УДК 512.548

О Σ-НОРМАЛЬНЫХ n-АРНЫХ ПОДГРУППАХ

А.М. ГАЛЬМАК
(Могилёвский государственный университет продовольствия)

Пусть Σ – подмножество множества S_{n-1} всех подстановок на множестве $\{1, 2, ..., n-1\}$. n-Арная подгруппа $< B, [\ ] >$ n-арной группы $< A, [\ ] >$ называется Σ-нормальной в $< A, [\ ] >$, если $[x_1x_2 \ldots x_{n-1}B] = [Bx_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n-1)}]$ для всех $x_1, x_2, ..., x_{n-1} \in A$ и любой подстановки σ из Σ. Если $\Sigma = \{\sigma\}$, то Σ-нормальную n-арную подгруппу называют σ-нормальной. Если ε – тождественная подстановка, то множество всех ε-нормальных n-арных подгрупп n-арной группы совпадает с множеством всех инвариантных n-арных подгрупп этой n-арной группы. Если же $\sigma = (1, 2, ..., n-1)$, то множество всех σ-нормальных n-арных подгрупп n-арной группы совпадает с множеством всех нормальных n-арных подгрупп этой n-арной группы. В данной работе продолжены исследования автора по изучению свойств Σ-нормальных n-арных подгрупп. Найдены условия, которым должна удовлетворять подстановка σ для того, чтобы σ-нормальная n-арная подгруппа $< B, [\ ] >$ n-арной группы $< A, [\ ] >$ была m-полуинвариантной, в частности, инвариантной в $< A, [\ ] >$.

Введение. Напомним некоторые понятия теории n-арных групп, используемые в работе.

Универсальная алгебра $< A, [\ ] >$ с одной n-арной ($n \geq 2$) операцией $[\ ] : A^n \to A$ называется *n-арной группой*, если n-арная операция [ ] *ассоциативна*, т.е.

$$[[a_1 \ldots a_n]a_{n+1} \ldots a_{2n-1}] = [a_1 \ldots a_i[a_{i+1} \ldots a_{i+n}]a_{i+n+1} \ldots a_{2n-1}]$$

для всех $i = 1, 2, ..., n-1$ и всех $a_1, a_2, ..., a_{2n-1} \in A$, и если в A выполняется по крайней мере одно из следующих условий:

1) однозначно разрешимо каждое из уравнений $[a_1 \ldots a_{i-1}x_ia_{i+1} \ldots a_n] = b$ для любого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и всех $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n, b \in A$ [1];

2) разрешимы уравнения $[xa_2 \ldots a_n] = b$, $[a_1 \ldots a_{n-1}y] = b$ для всех $a_1, \ldots, a_n, b \in A$ [2];

3) разрешимы уравнения $[x_1 \ldots x_{n-1}a] = b$, $[ay_1 \ldots y_{n-1}] = b$ для любых $a, b \in A$ [3, 4];

4) разрешимы уравнения $[x\underbrace{a \ldots a}_{n-1}] = b$, $[\underbrace{a \ldots a}_{n-1}y] = b$ для любых $a, b \in A$ [5];

5) разрешимы уравнения $[x_1 \ldots x_i\underbrace{a \ldots a}_{n-i}] = b$, $[\underbrace{a \ldots a}_{n-j}y_1 \ldots y_j] = b$ для некоторых $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$ и любых $a, b \in A$ [6];

6) разрешимо уравнение $[a_1 \ldots a_{i-1}xa_{i+1} \ldots a_n] = b$ для некоторого $i \in \{2, \ldots, n-1\}$ и любых $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n, b \in A$ [2];

7) разрешимо уравнение $[\underbrace{a \ldots a}_{i-1}x\underbrace{a \ldots a}_{n-i}] = b$ для некоторого $i \in \{2, \ldots, n-1\}$ и любых $a, b \in A$ [5];

8) разрешимо уравнение $[ax_1 \ldots x_{n-2}a] = b$ для любых $a, b \in A$ [4, 7];

9) разрешимо уравнение $[\underbrace{a \ldots a}_{k}x_1 \ldots x_i\underbrace{a \ldots a}_{n-k-i}] = b$ для некоторых $k, i \in \{1, \ldots, n-2\}$, удовлетворяющих неравенству $k + i \leq n-1$, и любых $a, b \in A$ [6].

n-Арная подгруппа $< B, [\ ] >$ n-арной группы $< A, [\ ] >$ называется:

