{6 \cdot 63{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 8{,}93 \cdot 10^3 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}} = 2{,}21 \cdot 10^{-6}\ \text{В} = 2{,}21\ \text{мкВ}.$$

Ответ: $\Delta\varphi = 2{,}21$ мкВ.

3.4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

Основные формулы

Основной закон электромагнитной индукции (закон Фарадея):

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где ε_i – мгновенное значение ЭДС индукции; $\frac{d\Phi}{dt}$ – скорость изменения магнитного потока.

Знак «минус» обусловлен правилом Ленца.

Если контур состоит не из одного, а из N одинаковых витков, то

$$\varepsilon_i = -\frac{d\psi}{dt},$$

где $d\psi = Nd\Phi$ – потокосцепление (полный магнитный поток).

Индукционный ток

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt},$$

где R – сопротивление контура.

Разность потенциалов U на концах проводника длиной l, движущегося со скоростью υ в однородном магнитном поле,

$$U = Bl\upsilon\sin\alpha,$$

где α – угол между направлениями векторов скорости $\vec{\upsilon}$ и магнитной индукции $\vec{B}$.

Электродвижущая сила индукции ε_i, возникающая в рамке, содержащей N витков, площадью S, при вращении рамки с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией B,

$$\varepsilon_i = BNS\omega\sin\omega t,$$

где $\omega t = \alpha$ – мгновенное значение угла между вектором $\vec{B}$ и нормалью $\vec{n}$ к плоскости рамки.

Магнитный поток, создаваемый током I в контуре с индуктивностью L,

$$\Phi = LI.$$

Индуктивность L соленоида зависит от геометрических размеров контура и заполняющей его среды:

$$L = \mu\mu_0\frac{N^2 S}{l};$$

$$L = \mu\mu_0 n^2 lS = \mu\mu_0 n^2 V\,,$$

где N – число витков соленоида; l – его длина; S – площадь поперечного сечения соленоида; $n = \dfrac{N}{l}$ – число витков, приходящихся на единицу длины соленоида; $V = Sl$ – объем соленоида.

Электродвижущая сила самоиндукции

$$\varepsilon_c = -L\frac{dI}{dt}\,,$$

где L – индуктивность контура; $\dfrac{dI}{dt}$ – скорость изменения силы тока.

Мгновенное значение силы тока I в цепи, обладающей активным сопротивлением R и индуктивностью L:

а) после замыкания цепи

$$I = \frac{\varepsilon}{R+r}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right); \qquad I = I_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right),$$

где ε – ЭДС источника; r – внутреннее сопротивление источника; t – время, прошедшее после замыкания цепи; $\tau = L/R$ – постоянная времени цепи; I_0 – сила тока в цепи при $t = 0$;

б) после размыкания цепи

$$I = I_0 e^{-(R/L)t}; \qquad I = I_0 e^{-t/\tau},$$

где I_0 – сила тока в цепи при $t = 0$; t – время, прошедшее после размыкания цепи.

Коэффициент трансформации K (в режиме холостого хода)

$$K = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{N_2}{N_1},$$

где N, ε – соответственно число витков и ЭДС в обмотках трансформатора.

Энергия W магнитного поля, созданного контуром индуктивности L, по которому течет ток I,

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

Объемная плотность ω энергии W магнитного поля в объеме поля V

$$\omega = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{BH}{2}.$$

Решение задач

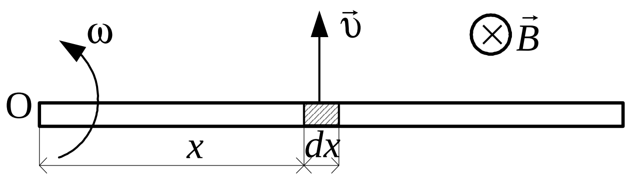
ЗАДАЧА 3.91

Стержень длиной 1 м вращается в однородном магнитном поле с постоянной угловой скоростью ω = 30 рад/с. Ось вращения стержня параллельна магнитным силовым линиям поля и проходит через конец стержня. Определить ЭДС индукции, возникшую на концах стержня, если индукция магнитного поля $B = 2\cdot 10^{-2}$ Тл.

Дано:	**Решение**
l = 1 м ω = 30 рад/с $B = 2\cdot 10^{-2}$ Тл ε – ?	При вращении стержня в любом его бесконечно малом участке dx (см. рис.), взятом на расстоянии x от оси вращения O, возникает элементарная ЭДС индукции

$$d\varepsilon = -B\upsilon dx,$$

где υ – линейная скорость участка dx.



Поскольку $\upsilon = \omega x$, то

$$d\varepsilon = -B\omega x dx.$$

Интегрируя полученное выражение по длине стержня (от O до l), найдем ЭДС индукции:

$$\varepsilon = -\int_0^l B\omega x dx = -B\omega \frac{x^2}{2}\bigg|_0^l = -\frac{1}{2}B\omega l^2;$$

$$[\varepsilon] = \frac{\text{Тл}\cdot\text{м}^2}{\text{с}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{А}\cdot\text{м}\cdot\text{с}} = \frac{\text{Дж}\cdot\text{м}}{\text{А}\cdot\text{м}\cdot\text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{А}\cdot\text{с}} = \frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}}{\text{А}\cdot\text{с}} = \text{В};$$

$$\varepsilon = -\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 10^{-2}\cdot 30\cdot 1^2 = -0{,}3\ \text{В}.$$

Знак «минус» определяет направление ЭДС индукции.

Ответ: $\varepsilon = -0{,}3$ В.

ЗАДАЧА 3.92

В однородном горизонтальном магнитном поле с магнитной индукцией B = 0,5 Тл по вертикально расположенным рельсам, замкнутым через последовательно соединенные резистор сопротивлением R = 5 Ом и источник ЭДС ε = 12 В (см. рис.), свободно скользит без нарушения контакта проводник длиной l = 1 м и массой m = 100 г. Найти величину скорости υ и направление установившегося движения проводника. Сопротивлением рельсов, проводника и внутренним сопротивлением источника пренебречь.

Дано:
B = 0,5 Тл
R = 5 Ом
ε = 12 В
l = 1 м
m = 0,1 кг

υ – ?

Решение

Сила тока в контуре $abcd$ $\quad I = \dfrac{\varepsilon}{R}$.

Поскольку проводник ad расположен в магнитном поле, то при прохождении тока на него будет действовать сила Ампера

$$F_A = IBl = \frac{\varepsilon Bl}{R}; \tag{1}$$

$$F_A = \frac{12 \cdot 0{,}5 \cdot 1}{5} = 1{,}2 \text{ Н},$$

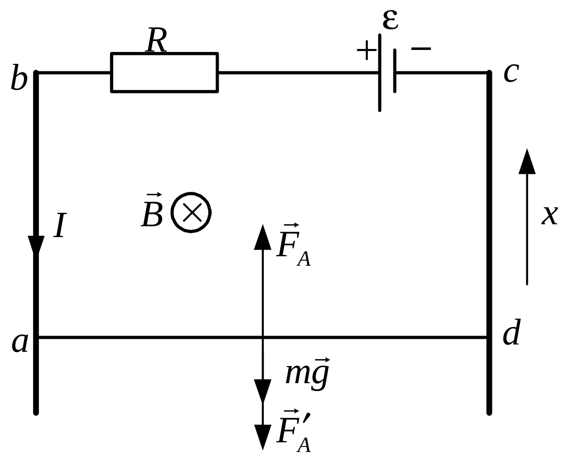
направленная вверх (по правилу левой руки).

На проводник также действует сила тяжести

$$mg = 0{,}1 \cdot 9{,}8 = 0{,}98 \text{ Н},$$

направленная вниз.

Под действием результирующей этих двух сил проводник ad начинает двигаться вверх с ускорением. При этом на концах проводника возникает разность потенциалов, которая равна



$$U = B\upsilon l.$$

В проводнике ab возникает индукционный ток

$$I_i = \frac{U}{R} = \frac{B\upsilon l}{R}, \tag{2}$$

а значит, появится новая сила Ампера

$$F'_A = I_i Bl = \frac{B^2 l^2 \upsilon}{R}, \tag{3}$$

направленная (по правилу Ленца) против движения проводника, т.е. вниз.

По второму закону Ньютона запишем:

$$\vec{F}_A + m\vec{g} + \vec{F}'_A = m\vec{a}. \tag{4}$$

При установившемся движении $\vec{\upsilon} = \text{const}$, а ускорение $\vec{a} = 0$. В проекции на направление движения (ось X) уравнение (4) примет вид:

$$F_A - mg - F'_A = 0. \qquad (5)$$

Подставляя в уравнение (5) выражения (1) и (3), получим:

$$\frac{\varepsilon l B}{R} - mg = \frac{l^2 B^2 \upsilon}{R};$$

$$\varepsilon l B - mgR = l^2 B^2 \upsilon,$$

откуда

$$\upsilon = \frac{\varepsilon l B - mgR}{l^2 B^2};$$

$$[\upsilon] = \frac{\text{В} \cdot \text{м} \cdot \text{Тл} - \text{Н} \cdot \text{Ом}}{\text{м}^2 \cdot \text{Тл}^2} = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{Ом}}{\text{Н}^2 \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{Ом}}{\text{Н}} = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{В}}{\text{А} \cdot \text{Н}} = \frac{\text{А} \cdot \text{В}}{\text{Н}} \cdot \frac{\text{с}}{\text{с}} =$$

$$= \frac{\text{Дж}}{\text{Н} \cdot \text{с}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{Н} \cdot \text{с}} = \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\upsilon = \frac{12 \cdot 1 \cdot 0{,}5 - 0{,}1 \cdot 9{,}8 \cdot 5}{1^2 \cdot 0{,}5^2} = 4{,}4\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\upsilon = 4{,}4\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

ЗАДАЧА 3.93

В магнитном поле Земли находится виток проволоки радиусом r = 20 см и сопротивлением 2 Ом. Если виток перевернуть с одной стороны на другую, то по проволоке протечет заряд q. Какое количество электричества q протечет по витку, если виток первоначально расположен горизонтально, а вертикальная составляющая индукции $\vec{B}$ магнитного поля Земли равна 50 мкТл?

Дано:

r = 0,2 м
R = 2 Ом
B = $5 \cdot 10^{-5}$ Тл

q – ?

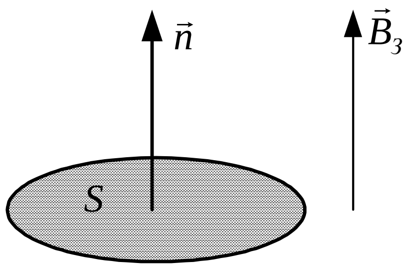
Решение

Первоначальное положение витка в поле Земли горизонтальное (см. рис.). В этом случае магнитный поток, пронизывающий виток,

$$\Phi_1 = BS\cos\alpha_1,$$

где α_1 – угол между нормалью к поверхности витка и направлением индукции магнитного поля Земли;

$$\alpha_1 = 0°; \quad \cos\alpha_1 = 1; \quad \Phi_1 = BS.$$



По условию задачи при повороте витка по проволоке потечет ток. Сила тока $I = \frac{dq}{dt}$, откуда

$$dq = Idt. \qquad (1)$$

С другой стороны, сила тока

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R}, \qquad (2)$$

где ε_i – ЭДС, индуцируемая в витке.

Тогда из выражений (1) и (2) получим:

$$dq = \frac{\varepsilon_i}{R} dt. \qquad (3)$$

Электродвижущая сила индукции ε_i связана со скоростью изменения магнитного потока Φ по закону Фарадея:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (4)$$

Из уравнений (3) и (4) запишем:

$$dq = -\frac{d\Phi}{R}. \qquad (5)$$

Интегрируем выражение (5) с пределами интегрирования от Φ_1 до Φ_2:

$$q = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} -\frac{d\Phi}{R} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R} = \frac{2BS}{R},$$

где $S = \pi r^2$ – площадь витка;

$$\Phi_2 = BS\cos 180^\circ.$$

Окончательно получаем:

$$q = \frac{2\pi B r^2}{R};$$

$$[q] = \frac{\text{Тл} \cdot \text{м}^2}{\text{Ом}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{А}}{\text{А} \cdot \text{м} \cdot \text{В}} = \frac{\text{Дж}}{\text{В}} = \text{Кл};$$

$$q = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}2^2}{2} = 6{,}28 \cdot 10^{-6}\ \text{Кл} = 6{,}28\ \text{мкКл}.$$

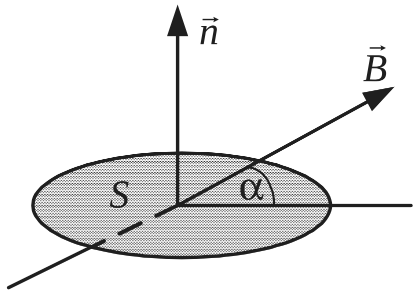
Ответ: $q = 6{,}28$ мкКл.

ЗАДАЧА 3.94

Проволочное кольцо радиусом r = 8 см и сопротивлением R = 0,1 Ом находится в однородном магнитном поле. Плоскость кольца составляет угол α = 30° с линиями индукции поля. Если магнитное поле выключить, то по кольцу протечет количество электричества q = 10 мКл. Какова была индукция B магнитного поля?

Дано:	Решение
r = 0,08 м R = 0,1 Ом α = 30° $q = 10^{-2}$ Кл	Рассмотрим положение проволочного кольца в магнитном поле (см. рис.). При выключении магнитного поля меняется магнитный поток, пронизывающий кольцо, и, следовательно, возникает ЭДС индукции
B – ?	$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (1)$$

До выключения магнитного поля проволочное кольцо пронизывал магнитный поток



$$\Phi_1 = BS\cos\beta,$$

где β – угол между нормалью к плоскости кольца и вектором индукции $\vec{B}$;

$$(\beta = \pi/2 - \alpha = 60°).$$

Если магнитное поле выключено, то $B = 0$ и $\Phi_2 = 0$.

При выключении магнитного поля по кольцу потечет ток. Сила тока $I = \frac{dq}{dt}$, откуда заряд

$$dq = Idt. \qquad (2)$$

С другой стороны, по закону Ома сила тока $I = \frac{\varepsilon_i}{R}$,

тогда

$$dq = \frac{\varepsilon_1}{R}dt. \qquad (3)$$

Из выражений (1) – (3) получим:

$$dq = -\frac{d\Phi}{dt}\frac{dt}{R} = -\frac{d\Phi}{R}.$$

Тогда

$$q = -\frac{1}{R}\int_{\Phi_1}^{0} d\Phi = \frac{\Phi_1}{R} = \frac{BS}{R}\cos\beta . \qquad (4)$$

Площадь кольца $S = \pi r^2$.

Из уравнения (4) найдем искомую величину B магнитного поля:

$$B = \frac{qR}{\pi r^2 \cos\beta};$$

$$[B] = \frac{\text{Кл}\cdot\text{Ом}}{\text{м}^2} = \frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}}{\text{А}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{А}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{м}} = \text{Тл};$$

$$B = \frac{10^{-2}\cdot 0{,}1}{3{,}14\cdot 0{,}08^2 \cos 60^\circ} = 0{,}1 \text{ Тл}.$$

Ответ: $B = 0{,}1$ Тл.

