УДК 517.525.52

О СИСТЕМАХ, ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ОДНОРОДНЫМ КВАДРАТИЧНЫМ СТАЦИОНАРНЫМ СИСТЕМАМ

В.А. ГЕРМАНОВИЧ
(Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина)

Проведено качественное исследование решений двумерной неавтономной дифференциальной системы, эквивалентной однородной стационарной квадратичной системе. Доказаны теоремы о совпадении отражающей функции таких систем. До настоящего момента подобные исследования для неавтономных систем не проводились. Используя результаты исследования поведения решений однородной квадратичной стационарной системы и знание о том, что системы с одинаковой отражающей функцией имеют одно и то же отображение за период, доказаны теоремы о существовании асимптотически устойчивых (неустойчивых), ограниченных (ограниченных по одной из фазовых переменных), 2π*-периодических решений для всех систем, эквивалентных в смысле совпадения отражающей функции рассмотренной неавтономной системе. Приведены простые примеры, иллюстрирующие заключения доказанных нами теорем и утверждений. Доказаны также теоремы о взаимно однозначном соответствии между решениями двухточечных краевых задач.*

Качественному исследованию полиномиальных стационарных систем посвящено много работ, среди которых и работа В.В. Амелькина [1]. Было бы интересно перенести результаты таких исследований на нестационарные системы.

В настоящей работе, используя результаты Л.С. Лягиной [2] и понятие отражающей функции В.И. Мироненко [3], исследовано качественное поведение в целом решений нестационарной системы вида:

$$\begin{cases} \overset{*}{x} = \left(m_0x^2 + m_1xy + m_2y^2\right)\left(1 + \alpha(t) + \beta(t)\left(x + m_0tx^2 + m_1txy + m_2ty^2\right)\right); \\ \overset{*}{y} = \left(n_0x^2 + n_1xy + n_2y^2\right)\left(1 + \alpha(t) + \beta(t)\left(y + n_0tx^2 + n_1txy + n_2ty^2\right)\right). \end{cases} \tag{1}$$

где $\alpha(t)$, $\beta(t)$ – произвольные непрерывные на $\mathbb{R}$ нечетные функции.

ТЕОРЕМА 1. Все системы дифференциальных уравнений вида (1), где $\alpha(t)$, $\beta(t)$ произвольные непрерывные на $\mathbb{R}$ нечетные функции, имеют одну и ту же отражающую функцию, и она совпадает с отражающей функцией стационарной системы:

$$\begin{cases} \overset{*}{x} = m_0x^2 + m_1xy + m_2y^2; \\ \overset{*}{y} = n_0x^2 + n_1xy + n_2y^2, \end{cases} \tag{2}$$

поэтому системы (1) и (2) имеют один и тот же оператор сдвига на любом временном промежутке $[-\omega, \omega]$. В частности, система (1), в которой $\alpha(t)$ – 2ω-периодическая функция, $\beta(t) \equiv 0$, имеет такое же отображение за период $[-\omega, \omega]$, как и система (2).

Доказательство. Согласно [4; 3, с. 55 – 81, 170 – 180] для доказательства теоремы достаточно доказать, что

$$\Delta = \begin{cases} c_1\left(m_0x^2 + m_1xy + m_2y^2\right) + c_2\left(x + m_0tx^2 + m_1txy + m_2ty^2\right); \\ c_1\left(n_0x^2 + n_1xy + n_2y^2\right) + c_2\left(y + n_0tx^2 + n_1txy + n_2ty^2\right) \end{cases}$$

удовлетворяет соотношению:

$$\Delta_t + \Delta_x X - X_x \Delta = 0, \tag{3}$$

где

$$X = \begin{cases} m_0x^2 + m_1xy + m_2y^2; \\ n_0x^2 + n_1xy + n_2y^2. \end{cases}$$

С помощью подстановки убеждаемся, что указанные X и Δ обращают соотношение (3) в тождество. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Среди всех квадратичных систем только системы вида (1) имеют такую же отражающую функцию, как и стационарная система (2).