1) *инвариантной* в $< A, [\ ] >$, если $[x\underbrace{B \ldots B}_{n-1}] = [Bx\underbrace{B \ldots B}_{n-2}] = [BBx\underbrace{B \ldots B}_{n-3}] = \ldots = [\underbrace{B \ldots B}_{n-1}x]$ для любого $x \in A$ [1];

2) *полуинвариантной* в $< A, [\ ] >$, если $[x\underbrace{B \ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B \ldots B}_{n-1}x]$ для любого $x \in A$ [1];

3) *m-полуинвариантной* в $< A, [\ ] >$, если $[x\underbrace{B \ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B \ldots B}_{m-1}x\underbrace{B \ldots B}_{n-m}] = [\underbrace{B \ldots B}_{2(m-1)}x\underbrace{B \ldots B}_{n-2m+1}] = \ldots = [\underbrace{B \ldots B}_{n-1}x]$ для любого $x \in A$, где $m-1$ делит $n-1$ [8];

4) *нормальной* в $< A, [\ ] >$, если $[x_1x_2 \ldots x_{n-1}B] = [Bx_2 \ldots x_{n-1}x_1]$ для любых $x_1, \ldots, x_{n-1} \in A$ [9].

Инвариантные n-арные подгруппы и полуинвариантные n-арные подгруппы являются частными случаями m-полуинвариантных n-арных подгрупп при $m = 2$ и $m = n$ соответственно, т.е. инвариантные n-арные подгруппы и полуинвариантные n-арные подгруппы могут изучаться в рамках общего понятия – m-полуинвариантных n-арных подгрупп. Общим понятием можно охватить также инвариантные n-арные подгруппы и нормальные n-арные подгруппы n-арной группы, так как и те и другие являются частными случаями понятия σ-нормальной n-арной подгруппы.

Многие свойства m-полуинвариантных, в частности, инвариантных и полуинвариантных n-арных подгрупп можно найти в [10]. Σ-Нормальные n-арные подгруппы были определены автором и изучались в [11].

1. Предварительные результаты

ЛЕММА 1.1. Пусть $< B, [\ ] >$ – n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\ ] >$, $n = k(m - 1) + 1$, $k \geq 1$, $x \in A$. Если

$$[\underbrace{B\ldots B}_{(i-1)(m-1)}\, x\, \underbrace{B\ldots B}_{(k-i+1)(m-1)}] = [\underbrace{B\ldots B}_{i(m-1)}\, x\, \underbrace{B\ldots B}_{(k-i)(m-1)}] \tag{1}$$

для некоторого $i \in \{2, \ldots, k-1\}$, то

$$[\underbrace{B\ldots B}_{m-1}\, x\, \underbrace{B\ldots B}_{n-m}] = [\underbrace{B\ldots B}_{2(m-1)}\, x\, \underbrace{B\ldots B}_{(k-2)(m-1)}] = \ldots = [\underbrace{B\ldots B}_{(k-2)(m-1)}\, x\, \underbrace{B\ldots B}_{2(m-1)}] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-m}\, x\, \underbrace{B\ldots B}_{m-1}]. \tag{2}$$

Доказательство. Из (1) имеем

$$[\underbrace{B\ldots B}_{n-(i-2)(m-1)-1}[\underbrace{B\ldots B}_{(i-1)(m-1)}\, x\, \underbrace{B\ldots B}_{(k-i+1)(m-1)}]\underbrace{B\ldots B}_{(i-2)(m-1)}] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-(i-2)(m-1)-1}[\underbrace{B\ldots B}_{i(m-1)}\, x\, \underbrace{B\ldots B}_{(k-i)(m-1)}]\underbrace{B\ldots B}_{(i-2)(m-1)}];$$

$$[\underbrace{B\ldots B}_{n+m-2}\, x\, \underbrace{B\ldots B}_{(k-1)(m-1)}] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-1+2(m-1)}\, x\, \underbrace{B\ldots B}_{(k-2)(m-1)}];$$

$$[\underbrace{B\ldots B}_{m-1}\, x\, \underbrace{B\ldots B}_{n-m}] = [\underbrace{B\ldots B}_{2(m-1)}\, x\, \underbrace{B\ldots B}_{(k-2)(m-1)}]. \tag{3}$$