ЗАДАЧА 3.95

В однородном магнитном поле с индукцией B = 0,1 Тл с частотой n = 10 об/с вращается рамка, содержащая N = 1000 витков провода. Ось рамки перпендикулярна к направлению магнитного поля. Максимальная ЭДС индукции, возникающая в рамке, ε_{max} = 94,2 В. Найти площадь рамки S.

Дано:

B = 0,1 Тл

n = 10 об/с

N = 1000

ε_{max} = 94,2 В

S – ?

Решение

Запишем закон электромагнитной индукции:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}N, \qquad (1)$$

где $\Phi = BS\cos\omega t$ – магнитный поток, пронизывающий плоскость витка рамки; ω – угловая скорость вращения рамки.

Тогда

$$\frac{d\Phi}{dt} = -BS\omega\sin\omega t. \qquad (2)$$

Учитывая, что $\omega = 2\pi n$, из уравнений (1) и (2) получим:

$$\varepsilon_i = BS2\pi nN\sin\omega t.$$

Электродвижущая сила индукции максимальна, когда $\sin\omega t = 1$. Следовательно,

$$\varepsilon_{\max} = BS2\pi nN .$$

Откуда площадь рамки

$$S = \frac{\varepsilon_{\max}}{2\pi nNB};$$

$$[S] = \frac{\text{В}\cdot\text{с}}{\text{Тл}} = \frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}\cdot\text{м}}{\text{Н}} = \frac{\text{Дж}\cdot\text{м}}{\text{Н}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Н}} = \text{м}^2;$$

$$S = \frac{94,2}{2\cdot 3,14\cdot 10\cdot 1000\cdot 0,1} = 15\cdot 10^{-3}\ \text{м}^2.$$

Ответ: $S = 15\cdot 10^{-3}\ \text{м}^2$.

ЗАДАЧА 3.96

В однородном магнитном поле с индукцией B = 0,8 Тл в плоскости, перпендикулярной к линиям индукции поля, вращается стержень длиной l = 20 см. Ось вращения проходит через один из концов стержня. При какой частоте вращения n разность потенциалов на концах его U = 1,6 В?

Дано:
B = 0,8 Тл
l = 0,2 м
U = 1,6 В

n – ?

Решение

Под действием магнитной составляющей силы Лоренца

$$\vec{F}_л = e\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right] \tag{1}$$

в стержне при его вращении происходит перераспределение электронов.

Здесь e – заряд электрона; $\vec{\upsilon}$ – скорость его движения; $\vec{B}$ – индукция магнитного поля.

На концах стержня образуются заряды разных знаков, которые создают электрическое поле напряженностью

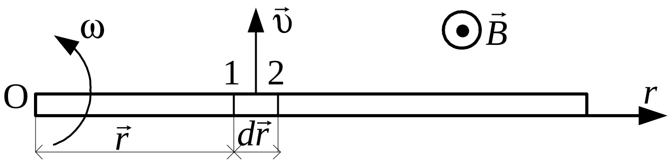
$$E = -\frac{F_л}{e} \tag{2}$$

и разностью потенциалов между двумя произвольными точками стержня

$$U = \int_1^2 \vec{E}d\vec{r} . \tag{3}$$

Знак «минус» в выражении (2) ставится потому, что сила Лоренца $\vec{F}_л$ – сторонняя сила, dr – приращение радиус-вектора $\vec{r}$ на участке стержня между точками 1 и 2. Пусть $\vec{r}$ направлен от оси вращения вдоль стержня (см. рис.).

Вектор силы Лоренца при любом положении вращающегося стержня направлен вдоль стержня к оси вращения (к точке O). Вектор линейной скорости $\vec{\upsilon}$ перпендикулярен к вектору $\vec{B}$, и модуль его векторного произведения



$$\left\|\left[\vec{\upsilon},\vec{B}\right]\right\| = \upsilon B.$$

Линейная скорость

$$\upsilon = \omega r,$$

где $\omega = 2\pi n$ – угловая скорость вращения стержня.

Тогда выражение (3) с учетом всех равенств примет вид:

$$U = -\omega B\int_0^l r dr = -\frac{1}{2}B\omega l^2 = -B\pi n l^2.$$

Знак «минус» означает, что при указанном на рисунке направлении вращения электроны будут скапливаться около оси вращения (точки O). Из последнего уравнения определим частоту вращения:

$$n = \frac{U}{\pi B l^2};$$

$$[n] = \frac{\text{В}}{\text{Тл}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{кл}}\cdot\frac{\text{А}\cdot\text{м}}{\text{Н}}\cdot\frac{1}{\text{м}^2} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2\cdot\text{Кл}}{\text{Кл}\cdot\text{Н}\cdot\text{с}\cdot\text{м}^2} = \frac{1}{\text{с}};$$

$$n = \frac{1{,}6}{3{,}14\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2^2} = 16\ \text{с}^{-1}.$$

Ответ: $n = 16\ \text{с}^{-1}$.

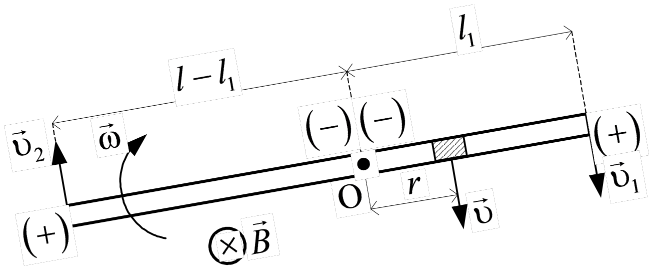
ЗАДАЧА 3.97

Тонкий металлический стержень длиной l = 1,2 м вращается в однородном магнитном поле вокруг перпендикулярной к нему оси, отстоящей от одного из его концов на расстояние l_1 = 0,25 м, делая n = 2 об/с (см. рис.). Вектор $\vec{B}$ параллелен оси вращения и имеет величину B = 1 Тл. Найти разность потенциалов U, возникающую между концами стержня.

Дано:	**Решение**
l = 1,2 м l_1 = 0,25 м n = 2 об/с B = 1 Тл	Вместе с проводником в магнитном поле вращаются и свободные электроны, находящиеся в металле. На заряды, движущиеся в магнитном поле, будет действовать сила Лоренца, направление которой можно определить по правилу левой руки.
U – ?	

Используя это правило, определим, что около оси вращения будут скапливаться отрицательные заряды, а на концах стержня – положительные.

Таким образом, в точке O, лежащей на оси вращения, стержень разбивается на две части, длиной l_1 и $l-l_1$, в которых будут возникать ЭДС индукций $\varepsilon_{инд1}$ и $\varepsilon_{инд2}$, направленные навстречу друг другу, и разность потенциалов U на концах стержня тогда будет равна



$$U = \varepsilon_{инд2} - \varepsilon_{инд1}. \tag{1}$$

Используя то, что $\varepsilon_{инд} = \int\limits_l \left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right] d\vec{l}$ и учитывая, что согласно условию задачи $\vec{B} \perp \vec{\upsilon} \perp d\vec{r}$, найдем ЭДС индукции $\varepsilon_{инд1}$, возникающую в части стержня длиной l_1:

$$\varepsilon_{инд1} = \int\limits_0^{l_1} \upsilon B dr = \int\limits_0^{l_1} \omega r B dr = \omega B \int\limits_0^{l_1} r dr = 2\pi n B r^2 \big/ 2 \Big|_0^{l_1} = \pi n B l_1^2 . \tag{2}$$

Здесь учли, что $\upsilon = \omega r$ и $\omega = 2\pi n$.

Аналогично ЭДС индукция $\varepsilon_{инд2}$, возникающая в остальной части стержня $l-l_1$,

$$\varepsilon_{инд2} = \int\limits_0^{l-l_1} \upsilon B dr = \pi n B \left(l - l_1\right)^2 . \tag{3}$$

Окончательно, с учетом (1) – (3), определим разность потенциалов U:

$$U = \varepsilon_{инд2} - \varepsilon_{инд1} = \pi n B l \left(l - 2l_1\right);$$

$$\left[U\right] = \frac{\text{Тл} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{м} \cdot \text{с}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{А} \cdot \text{с}} = \frac{\text{А} \cdot \text{В} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{с}} = \text{В};$$

$$U = 3{,}14 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1{,}2\left(1{,}2 - 2 \cdot 0{,}25\right) = 5{,}3 \cdot 10^{-3} B = 5{,}3 \text{ мВ}.$$

Ответ: $U = 5{,}3$ мВ.

ЗАДАЧА 3.98

В однородном магнитном поле с индукцией B = 0,8 Тл равномерно вращается рамка площадью S = 50 см^2. Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна к линиям индукции. Среднее значение ЭДС индукции за время, в течение которого магнитный поток, пронизывающий рамку, изменился от нуля до максимального значения, равно $\langle \varepsilon_i \rangle$ = 0,16 В. С какой частотой n вращалась рамка?

Дано:
B = 0,8 Тл
S = 5·10^{-3} м^2
$\langle \varepsilon_i \rangle$ = 0,16 В

n – ?

Решение

При вращении рамки в магнитном поле в ней наводится ЭДС индукции, так как изменяется со временем магнитный поток, пронизывающий рамку.

Если линии магнитной индукции скользят по рамке, то магнитный поток $\Phi_{\min}$ = 0, если линии вектора $\vec{B}$ перпендикулярны к плоскости рамки, то поток

$$\Phi_{\max} = BS.$$

Согласно закону Фарадея среднее значение ЭДС индукции

$$\langle \varepsilon_i \rangle = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Phi_{\max} - \Phi_{\min}}{\Delta t}.$$

Такое изменение магнитного потока, пронизывающего рамку, происходит 4 раза за один оборот, т.е. $\Delta t = \frac{T}{4}$, где $T = \frac{1}{n}$ – период вращения рамки.

Таким образом,

$$\Delta t = 1/(4n), \text{ а } \langle \varepsilon_i \rangle = 4n\Phi_{\max} = 4BSn.$$

Отсюда находим частоту вращения рамки:

$$n = \frac{\langle \varepsilon_i \rangle}{4BS};$$

$$[n] = \frac{\text{В}}{\text{Тл} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{К}} \cdot \frac{\text{А} \cdot \text{м}}{\text{Н}} \cdot \frac{1}{\text{м}^2} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{Кл}}{\text{Кл} \cdot \text{Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^2} = \frac{1}{\text{с}};$$

$$n = \frac{0{,}16}{4 \cdot 0{,}8 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 10 \text{ с}^{-1}.$$

Ответ: $n = 10$ с$^{-1}$.

ЗАДАЧА 3.99

Катушка сопротивлением R_1 = 5 Ом имеет N = 30 витков площадью S = 2 см^2 и помещена между полюсами электромагнита в поле с индукцией B = 0,75 Тл. Ось катушки параллельна линиям индукции и соединена с баллистическим гальванометром R_2 = 45 Ом. Какое количество электричества q протечет по цепи, если выключить ток в обмотке электромагнита?

Дано:

R_1 = 5 Ом
N = 30
$S = 2\cdot 10^{-4}$ м^2
B = 0,75 Тл
R_2 = 45 Ом

q – ?

Решение

При выключении тока в обмотке электромагнита изменяется магнитный поток, пронизывающий витки катушки, от $\Phi_1 = NBS$ до $\Phi_2 = 0$. Согласно закону Фарадея для электромагнитной индукции в катушке наводится ЭДС индукции

$$\varepsilon_i = -N\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (1)$$

Поскольку витки соединены с баллистическим гальванометром, то по цепи потечет ток $I = dq/dt$, откуда

$$dq = Idt. \qquad (2)$$

По закону Ома сила тока

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R_1 + R_2}. \qquad (3)$$

Из выражений (1) – (3) получим:

$$dq = -N\frac{d\Phi}{dt}\frac{dt}{R_1 + R_2};$$

$$q = \frac{N}{R_1 + R_2}\int_{\Phi_1}^{0} d\Phi = \frac{N\Phi_1}{R_1 + R_2} = \frac{NBS}{R_1 + R_2};$$

$$[q] = \frac{\text{Тл}\cdot\text{м}^2}{\text{Ом}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2\cdot\text{А}}{\text{А}\cdot\text{м}\cdot\text{В}} = \frac{\text{Дж}}{\text{В}} = \text{Кл};$$

$$q = \frac{30\cdot 0,75\cdot 2\cdot 10^{-4}}{5 + 45} = 90 \text{ мкКл}.$$

Ответ: $q = 90$ мкКл.

ЗАДАЧА 3.100

Квадрат из медной проволоки помещен в однородное магнитное поле с индукцией B = 0,2 Тл так, что плоскость его перпендикулярна к линиям магнитной индукции поля. Если квадрат, потянув за противоположные вершины, вытянуть в линию, то по проволоке потечет количество электричества q = 84 мКл. Какова масса m проволоки?

Дано:	**Решение**
B = 0,2 Тл $q = 84\cdot10^{-3}$ Кл $\rho = 1{,}7\cdot10^{-8}$ Ом·м $D = 8{,}6\cdot10^{3}$ кг/м^3	При вытягивании квадрата в линию изменяется площадь фигуры и меняется магнитный поток, пронизывающий ее, от $\Phi_1 = BS$ до $\Phi_2 = 0$. По закону Фарадея для электромагнитной индукции в проволоке наводится ЭДС индукции
m – ?	

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{1}$$

и по ней потечет индукционный ток $I = \dfrac{dq}{dt}$, откуда

$$dq = Idt\,. \tag{2}$$

По закону Ома сила тока

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R}\,. \tag{3}$$

Из выражений (1) – (3) получим:

$$dq = -\frac{d\Phi}{dt}\frac{dt}{R};$$

$$q = -\frac{1}{R}\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R} = \frac{BS}{R}, \tag{4}$$

где $S = l^2$ – площадь квадрата; l – сторона рамки; $R = \dfrac{\rho 4l}{S_1}$ – сопротивление проволоки; ρ – удельное сопротивление; $S_1 = \dfrac{m}{D4l}$ – площадь сечения провода; D – плотность меди.

Подставив S_1 в формулу для сопротивления, получим:

$$R = \frac{16\rho l^2 D}{m}\,. \tag{5}$$

Из выражений (4) и (5) находится масса проволоки:

$$m = \frac{16\rho Dq}{B};$$

$$[m] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \text{Ом} \cdot \text{м} \cdot \frac{\text{Кл}}{\text{Тл}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{В} \cdot \text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{А} \cdot \text{м}}{\text{м} \cdot \text{А} \cdot \text{Н}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{Н}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м} \cdot \text{Н}} = \text{кг};$$

$$m = \frac{16 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot 8{,}6 \cdot 10^{3} \cdot 84 \cdot 10^{-3}}{0{,}2} = 0{,}98 \cdot 10^{-3} \text{ кг} = 0{,}98 \text{ г}.$$

Ответ: $m = 0{,}98$ г.

ЗАДАЧА 3.101

Магнитный поток, пронизывающий соленоид, Φ = 80 мкВб при силе тока I, протекающего по обмотке, равной 6 А. Индуктивность соленоида L = 8 мГн. Сколько витков N содержит соленоид?