Доказательство. Все квадратичные системы, имеющие такую же отражающую функцию, как и стационарная система (2), могут быть записаны следующим образом: $\overset{*}{x} = X + \sum \alpha_k(t)\Delta_k$, где Δ_k имеет вид:

$$\Delta_k = \begin{cases} a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2; \\ b_0 + b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4xy + b_5y^2, \end{cases}$$

и является решением уравнения (3).

Подставим $\Delta_k(x, y, t)$ в уравнение (3) и сгруппируем слагаемые так, чтобы получить ряд по степеням x и y. Коэффициенты при каждом из таких членов приравняем к нулю. Решив составленную таким образом смешанную систему, получим $\Delta(x, y, t)$ в виде:

$$\Delta = \begin{cases} c_1\left(\overline{m_0}x^2 + \overline{m_1}xy + \overline{m_2}y^2\right) + c_2\left(x + \overline{m_0}tx^2 + \overline{m_1}txy + \overline{m_2}ty^2\right); \\ c_1\left(\overline{n_0}x^2 + \overline{n_1}xy + \overline{n_2}y^2\right) + c_2\left(y + \overline{n_0}tx^2 + \overline{n_1}txy + \overline{n_2}ty^2\right), \end{cases}$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Из этого решения мы получим два частных решения:

$$\Delta_1 = \begin{cases} c_1\left(\overline{m_0}x^2 + \overline{m_1}xy + \overline{m_2}y^2\right); \\ c_1\left(\overline{n_0}x^2 + \overline{n_1}xy + \overline{n_2}y^2\right). \end{cases} \qquad \Delta_2 = \begin{cases} c_2\left(x + \overline{m_0}tx^2 + \overline{m_1}txy + \overline{m_2}ty^2\right); \\ c_2\left(y + \overline{n_0}tx^2 + \overline{n_1}txy + \overline{n_2}ty^2\right). \end{cases}$$

Тогда, согласно [3], все системы вида (1) имеют одну и ту же отражающую функцию.

СЛЕДСТВИЕ. Если $\left(x(t),\ y(t)\right)$ – решения системы (2), а $\left(u(t), v(t)\right)$ – решения системы (1), для которых выполняются равенства: $x(-\omega) = u(-\omega)$; $y(-\omega) = v(-\omega)$, и $\alpha(t)$ – 2ω-периодическая функция, $\beta(t) \equiv 0$, то $\forall k \in N$ имеют место равенства:

$$x((2k-1)\omega) = u((2k-1)\omega); \quad y((2k-1)\omega) = v((2k-1)\omega). \tag{4}$$

Доказательство. Поставим в соответствие каждому решению $\left(x(t),\ y(t)\right)$ стационарной системы (2) решение $\left(u(t),\ v(t)\right)$ возмущенной системы (1) такое, что $x(-\omega) = u(-\omega),\ y(-\omega) = v(-\omega)$. По теореме 1 системы (1) и (2) эквивалентны и имеют одно и то же отображение за период $\left[-\omega, \omega\right]$, если $\alpha(t)$ – 2ω-периодическая функция, $\beta(t) \equiv 0$. Тогда согласно лемме 4 из [4] выполняются неравенства (4) настоящего следствия. Следствие доказано.

ТЕОРЕМА 3. Продолжимое на $\left[-\omega; \omega\right]$ решение $\left(u(t; \omega, x_0, y_0), v(t; \omega, x_0, y_0)\right)$ системы (1) является решением двухточечной задачи с краевыми условиями $\Phi\left(u(-\omega),\ v(-\omega),\ u(\omega),\ v(\omega)\right) = 0$ тогда и только тогда, когда решение $\left(x(t;\ \omega,\ x_0,\ y_0); y(t;\ \omega,\ x_0,\ y_0)\right)$ стационарной системы (2) является решением краевой задачи с такими же условиями: $\Phi\left(x(-\omega), y(-\omega), x(\omega), y(\omega)\right) = 0$.