Так как $(k - 2)(m - 1) = n - 1 - 2(m - 1)$, то из (3) следует

$$[\underbrace{B\ldots B}_{m-1}\ [\underbrace{B\ldots B}_{m-1}\, x\, \underbrace{B\ldots B}_{n-m}]\underbrace{B\ldots B}_{n-m}] = [\underbrace{B\ldots B}_{m-1}\ [\underbrace{B\ldots B}_{2(m-1)}\, x\, \underbrace{B\ldots B}_{n-1-2(m-1)}]\underbrace{B\ldots B}_{n-m}];$$

$$[\underbrace{B\ldots B}_{2(m-1)}\, x[\underbrace{B\ldots B}_{n}]\underbrace{B\ldots B}_{n-2-2(m-1)}] = [\underbrace{B\ldots B}_{3(m-1)}\, x[\underbrace{B\ldots B}_{n}]\underbrace{B\ldots B}_{n-2-3(m-1)}];$$

$$[\underbrace{B\ldots B}_{2(m-1)}\, x\, \underbrace{B\ldots B}_{n-1-2(m-1)}] = [\underbrace{B\ldots B}_{3(m-1)}\, x\, \underbrace{B\ldots B}_{n-1-3(m-1)}];$$

$$[\underbrace{B\ldots B}_{2(m-1)}\, x\, \underbrace{B\ldots B}_{(k-2)(m-1)}] = [\underbrace{B\ldots B}_{3(m-1)}\, x\, \underbrace{B\ldots B}_{(k-3)(m-1)}]. \tag{4}$$

Продолжая, получим

$$[\underbrace{B\ldots B}_{(k-3)(m-1)}\, x\, \underbrace{B\ldots B}_{3(m-1)}] = [\underbrace{B\ldots B}_{(k-2)(m-1)}\, x\, \underbrace{B\ldots B}_{2(m-1)}],$$

откуда

$$[\underbrace{B\ldots B}_{m-1}[\underbrace{B\ldots B}_{(k-3)(m-1)}\, x\, \underbrace{B\ldots B}_{3(m-1)}]\underbrace{B\ldots B}_{n-m}] = [\underbrace{B\ldots B}_{m-1}[\underbrace{B\ldots B}_{(k-2)(m-1)}\, x\, \underbrace{B\ldots B}_{2(m-1)}]\underbrace{B\ldots B}_{n-m}];$$

$$[\underbrace{B\ldots B}_{(k-2)(m-1)}\, x[\underbrace{B\ldots B}_{n}]\underbrace{B\ldots B}_{2(m-1)-1}] = [\underbrace{B\ldots B}_{(k-1)(m-1)}\, x[\underbrace{B\ldots B}_{n}]\underbrace{B\ldots B}_{m-2}];$$

$$[\underbrace{B\ldots B}_{(k-2)(m-1)}\, x\, \underbrace{B\ldots B}_{2(m-1)}] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-m}\, x\, \underbrace{B\ldots B}_{m-1}]. \tag{5}$$

Справедливость равенств (3), (4), (5), а также всех промежуточных между (4) и (5) равенств означает, что верно (2). Лемма доказана.

Полагая в лемме 1 $m = 2$, получим

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Пусть $< B, [\ ] >$ – n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\ ] >$. Если для некоторого $x \in A$ и некоторого $i \in \{2, \ldots, n-2\}$ верно

$$[\underbrace{B \ldots B}_{i-1} x \underbrace{B \ldots B}_{n-i}] = [\underbrace{B \ldots B}_{i} x \underbrace{B \ldots B}_{n-i-1}],$$

то

$$[Bx\underbrace{B \ldots B}_{n-2}] = [BBx\underbrace{B \ldots B}_{n-3}] = \ldots = [\underbrace{B \ldots B}_{n-3} xBB] = [\underbrace{B \ldots B}_{n-2} xB].$$

ЛЕММА 1.3. Пусть $< B, [\ ] >$ – n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\ ] >$, p, t и k – целые, $p \geq 0$, $t \geq 0$, $k \geq 1$, $\alpha = c_1 \ldots c_p$, $\beta = d_1 \ldots d_t$, $\gamma = a_{p+t+2} \ldots a_{k(n-1)+1}$, где $c_1, \ldots, c_p, d_1, \ldots, d_t$ – фиксированные элементы из B, $a_{p+t+2}, \ldots, a_{k(n-1)+1}$ – фиксированные элементы из A. Тогда

$$[\alpha B\beta\gamma] = [\underbrace{B \ldots B}_{p+t+1}\gamma].$$

Доказательство. Включение $[\alpha B\beta\gamma] \subseteq [\underbrace{B \ldots B}_{p+t+1}\gamma]$ очевидно.