Дано:
$\Phi = 80 \cdot 10^{-6}$ Вб
$I = 6$ А
$L = 8 \cdot 10^{-3}$ Гн

N – ?

Решение

Между магнитным потоком и силой тока существует связь: $\psi = LI$, где $\psi = N\Phi$ – потокосцепление;

$$N\Phi = LI; \qquad N = \frac{LI}{\Phi};$$

$$[N] = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}} \cdot \frac{\text{А}}{\text{Вб}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{Тл} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{А} \cdot \text{м}}{\text{Н} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{Н} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Дж}} = 1;$$

$$N = \frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 6}{80 \cdot 10^{-6}} = 600.$$

Ответ: $N = 600$.

ЗАДАЧА 3.102

В магнитном поле, величина индукции которого изменяется по закону $B = \alpha + \beta t^2$, где α = $1 \cdot 10^{-1}$ Тл; β = $1 \cdot 10^{-2}$ Тл/с^2, расположена квадратная рамка со стороной a = 0,2 м, причем плоскость рамки перпендикулярна к $\vec{B}$. Определить: 1) величину ЭДС индукции $\varepsilon_{инд}$ в рамке в момент времени t = 5 с; 2) количество теплоты Q, которое выделится в рамке за первые 5 секунд, если сопротивление рамки R = 0,5 Ом.

Дано:	**Решение**
$B=\alpha+\beta t^2$ α = $1\cdot10^{-1}$ Тл β = $1\cdot10^{-2}$ Тл/с^2 a = 0,2 м t = 5 с R = 0,5 Ом 1) $\varepsilon_{инд}$ – ?; 2) Q – ?	1. Определим магнитный поток Φ через рамку. Так как плоскость рамки перпендикулярна к линиям магнитной индукции $\vec{B}$, то $\Phi=\left(\vec{B},\vec{S}\right)=\left(\alpha+\beta t^2\right)a^2.$ Используя закон электромагнитной индукции, найдем величину ЭДС индукции $\varepsilon_{инд}$ в момент времени t = 5 с:

$$\varepsilon_{инд}=\left|-\frac{d\Phi}{dt}\right|=2\beta a^2 t=4\cdot10^{-3}\text{ В};$$

$$[\varepsilon_{инд}]=\frac{\text{Тл}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}}{\text{с}^2}=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{А}\cdot\text{м}\cdot\text{с}}=\frac{\text{Дж}}{\text{А}\cdot\text{с}}=\frac{\text{А}\cdot\text{В}\cdot\text{с}}{\text{А}\cdot\text{с}}=\text{В};$$

$$\varepsilon_{инд}=2\cdot10^{-1}\cdot0,2^2\cdot5=4\cdot10^{-3}\text{ В}.$$

2. По закону Ома сила индукционного тока в рамке

$$I_{инд}=\frac{\varepsilon_{инд}}{R}=\frac{2\beta a^2 t}{R}.$$

Так как сила тока $I_{инд}$ непостоянна во времени, то для нахождения количества теплоты Q воспользуемся формулой

$$Q=\int_0^{\tau}I^2R\,dt;$$

$$Q=\int_{t=0}^{t=5}I_{инд}^2R\,dt=\int_{t=0}^{t=5}\frac{4\beta^2a^4t^2}{R}dt=\frac{4\beta^2a^4t^3}{3R}\Bigg|_{t=0}^{t=5}=\frac{4\beta^2a^4t^3}{3R};$$

$$[Q]=\frac{\text{Тл}^2\cdot\text{м}^4\cdot\text{с}^3}{\text{с}^4\cdot\text{Ом}}=\frac{\text{Н}^2\cdot\text{м}^4\cdot\text{А}}{\text{А}^2\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}\cdot\text{В}}=\frac{\text{Н}^2\cdot\text{м}^2}{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}}=\frac{\text{Дж}^2}{\text{Дж}}=\text{Дж};$$

$$Q=\frac{4\cdot\left(10^{-2}\right)^2\cdot0,2^4\cdot5^3}{3\cdot0,5}=5,3\cdot10^{-5}\text{ Дж}.$$

Ответ: 1) $\varepsilon_{инд}=4\cdot10^{-3}$ В; 2) $Q=5,3\cdot10^{-5}$ Дж.

ЗАДАЧА 3.103

Обмотка соленоида состоит из одного слоя плотно прилегающих друг к другу витков медного провода. Диаметр провода 0,2 мм, диаметр соленоида 5 см. По соленоиду течет ток 1 А. Определить, какое количество электричества протечет через обмотку соленоида, если концы ее замкнуть накоротко. Толщиной изоляции пренебречь.

Дано:

$\rho = 1{,}7\cdot10^{-8}$ Ом·м

$d = 2\cdot10^{-4}$ м

$I_0 = 1$ А

$D = 5\cdot10^{-2}$ м

$\mu = 1$

$\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м

q – ?

Решение

Количество электричества dq, которое протекает по проводнику за время dt при силе тока I, определяется соотношением

$$dq = Idt\,.$$

Общее количество q электричества, протекающее через проводник за время t, определяется интегрированием:

$$q = \int_0^t Idt\,.$$

Сила тока I в данном случае убывает экспоненциально со временем t и выражается формулой

$$I = I_0 e^{-Rt/L}\,,$$

где I_0 – сила тока до замыкания.

Индуктивность L соленоида

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l_1} S_1,$$

где S_1 – площадь поперечного сечения, $\left(S_1 = \dfrac{\pi D^2}{4}\right)$; l_1 – длина соленоида, которая выражается через диаметр проволоки d и число витков N соотношением $l_1 = dN$.

Сопротивление обмотки соленоида

$$R = \rho \frac{l_2}{S_2},$$

где ρ – удельное сопротивление медной проволоки; l_2 – длина медной проволоки, $l_2 = \pi DN$; S_2 – площадь поперечного сечения медной проволоки, $S_2 = \dfrac{\pi d^2}{4}$.

Искомое значение q находим интегрированием:

$$q = \int_0^{\infty} I_0 e^{-Rt/L} dt = I_0 \left(-\frac{L}{R} \right) e^{-Rt/L} = -I_0 \frac{L}{R} (0-1) = I_0 \frac{L}{R} =$$

$$= \frac{I_0 \mu_0 N^2 S_1 S_2}{I_1 \rho l_2} = \frac{I_0 \mu_0 N^2 \pi D^2 \pi d^2}{4 \cdot 4 d N \rho \pi D N} = \frac{I_0 \mu_0 \pi D d}{16 \rho};$$

$$[q] = \frac{\text{А} \cdot \text{Гн} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{м} \cdot \text{Ом} \cdot \text{м}} = \frac{\text{А} \cdot \text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{А}}{\text{А} \cdot \text{В}} = \frac{\text{Дж}}{\text{В}} = \text{Кл};$$

$$q = \frac{1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{16 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-8}} = 145 \cdot 10^{-6}\ \text{Кл} = 145\ \text{мкКл}.$$

Ответ: $q = 145$ мкКл.

ЗАДАЧА 3.104

На картонный цилиндр диаметром D = 4 см намотано N = 1000 витков проволоки в один слой. Витки плотно прижаты друг к другу. Индуктивность полученного соленоида L = 4 мГн. Каков диаметр d проволоки, из которой сделан соленоид?

Дано:

D = 0,04 м

N = 1000

$L = 4 \cdot 10^{-3}$ Гн

---

d – ?

Решение

Индуктивность однослойного воздушного соленоида

$$L = \mu \mu_0 n^2 l S,$$

где μ = 1 – магнитная проницаемость воздуха, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная, $n = \frac{N}{l}$ – число витков на единицу длины соленоида; S – площадь сечения катушки соленоида.

Так как витки плотно прилегают друг к другу, то длина l соленоида $l = dN$, где d – диаметр проволоки.

Площадь сечения S катушки $S = \frac{\pi D^2}{4}$.

Тогда $L = \mu_0 \frac{N}{d} \frac{\pi D^2}{4}$.

Отсюда находим диаметр проволоки:

$$d=\frac{\mu_0 N\pi D^2}{4L};$$

$$[d]=\frac{\text{Гн}\cdot\text{м}^2}{\text{м}\cdot\text{Гн}}=\text{м};$$

$$d=\frac{4\pi\cdot10^{-7}\cdot1000\cdot\pi\cdot0{,}04^2}{4\cdot4\cdot10^{-3}}=4\cdot10^{-4}\ \text{м}.$$

Ответ: $d=4\cdot10^{-4}$ м.

ЗАДАЧА 3.105

Индуктивность соленоида L = 220 мкГн. Обмотка соленоида состоит из N витков медной проволоки, поперечное сечение которой S_0 = 1 мм^2. Сопротивление обмотки R = 0,4 Ом. Чему равна длина l соленоида?

Дано:	Решение
L = 220·10^{-6} Гн S_0 = 10^{-6} м^2 R = 0,4 Ом ρ = 1,7·10^{-8} Ом·м	Индуктивность соленоида $$L=\mu_0 n^2 lS,$$ где $n=\frac{N}{l}$ – число витков на единицу длины соленоида.
l – ?	

Тогда

$$L=\mu_0\frac{N^2}{l}S.$$

Для нахождения площади сечения S соленоида используем сопротивление R обмотки:

$$R=\rho\frac{l_0}{S_0},$$

где l_0 – длина обмотки.

Если диаметр обмотки соленоида D, то $l_0=N\pi D$.

Тогда $R=\rho\frac{N\pi D}{S_0}$, где ρ – удельное сопротивление меди.

Отсюда находим диаметр D и площадь сечения соленоида:

$$S = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{R^2 S_0^2}{4\rho^2 N^2 \pi}.$$

Следовательно, индуктивность соленоида можно представить в виде

$$L = \mu_0 \frac{R^2 S_0^2}{4\rho^2 \pi l}.$$

Длина катушки соленоида

$$l = \frac{\mu_0 R^2 S_0^2}{4L\rho^2 \pi};$$

$$[l] = \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \cdot \frac{\text{Ом}^2 \cdot \text{м}^2}{\text{Гн} \cdot \text{Ом}^2 \cdot \text{м}^2} = \text{м}; \quad l = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0{,}4^2 \cdot \left(10^{-6}\right)^2}{4 \cdot 220 \cdot 10^{-6} \cdot \left(1{,}7 \cdot 10^{-8}\right)^2 \cdot \pi} = 0{,}25 \text{ м}.$$

Ответ: $l = 0{,}25$ м.

ЗАДАЧА 3.106

Соленоид без сердечника с однослойной обмоткой из проволоки диаметром 0,4 мм имеет длину 0,5 м и поперечное сечение 60 см^2. За какое время при напряжении 10 В и силе тока 1,5 А в обмотке выделится количество теплоты, равное энергии поля внутри соленоида? Поле считать однородным. Генератор тока поддерживает силу тока постоянной.

Дано:

$d = 4 \cdot 10^{-4}$ м

$l = 0{,}5$ м

$S = 6 \cdot 10^{-3}$ м^2

$U = 10$ В

$I = 1{,}5$ А

$Q = W$

$\mu = 1$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м

t – ?

Решение

При прохождении тока I по проволоке при напряжении U за время t выделяется количество теплоты

$$Q = IUt.$$

Внутри соленоида создается магнитное поле, энергия которого

$$W = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} V = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} lS,$$

где B – индукция магнитного поля внутри соленоида.

Диаметр соленоида гораздо меньше его длины, поэтому магнитную индукцию можно определять по формуле бесконечного соленоида:

$$B = \frac{\mu\mu_0 NI}{l},$$

где N – число витков соленоида.

Если витки плотно прилегают друг к другу, то $N = \frac{l}{d}$, где l – длина соленоида; d – диаметр проволоки.

После подстановки получим:

$$W = \frac{\mu^2\mu_0^2 I^2 lS}{2d^2\mu\mu_0} = \frac{\mu\mu_0 I^2 lS}{2d^2}.$$

Согласно условию $Q = W$, тогда

$$IUt = \frac{\mu\mu_0 I^2 lS}{2d^2},$$

откуда

$$t = \frac{\mu\mu_0 IlS}{2Ud^2};$$

$$[t] = \frac{\text{Гн} \cdot \text{А} \cdot \text{м} \cdot \text{м}^2}{\text{м} \cdot \text{В} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Гн} \cdot \text{А}}{\text{В}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{А}}{\text{А} \cdot \text{В}} = \text{с};$$

$$t = \frac{1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 6 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10 \cdot 16 \cdot 10^{-8}} = 1{,}77 \cdot 10^{-3}\ \text{с} = 1{,}77\ \text{мс}.$$

Ответ: $t = 1{,}77$ мс.

ЗАДАЧА 3.107

Длина соленоида l = 160 см, площадь поперечного сечения S = 19,6 см^2. Обмотка соленоида имеет $N = 2000$ витков, и по ней течет ток I = 2 А. Какая средняя ЭДС индуцируется в витке, надетом на соленоид с железным сердечником, если ток в соленоиде спадает до нуля в течение времени $t = 2$ мс?

Дано:

l = 1,6 м

S = 19,6·10^{-4} м^2

$N = 2000$

I = 2 А

$t = 2 \cdot 10^{-3}$ с

$\langle \varepsilon_S \rangle$ – ?

Решение

Изменение магнитного потока в витке достигается изменением тока в соленоиде. При этом индуцируется ЭДС самоиндукции

$$\langle \varepsilon_S \rangle = -L_{1,2} \frac{\Delta I}{\Delta t},$$

где $L_{1,2} = \mu\mu_0 n_1 n_2 l S$ – взаимная индуктивность витка и соленоида.

Для соленоида $n_1 = \dfrac{N}{l}$ – число витков на единицу длины; для витка $n_2 = \dfrac{1}{l}$. Считая начальное время и конечный ток равными нулю, получаем

$$\Delta t = t \quad \text{и} \quad \Delta I = I.$$

Теперь уравнение для ЭДС можно переписать в виде:

$$\langle \varepsilon_S \rangle = \mu\mu_0 \frac{N}{l} S \frac{I}{t}.$$

В полученном уравнении неизвестна магнитная проницаемость железа μ. Запишем напряженность магнитного поля соленоида, считая его бесконечно длинным:

$$H = In_1 = \frac{IN}{l};$$

$$H = \frac{2 \cdot 2000}{1,6} = 2500 \ \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

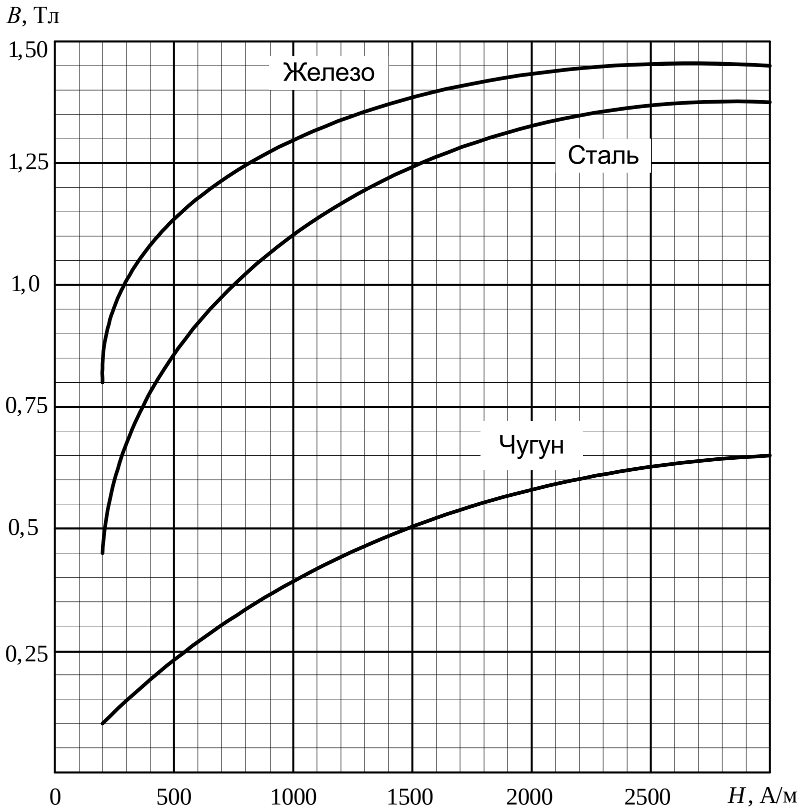


График зависимости магнитной индукции B от напряженности H магнитного поля

По графику (см. рис.) находим значение магнитной индукции для железа: B = 1,48 Тл.