Доказательство. Согласно теореме 1 системы дифференциальных уравнений (1) и (2) имеют одну и ту же отражающую функцию: $F(t, x, y) = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$. Установим взаимно однозначное соответствие между решениями систем (1) и (2) так, что в момент времени $t = \omega$ пара решений $\left(u(t);\ v(t)\right)$ и $\left(x(t);\ y(t)\right)$ проходит через одну и ту же точку $\left(x_0, y_0\right)$, т.е. $u(\omega) = x(\omega), v(\omega) = y(\omega)$. Для таких решений верны соотношения:

$$u(-\omega) = F_1\left(\omega;\ u(\omega), v(\omega)\right) = F_1\left(\omega;\ x_0, y_0\right) = F_1\left(\omega;\ x(\omega), y(\omega)\right) = x(-\omega);$$
$$v(-\omega) = F_2\left(\omega;\ u(\omega), v(\omega)\right) = F_2\left(\omega;\ x_0, y_0\right) = F_2\left(\omega;\ x(\omega), y(\omega)\right) = y(-\omega).$$

Таким образом, если $\Phi\left(x(-\omega),\ y(-\omega),\ x(\omega),\ y(\omega)\right) = 0$, то и $\Phi\left(u(-\omega),\ v(-\omega),\ u(\omega),\ v(\omega)\right) = 0$, и наоборот. Теорема доказана.

Приведем некоторые следствия из этой теоремы.

ПРИМЕР 1. Продолжимое на $[-\omega;\omega]$ решение $(u(t;\omega,x_0,y_0),\ v(t;\omega,x_0,y_0))$ системы $\overset{*}{x}=(m_2y^2)(1+\alpha(t))+\beta(t)(x+m_2ty^2)$; $\overset{*}{y}=(n_1xy)(1+\alpha(t))+\beta(t)(y+n_1txy)$ является решением двухточечной задачи с краевыми условиями: $\Phi(u(-\omega),\ v(-\omega),\ u(\omega),\ v(\omega))=0,$ тогда и только тогда, когда решение $(x(t;\omega,x_0,y_0);y(t;\omega,x_0,y_0))$ стационарной системы $\overset{*}{x}=m_2y^2,\ \overset{*}{y}=n_1xy,$ является решением краевой задачи с условиями: $\Phi(x(-\omega),\ y(-\omega),\ x_0,\ y_0)=0$, где $x(-\omega),\ y(-\omega)$ связаны соотношением: $y(-\omega)^2-\frac{n_1}{m_2}x(-\omega)^2=y_0^2-\frac{n_1}{m_2}x_0^2$.

ПРИМЕР 2. Продолжимое на $[-\omega;\omega]$ решение $(u(t;\omega,x_0,y_0),v(t;\omega,x_0,y_0))$ системы $\overset{*}{x}=(m_0x^2)(1+\alpha(t))+\beta(t)(x+m_0tx^2)$; $\overset{*}{y}=(n_1xy)(1+\alpha(t))+\beta(t)(y+n_1txy)$ является решением двухточечной задачи с краевыми условиями $\Phi(u(-\omega),v(-\omega),u(\omega),v(\omega))=0$ тогда и только тогда, когда решение $(x(t;\omega,x_0,y_0);\ y(t;\omega,x_0,y_0))$ стационарной системы $\overset{*}{x}=m_0x^2,\ \overset{*}{y}=n_1xy$ является решением краевой задачи с условиями: $\Phi\left(x(-\omega),x(-\omega)^{\frac{n_1}{m_0}}y_0x_0^{-\frac{n_1}{m_0}},x_0,y_0\right)=0$.

