УДК 517. 944

ТРЕХТОЧЕЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА РАЗРЕШИМОСТЬ

канд. пед. наук, доц. В.С. ВАКУЛЬЧИК, канд. физ.-мат. наук, доц. Н.В. ЦЫВИС
(Полоцкий государственный университет)

Для дифференциально-операторных уравнений четвертого порядка рассматривается трехточечная задача с однородными условиями, заданными в точках $t=0$, $t=T_1$ и $t=T$, и условиями согласования в точке $t=T_1$. Функции u *и* f *– функции переменного $t\in(0,T)$, принимающие значения в гильбертовом пространстве H. С рассматриваемой задачей связано операторное уравнение с областью определения оператора L, включающей в себя условия, накладываемые на функцию* u *в точках $t=0$, $t=T_1$ и $t=T$. Методом энергетических неравенств для рассматриваемой задачи устанавливается существование и единственность сильного решения операторного уравнения.*

1. Постановка задачи

На интервале (0, *T*) рассмотрим трехточечную задачу:

$$Lu \equiv \frac{d^4u}{dt^4} - Au = f(t)\,; \tag{1}$$

$$u(0)=u(T_1)=u''(T_1)=u(T)=0, \quad 0<T_1<T\,; \tag{2}$$

$$u'(T_1-0)=\alpha_1 u'(T_1+0); \quad u'''(T_1-0)=\alpha_3 u'''(T_1+0); \quad \alpha_1\cdot\alpha_3 T_1 = T_1 - T\,. \tag{3}$$

Здесь *u* и *f* – функции переменного $t\in(0,T)$, принимающие значения в гильбертовом пространстве *H*, норму и скалярное произведение в котором обозначим символами $\|\cdot\|$, $(\cdot,\cdot)$ соответственно; *A* – линейный самосопряженный и положительный оператор в *H* с областью определения $D(A)$, т.е. для оператора *A* справедливо неравенство:

$$(Av,v)\ge 0\,,\ \forall v\in D(A)\,, \tag{4}$$

и при каждом $\rho>0$ оператор $A_\rho = A+\rho I$ имеет в *H* ограниченный обратный оператор A_ρ^{-1}.

В точке $t=T_1$ на функцию $u(t)$ наложим дополнительные условия (условия сопряжения), которые имеют вид (3).

Задаче (1) – (4) поставим в соответствие оператор *L* с областью определения *D*(*L*), состоящей из функций $u\in L_2((0,\ T),\ H)$, $Au(t)\in L_2((0,T),\ H)$ и $u(t)$ удовлетворяет условиям (2) и (3). Оператор *L* рассматривается из *E* в *F*, где *E* – гильбертово пространство, полученное пополнением множества *D*(*L*) по норме:

$$\|u\|_E^2 = \int_0^T\left(\left\|\frac{d^2u}{dt^2}\right\|^2 + \left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 + \|u\|^2 + (Au,\ u)\right)dt\,,$$

а *F* – банахово пространство, полученное пополнением $L_2\left((0,T),\ H\right)$ по норме:

$$\|f\|_F = \sup_{v\in E}\frac{\left|\int_0^T (f,\ Mv)dt\right|}{\|v\|_E}\,,$$

где оператор Mv определяется выражением:

$$Mv = \begin{cases} t\dfrac{dv}{dt} - v, \quad 0 \le t \le T_1; \\ \\ (t-T)\dfrac{dv}{dt} - v, \; T_1 < t \le T. \end{cases}$$

В [10] для рассматриваемой задачи установлено энергетическое неравенство.

В данной работе методом энергетических неравенств исследуется разрешимость поставленной задачи.

Рассмотрим оператор $L : E \to F$ с областью определения $D(L)$. Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА. Оператор $L : E \to F$ с областью определения $D(L)$ допускает замыкание.

Доказательство. Согласно критерию замыкаемости операторов в банаховых пространствах [9, с. 92] нужно показать: из того, что $u_n \to 0$ $u_n \in D(L)$ в E и $Lu_n \to f$ в F, следует, что $f = 0$.

Пусть $v(t)$ произвольная, достаточно гладкая по t функция, удовлетворяющая условиям (2), (3) и принимающая значения в области определения оператора A.

Так как область определения $D(L)$ оператора L такова, что на ней $Lu \in L_2((OT),\, H)$, то имеем равенство:

$$f(v) = \lim_{n\to\infty} \int_0^T (Lu_n,\, Mv)dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^T \left(\frac{d^4 u_n}{dt^4} - Au_n,\, Mv \right) dt\,. \tag{5}$$

Интегрируя по частям в первом слагаемом правой части равенства (5) и используя свойство оператора A, предельным переходом при $n \to \infty$ убеждаемся, что $f(v) = 0$. А это значит, что имеет место лемма.

Символом $\overline{L}$ обозначим замыкание оператора L. Замыкание строится следующим образом [9, с. 115]: функцию $u \in E$ отнесем к области определения $D(\overline{L})$ оператора $\overline{L}$, если существует последовательность $u_n \in D(L)$ и элемент $f \in F$ такие, что $u_n \to u$ в E и $Lu_n \to f$ в пространстве F. При этом положим $\overline{L}u \equiv f = \lim\limits_{n\to\infty} Lu_n$.

Так как элементы графика оператора $\overline{L}$ являются пределами последовательностей элементов графика оператора L, то с помощью предельного перехода неравенство (9) из [10] распространяется на $u \in D(\overline{L})$, т.е. справедливо неравенство:

$$\|u\|_E \le c \cdot \left\|\overline{L}u\right\|_F \quad u \in D(\overline{L})\,. \tag{6}$$

Из неравенства (6) непосредственно вытекает:

СЛЕДСТВИЕ. Множество значений $R(\overline{L})$ оператора $\overline{L}$ замкнуто в пространстве F, $R(\overline{L}) = \overline{R(L)}$ и на $R(\overline{L})$ существует ограниченный обратный оператор $(\overline{L})^{-1} = (\overline{L^{-1}})$.