Поскольку $B = \mu\mu_0 H$, то

$$\mu\mu_0 = \frac{B}{H};$$

$$\mu\mu_0 = 0,55 \ \frac{\text{мГн}}{\text{м}}.$$

Подставляя найденное значение в уравнение для средней ЭДС, получим:

$$\langle \varepsilon_S \rangle = \mu\mu_0 \frac{N}{l} S \frac{I}{t};$$

$$\left[\langle \varepsilon_S \rangle\right] = \frac{\text{Гн} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{А}}{\text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{с}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{А}}{\text{А} \cdot \text{с}} = \text{В};$$

$$\langle \varepsilon_S \rangle = 0{,}55 \frac{2000}{1{,}6} 19{,}6 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{2}{2 \cdot 10^{-3}} \approx 1{,}42 \text{ В}.$$

Ответ: $\langle \varepsilon_S \rangle = 1{,}42$ В.

ЗАДАЧА 3.108

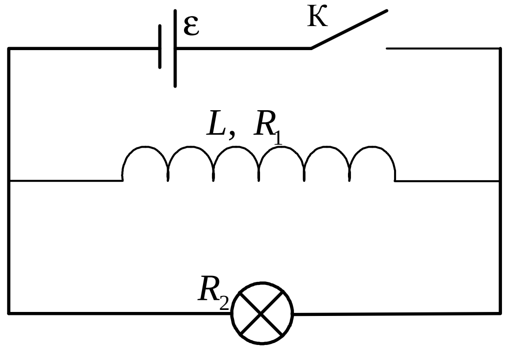
Дроссель с индуктивностью L = 8 Гн сопротивлением R_1 = 40 Ом и лампа сопротивлением R_2 = 200 Ом соединены параллельно и подключены к источнику с электродвижущей силой ε = 120 В через ключ (см. рис.). Определить напряжение U на зажимах дросселя в момент: 1) t_1 = 0,01 с и 2) t_2 = 0,5 с после размыкания цепи.

Дано:	**Решение**
L = 8 Гн R_1 = 40 Ом R_2 = 200 Ом ε = 120 В t_1 = 0,01 с t_2 = 0,5 с	При установившемся режиме сила тока I_0 в цепи равна сумме сил токов, текущих через дроссель, $I_1 = \varepsilon / R_1$, и лампу, $I_2 = \varepsilon / R_2$. При замыкании ключа в дросселе возникает ЭДС самоиндукции ε_S, которая стремится воспрепятствовать исчезновению тока:
U_1, U_2 – ?	$$\varepsilon_S = -L \frac{dI_1}{dt}.$$

Электродвижущая сила самоиндукции ε_S возникает только в дросселе; индуктивность лампы и проводов можно принять равной нулю, то есть ею можно пренебречь.

После отключения источника замкнутую цепь составляют дроссель и лампа, соединенные теперь последовательно. По закону Ома для замкнутой цепи можно записать с учетом ЭДС самоиндукции:

$$I\left(R_1 + R_2\right) = -L \frac{dI}{dt}.$$



После разделения переменных уравнение примет вид:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R_1 + R_2}{L} dt .$$

При $t = 0$ $I(0) = I_1$ (установившаяся сила тока в дросселе до отключения источника).

Интегрируем:

$$\int_{I_1}^{I} \frac{dI}{I} = -\frac{R_1 + R_2}{L} \int_0^t dt ; \quad I = I_1 e^{-(R_1+R_2)t/L} = \frac{\varepsilon}{R_1} e^{-(R_1+R_2)t/L} .$$

Напряжение U на зажимах дросселя в любой момент времени после отключения источника постоянного тока

$$U = I(t) R_2 ,$$

где I – текущее значение силы тока, зависящее от времени;

$$U = \varepsilon \frac{R_2}{R_1} e^{-(R_1+R_2)t/L} ;$$

$$U_1 = \frac{120 \cdot 200}{40} e^{-(40+200)10^2/8} = 6 \cdot 10^2 \cdot e^{-0,3} = 440 \text{ В} ;$$

$$U_2 = \frac{120 \cdot 200}{40} e^{-(40+200)0,5/8} = 6 \cdot 10^2 \cdot e^{-15} = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ В} .$$

Как видно из полученного результата, напряжение U на очень короткое время значительно превышает ЭДС источника, что позволяет наблюдать мгновенную яркую вспышку лампы в момент выключения цепи.

Ответ: $U_1 = 440$ В; $U_2 = 1,8 \cdot 10^{-4}$ В.

ЗАДАЧА 3.109

Определить сопротивление R электрического контакта при неидеальном осуществлении короткого замыкания концов обмотки длинного сверхпроводящего соленоида с индуктивностью L = 3,6 Гн, если в течение каждого часа магнитное поле в соленоиде убывает на 0,01 % (10 промилле).

Дано:	**Решение**
L = 3,6 Гн $\Delta B/(B\Delta t)$ = 0,01% в час	Согласно закону Ома для замкнутой электрической цепи имеем:
R – ?	

$$IR = \varepsilon_S = -L\frac{dI}{dt}. \qquad (1)$$

Согласно закону Био – Савара

$$B \sim I \quad \text{и} \quad \Delta B \sim \Delta I.$$

Поэтому

$$\frac{\Delta B}{B} = \frac{\Delta I}{I} \quad \text{и} \quad \frac{\Delta B}{B\Delta t} = \frac{\Delta I}{I\Delta t}.$$

Тогда, учитывая равенство (1), получаем:

$$R = L\left|\frac{dI}{Idt}\right| = L\left|\frac{\Delta I}{I\Delta t}\right| = L\left|\frac{\Delta B}{B\Delta t}\right|;$$

$$R = 3,6\frac{0,01\cdot 10^{-2}}{3,6\cdot 10^{3}} = 10^{-7}\,Ом = 100\text{ нОм}.$$

Ответ: $R = 100$ нОм.

ЗАДАЧА 3.110

По соленоиду течет ток силой 5 А. Длина соленоида 1 м, число витков 500. В соленоид вставлен железный сердечник. Найти: 1) намагниченность; 2) объемную плотность энергии магнитного поля соленоида.

Дано:	**Решение**
I = 5 А l = 1 м N = 500	Намагниченность определяется отношением магнитного момента к объему магнетика и связана с напряженностью магнитного поля соотношением
j, ω – ?	

$$j = \chi H, \qquad (1)$$

где χ – магнитная восприимчивость среды.

Поле соленоида можно считать однородным. В этом случае напряженность поля вычисляется по формуле

$$H = In,$$

где I – сила тока, текущего по обмотке соленоида; $n = N/l$ – число витков, приходящихся на единицу длины соленоида.

Тогда

$$H = \frac{IN}{l}.$$

Связь между магнитной восприимчивостью χ и магнитной проницаемостью μ среды выражается формулой

$$\chi = \mu - 1. \qquad (2)$$

Используя соотношение $B = \mu_0 \mu H$, находим:

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H}.$$

Объемная плотность энергии магнитного поля соленоида

$$\omega = \frac{BH}{2}.$$

Вычислим напряженность поля соленоида:

$$H = \frac{5 \cdot 500}{1} = 2500 \text{ А/м}.$$

По графику (см. задачу 3.107) находим, что напряженности 2500 А/м соответствует индукция магнитного поля B = 1,49 Тл.

Тогда

$$\mu = \frac{1,49}{12,6 \cdot 10^{-7} \cdot 2500} = 721.$$

Согласно формуле имеем χ = 721 – 1= 720.

Определим намагниченность по формуле (1):

$$j = 720 \cdot 2500 = 15,9 \cdot 10^{6} \text{ А/м} = 15,9 \text{ МА/м}.$$

Объемная плотность энергии

$$\omega = \frac{1,49 \cdot 2500}{2} = 3625 \text{ Дж/м}^3 \approx 3,63 \text{ кДж/м}^3.$$

Ответ: 1) $j = 15,9$ МА/м; 2) $\omega = 3,63$ кДж/м^3.

ЗАДАЧА 3.111

Рамка площадью S = 150 см^2 равномерно вращается в однородном магнитном поле с частотой n = 2,4 об/с. Ось вращения находится в плоскости рамки и составляет угол α = 30° с направлением магнитного поля. Максимальная ЭДС индукции $\varepsilon_{\max}$ во вращающейся рамке равна 0,09 В. Какова индукция магнитного поля B?

Дано:
S = 0,015 м^2
n = 2,4 об/с
α = 30°
$\varepsilon_{\max}$ = 0,09 В

B – ?

Решение

Мгновенное значение ЭДС индукции определяется по закону Фарадея:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (1)$$

Ось вращения находится в плоскости рамки и составляет все время угол α с направлением вектора магнитной индукции поля. Кроме того, при вращении рамки меняется магнитный поток, пронизывающий рамку.

Закон изменения магнитного потока:

$$\Phi = BS\sin\alpha\cos\omega t, \qquad (2)$$

где $\omega = 2\pi n$ – угловая скорость вращения рамки.

Из уравнений (1) и (2) найдем мгновенное значение ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = -BS\sin\alpha\frac{d}{dt}\left(\cos\omega t\right) = BS\omega\sin\alpha\sin\omega t.$$

Максимального значения ЭДС достигнет при $\sin\omega t = 1$.

Отсюда

$$\varepsilon_{\max} = BS2\pi n\sin\alpha.$$

Следовательно,

$$B = \frac{\varepsilon_{\max}}{S2\pi n\sin\alpha};$$

$$[B] = \frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}}{\text{м}^2\cdot\text{А}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2\cdot\text{А}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{м}^2\cdot\text{А}} = \frac{\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{м}} = \text{Тл};$$

$$B = \frac{0{,}09}{0{,}015\cdot 2\cdot 3{,}14\cdot 2{,}4\cdot 0{,}5} = 0{,}8\ \text{Тл}.$$

Ответ: $B = 0{,}8$ Тл.

ЗАДАЧА 3.112

По обмотке соленоида с параметрами: число витков – 1000, длина – 0,5 м, диаметр – 4 см течет ток 0,5 А. Определить потокосцепление, энергию, объемную плотность энергии соленоида.

Дано:	**Решение**
$N = 1000$ $l = 0{,}5$ м $D = 0{,}04$ м $I = 0{,}5$ А $\mu = 1$	Зная, что напряженность магнитного поля соленоида $H = I\dfrac{N}{l}$, индукция $B = \mu\mu_0 H = \mu\mu_0 I\dfrac{N}{l}$, объемная плотность энергии $\omega = \dfrac{W}{V} = \dfrac{W}{Sl}$, а через характеристики поля $\omega = \dfrac{BH}{2}$,
ψ, W, ω – ?	

тогда объемная плотность энергии

$$\omega = \frac{BH}{2} = \frac{\mu\mu_0}{2} I^2 \frac{N^2}{l^2};$$

$$[\omega] = \frac{\text{Гн}\cdot\text{А}^2}{\text{м}\cdot\text{м}} = \frac{\text{м}^2\cdot\text{кг}\cdot\text{А}^2}{\text{с}^2\cdot\text{А}^2\cdot\text{м}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3};$$

$$\omega = \frac{1\cdot 12{,}56\cdot 10^{-7}\cdot 0{,}25\cdot 10^6}{2\cdot 0{,}25} = 0{,}63\ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3};$$

энергия соленоида

$$W = \omega S l;\quad [W] = \frac{\text{Дж}\cdot\text{м}^2\cdot\text{м}}{\text{м}^3} = \text{Дж};$$

$$W = 0{,}63\frac{3{,}14\cdot 4^2\cdot 10^{-4}}{4}0{,}5 = 4\cdot 10^{-4}\ \text{Дж};$$

потокосцепление соленоида

$$\psi = BSN = B\frac{\pi D^2}{4}N = \mu\mu_0 I\frac{N}{l}\frac{\pi D^2}{4}N;$$

$$[\psi] = \frac{\text{Гн}\cdot\text{А}\cdot\text{м}^2}{\text{м}\cdot\text{м}} = \frac{\text{м}^2\cdot\text{кг}\cdot\text{А}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2\cdot\text{А}^2\cdot\text{м}\cdot\text{м}} = \frac{\text{м}^2\cdot\text{кг}}{\text{с}^2\cdot\text{А}} = \text{Вб};$$

$$\psi = \frac{1\cdot 12{,}56\cdot 10^{-7}\cdot 0{,}5\cdot 10^6\cdot 3{,}14\cdot 4^2\cdot 10^{-4}}{4\cdot 0{,}5} = 1{,}6\cdot 10^{-3}\ \text{Вб}.$$

Ответ: $\psi = 1{,}6\cdot 10^{-3}$ Вб; $W = 4\cdot 10^{-4}$ Дж; $\omega = 0{,}63\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{м}^3}$.

3.5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Основные формулы

Уравнение колебаний в контуре без активного сопротивления (незатухающие колебания)

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0,$$

где q – электрический заряд, ω_0 – собственная частота колебаний контура;

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

где L – индуктивность контура; C – электроемкость конденсатора.

Решением данного уравнения является функция

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где q_0 – амплитуда колебаний заряда на конденсаторе; φ_0 – начальная фаза колебаний.

Формула Томсона:

$$T = 2\pi\sqrt{LC},$$

где T – период незатухающих электрических колебаний в контуре.

Уравнение затухающих колебаний:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0,$$

где β – коэффициент затухания;

$$\beta = \frac{R}{2L}.$$

При условии, что $\beta^2 < \omega_0^2$, т.е. $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$, решение уравнения затухающих колебаний имеет вид:

$$q = q_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота затухающих колебаний.

Логарифмический декремент затухания

$$\delta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta t = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e},$$

где $A(t)$ и $A(t+T)$ – амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующие моментам времени, отличающимся на период, где период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$; N_e – число колебаний за время τ; τ – время релаксации, за которое амплитуда уменьшается в e раз.