Пусть теперь $\alpha(t)$ – 2ω-периодическая нечетная непрерывная функция, $\beta(t)\equiv 0$:

$$\begin{cases}\overset{*}{x}=\left(m_0x^2+m_1xy+m_2y^2\right)\left(1+\alpha(t)\right);\\ \overset{*}{y}=\left(n_0x^2+n_1xy+n_2y^2\right)\left(1+\alpha(t)\right).\end{cases} \tag{5}$$

Так как системы (2) и (5) имеют одну и ту же отражающую функцию, а значит одно и то же отображение за период $[-\omega,\omega]$, то, на что и указывает следствие, решения возмущенной системы (5) совпадают с решениями стационарной системы (2) в дискретные моменты времени $t_k=(2k-1)\omega$, не совпадая, вообще говоря, при других значениях времени t. Это обстоятельство используется при доказательстве теоремы 4.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $(u(t),v(t))$ решение системы (5), при $t=-\omega$ проходящее через точку $(x_0,\ y_0)$, и пусть $(x(t),\ y(t))$ решение системы (2), при $t=-\omega$ проходящее через ту же точку $(x_0,\ y_0)$. Тогда:

1) если решение $(x(t),y(t))$ системы (2) ограниченно на $[-\omega,\ \infty)$, то решение $(u(t),v(t))$ системы (5) также ограниченно на $[-\omega,\infty)$;

2) если $(x(t),y(t))$ постоянное или 2ω-периодическое решение системы (2), то $(u(t),v(t))$ есть 2ω-периодическое решение системы (5);

3) если для решения $(x(t),y(t))$ системы (2) $x^2(t)+y^2(t)\to 0$ при $t\to+\infty$, то и для решения $(u(t),\ v(t))$ системы (5) верно соотношение $u^2(t)+v^2(t)\to 0$ при $t\to+\infty$.

Доказательство

1. Пусть $(x(t),y(t))$ ограниченное на $[-\omega,\infty)$ решение системы (2). Согласно условию теоремы $u(-\omega)=x_0=x(-\omega)$, $v(-\omega)=y_0=y(-\omega)$. Существует такое число a, что $\|x(2k\omega-3\omega)\|\le x_0+a$, $\|y(2k\omega-3\omega)\|\le y_0+a$, $\forall k\in N$. Так как $\alpha(t)$ – непрерывная функция, то решения системы (5), для которых выполняются соотношения $\|u(-\omega)\|\le x_0+a$, $\|v(-\omega)\|\le y_0+a,$ продолжимы на $[-\omega,\omega)$. Таким образом для рассматриваемых решений выполнимы условия теоремы 4 из [4], следовательно, указанное решение $(u(t),v(t))$ продолжимо на $[-\omega,\infty)$ и ограниченно.

2. Пусть $(x(t), y(t))$ постоянное или 2ω-периодическое решение системы (2). Очевидно, что это решение является ограниченным и потому для него справедливы указанные в пункте 1 свойства. Согласно теореме 5 из [4] соответствующее ему решение $(u(t), v(t))$ системы (5) является 2ω-периодическим.

3. Пусть теперь $x^2(t)+y^2(t)\to 0$ при $t\to+\infty$. Тогда решение $(x(t), y(t))$, а значит и решение $(u(t), v(t))$, ограничено на $[\,0,\infty)$. Более того, $u^2((2k-1)\omega)+v^2((2k-1)\omega)=x^2((2k-1)\omega)+y^2((2k-1)\omega)\to 0$ при $k\to\infty$. Но тогда в силу теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных данных на каждом конечном промежутке времени $\left[(2k-1)\omega;(2k+1)\omega\right]$ мы убедимся в том, что $u^2(t)+v^2(t)\to 0$ при $t\to+\infty$.

Теорема доказана.