Доказательство замкнутости множества значений $R(\overline{L})$ оператора $\overline{L}$ в F следует из равенства:

$$R(\overline{L}) = \overline{R(L)}\,.$$

Для доказательства этого равенства доказываем справедливость включений:

$$R(\overline{L}) \subset \overline{R(L)} \text{ и } \overline{R(L)} \subset R(\overline{L})\,.$$

Справедливость первого включения следует из определения множеств $R(\overline{L})$ и $\overline{R(L)}$.

Справедливость включения $\overline{R(L)} \subset R(\overline{L})$ устанавливается, используя то, что для $f \in R(\overline{L})$ существует $f_n \to f$ в пространстве *F*, и для каждого f_n найдется $u_n \in D(L)$, что $Lu_n = f_n$. f_n является фундаментальной последовательностью в *E*, и в силу неравенства (6) u_n – фундаментальная последовательность в *E*, и в силу полноты *E* $u_n \to u \in E$.

Из построения замыкания оператора *L* будем иметь, что $u \in D(L)$ и $f = \overline{L}u$, а следовательно, $f \in R(L)$ и тем самым доказывается второе включение, значит $\overline{R(L)} = R(\overline{L})$.

Так как оператор $\overline{L}$ линейный и для него имеет место неравенство (6), то на $R(\overline{L})$ существует ограниченный обратный оператор $(L)^{-1}$. Из теоремы о продолжении линейного оператора по непрерывности [11, с. 124] следует равенство: $(\overline{L})^{-1} = (\overline{L^{-1}})$.

2. Существование сильного решения

Рассмотрим операторное уравнение:

$$\overline{L}u = f, \quad f \in F. \tag{7}$$

Решение уравнения (7) называется сильным решением задачи (1) – (3) в пространстве *E*.

Однозначная разрешимость уравнения (7) при любом *F* или существование и единственность сильного решения задачи (1) – (3) будет установлена, если докажем плотность в пространстве *F* множества $R(L)$. Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть выполняются условия теоремы из [10], тогда множество значений *R*(*L*) плотно в *F*.

Доказательство. Так как *F* – рефлексивное пространство, то плотность *R*(*L*) в *F* равносильна тому, что из равенства

$$\int_0^T (Lu,\ Mv)dt = 0, \tag{8}$$

$u = D(L)$, следует равенство $v = 0$.

Интегрируя по частям в (8) первый член и используя условия (2) и (3) для функций *u* и *v*, получим равенство:

$$\int_0^T \left(\frac{d^3u}{dt^3},\ t\frac{d^2v}{dt^2} \right) = -\int_0^T (Au,\ Mv)dt. \tag{9}$$

Предельным переходом равенство (9) распространим на такие $u \in L_2((0,T),\ H)$ и $u(t)$ удовлетворяет условиям (2), (3). После этого в равенство (9) положим $u = (A_\rho^{-1})(A_\rho^{-1})v$, где v из равенства (8), а $A_\rho = A + \rho \cdot I$, $\rho \geq 0$ и получим равенство:

$$\frac{3}{2}\int_0^T \left\| \frac{d^2 A_\rho^{-1} v}{dt^2} \right\|^2 dt = -\int_0^T (AA_\rho^{-1}v,\ A_\rho^{-1}v)dt. \tag{10}$$

Так как правая часть равенства (10) неположительная, то из равенства (10) вытекает неравенство:

$$\int_0^T \left\| \frac{d^m A_\rho^{-1} v}{dt^m} \right\|^2 dt \leq 0,$$

из которого заключаем, что $A_\rho^{-1}v = 0$, и тем самым $v = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдо, С.А. Многоточечные краевые задачи для некоторых дифференциально-операторных уравнений. I. Априорные оценки / С.А. Абдо, Н.И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 3. – С. 417 – 425.
2. Горбачук, В.И. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений / В.И. Горбачук, М.Л. Горбачук. – Киев: Наукова думка, 1984. – 280 с.
3. Дезин, А.А. Операторы с первой производной по «времени» и нелокальные условия / А.А. Дезин // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1967. – Т. 31, № 1. – С. 61 – 86.
4. Чесалин, В.И. Задача с нелокальными условиями для абстрактных уравнений Лява / В.И. Чесалин, Н.И. Юрчук // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1973. – № 6. – С. 30 – 39.
5. Юрчук, Н.И. Априорные оценки решений граничных задач для некоторых дифференциально-операторных уравнений / Н.И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, № 4. – С. 729 – 739.
6. Юрчук, Н.И. Разрешимость граничных задач для некоторых дифференциально-операторных уравнений / Н.И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 4. – С. 626 – 636.
7. Цывис, Н.В. Трехточечная задача для дифференциально-операторных уравнений третьего порядка / Н.В. Цывис, Н.И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 5. – С. 872 – 877.
8. Цывис, Н.В. Трехточечная задача для дифференциально-операторных уравнений нечетного порядка / Н.В. Цывис. – Деп. в ВИНИТИ 10.08.87, № 580 Л. – В. 87.
9. Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
10. Вакульчик, В.С. Трехточечная задача для дифференциально-операторных уравнений четвертого порядка. Априорные оценки / В.С. Вакульчик, Н.В. Цывис // Вестн. Полоцк. гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2007. – № 3. – С. 51 – 54.
11. Кантарович, Л.В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л.В. Кантарович, Г.Г. Акилов. – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.

Поступила 03.01.2008