Добротность колебательного контура

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \pi N_e = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{4}}.$$

При слабом затухании $\left(\omega_0^2 \gg \beta^2\right)$

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\pi \frac{W}{\Delta W},$$

где W – энергия, запасенная в контуре; ΔW – убыль этой энергии за один период колебаний.

Дифференциальное уравнение вынужденных электромагнитных колебаний и его решение:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L}\cos\omega t; \quad q = q_m \cos(\omega t - \varphi),$$

где $Q_m = \frac{U_m}{\omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$; φ – сдвиг по фазе между зарядом и приложенным напряжением $U = U_0 \cos\omega t$; R, L и C – соответственно активное сопротивление, индуктивность и емкость колебательного контура.

Резонансная частота и резонансная амплитуда заряда в случае электрического резонанса

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}; \quad (q_m)_{рез} = \frac{U_m / L}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}},$$

где ω_0 – собственная частота контура; β – коэффициент затухания; R, L и C – соответственно активное сопротивление, индуктивность и емкость колебательного контура; U_m – амплитуда внешнего приложенного напряжения.

Резонансная частота и резонансная амплитуда силы тока в случае электрического резонанса

$$\omega_{рез} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (I_m)_{рез} = \frac{U_m}{R},$$

где ω_0 – собственная частота контура; R, L и C – соответственно активное сопротивление, индуктивность и емкость колебательного контура; U_m – амплитуда внешнего приложенного напряжения.

Полное сопротивление цепи переменного тока, содержащей последовательно включенные резистор сопротивлением R, катушку индуктивностью L и конденсатор емкостью C,

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2},$$

где $X_L = \omega L$ – реактивное индуктивное сопротивление; $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ – реактивное емкостное сопротивление; ω – частота переменного напряжения, подаваемого на концы цепи; L – индуктивность; C – емкость.

Реактивное сопротивление

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C},$$

где $X_L = \omega L$ – реактивное индуктивное сопротивление; $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ – реактивное емкостное сопротивление.

Действующие (эффективные) значения силы тока и напряжения

$$I_{эф} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad U_{эф} = \frac{U_m}{\sqrt{2}},$$

где I_m и U_m – амплитудные значения силы тока и напряжения.

Средняя мощность, выделяемая в цепи переменного тока,

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_m U_m \cos\varphi,$$

где I_m и U_m – амплитудные значения силы тока и напряжения.

Коэффициент мощности

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{R}{Z},$$

где R – активное сопротивление цепи; ωL – реактивное индуктивное сопротивление; $\dfrac{1}{\omega C}$ – реактивное емкостное сопротивление; Z – полное сопротивление цепи.

Фазовая скорость распространения электромагнитных волн в среде

$$\upsilon = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

где $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ – скорость распространения света в вакууме; ε_0 – электрическая постоянная; μ_0 – магнитная постоянная; ε – диэлектрическая проницаемость среды; μ – магнитная проницаемость среды.

Связь между мгновенными значениями E и H:

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E = \sqrt{\mu\mu_0}H,$$

где E, H – модули напряженности электрического и магнитного полей в электромагнитной волне.

Уравнение плоской электромагнитной волны:

$$E = E_0\cos\left(\omega t - kx + \varphi_0\right),$$

где E_0 – амплитуда напряженности электромагнитного поля волны; ω – циклическая частота; $k = \frac{\omega}{\upsilon}$ – волновое число; φ_0 – начальная фаза; υ – фазовая скорость распространения волны.

Объемная плотность энергии электромагнитного поля

$$\omega = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}.$$

Плотность потока энергии электромагнитных волн – вектор Умова – Пойнтинга

$$\vec{S} = \left[\vec{E}, \vec{H}\right],$$

где $\vec{S}$ – плотность потока электромагнитной энергии; $\vec{E}$ и $\vec{H}$ – векторы напряженности электрического и магнитного полей в электромагнитной волне.

Модуль плотности потока энергии

$$S = \omega\upsilon = EH,$$

где ω – объемная плотность энергии электромагнитной волны; υ – скорость распространения волны в среде; E – напряженность электрического поля волны; H – напряженность магнитного поля волны.

Решение задач

ЗАДАЧА 3.113

Напряжение на обкладках конденсатора в колебательном контуре изменяется по закону $U = 10\cos 10^4 t$ (В). Емкость конденсатора 10 мкФ. Найти индуктивность контура и закон изменения силы тока в нем.

Дано:	**Решение**
$U = 10\cos 10^4 t$ В $C = 10^{-5}$ Ф $L,\ I(t)$ – ?	Напряжение U на обкладках конденсатора в колебательном контуре изменяется по гармоническому закону

$$U = U_0 \cos \omega t,$$

где U_0 – амплитудное значение напряжения; $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – циклическая частота (в условии задачи $\omega = 10^{-4}$ $с^{-1}$); L – индуктивность; C – емкость конденсатора.

Отсюда

$$L = \frac{1}{\omega^2 C};$$

$$L = \frac{1}{1 \cdot 10^8 \cdot 10^{-5}} = 10^{-3} \text{ Гн.}$$

Заряд на обкладках конденсатора

$$q = CU = CU_0 \cos \omega t.$$

Сила тока по определению

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega C U_0 \sin \omega t;$$

$$I = -10^5 \cdot 10^{-5} \sin 10^4 t = -\sin 10^4 t, \text{ А}.$$

Ответ: $L = 10^{-3}$ Гн; $I(t) = -\sin 10^4 t$, А.

ЗАДАЧА 3.114

Идеальный контур Томсона состоит из конденсатора емкостью C = 25 нФ и катушки индуктивностью L = 1,015 Гн. Пластинам конденсатора сообщен заряд q_0 = 2,5 мкКл. Как изменяются разность потенциалов U на обкладках конденсатора и значения тока I в цепи в пределах одного периода колебаний? Постройте графики зависимости U и I от времени.

Дано:
$C = 25 \cdot 10^{-9}$ Ф
$L = 1{,}015$ Гн
$q_0 = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ Кл
$U(t)$, $I(t)$ – ?

Решение

Колебательный контур без активного сопротивления $(R = 0)$ является идеальным и называется контуром Томсона. Уравнение незатухающих электромагнитных колебаний в таком контуре имеет вид:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0.$$

Уравнение имеет решение в виде:

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

где q_0 – амплитуда незатухающих колебаний заряда на конденсаторе; ω_0 – собственная частота колебаний; α – начальная фаза колебаний (в дальнейшем, для простоты, будем полагать $\alpha = 0$).

Период незатухающих электромагнитных колебаний определяется по формуле Томсона:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Учитывая, что $I = \frac{dq}{dt}$, запишем закон изменения тока в контуре:

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_0\omega_0 \sin\omega_0 t = -I_0 \sin\omega_0 t,$$

где $I_0 = q_0\omega_0$ – амплитуда колебаний силы тока.

Найдем ω_0 и I_0:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}};$$

$$[\omega_0] = \frac{1}{\sqrt{\text{Гн} \cdot \text{Ф}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}} \cdot \frac{\text{Кл}}{\text{В}}}} =$$

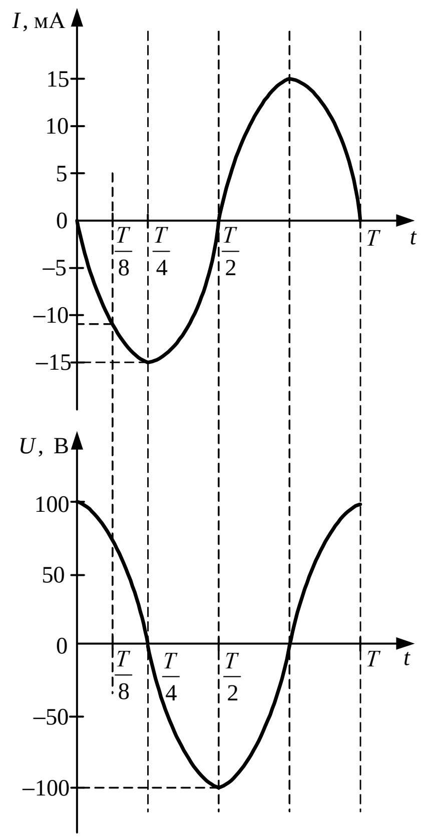
$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{\text{с} \cdot \text{Кл} \cdot \text{с}}{\text{Кл}}}} = \text{с}^{-1};$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{1{,}015 \cdot 25 \cdot 10^{-9}}} = 0{,}63 \cdot 10^4 \ \frac{\text{рад}}{\text{с}} =$$

$$= 2\pi \cdot 10^3 \ \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$I_0 = q_0 \omega_0;$$

$$I_0 = 2{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10^3 = -15{,}7 \cdot 10^{-3} \text{ А}.$$



Следовательно, уравнение изменения тока в цепи имеет вид:

$$I(t) = -15{,}7 \cdot 10^{-3} \sin 2\pi \cdot 10^{-3} t, \text{ А}.$$

Так как напряжение на пластинах конденсатора $U_C = \frac{q}{C}$, то уравнение изменения U будет иметь вид:

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_0 \cos \omega_0 t}{C} = U_0 \cos \omega_0 t,$$

где $U_0 = \frac{q_0}{C}$; U_0 = 100 В – амплитудное значение напряжения.

Следовательно, $U(t) = 100 \cos 2\pi \cdot 10^3 t$, В.

Для построения графиков составим таблицу.

t	$T/8$	$T/4$	$T/2$
I, мА	–11,1	–15,7	0
U, В	70,7	0	–100

Примечание. Период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$; $T = \frac{2\pi}{2\pi \cdot 10^3} = 10^{-3}$ с.

На рисунке представлены графики зависимости силы тока и напряжения от времени.

Ответ: $I(t) = -15{,}7 \cdot 10^{-3} \sin 2\pi \cdot 10^{-3} t$, А; $U(t) = 100 \cos 2\pi \cdot 10^3 t$, В.

ЗАДАЧА 3.115

Найти логарифмический декремент затухания δ колебаний в контуре, состоящем из конденсатора емкостью C = 2,22 нФ и катушки из медной проволоки диаметром d = 0,5 мм. Катушка имеет 400 витков проволоки.

Дано:	**Решение**
$C = 2{,}22\cdot10^{-9}$ Ф $d = 5\cdot10^{-4}$ м $N = 400$	Логарифмический декремент затухания δ определяется по формуле
δ – ?	

$$\delta = \ln\left(\frac{q(t)}{q(t+T)}\right) = \beta T\,, \tag{1}$$

где $\beta = \dfrac{R}{2L}$ – коэффициент затухания;

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \left(\dfrac{R}{2L}\right)^2}} \approx 2\pi\sqrt{LC}\,, \tag{2}$$

так как затухание за один период колебаний мало.

Таким образом, задача сводится к нахождению R и L.

Индуктивность катушки выражается формулой

$$L = \mu\mu_0 n^2 l S\,, \tag{3}$$

где $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная; $\mu = 1$ (катушка без сердечника) – магнитная проницаемость среды; l – длина катушки; $n = N/l$ – число витков на единицу длины катушки; S – площадь поперечного сечения катушки.

Пусть D – диаметр катушки, тогда $S = \dfrac{\pi D^2}{4}$. Длина катушки $l = Nd$.

Тогда

$$L = \mu_0 \frac{\pi N D^2}{4d}\,. \tag{4}$$

Активное сопротивление проволоки

$$R = \rho\frac{l_{np}}{S_{np}} = \rho\frac{4ND}{d^2}\,, \tag{5}$$

где $l_{np} = N\cdot\pi D$ (число витков, умноженное на длину одного витка);

$$S_{пр} = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Используя уравнения (4) и (5), для коэффициента затухания запишем:

$$\beta = \frac{R}{2L} = \frac{8\rho}{\pi\mu_0 Dd}, \qquad (6)$$

где ρ = $1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м – удельное сопротивление меди.

Период колебаний найдем из выражений (2), (4):

$$T = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi\sqrt{\frac{\pi\mu_0 CND^2}{4d}}.$$

Логарифмический декремент затухания определим из (1), (6):

$$\delta = 8\rho\sqrt{\frac{\pi CN}{\mu_0 d^3}};$$

$$[\delta] = \text{Ом}\cdot\text{м}\sqrt{\frac{\text{Ф}\cdot\text{м}}{\text{Гн}\cdot\text{м}^3}} = \text{Ом}\sqrt{\frac{\text{Кл}\cdot\text{А}}{\text{В}\cdot\text{В}\cdot\text{С}}} = \text{Ом}\sqrt{\frac{\text{А}\cdot\text{С}\cdot\text{А}}{\text{В}^2\cdot\text{С}}} = \text{Ом}\sqrt{\frac{1}{\text{Ом}^2}} = 1;$$

$$\delta = 8\cdot 1{,}7\cdot 10^{-8}\sqrt{\frac{3{,}14\cdot 2{,}22\cdot 10^{-9}\cdot 400}{4\cdot 3{,}14\cdot 10^{-7}\cdot\left(5\cdot 10^{-4}\right)^3}} = 0{,}018.$$

Ответ: $\delta = 0{,}018$.

ЗАДАЧА 3.116

В контуре вследствие затухания теряется 99 % энергии. Колебательный контур содержит емкость C = 0,55 нФ и индуктивность L = 10 мГн. За какое время происходит потеря энергии в контуре, если логарифмический декремент затухания δ = 0,005?

Дано:
n = 0,99
C = $0{,}55\cdot 10^{-9}$ Ф
L = 10^{-2} Гн
δ = 0,005

t – ?

Решение

Потерю энергии в колебательном контуре можно записать как отношение:

$$n = \frac{W_0 - W}{W_0},$$

где $W_0 = \frac{CU_0^2}{2}$; $W = \frac{CU^2}{2}$.

Тогда

$$n = \frac{U_0^2 - U^2}{U_0^2} = 0{,}99; \quad n = 1 - \left(\frac{U}{U_0}\right)^2 = 0{,}99; \quad \left(\frac{U}{U_0}\right)^2 = 0{,}01.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{U_0}{U}\right)^2 = 100; \quad \frac{U_0}{U} = 10. \tag{1}$$

С другой стороны, для затухающих колебаний разность потенциалов на обкладках конденсатора меняется со временем по закону

$$U = U_0 e^{-\beta t} \cos \omega t,$$

т.е. за время t амплитуда изменилась и стала равной

$$\frac{U_0}{U} = e^{\beta t}. \tag{2}$$

Выразим коэффициент затухания через логарифмический декремент из соотношения

$$\delta = \beta T; \quad \beta = \frac{\delta}{T}. \tag{3}$$

Таким образом, из уравнений (1) – (3) запишем:

$$10 = e^{\frac{\delta t}{T}}. \tag{4}$$

Прологарифмируем равенство (4) и вычислим время затухания:

$$\ln 10 = \frac{\delta t}{T}; \quad t = \frac{T \cdot \ln 10}{\delta},$$

где $T = 2\pi\sqrt{LC}$ – период колебаний.

Искомое время $t = \dfrac{2\pi\sqrt{LC} \cdot \ln 10}{\delta}$;

$$[t] = \sqrt{\text{Гн} \cdot \text{Ф}} = \sqrt{\frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}} \cdot \frac{\text{Кл}}{\text{В}}} = \sqrt{\frac{\text{с} \cdot \text{Кл} \cdot \text{с}}{\text{Кл}}} = \text{с};$$

$$t = \frac{2 \cdot 3{,}14\sqrt{10^{-2} \cdot 0{,}55 \cdot 10^{-9}} \cdot \ln 10}{0{,}005} = 6{,}8 \cdot 10^{-3}\ \text{с}.$$

Ответ: $t = 6{,}8 \cdot 10^{-3}$ с.