Заменой переменных, не меняющей качественных свойств решений и совмещающей одну из инвариантных прямых с осью OX, система (2) приводится к виду:

$$\begin{cases} \overset{*}{x} = m_0x^2+m_1xy+m_2y^2; \\ \overset{*}{y} = n_1xy+n_2y^2, \end{cases}$$

где m_0, m_1, m_2, n_1, n_2 – новые коэффициенты, полученные после преобразования. Далее во всех утверждениях будем считать, под системой (5) подразумевается система, полученная после указанного преобразования. Используя теорему 4 и результаты Л.С. Лягиной, проведем качественное исследование поведения в целом решений возмущенной системы (5).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $m_0=0,\ m_1:n_1=m_2:n_2$, тогда решения $(u(t), v(t))$ системы (5) при $t=-\omega$, проходящие через точки вида $(x_0,0)$ либо через точки вида $\left(x_0,-\dfrac{m_1}{m_2}x_0\right)$, являются 2ω-периодическими решениями. Других периодических решений система (5) не имеет. Решения $(u(t), v(t))$ системы (5) при $t=-\omega$, не проходящие через точки вида $(x_0,0)$, $\left(x_0,-\dfrac{m_1}{m_2}x_0\right)$, ограничены при $t\to+\infty$, если $m_2<0$, и ограничены при $t\to-\infty$, если $m_2>0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $m_0=0,\ m_1:n_1\neq m_2:n_2$, тогда решения $(u(t), v(t))$ системы (5) при $t=-\omega$, проходящие через точки вида $(x_0,0)$, являются 2ω-периодическими решениями системы. Других периодических решений система (5) не имеет.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть $m_0\neq 0,\ n_1=n_2=0$, квадратное уравнение $m_0x^2+m_1x+m_2=0$ имеет действительные корни x_1 и x_2, тогда решения $(u(t), v(t))$ системы (5) при $t=-\omega$, проходящие через точки вида (x_0, x_0x_1) или (x_0, x_0x_2), являются 2ω-периодическими решениями. Других периодических решений система (5) не имеет. Решения $(u(t), v(t))$ системы (5) при $t=-\omega$, проходящие через точки вида (x_0, y_0), либо ограничены на $\mathbb{R}$, если $x_0x_1<y_0<x_0x_2$ или $x_0x_2<y_0<x_0x_1$, $(x_1<x_2)$, либо ограничены при $t\to+\infty$, либо ограничены при $t\to-\infty$. (*Примечание.* Если $x_1=x_2$, то система (5) не имеет ограниченных на $\mathbb{R}$ решений).

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть $m_0\neq 0,\ n_1=n_2=0$, $m_1^2-4m_0m_2<0$ или $m_0\neq 0$ и хотя бы один из коэффициентов n_1, n_2 отличен от нуля, тогда решение $(u(t), v(t))$ системы (5) при $t=-\omega$, проходящее через точку $(0,0)$, является единственным 2ω-периодическим решением системы (5).