Пусть $v = [b_1 \ldots b_{p+t+1}\gamma]$ – произвольный элемент из $[\underbrace{B \ldots B}_{p+t+1}\gamma]$, $b_{p+t+2}, \ldots, b_{k(n-1)+1}$ – фиксированные элементы из B. Так как уравнение

$$[\alpha x\beta \mathrm{b}_{p+t+2} \ldots b_{k(n-1)+1}] = [b_1 \ldots b_{p+t+1}b_{p+t+2} \ldots b_{k(n-1)+1}]$$

имеет в B единственное решение $x = b$, то

$$[\alpha b\beta b_{p+t+2} \ldots b_{k(n-1)+1}] = [b_1 \ldots b_{p+t+1}b_{p+t+2} \ldots b_{k(n-1)+1}],$$

что означает эквивалентность последовательностей $\alpha b\beta$ и $b_1 \ldots b_{p+t+1}$. Поэтому $[\alpha b\beta\gamma] = [\mathrm{b}_1 \ldots b_{p+t+1}\gamma] = v$, откуда, ввиду произвольного выбора v, следует включение $[\underbrace{B \ldots B}_{p+t+1}\gamma] \subseteq [\alpha B\beta\gamma]$. Из доказанных включений вытекает требуемое равенство. Лемма доказана.

ЛЕММА 1.4. Если $< B, [\ ] >$ – σ-нормальная n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\ ] >$ и при этом $\sigma(s) = r$ для некоторых $r, s \in \{1, \ldots, n-1\}$, то для любого $x \in A$ выполняются следующие условия:

1) $[\underbrace{B \ldots B}_{r-1} x \underbrace{B \ldots B}_{n-r}] = [\underbrace{B \ldots B}_{s} x \underbrace{B \ldots B}_{n-s-1}]$;

2) $[x\underbrace{B \ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B \ldots B}_{n-r+s} x \underbrace{B \ldots B}_{n+r-s-2}]$;

3) $[\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x] = [\underbrace{B \ldots B}_{n+r-s-2} x \underbrace{B \ldots B}_{n-r+s}]$.

Доказательство

1) Доказано в [11, лемма 5.3.4].

Полагая в определении σ-нормальности

$$x_1 = b_1, \ldots, x_{r-1} = b_{r-1}, x_r = x, x_{r+1} = b_{r+1}, \ldots, x_{n-1} = b_{n-1},$$

где $b_1, \ldots, b_{r-1}, b_{r+1}, \ldots, b_{n-1}$ – произвольные элементы из B, получим

$$[b_1 \ldots b_{r-1}xb_{r+1} \ldots b_{n-1}B] = [Bb_{\sigma(1)} \ldots b_{\sigma(s-1)}xb_{\sigma(s+1)} \ldots b_{\sigma(n-1)}]. \quad (6)$$

2) Если $c_1 \ldots c_{n-r}$ – обратная последовательность для последовательности $b_1 \ldots b_{r-1}$, а $d_1 \ldots d_{r-1}$ – произвольные элементы из B, то из (6) получаем:

$$[c_1 \ldots c_{n-r}[b_1 \ldots b_{r-1}xb_{r+1} \ldots b_{n-1}B]d_1 \ldots d_{r-1}] = [c_1 \ldots c_{n-r}[Bb_{\sigma(1)} \ldots b_{\sigma(s-1)}xb_{\sigma(s+1)} \ldots b_{\sigma(n-1)}]d_1 \ldots d_{r-1}];$$

$$[x\underbrace{b_{r+1} \ldots b_{n-1}Bd_1 \ldots d_{r-1}}_{n-1 \text{ символов}}] = [\underbrace{c_1 \ldots c_{n-r}Bb_{\sigma(1)} \ldots b_{\sigma(s-1)}}_{n-r+s \text{ символов}} x \underbrace{b_{\sigma(s+1)} \ldots b_{\sigma(n-1)}d_1 \ldots d_{r-1}}_{n+r-s-2 \text{ символов}}].$$

Применяя к обеим частям последнего равенства лемму 1.3, получаем

$$[x\underbrace{B \ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B \ldots B}_{n-r+s} xb_{\sigma(s+1)} \ldots b_{\sigma(n-1)}d_1 \ldots d_{r-1}].$$

Так как все $b_{\sigma(s+1)}, \ldots, b_{\sigma(n-1)}, d_1, \ldots, d_{r-1}$ выбраны в B произвольно, то из последнего равенства следует

$$[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-r+s}x\underbrace{B\ldots B}_{n+r-s-2}].$$

Если $b_1 \ldots b_{r-1}$ – пустая последовательность, т.е. $r = 1$, то $c_1 \ldots c_{n-1}$ – нейтральная последовательность, а $d_1 \ldots d_{r-1}$ – пустая последовательность.