ЗАДАЧА 3.117

Для какого момента времени t отношение энергии магнитного поля колебательного контура к энергии его электрического поля $\frac{W_м}{W_{эл}}$ равно 3?

Дано:	**Решение**
$\frac{W_м}{W_{эл}} = 3$	Энергия магнитного поля
t – ?	

$$W_м = \frac{LI^2}{2}, \tag{1}$$

где

$$I = \frac{dq}{dt} = C\frac{dU}{dt}; \tag{2}$$

L – индуктивность катушки.

Энергия электрического поля конденсатора

$$W_{эл} = \frac{CU^2}{2}, \tag{3}$$

где

$$U = U_0 \cos \omega t \; – \tag{4}$$

изменение напряжения на обкладках конденсатора.

Дифференцируя выражение (4) и подставляя его в (2), получим:

$$I = C\frac{dU}{dt} = -CU_0 \omega \sin \omega t. \tag{5}$$

С учетом уравнений (5) и (4) формулы (1) и (3) примут вид:

$$W_м = \frac{LC^2 U_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t}{2}; \tag{6}$$

$$W_{эл} = \frac{CU_0^2 \cos^2 \omega t}{2}. \tag{7}$$

Поделив уравнение (6) на (7), найдем отношение энергий:

$$\frac{W_м}{W_{эл}} = \frac{LC\omega^2 \sin^2 \omega t}{\cos^2 \omega t} = LC\omega^2 \mathrm{tg}^2 \omega t. \tag{8}$$

Кроме того, для колебательного контура известно, что

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}\,. \qquad (9)$$

Подставив в формулу (8) выражение (9), получим:

$$\frac{W_м}{W_{эл}} = \mathrm{tg}^2\omega t\,.$$

По условию задачи

$$\frac{W_м}{W_{эл}} = 3\,.$$

Значит, $\mathrm{tg}\,\omega t = \sqrt{3}$, или $\omega t = \dfrac{\pi}{3}$.

Так как $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, где T – период колебаний, то

$$\frac{2\pi}{T}t = \frac{\pi}{3}; \quad t = \frac{T}{6}\,.$$

Ответ: $t = \dfrac{T}{6}$.

ЗАДАЧА 3.118

Ток в колебательном контуре изменяется по закону $I = -0{,}04\sin 400\cdot\pi t$, А. Емкость конденсатора C = 0,63 мкФ. Найти период колебаний T, индуктивность L контура, минимальную энергию $W_м$ магнитного поля и максимальную энергию $W_{эл}$ электрического поля.

Дано:
C = 0,63·10^{-6} Ф
L, T, $W_м$, $W_{эл}$ – ?

Решение

Закон изменения тока в цепи со временем получим, продифференцировав уравнение $q = q_0\cos\omega t$:

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_0\omega\sin\omega t = -CU_0\omega\sin\omega t\,. \qquad (1)$$

Сопоставляя уравнение (1) с заданным в условии задачи, находим период колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{400\pi}; \quad T = 5 \text{ мс.}$$

С другой стороны, по формуле Томпсона

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

можно определить индуктивность катушки L:

$$L = \frac{T^2}{4\pi^2 C};$$

$$[L] = \frac{\text{с}^2}{\text{Ф}} = \frac{\text{с}^2 \cdot \text{В}}{\text{Кл}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}} = \text{Гн};$$

$$L = 1\ \text{Гн}.$$

Ток максимален, когда $\sin 400\pi t = -1$, т.е. $I_{\max} = 0,04$ А. Тогда максимальная энергия магнитного поля

$$W_м = \frac{LI_{\max}^2}{2};$$

$$[W_м] = \text{Гн} \cdot \text{А}^2 = \frac{\text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{А}^2}{\text{А}} = \text{Дж};$$

$$W_м = 0,8\ \text{мДж}.$$

Поскольку колебания в контуре не затухают $(R = 0)$, то по закону сохранения энергии максимальная энергия электрического поля

$$W_{эл} = W_м = 0,8\ \text{мДж}.$$

Ответ: $L = 1$ Гн; $T = 5$ мс; $W_{эл} = W_м = 0,8$ мДж.

ЗАДАЧА 3.119

Разность потенциалов на обкладках конденсатора в колебательном контуре изменяется по закону $U = 25\cos 10^4 \pi t$, В. Индуктивность катушки L = 10,13 мГн. Найти период T колебаний, емкость C конденсатора, закон изменения со временем тока I в цепи и длину волны λ, соответствующую этому контуру.

Дано:	**Решение**
L = 10,13·10^{-3} Гн	
T, C, $I(t)$, λ – ?	

В общем виде уравнение изменения напряжения на пластинах конденсатора

$$U = U_0 \cos \omega t.$$

Сравнивая его с уравнением, данным в условии задачи, находим собственную частоту колебаний в контуре: $\omega = 10^4\pi$.

Учитывая, что $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, находим период:

$$T = 0{,}2 \text{ мс}.$$

Из формулы Томсона вычисляем емкость конденсатора:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}; \quad C = \frac{T^2}{4\pi^2 L};$$

$$[C] = \frac{\text{с}^2}{\text{Гн}} = \frac{\text{с}^2\cdot\text{А}}{\text{В}\cdot\text{с}} = \frac{\text{А}\cdot\text{с}}{\text{В}\cdot\text{с}} = \frac{\text{Кл}}{\text{В}} = \text{Ф}; \quad C = 0{,}1\,\text{мкФ}.$$

Закон изменения со временем тока в цепи:

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_0\omega\sin\omega t = -CU_0\omega\sin\omega t.$$

Подставляя числовые значения емкости $C = 0{,}1\,\text{мкФ}$, амплитуды напряжения $U_0 = 25B$ и собственной частоты колебаний $\omega = 10^4\pi\ \text{с}^{-1}$, получаем:

$$I(t) = -78{,}5\cdot10^{-3}\sin 10^4\pi t, \text{ А}.$$

Длина волны, соответствующая контуру,

$$\lambda = cT; \quad \lambda = 60 \text{ км},$$

где c – скорость света ($c = 3\cdot10^8$ м/с).

Ответ: T = 0,2 мс; $C = 0{,}1\,\text{мкФ}$; $I(t) = -78{,}5\cdot10^{-3}\sin10^4\pi t$, А; $\lambda = 60$ км.

ЗАДАЧА 3.120

Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C = 0,2 мкФ, катушки индуктивностью L = 5,07 мГн и сопротивления R = 11,1 Ом. Во сколько раз уменьшится разность потенциалов на обкладках конденсатора за два периода колебаний?

Дано:

$C = 0{,}2\cdot10^{-6}$ Ф

$L = 5{,}07\cdot10^{-3}$ Гн

R = 11,1 Ом

$t = 2T$

---

n – ?

Решение

В колебательном контуре, имеющем активное сопротивление R, возникают затухающие электромагнитные колебания.

Дифференциальное уравнение таких колебаний имеет вид: $\dfrac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\dfrac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$.

Решением этого уравнения является функция

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha),$$

где q_0 – амплитудное значение заряда на пластинах конденсатора в момент времени $t = 0$; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота затухающих колебаний; $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ – собственная частота колебаний в контуре; $\beta = \dfrac{R}{2L}$ – коэффициент затухания; α – начальная фаза колебаний (для удобства примем $\alpha = 0$).

Разность потенциалов на обкладках конденсатора

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} e^{-\beta t} \cos \omega t,$$

где $\dfrac{q_0}{C} = U_0$ – амплитуда колебаний разности потенциалов на пластинах конденсатора в момент времени $t = 0$.

Следовательно,

$$U = U_0 e^{-\beta t} \cos \omega t.$$

Тогда за два периода амплитуда колебаний уменьшится в n раз;

$$n = \frac{U(t)}{U(t + 2T)} = e^{\beta 2T}.$$

Период T для затухающих колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \left(\dfrac{R}{2L}\right)^2}}.$$

Величина $\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2 \approx 10^3$ немного меньше $\dfrac{1}{LC} \approx 10^9$, поэтому для периода T можно применить приближенную формулу Томсона: $T = 2\pi\sqrt{LC}$; $T = 0{,}2 \cdot 10^{-3}$ с.

Тогда

$$n = e^{\beta 2T} = e^{\frac{R}{2L} 2T} = e^{\frac{RT}{L}}; \quad n = 1{,}55.$$

Ответ: $n = 1{,}55$.

ЗАДАЧА 3.121

На зажимы цепи, изображенной на рис. 1, подается переменное напряжение с действующим значением U = 220 В и частотой ν = 50 Гц. Активное сопротивление цепи R = 22 Ом, индуктивность L = 318 Гн. Переменная емкость в цепи подбирается так, чтобы показание вольтметра, включенного параллельно индуктивности, стало максимальным. Найти показания U_1 вольтметра и I амперметра в этих условиях. Полным сопротивлением амперметра и ответвлением тока в цепь вольтметра можно пренебречь.

Дано:
U = 220 В
ν = 50 Гц
R = 22 Ом
$L = 318 \cdot 10^{-3}$ Гн

U_1, I – ?

Решение

Применим второе правило Кирхгофа:

$$U_L + U_C + U_R = U. \qquad (1)$$

Из условия задачи, согласно которому напряжение на катушке индуктивности $U_L \equiv U_1$, является максимальным, следует, что переменная емкость C подобрана так, что контур настроен на резонансную частоту, при которой $\operatorname{tg}\varphi = 0$.

Следовательно, $\varphi = \pi$. Из векторной диаграммы (рис. 2) видно, что сдвигу фаз $\varphi = \pi$ соответствует падение напряжения на катушке U_L, равное по величине падению напряжения на конденсаторе U_C, но находящееся в противофазе, т.е. $U_L = -U_C$, или $U_L + U_C = 0$.

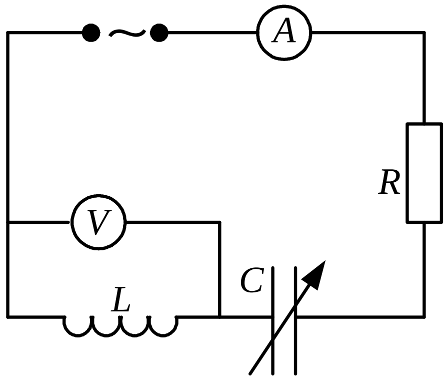


Рис. 1

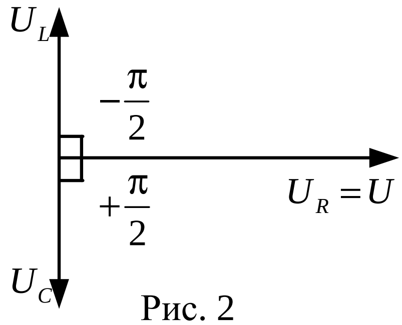


Рис. 2

Таким образом, выражение (1) упростится:

$$U = U_R = IR. \qquad (2)$$

Откуда $I = \dfrac{U}{R} = 10$ А.

В последовательно соединенном контуре $I_L = I_R$, т.е.

$$\frac{U_L}{\omega L} = \frac{U_R}{R}.$$

Следовательно, с учетом (2) максимальное напряжение U_1 будет

$$U_1 \equiv U_L = \frac{U_R \omega L}{R} = \frac{U\omega L}{R} = \frac{U 2\pi\nu L}{R};$$

$$[U_1] = \frac{\text{В}\cdot\text{Гн}}{\text{с}\cdot\text{Ом}} = \frac{\text{В}\cdot\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}}{\text{с}\cdot\text{А}\cdot\text{В}} = \text{В};$$

$$U_1 = \frac{220\cdot 2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 380\cdot 10^{-3}}{22} = 10^3 \text{ В}.$$

Ответ: $U_1 = 10^3$ В; $I = 10$ А.

ЗАДАЧА 3.122

Конденсатор емкостью C = 10 мкФ подключен параллельно к последовательно соединенным сверхпроводящему соленоиду индуктивностью L = 1 мГн и резистору сопротивлением R = 0,1 Ом и заряжается при этом генератором тока, задающим во внешней цепи ток силой I = 100 А. После зарядки конденсатора LCR-контур отключают от генератора и в контуре возникают слабозатухающие электрические колебания. Найти: 1) энергию W, рассеиваемую контуром в результате затухания колебаний; 2) период T электрических колебаний в контуре; 3) логарифмический декремент δ колебаний в контуре; 4) добротность Q электрического контура. Оценить число колебаний N в контуре до их полного затухания.

Дано:
$C = 10\cdot 10^{-6}$ Ф
$L = 10^{-3}$ Гн
R = 0,1 Ом
I = 100 А

W, T, δ, Q, N – ?

Решение

1. Ответим сначала на вопрос об энергии W, рассеиваемой контуром при затухании электрических колебаний. Она равна суммарной энергии электрического $W_э$ и магнитного $W_м$ полей в конденсаторе и, соответственно, в соленоиде:

$$W = W_э + W_м = \frac{1}{2}(IR)^2 C + \frac{1}{2}LI^2,$$

поскольку в стационарном состоянии до отключения контура от генератора тока напряжение U_{0C} на конденсаторе емкостью C было равно напряжению $U_R = IR$ на резисторе при протекании через него и соленоид индуктивностью L тока I.

Откуда

$$W = \frac{1}{2}LI^2\left(1 + R^2\frac{C}{L}\right) \approx \frac{1}{2}LI^2.$$

Поскольку

$$R^2\frac{C}{L} = 10^{-2}\frac{10^{-5}}{10^{-3}} = 10^{-4} \ll 1,$$

подставляя числовые данные, получим:

$$W = \frac{1}{2}10^{-3}\left(10^2\right)^2 \approx 5 \text{ Дж}.$$

В соответствии с общей теорией затухающих электрических колебаний в LCR-контуре при слабом затухании:

2. Период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega} \approx \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC} = 628 \text{ мкс} = 0{,}63\text{нс}$.

3. Логарифмический декремент

$$\delta = \beta T = (2R/L)\left(2\pi\sqrt{LC}\right) = \pi R\sqrt{\frac{C}{L}} \approx 0{,}03 \ll 1.$$

4. Добротность $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{C}{L}} \approx 100 \gg 1$.

Число колебаний $N \approx Q \approx 100$.

Ответ: 1) $W = 5$ Дж; 2) $T = 0{,}63$нс; 3) $\delta = 0{,}03$; 4) $Q = 100$; $N = 100$.

ЗАДАЧА 3.123

Активное сопротивление колебательного контура R = 0,33 Ом. Какую мощность P потребляет контур при поддержании в нем незатухающих колебаний с амплитудой силы тока I_m = 30 мА?

Дано:	**Решение**
R = 0,33 Ом I_m = 30·10^{-3} А	
P – ?	

Для поддержания незатухающих колебаний контур должен потреблять мощность, равную выделяемой им в цепи переменного тока, т.е.