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пусть $m_0=0, (m_1-n_2)^2+4n_1m_2>0, m_1n_2-n_1m_2<0$, $n_1\neq 0$, тогда решения $(u(t), v(t))$ системы (5) при $t=-\omega$, проходящие через точки вида $m_0=0, (m_1-n_2)^2+4n_1m_2=0$, ограничены либо при $t\to+\infty$, либо ограничены при $t\to-\infty$, если $x_0k_1\le y_0\le x_0k_2$, или $x_0k_2\le y_0\le x_0k_1$, $\left(k_1>k_2,\ k_{1,2}=\dfrac{n_2-m_1\pm\sqrt{(n_2-m_1)^2+4n_1m_2}}{2m_2}\right)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Если $m_0 = 0, \left(m_1 - n_2\right)^2 + 4n_1m_2 > 0, m_1n_2 - n_1m_2 > 0$ или если $m_0 = 0$, $m_1 = 0$, $m_2 = n_1$, $n_2 = 0$, то для решений $\left(u(t), v(t)\right)$ системы (5) при $t = -\omega$, не проходящих через точки вида $\left(x_0, 0\right)$, выполняется соотношение $u^2(t) + v^2(t) \to 0$ либо при $t \to +\infty$, либо при $t \to -\infty$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Пусть $m_0 = 0, \left(m_1 - n_2\right)^2 + 4n_1m_2 = 0$ и $m_1 = 0, m_2 = n_1, n_2 \neq 0$ или $m_0 = 0, \left(m_1 - n_2\right)^2 + 4n_1m_2 = 0$ и $m_1 \neq 0, m_2 = n_1, n_2 = 0$, тогда решения $\left(u(t), v(t)\right)$ системы (5) при $t = -\omega$, проходящие через точки вида $\left(x_0, 0\right)$, ограничены либо при $t \to +\infty$, либо при $t \to -\infty$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. Пусть $m_0 = 0, \left(m_1 - n_2\right)^2 + 4n_1m_2 < 0$, тогда все решения $\left(u(t), v(t)\right)$ системы (5) ограничены на $\mathbb{R}$. Среди них есть 2ω-периодические решения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. Пусть $m_0 \neq 0$ и хотя бы один из коэффициентов n_1, n_2 отличен от нуля, $\left(n_2 - m_1\right)^2 + 4m_2\left(n_1 - m_0\right) < 0$, $0 < \dfrac{m_0}{n_1} < 1$, тогда все решения $\left(u(t), v(t)\right)$ системы (5) ограничены на $\mathbb{R}$, причем выполняется соотношение $u^2(t) + v^2(t) \to 0$ при $t \to \pm\infty$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. Пусть $f(k) = \dfrac{k^2\left(m_1n_2 - m_2n_1\right) + 2m_0n_2k + m_0n_1}{\left(n_2k + n_1\right)^2}$, $k_{1,2} = \dfrac{n_2 - m_1 \pm \sqrt{\left(n_2 - m_1\right)^2 + 4m_2\left(n_1 - m_0\right)}}{2m_2}$ – действительные числа, $m_0 \neq 0$ и хотя бы один из коэффициентов n_1, n_2 отличен от нуля, тогда, если верны два из трех неравенств: $f(0) > 1$, $f(k_1) > 1$, $f(k_2) > 1$ (одно из двух, если $k_1 = k_2$), то среди решений $\left(u(t), v(t)\right)$ системы (5) найдутся ограниченные на $\mathbb{R}$ решения, для которых выполняется соотношение $u^2(t) + v^2(t) \to 0$ при $t \to \pm\infty$, а также решения, ограниченные только при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$, для которых соотношение $u^2(t) + v^2(t) \to 0$ выполняется также только при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$ соответственно.

Заключение. Установленная нами взаимосвязь между стационарными и нестационарными системами даёт возможность переносить свойства решений стационарных систем на нестационарные, что очень важно при решении вопросов об устойчивости решений. Проведено качественное исследование решений двумерной неавтономной дифференциальной системы, эквивалентной однородной стационарной квадратичной системе. Доказаны теоремы о совпадении отражающей функции таких систем. Доказаны теоремы о существовании асимптотически устойчивых, ограниченных, 2π-периодических решений для всех систем, эквивалентных в смысле совпадения отражающей функции рассмотренной неавтономной системы. Доказаны также теоремы о взаимно однозначном соответствии между решениями двухточечных краевых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амелькин, В.В. Нелинейные колебания в системах второго порядка / В.В. Амелькин, Н.А. Лукашевич, А.П. Садовский. – Минск: Изд-во БГУ им. В.И. Ленина, 1982. – 208 с.
2. Лягина, Л.С. Интегральные кривые уравнения $y' = \dfrac{ax^2 + bxy + cy^2}{dx^2 + exy + fy^2}$ / Л.С. Лягина // Успехи мат. наук. – 1951. – Т. VI, Вып. 2 (42). – С. 171 – 183.
3. Мироненко, В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем: моногр. / В.И. Мироненко. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. – 196 с.
4. Мироненко, В.В. Возмущения дифференциальных систем, не изменяющие временных симметрий / В.В. Мироненко // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40, № 10. – С. 1325 – 1332.

Поступила 17.01.2008