3) Если $d_1 \ldots d_s$ – обратная последовательность для последовательности $b_{\sigma(s+1)} \ldots b_{\sigma(n-1)}$, $c_1 \ldots c_{n-s-1}$ – произвольные элементы из B, то из (6) получаем:

$$[c_1 \ldots c_{n-s-1}[b_1 \ldots b_{r-1}xb_{r+1} \ldots b_{n-1}B]d_1 \ldots d_s] = [c_1 \ldots c_{n-s-1}[Bb_{\sigma(1)} \ldots b_{\sigma(s-1)}xb_{\sigma(s+1)} \ldots b_{\sigma(n-1)}]d_1 \ldots d_s];$$

$$[\underbrace{c_1\ldots c_{n-s-1}b_1\ldots b_{r-1}}_{n+r-s-2\text{ символов}}x\underbrace{b_{r+1}\ldots b_{n-1}Bd_1\ldots d_s}_{n-r+s\text{ символов}}] = [\underbrace{c_1\ldots c_{n-s-1}Bb_{\sigma(1)}\ldots b_{\sigma(s-1)}}_{n-1\text{ символов}}x].$$

Применяя к обеим частям последнего равенства лемму 1.3, получаем:

$$[c_1 \ldots c_{n-s-1}b_1 \ldots b_{r-1}x\underbrace{B\ldots B}_{n-r+s}] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-1}x].$$

Так как все $c_1, \ldots, c_{n-s-1}, b_1, \ldots, b_{r-1}$ выбраны в B произвольно, то

$$[\underbrace{B\ldots B}_{n+r-s-2}x\underbrace{B\ldots B}_{n-r+s}] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-1}x].$$

Если $b_{\sigma(s+1)} \ldots b_{\sigma(n-1)}$ – пустая последовательность, т.е. $s = n-1$, то $d_1 \ldots d_{n-1}$ – нейтральная последовательность, а $c_1 \ldots c_{n-s-1}$ – пустая последовательность. Лемма доказана.

ЛЕММА 1.5. Если n-арная подгруппа $< B, [\ ] >$ n-арной группы $< A, [\ ] >$, где $n = k(m-1)+1$, $k \geq 1$ удовлетворяет по крайней мере одному из следующих условий:

1) $[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B\ldots B}_{m-1}x\underbrace{B\ldots B}_{n-m}]$;

2) $[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-m}x\underbrace{B\ldots B}_{m-1}]$,

для некоторого $x \in A$, то она удовлетворяет также условию

$$[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B\ldots B}_{m-1}x\underbrace{B\ldots B}_{n-m}] = [\underbrace{B\ldots B}_{2(m-1)}x\underbrace{B\ \ldots\ B}_{n-1-2(m-1)}] = \ldots = [\underbrace{B\ \ldots\ B}_{(k-1)(m-1)}x\underbrace{B\ldots B}_{m-1}].$$

Доказательство

1) Доказано в [12].

2) Так как $n - m = (k-1)(m-1)$, то, используя 2), а также равенство $[\underbrace{B\ldots B}_{n}] = B$, получим

$$[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-m}x\underbrace{B\ldots B}_{m-1}] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-m}[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}]\underbrace{B\ldots B}_{m-1}] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-m}[\underbrace{B\ldots B}_{n-m}x\underbrace{B\ldots B}_{m-1}]\underbrace{B\ldots B}_{m-1}] =$$

$$= [[\underbrace{B\ldots B}_{n}]\underbrace{B\ \ldots\ B}_{n-2-2(m-1)}x\underbrace{B\ldots B}_{2(m-1)}] = [\underbrace{B\ \ldots\ B}_{n-1-2(m-1)}x\underbrace{B\ldots B}_{2(m-1)}] = \ldots = [\underbrace{B\ldots B}_{m-1}x\underbrace{B\ \ldots\ B}_{(k-1)(m-1)}],$$

т.е.

$$[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B\ \ldots\ B}_{(k-1)(m-1)}x\underbrace{B\ldots B}_{m-1}] = [\underbrace{B\ \ldots\ B}_{(k-2)(m-1)}x\underbrace{B\ldots B}_{2(m-1)}] = \ldots = [\underbrace{B\ldots B}_{m-1}x\underbrace{B\ \ldots\ B}_{(k-1)(m-1)}].$$

Лемма доказана.