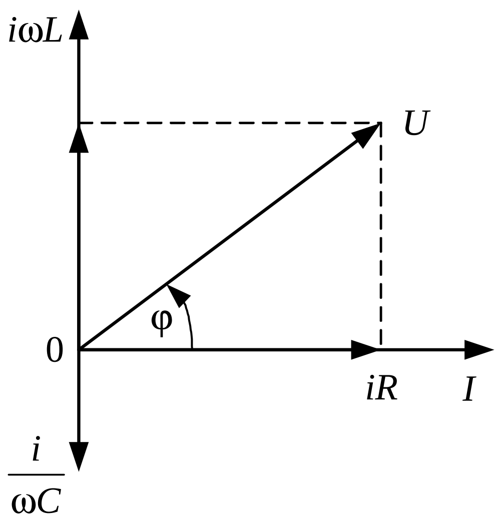
$$P = IU\cos\varphi. \qquad (1)$$

С учетом того, что $U = \dfrac{U_m}{\sqrt{2}}$ и $I = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}$, перепишем (1) в виде

$$P = \frac{1}{2}U_m I_m \cos\varphi. \qquad (2)$$

Применяя метод векторных диаграмм (см. рис.), определим коэффициент мощности $\cos\varphi$:

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{R}{Z}, \qquad (3)$$



где Z – полное сопротивление цепи ($Z = \sqrt{R^2 + x^2}$).

Используя закон Ома для переменного тока

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - 1/\omega C\right)^2}} = \frac{U_m}{Z},$$

а также формулы (2) и (3), выразим мощность P в виде

$$P = \frac{I_m^2 R}{2};$$

$$[P] = \text{А}^2 \cdot \text{Ом} = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{В}}{\text{А}} = \text{А} \cdot \text{В} = \text{Вт};$$

$$P = \left(3 \cdot 10^{-2}\right)^2 0{,}33 / 2 = 0{,}15 \cdot 10^{-3}\ \text{Вт}.$$

Ответ: $P = 0{,}15 \cdot 10^{-3}$ Вт.

ЗАДАЧА 3.124

Катушка сопротивлением 8,2 Ом включена в цепь переменного тока частотой ν = 50 Гц. Длина катушки l = 100 см и площадь поперечного сечения S = 40 см^2. Число витков на катушке N = 3000. Найти сдвиг фаз φ между напряжением и током.

Дано:
R = 8,2 Ом
ν = 50 Гц
l = 1 м
$S = 4\cdot10^{-3}$ м^2
N = 3000

φ – ?

Решение

Для решения удобно использовать векторную диаграмму (см. рис.), изобразив амплитуды напряжений:

$$U_{Rm} = RI_m; \quad U_{Cm} = \frac{I_m}{\omega C}; \quad U_{Lm} = \omega L I_m$$

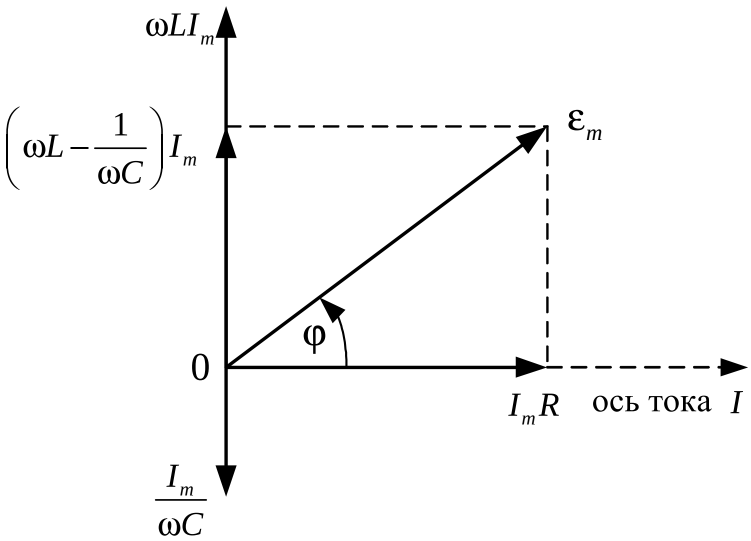
и их векторную сумму, равную, согласно второму правилу Кирхгофа,

$$U_L + U_R + U_C = \varepsilon_m \cos\omega t,$$

где $\varepsilon = \varepsilon_m \cos\omega t$ – внешняя переменная ЭДС, зависящая от времени по гармоническому закону.

Из рисунка видно, что сдвиг фаз между напряжением и током определяется формулой

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}.$$



Поскольку цепь не содержит конденсатора, то формула примет упрощенный вид:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\omega L}{R}. \qquad (1)$$

Циклическая частота колебаний

$$\omega = 2\pi\nu. \qquad (2)$$

Индуктивность катушки

$$L = \mu\mu_0 n^2 l S. \qquad (3)$$

Подставив выражения (2) и (3) в (1), получим:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{2\pi\nu\mu\mu_0 n^2 l S}{R}, \qquad (4)$$

где $\mu = 1$ – магнитная проницаемость воздуха; $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная; l – длина катушки.

Так как число витков на единицу длины катушки $n = \frac{N}{l}$, то формула (4) примет вид:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{2\pi\nu\mu_0 N^2 S}{lR};$$

$$[\varphi] = \frac{\text{Гц} \cdot \text{Гн} \cdot \text{м}^2}{\text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{Ом}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{А}}{\text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{В}} = 1;$$

$$\varphi = 60°.$$

Ответ: $\varphi = 60°$.

ЗАДАЧА 3.125

Колебательный контур настроен на длину волны λ = 1500 м и состоит из катушки индуктивностью L = 60 мкГн и плоского конденсатора с площадью пластин S = 400 см^2. Расстояние между пластинами d = 0,02 см. Найти диэлектрическую проницаемость ε среды, заполняющей пространство между пластинами конденсатора.

Дано:
λ = 1500 м
$L = 6 \cdot 10^{-5}$ Гн
$S = 4 \cdot 10^{-2}$ м^2
$d = 2 \cdot 10^{-4}$ м
ε – ?

Решение

Длина волны, на которую настроен контур,

$$\lambda = cT, \tag{1}$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость распространения электромагнитных волн. Период колебаний определим по формуле Томсона:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \tag{2}$$

Таким образом,

$$\lambda = 2\pi c\sqrt{LC}. \tag{3}$$

Из выражения (3) найдем емкость конденсатора:

$$C = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 c^2 L}. \tag{4}$$

С другой стороны, емкость плоского конденсатора можно найти по формуле

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}, \tag{5}$$

где ε – диэлектрическая проницаемость среды; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная; S – площадь пластины и d – расстояние между пластинами конденсатора.

Решая уравнения (4) и (5), найдем диэлектрическую проницаемость среды:

$$\varepsilon = \frac{\lambda^2 d}{4\pi^2 c^2 \varepsilon_0 LS}; \quad \varepsilon = 6.$$

$$[\varepsilon] = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{Ф} \cdot \text{Гн} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{с}^2 \cdot \text{В} \cdot \text{А}}{\text{Кл} \cdot \text{В} \cdot \text{с}} = \frac{\text{Кл}}{\text{Кл}}.$$

Ответ: $\varepsilon = 6$.

ЗАДАЧА 3.126

Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C = 100 пФ, катушки индуктивностью L = 0,01 Гн и резистора сопротивлением R = 20 Ом. Определить: 1) период затухающих колебаний; 2) через сколько полных колебаний амплитуда тока в контуре уменьшится в e раз?

Дано:

$C = 10^{-7}$ Ф

L = 0,01 Гн

R = 20 Ом

1) T – ?; 2) N_e – ?

Решение

Искомый период электромагнитных колебаний в контуре

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}};$$

учли, что собственная частота контура $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ и коэффициент затухания $\beta = \frac{R}{2L}$.

Число полных колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды силы тока в e раз,

$$N_e = \frac{\tau}{T}, \tag{1}$$

где время релаксации $\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{2L}{R}$.

Подставив это выражение в формулу (1), найдем искомое число полных колебаний:

$$N_e = \frac{2L}{RT};$$

$$[T]=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\text{Гн}\cdot\text{Ф}}-\frac{\text{Ом}^2}{\text{Гн}^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{\text{А}\cdot\text{В}}{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{Кл}}-\frac{\text{В}^2\cdot\text{А}^2}{\text{А}^2\cdot\text{В}^2\cdot\text{с}^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{\text{А}}{\text{с}\cdot\text{А}\cdot\text{с}}-\frac{1}{\text{с}^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\text{с}^2}}}=\text{с};$$

$$T=\frac{2\cdot 3{,}14}{\sqrt{\frac{1}{0{,}01\cdot 10^{-2}}-\frac{20^2}{4\cdot(0{,}01)^2}}}=2\cdot 10^{-3}c=2\ \text{мс};$$

$$[N_e]=\frac{\text{Гн}}{\text{Ом}\cdot\text{с}}=\frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}}{\text{А}\cdot\text{В}\cdot\text{с}}=1;$$

$$N_e=\frac{2\cdot 0{,}01}{20\cdot 2\cdot 10^{-3}}=5.$$

Ответ: 1) $T=2$ мс; 2) $N_e=5$.

ЗАДАЧА 3.127

Определить добротность Q колебательного контура, если собственная частота ω_0 колебательного контура отличается на 5 % от частоты ω свободных затухающих колебаний.

Дано:	**Решение**
$\omega_0=1{,}05\omega$	В реальном колебательном контуре (т.е. обладающем сопротивлением) частота ω свободных затухающих электромагнитных колебаний меньше собственной частоты ω_0 колебательного контура (при $R\simeq 0$):
Q – ?	

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,, \qquad (1)$$

где β – коэффициент затухания.

Добротность колебательного контура

$$Q=\frac{\pi}{\theta},$$

где логарифмический декремент затухания $\theta=\beta T$ (T – период затухающих колебаний, $T=\frac{2\pi}{\omega}$).

Учитывая приведенные формулы, найдем коэффициент затухания:

$$\beta = \frac{\theta}{T} = \frac{\pi}{QT} = \frac{\pi\omega}{Q \cdot 2\pi} = \frac{\omega}{2Q}. \qquad (2)$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), получаем:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\omega^2}{4Q^2}} \quad \text{или} \quad \omega_0 = \omega\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}.$$

Откуда искомая добротность

$$Q = \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 - 1}};$$

$$Q = \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{1,05\omega}{\omega}\right)^2 - 1}} = 1,56.$$

Ответ: $Q = 1,56$.

ЗАДАЧА 3.128

Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C = 10 нФ и катушки индуктивностью L = 4 мкГн. Определить критическое сопротивление $R_{кр}$ контура, при котором начинается апериодический процесс.

Дано:	**Решение**
$C = 10^{-8}$ Ф $L = 4 \cdot 10^{-6}$ Гн	Частота свободных затухающих электромагнитных колебаний в контуре
$R_{кр}$ – ?	$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

При увеличении коэффициента затухания период затухающих колебаний растет и при $\beta = \omega_0$ обращается в бесконечность, т.е. вместо колебаний будет происходить разряд конденсатора.

Критическое сопротивление, при котором наступает апериодический процесс, определяется из условия

$$\frac{R_{кр}^2}{4L^2}=\frac{1}{LC},$$

откуда

$$R_{кр}=2\sqrt{\frac{L}{C}};$$

$$\left[R_{кр}\right]=\sqrt{\frac{\text{Гн}}{\text{Ф}}}=\sqrt{\frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{В}}{\text{А}\cdot\text{Кл}}}=\sqrt{\frac{\text{В}^2\cdot\text{с}}{\text{А}\cdot\text{А}\cdot\text{с}}}=\frac{\text{В}}{\text{А}}=\text{Ом};$$

$$R_{кр}=2\sqrt{\frac{4\cdot10^{-6}}{10^{-8}}}=40\text{ Ом}.$$

Ответ: $R_{кр}=40\text{ Ом}$.

ЗАДАЧА 3.129

Колебательный контур содержит катушку индуктивностью L = 5 мГн и конденсатор емкостью C = 2 мкФ. Добротность колебательного контура Q = 100. Какую среднюю мощность следует подводить для поддержания в колебательном контуре незатухающих гармонических колебаний с амплитудным значением напряжения на конденсаторе $U_{cm}=2$ В?

Дано:	Решение
L = 5·10^{-3} Гн C = 2·10^{-6} Ф Q = 100 $U_{cm}=2$ В	Средняя мощность, выделяемая в колебательном контуре, $$\langle P\rangle=\frac{1}{2}RI_m^2, \quad (1)$$
$\langle P\rangle$ – ?	где R – активное сопротивление; I_m – амплитуда силы тока.

Активное сопротивление R найдем из формулы для добротности:

$$Q=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}},$$

откуда

$$R=\frac{1}{Q}\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (2)$$

Амплитудное значение силы тока найдем, применяя закон Ома для элемента контура C, поскольку в задаче задано амплитудное значение напряжения на конденсаторе:

$$I_m = \omega C U_{Cm} = U_{Cm}\sqrt{\frac{C}{L}}; \qquad (3)$$

учли, что при незатухающих колебаниях $\omega = \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

Подставив выражения (2) и (3) в формулу (1), найдем искомую среднюю мощность:

$$\langle P\rangle = \frac{U_{Cm}^2}{2Q}\sqrt{\frac{C}{L}};$$

$$\langle P\rangle = \text{В}^2\sqrt{\frac{\text{Ф}}{\text{Гн}}} = \text{В}^2\sqrt{\frac{\text{Кл}\cdot\text{А}}{\text{В}\cdot\text{В}\cdot\text{с}}} = \text{В}^2\sqrt{\frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{А}}{\text{В}^2\cdot\text{с}}} = \text{В}^2\,\frac{\text{А}}{\text{В}} = \text{В}\cdot\text{А} = \text{Вт};$$

$$\langle P\rangle = \frac{2^2}{2\cdot 100}\sqrt{\frac{2\cdot 10^{-6}}{5\cdot 10^{-3}}} = 0{,}4\cdot 10^{-3}\ \text{Вт}.$$

Ответ: $\langle P\rangle = 0{,}4\cdot 10^{-3}$ Вт.

ЗАДАЧА 3.130

Уравнение плоской электромагнитной волны, распространяющейся в среде с магнитной проницаемостью, равной 1, имеет вид $E = 10\sin\left(6{,}28\cdot 10^8 t - 4{,}19x\right)$. Определить диэлектрическую проницаемость среды ε и длину волны λ.

Дано:

$\mu = 1$

$E = 10\sin\left(6{,}28\cdot 10^8 t - 4{,}19x\right)$;

c = $3\cdot 10^8$ м/с

ε, λ – ?

Решение

Уравнение плоской электромагнитной волны в общем виде

$$E = E_0\sin\left(\omega t - kx\right),$$

где E_0 – амплитудное значение напряженности электрического поля; $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число; λ – длина волны; ω – циклическая частота, $\omega = k\upsilon$; υ – фазовая скорость.

По условию задачи $k = 4{,}19\ \text{м}^{-1}$.