Следующая лемма доказывается аналогично предыдущей.

ЛЕММА 1.6. Если n-арная подгруппа $< B, [\ ] >$ n-арной группы $< A, [\ ] >$, где $n = k(m-1)+1$, $k \geq 1$ удовлетворяет по крайней мере одному из следующих условий:

1) $[\underbrace{B\ldots B}_{n-1}x] = [\underbrace{B\ldots B}_{m-1}x\underbrace{B\ldots B}_{n-m}]$;

2) $[\underbrace{B\ldots B}_{n-1}x] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-m}x\underbrace{B\ldots B}_{m-1}]$,

для некоторого $x \in A$, то она удовлетворяет также условию

$$[\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x] = [\underbrace{B \;\ldots\; B}_{(k-1)(m-1)} x \underbrace{B \ldots B}_{m-1}] = \ldots = [\underbrace{B \ldots B}_{2(m-1)} x \underbrace{B \;\ldots\; B}_{n-1-2(m-1)}] = [\underbrace{B \ldots B}_{m-1} x \underbrace{B \ldots B}_{n-m}].$$

Леммы 1.5 и 1.6 позволяют сформулировать еще одну лемму, обобщающую соответствующую лемму для инвариантных n-арных подгрупп [11, лемма 5.3.5].

ЛЕММА 1.7. n-Арная подгруппа $< B, [\ ] >$ n-арной группы $< A, [\ ] >$, где $n = k(m - 1) + 1$, $k \geq 1$ является m-полуинвариантной в $< A, [\ ] >$, если для любого $x \in A$ и некоторого $i \in \{1, \ldots, k\}$ выполняется по крайней мере одно из следующих условий:

1) $[x \underbrace{B \ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B \ldots B}_{m-1} x \underbrace{B \ldots B}_{n-m}]$, $[\underbrace{B \;...\; B}_{(i-1)(m-1)} x \underbrace{B \;\ldots\; B}_{n-1-(i-1)(m-1)}] = [\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x]$;

2) $[x \underbrace{B \ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B \ldots B}_{n-m} x \underbrace{B \ldots B}_{m-1}]$, $[\underbrace{B \;...\; B}_{(i-1)(m-1)} x \underbrace{B \;\ldots\; B}_{n-1-(i-1)(m-1)}] = [\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x]$;

3) $[\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x] = [\underbrace{B \ldots B}_{m-1} x \underbrace{B \ldots B}_{n-m}]$, $[\underbrace{B \;\ldots\; B}_{n-1-(i-1)(m-1)} x \underbrace{B \;...\; B}_{(i-1)(m-1)}] = [x \underbrace{B \ldots B}_{n-1}]$;

4) $[\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x] = [\underbrace{B \ldots B}_{n-m} x \underbrace{B \ldots B}_{m-1}]$, $[\underbrace{B \;\ldots\; B}_{n-1-(i-1)(m-1)} x \underbrace{B \;...\; B}_{(i-1)(m-1)}] = [x \underbrace{B \ldots B}_{n-1}]$.

2. Основные результаты

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $< B, [\ ] >$ – σ-нормальная n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\ ] >$ и пусть $n = k(m - 1) + 1$, $k \geq 1$. Если

$$\sigma(i(m - 1)) = (i - 1)(m - 1) + 1 \tag{7}$$

для некоторого $i \in \{1, \ldots, k\}$, то $< B, [\ ] >$ – m-полуинвариантна в $< A, [\ ] >$.

Доказательство. Рассмотрим три случая.

1) $i \in \{2, \ldots, k - 1\}$. Применив к равенству (7) утверждение 1) леммы 1.4, получим

$$[\underbrace{B \;\ldots\; B}_{(i-1)(m-1)} x \underbrace{B \;\ldots\; B}_{(k-i+1)(m-1)}] = [\underbrace{B \;\ldots\; B}_{i(m-1)} x \underbrace{B \;\ldots\; B}_{(k-i)(m-1)}],$$

откуда ввиду леммы 1.1 следует

$$[\underbrace{B \ldots B}_{m-1} x \underbrace{B \ldots B}_{n-m}] = [\underbrace{B \ldots B}_{2(m-1)} x \underbrace{B \;\ldots\; B}_{n-1-2(m-1)}] = \ldots = [\underbrace{B \;\ldots\; B}_{n-1-2(m-1)} x \underbrace{B \ldots B}_{2(m-1)}] = [\underbrace{B \ldots B}_{n-m} x \underbrace{B \ldots B}_{m-1}]. \tag{8}$$

Применив к равенству (7) утверждения 2) и 3) леммы 1.4, получим соответственно

$$[x \underbrace{B \ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B \ldots B}_{n+m-2} x \underbrace{B \ldots B}_{n-m}],\ [\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x] = [\underbrace{B \ldots B}_{n-m} x \underbrace{B \ldots B}_{n+m-2}],$$

откуда

$$[x \underbrace{B \ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B \ldots B}_{m-1} x \underbrace{B \ldots B}_{n-m}]; \tag{9}$$

$$[\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x] = [\underbrace{B \ldots B}_{n-m} x \underbrace{B \ldots B}_{m-1}]. \tag{10}$$

Из (8), (9) и (10) следует m-полуинвариантность $< B, [\ ] >$ в $< A, [\ ] >$.

2) $i = 1$. В этом случае равенство (7) примет вид $\sigma(m - 1) = 1$. Тогда, согласно 1) леммы 1.4

$$[x \underbrace{B \ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B \ldots B}_{m-1} x \underbrace{B \ldots B}_{n-m}], \tag{11}$$

а, согласно 3) леммы 1.4

$$[\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x] = [\underbrace{B \ldots B}_{n-m} x \underbrace{B \ldots B}_{n+m-2}],$$

откуда

$$[\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x] = [\underbrace{B \ldots B}_{n-m} x \underbrace{B \ldots B}_{m-1}]. \tag{12}$$

Применив к (11) и (12) утверждение 1) леммы 1.7 при $i = k$, получим m-полуинвариантность $< B, [\,] >$ в $< A, [\,] >$.

3) $i = k$. В этом случае равенство (7) примет вид $\sigma(n - 1) = n - m + 1$. Тогда, согласно 1) леммы 1.4,

$$[\underbrace{B \ldots B}_{n-m}\, x\, \underbrace{B \ldots B}_{m-1}] = [\underbrace{B \ldots B}_{n-1}\, x], \tag{13}$$

а, согласно 2) леммы 1.4,

$$[x\, \underbrace{B \ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B \ldots B}_{n+m-2}\, x\, \underbrace{B \ldots B}_{n-m}],$$

откуда

$$[x\, \underbrace{B \ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B \ldots B}_{m-1}\, x\, \underbrace{B \ldots B}_{n-m}]. \tag{14}$$

Применив к (13) и (14) утверждение 4) леммы 1.7 при $i = k$, получим m-полуинвариантность $< B, [\,] >$ в $< A, [\,] >$. Теорема доказана.

Полагая в теореме 2.1 $m = 2$, получим

СЛЕДСТВИЕ 2.2. [11]. σ-Нормальная n-арная подгруппа $< B, [\,] >$ n-арной группы $< A, [\,] >$ является инвариантной в $< A, [\,] >$, если $\sigma(i) = i$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, n - 1\}$.

Если в теореме 1 положить $m = n$, то $k = 1$, $i = 1$ и верно

СЛЕДСТВИЕ 2.3. [11]. σ-Нормальная n-арная подгруппа $< B, [\,] >$ n-арной группы $< A, [\,] >$ является полуинвариантной в $< A, [\,] >$, если $\sigma(n - 1) = 1$.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Если множество Σ содержит подстановку σ, удовлетворяющую условию (7) теоремы 2.1, то Σ-нормальная n-арная подгруппа $< B, [\,] >$ n-арной группы $< A, [\,] >$ является m-полуинвариантной в $< A, [\,] >$.