Тогда

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}; \quad \lambda = \frac{6{,}28}{4{,}19} \simeq 1{,}5\ \text{м}.$$

Фазовая скорость волны $\upsilon = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

Отсюда

$$\varepsilon = \frac{1}{\mu}\frac{c^2}{\upsilon^2},$$

или с учетом того, что $\upsilon = \frac{\omega}{k}$, а ω по условию задачи равна $6{,}28 \cdot 10^8\ \text{с}^{-1}$, получим:

$$\varepsilon = \frac{1}{\mu}\left(\frac{ck}{\omega}\right)^2;$$

$$\varepsilon = \frac{9 \cdot 10^{16} \cdot 4{,}19^2}{6{,}28^2 \cdot 10^6} = 4.$$

Ответ: $\lambda = 1{,}5\ \text{м}$; $\varepsilon = 4$.

ЗАДАЧА 3.131

Длина электромагнитной волны в вакууме, на которую настроен колебательный контур, равна 31,4 м. Пренебрегая активным сопротивлением контура, определить максимальную силу тока I_m в контуре, если максимальный заряд q_m на обкладках конденсатора равен 50 нКл.

Дано:
$\lambda = 31{,}4$ м
$R = 0$
$q_m = 5 \cdot 10^{-8}$ Кл
I_m – ?

Решение

Колебания в контуре незатухающие ($R = 0$), поэтому максимальная энергия магнитного поля катушки равна максимальной энергии электрического поля конденсатора (полная энергия колебательного контура постоянна):

$$\frac{LI_m^2}{2} = \frac{q_m^2}{2C}, \tag{1}$$

где L – индуктивность катушки; C – емкость конденсатора.

Откуда

$$LC = \frac{q_m^2}{I_m^2}. \qquad (2)$$

Длина волны определяется по формуле

$$\lambda = cT, \qquad (3)$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость распространения света в вакууме; T – период колебаний, определяется по формуле Томсона:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \qquad (4)$$

Подставив выражение (2) в формулу (4), а затем (4) в (3), найдем искомую максимальную силу тока в контуре:

$$I_m = 2\pi c \frac{q_m}{\lambda};$$

$$[I_m] = \frac{\text{м} \cdot \text{Кл}}{\text{с} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Кл}}{\text{с}} = \frac{\text{А} \cdot \text{с}}{\text{с}} = \text{А};$$

$$I_m = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{5 \cdot 10^{-8}}{31{,}4} = 3 \text{ А}.$$

Ответ: $I_m = 3$ А.

ЗАДАЧА 3.132

В вакууме вдоль оси X распространяется плоская электромагнитная волна. Определить амплитуду напряженности электрического поля волны, если амплитуда H_0 напряженности магнитного поля волны равна 5 мА/м.

Дано:
$\varepsilon = 1$
$\mu = 1$
H_0 = $5 \cdot 10^{-3}$ А/м
E_0 – ?

Решение

Связь между мгновенными значениями напряженностей электрического (E) и магнитного (H) полей электромагнитной волны

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H,$$

где ε_0 = $8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная; ε и μ – соответственно электрическая и магнитная проницаемость среды.

Поскольку электромагнитная волна распространяется в вакууме ($\varepsilon = 1$, $\mu = 1$), то

$$\sqrt{\varepsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H . \qquad (1)$$

В электромагнитной волне векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ всегда колеблются в одинаковых фазах, поэтому выражение (1) может быть записано и для мгновенных значений амплитуд напряженностей электрического и магнитного полей электромагнитной волны:

$$\sqrt{\varepsilon_0} E_0 = \sqrt{\mu_0} H_0 .$$

Из последнего выражения найдем искомую амплитуду напряженности электрического поля электромагнитной волны:

$$E_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H_0 ;$$

$$[E_0] = \sqrt{\frac{Гн \cdot м}{м \cdot Ф}} \cdot \frac{А}{м} = \sqrt{\frac{В \cdot с \cdot В}{А \cdot Кл}} \cdot \frac{А}{м} = \sqrt{\frac{В \cdot с \cdot В}{А \cdot А \cdot с}} \cdot \frac{А}{м} = \frac{В \cdot А}{А \cdot м} = \frac{В}{м} ;$$

$$E_0 = \sqrt{\frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7}}{8{,}85 \cdot 10^{-12}}} \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 1{,}88 \frac{В}{м} .$$

Ответ: $E_0 = 1{,}88 \frac{В}{м}$.

ЗАДАЧА 3.133

В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна, амплитуда напряженности электромагнитного поля которой 100 В/м. Какую энергию переносит эта волна через площадку 50 см^2, расположенную перпендикулярно к направлению распространения волны, за 1 мин? Период волны $T \ll t$.

Дано:
E_0 = 100 В/м
S = 5·10^{-3} м^2
t = 60 с
$T \ll t$

W – ?

Решение

Энергия, переносимая через площадку S, перпендикулярную к направлению распространения волны, в единицу времени равна

$$\frac{dW}{dt} = \omega c S ,$$

где ω – объемная плотность энергии;

$$\omega = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2} ,$$

или с учетом того, что

$$\varepsilon_0 E^2 = \mu_0 H^2, \quad \omega = \varepsilon_0 E^2.$$

Напряженность электрического поля волны $E = E_0 \sin \omega t$.

Таким образом, $\dfrac{dW}{dt} = cS\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2 \omega t$.

Энергия, переносимая волной за время t, будет определяться интегралом

$$W = \int_0^t cS\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2 \omega t dt = cS\varepsilon_0 E_0^2 \int_0^t \sin^2 \omega t dt = cS\varepsilon_0 E_0^2 \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} \right).$$

По условию задачи $T \ll t$, поэтому $\dfrac{t}{2} \gg \dfrac{\sin 2\omega t}{4\omega}$, и тогда $W = \dfrac{1}{2} cS\varepsilon_0 E_0^2 t$;

$$W = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^4 \cdot 60 \simeq 4 \text{ Дж}.$$

Ответ: $W = 4$ Дж.

ЗАДАЧА 3.134

Плоская электромагнитная волна распространяется в однородной и изотропной среде с $\varepsilon = 2$ и $\mu = 1$. Амплитуда напряженности электрического поля волны E_0 = 12 В/м. Определить: 1) фазовую скорость волны; 2) амплитуду напряженности магнитного поля волны.

Дано:	**Решение**
$\varepsilon = 2$ $\mu = 1$ E_0 = 12 В/м	Фазовая скорость электромагнитных волн
1) υ – ?; 2) H_0 – ?	

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}};$$

$$\upsilon = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{2 \cdot 1}} = 2{,}12 \cdot 10^8 \text{ м/с},$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость распространения света в вакууме.

В бегущей электромагнитной волне мгновенные значения E и H в любой точке связаны соотношением

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H.$$

Тогда для амплитуд напряженностей электрического и магнитного полей электромагнитной волны (см. задачу 3.131)

$$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}E_0 = \sqrt{\mu_0\mu}H_0 .$$

Откуда искомая амплитуда напряженности магнитного поля электромагнитной волны

$$H_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}}{\sqrt{\mu_0\mu}}E_0;$$

$$[H_0] = \frac{\sqrt{\text{Ф/м}}}{\sqrt{\text{Гн/м}}}\frac{\text{В}}{\text{м}} = \sqrt{\frac{\text{Кл}\cdot\text{А}\cdot\text{м}}{\text{В}\cdot\text{м}\cdot\text{В}\cdot\text{с}}}\cdot\frac{\text{В}}{\text{м}} = \sqrt{\frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{А}\cdot\text{м}}{\text{В}\cdot\text{м}\cdot\text{В}\cdot\text{с}}}\cdot\frac{\text{В}}{\text{м}} = \frac{\text{А}\cdot\text{В}}{\text{В}\cdot\text{м}} = \frac{\text{А}}{\text{м}};$$

$$H_0 = \frac{\sqrt{8{,}85\cdot10^{-12}\cdot2}}{\sqrt{4\cdot3{,}14\cdot10^{-7}\cdot1}}\cdot12 = 45\cdot10^{-3}\ \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

Ответ: 1) $\upsilon = 2{,}12\cdot10^8$ м/с; 2) $H_0 = 45\cdot10^{-3}\ \frac{\text{А}}{\text{м}}$.

ЗАДАЧА 3.135

Определить энергию, которую переносит за 1 минуту плоская синусоидальная волна, распространяющаяся в вакууме через площадку площадью 10 см^2, расположенную перпендикулярно к направлению распространения волны. Амплитуда напряженности электрического поля волны 1 мВ/м. Период волны $T \ll 1\,\text{мин}$.

Дано:

$T = 60$ с
$S = 10^{-3}$ м^2
$E_0 = 10^{-3}$ В/м
$\varepsilon = 1$
$\mu = 1$
$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м
$\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м

W – ?

Решение

Энергия, переносимая электромагнитной волной за единицу времени через единицу площади, перпендикулярной к направлению распространения волны, определяется вектором Пойнтинга $\vec{S}^*$. Учитывая, что в электромагнитной волне $\vec{E}\perp\vec{H}$, получаем для модуля вектора:

$$\left|\vec{S}^*\right| = EH$$

или $\left|\vec{S}^*\right| = E_0\sin\omega t\cdot H_0\sin\omega t = E_0H_0\sin^2\omega t$.

Таким образом, можно определить мгновенное значение величины $\vec{S}^*$. Поэтому согласно определению вектора плотности потока энергии запишем: $\left|\vec{S}^*\right| = \frac{dW}{dt}\frac{1}{S}$.

Отсюда энергия, переносимая волной через площадку S за время dt, будет равна

$$dW = \left|\vec{S}^*\right| SdS = E_0 H_0 S \sin^2 \omega t dt .$$

Согласно теории электромагнитных волн объемные плотности энергии электрического и магнитного полей волны в любой момент времени равны

$$\frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} .$$

Напряженность магнитного поля H можно выразить через напряженность электрического поля E:

$$H = E\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} .$$

Тогда выражение для энергии примет вид:

$$dW = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 S \sin^2(\omega t) dt .$$

Отсюда полная энергия, переносимая волной за время t,

$$W = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 S \int_0^t \sin^2(\omega t) dt = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 S \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4\omega}\sin 2\omega t\right).$$

Так как $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, то $\dfrac{\sin 2\omega t}{4\omega} = \dfrac{T}{8\pi}\sin\left(\dfrac{4\pi t}{T}\right)$.

Учитывая, что $T \ll t$, получаем, что $\dfrac{\sin 2\omega t}{4\omega} \ll \dfrac{t}{2}$.

Тогда

$$W = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 S \frac{t}{2} ;$$

$$[W] = \sqrt{\frac{\text{Ф} \cdot \text{м}}{\text{м} \cdot \text{Гн}}} \cdot \frac{\text{В}^2 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = \sqrt{\frac{\text{Кл} \cdot \text{А}}{\text{В} \cdot \text{В} \cdot \text{с}}} \cdot \text{В}^2 \cdot \text{с} = \sqrt{\frac{\text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{А}}{\text{В} \cdot \text{В} \cdot \text{с}}} \cdot \text{В}^2 \cdot \text{с} =$$

$$= \frac{\text{А} \cdot \text{В}^2 \cdot \text{с}}{\text{В}} = \text{А} \cdot \text{В} \cdot \text{с} = \text{Дж} ;$$

$$W = \sqrt{\frac{8{,}85 \cdot 10^{-12}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7}}} \left(10^{-3}\right)^2 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{60}{2} = 8 \cdot 10^{-11} \text{ Дж} .$$

Ответ: $W = 8 \cdot 10^{-11}$ Дж .

ЛИТЕРАТУРА

1. Антошина, Л.Г. Общая физика. Сборник задач: учеб. пособие / Л.Г. Антошина, С.В. Павлов, Л.А. Скипетрова; под ред. проф. Б.А. Струкова. – М.: ИНФРА-М, 2006. – 336 с.
2. Гладской, В.М. Сборник задач по физике с решениями: пособие для вузов / В.М. Гладской, П.И. Самойленко. – 2-е изд., стер. – М.: Дрофа, 2004 – 288 с.: ил.
3. Физика: учеб. пособие. В 2 ч. / В.А. Груздев [и др.]. – Минск: РИВШ, 2009. Т. 1. – 296 с., Т. 2. – 312 с.
4. Демков, В.П. Физика. Теория. Методика. Задачи / В.П. Демков, О.Н. Третьякова. – М.: Высш. шк., 2001. – 669 с.: ил.
5. Калашников, Н.П. Основы физики. Упражнения и задачи: учеб. пособие для вузов / Н.П. Калашников, М.А. Смондырев. – М.: Дрофа, 2004. – 464 с.
6. Решение задач по физике: учеб. пособие / В.М. Кириллов [и др.]. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: КомКнига, 2006. – 248 с.
7. Общая физика. Сборник задач: учеб. пособие / А.П. Кирьянов [и др.]. – М.: КНОРУС, 2008. – 304 с.
8. Курс физики: учебник для вузов. В 2 т. / под ред. В.Н. Лозовского. – СПб.: Изд-во «Лань», 2001. Т. 1. – 576 с., Т. 2. – 592 с.
9. Макаренко, Г.М. Курс общей физики / Г.М. Макаренко. – Минск: Дизайн ПРО, 2003. – 640 с.
10. Наркевич, И.И. Физика: учебник / И.И. Наркевич, Э.И. Волмянский, С.И. Лобко. – Минск: Новое знание, 2004. – 680 с.
11. Новиков, С.М. Сборник заданий по общей физике: учеб. пособие для студентов вузов / С.М. Новиков. – М.: ООО «Издательство Оникс»: Изд-во «Мир и образование», 2006. – 512 с.: ил.
12. Новодворская, Е.М. Сборник задач по физике с решениями для вузов / Е.М. Новодворская, Э.М. Дмитриев. – М.: Изд. дом «Оникс 21 век»: ООО «Издательство Минобразования», 2005. – 386 с.: ил.
13. Решение задач по курсу общей физики: учеб. пособие. – 2-е изд., испр. / под ред. Н.М. Рогачева. – СПб.: Изд-во «Лань», 2008. – 304 с.
14. Трофимова, Т.И. Курс физики. Задачи и решения: учеб. пособие для втузов / Т.И. Трофимова, А.В, Фирсов. – М.: Изд. центр «Академия», 2004. – 592 с.
15. Фирганг, Е.В. Руководство к решению задач по курсу общей физики / Е.В. Фирганг. – СПб.: Изд-во «Лань», 2007. – 368 с.
16. Чертов, А.Г. Задачник по физике: учеб. пособие для втузов / А.Г. Чертов, А.А. Воробьев. – 7-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во физико-математической литературы, 2003. – 640 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

МАКАРЕНКО Геннадий Макарович
ВАБИЩЕВИЧ Наталья Вячеславовна

ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ

Пособие

В четырех частях

Часть 3

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Редактор *Т. В. Булах*

Дизайн обложки *В. А. Виноградовой*

Подписано в печать 17.01.2011. Формат 60×84 1/16. Гарнитура Таймс. Бумага офсетная.
Ризография. Усл. печ. л. 11,6. Уч.-изд. л. 10,7. Тираж 320 экз. Заказ 2125.

Издатель и полиграфическое исполнение –
учреждение образования «Полоцкий государственный университет»

ЛИ № 02330/0548568 от 26.06.2009 ЛП № 02330/0494256 от 27.05.2009

211440 г. Новополоцк, ул. Блохина, 29