ТЕОРЕМА 2.5. σ-Нормальная n-арная подгруппа $< B, [\,] >$ n-арной группы $< A, [\,] >$ является m-полуинвариантной в $< A, [\,] >$, если выполняется по крайней мере одно из следующих условий:

1) $\sigma(m - 1) = 1$;
2) $\sigma(n - 1) = n - m + 1$;
3) $\sigma(n - m) = 1$;
4) $\sigma(n - 1) = \mathrm{m}$.

Доказательство

1) Получается из теоремы 2.1 при $i = 1$.
2) Получается из теоремы 2.1 при $i = k$.
3) Согласно 1) леммы 1.4

$$[x\, \underbrace{B \ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B \ldots B}_{n-m}\, x\, \underbrace{B \ldots B}_{m-1}], \tag{15}$$

а согласно 3) леммы 1.4

$$[\underbrace{B \ldots B}_{n-1}\, x] = [\underbrace{B \ldots B}_{m-1}\, x\, \underbrace{B \ldots B}_{2n-m-1}],$$

откуда

$$[\underbrace{B \ldots B}_{n-1}\, x] = [\underbrace{B \ldots B}_{m-1}\, x\, \underbrace{B \ldots B}_{n-m}]. \tag{16}$$

Применив к (15) и (16) утверждение 2) леммы 1.7 при $i = 2$, получим m-полуинвариантность $< B, [\,] >$ в $< A, [\,] >$.

4) Согласно 1) леммы 1.4

$$[\underbrace{B \ldots B}_{m-1}\, x\, \underbrace{B \ldots B}_{n-m}] = [\underbrace{B \ldots B}_{n-1}\, x], \tag{17}$$

а согласно 2) леммы 1.4

$$[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B\ldots B}_{2n-m-1}x\underbrace{B\ldots B}_{m-1}],$$

откуда

$$[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-m}x\underbrace{B\ldots B}_{m-1}]. \qquad (18)$$

Применив к (17) и (18) утверждение 3) леммы 1.7 при $i = 2$, получим m-полуинвариантность $< B, [\ ] >$ в $< A, [\ ] >$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.6. Если множество Σ содержит подстановку σ, удовлетворяющую по крайней мере одному из условий 1) – 4) теоремы 2.5, то Σ-нормальная n-арная подгруппа $< B, [\ ] >$ n-арной группы $< A, [\ ] >$ является m-полуинвариантной в $< A, [\ ] >$.

Полагая в 3) и 4) теоремы 2.5 $m = 2$, получим

СЛЕДСТВИЕ 2.7. [11]. σ-Нормальная n-арная подгруппа $< B, [\ ] >$ n-арной группы $< A, [\ ] >$ является инвариантной в $< A, [\ ] >$, если выполняется по крайней мере одно из следующих условий:

1) $\sigma(n - 2) = 1$;
2) $\sigma(n - 1) = 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dörnte, W. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1 – 19.
2. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208 – 350.
3. Гальмак, А.М. Об определении n-арной группы / А.М. Гальмак // Тез. докл. Междунар. конф. по алгебре. – Новосибирск, 1991. – С. 30.
4. Гальмак, А.М. Определения n-арной группы / А.М. Гальмак. – Гомель, 1994. – 43 с. – (Препринт № 16 / ГГУ им. Ф. Скорины).
5. Тютин, В.И. К аксиоматике n-арных групп / В.И. Тютин // Докл. АН БССР. – 1985. – Т. 29, № 8. – С. 691 – 693.
6. Гальмак, А.М. О разрешимости уравнений в n-арной полугруппе / А.М. Гальмак // Вестн. Полоцк. гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2007. – № 3. – С. 36 – 41.
7. Гальмак, А.М. О некоторых новых определениях n-арной группы / А.М. Гальмак // Тез. докл. Междунар. конф. по алгебре. – Красноярск, 1993. – С. 33 – 34.
8. Гальмак, А.М. Инвариантные подгруппы n-арных групп и их обобщения / А.М. Гальмак // Вопросы алгебры. – Вып. 5. – 1990. – С. 91 – 94.
9. Гальмак, А.М. n-Арные аналоги нормальных подгрупп / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2003. – № 2 – 3(15). – С. 153 – 159.
10. Гальмак, А.М. n-Арные группы. Ч. 1 / А.М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 196 с.
11. Гальмак, А.М. n-Арные группы. Ч. 2 / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2007. – 324 с.
12. Гальмак, А.М. m-Полунормализаторы в n-арной группе / А.М. Гальмак // Изв. Гомелск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2006. – № 5(38). – С. 33 – 38.

Поступила 07.12.2007