

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования  
«Полоцкий государственный университет»

О. Е. ШЕСТОПАЛОВА  
И. Л. КЕЧКО

## АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Учебно-методический комплекс  
для студентов специальностей  
1-36 01 01 «Технология машиностроения»,  
1-39 02 01 «Моделирование и компьютерное  
проектирование радиоэлектронных средств»

В двух частях

Часть 2

Новополоцк  
ПГУ  
2010

УДК 681.52(075.8)  
ББК 32.965я73  
Ш52

Рекомендовано к изданию методической комиссией  
факультета информационных технологий  
в качестве учебно-методического комплекса  
(протокол № 6 от 10.06.2010)

**РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

ведущий инженер-системотехник отдела АСУ  
Новополоцкого КУП ЖКХ П. С. БАРДЕЕВ;  
д-р техн. наук, проф., зав. каф. технологии и оборудования  
машиностроительного производства Н. Н. ПОПОК;  
канд. техн. наук, доц., зав. каф. конструирования и технологии  
радиоэлектронных средств Ю. Г. ГРОЗБЕРГ

**Шестопалова, О.Е.**

Ш52 Автоматическое управление технологическими системами : учеб.-  
метод. комплекс для студентов специальностей 1-36 01 01, 1-39 02 01.  
В 2 ч. Ч. 2 / О. Е. Шестопалова, И. Л. Кечко. – Новополоцк : ПГУ,  
2010. – 172 с.

ISBN 978-985-531-133-2.

Вторая часть УМК «Автоматическое управление технологическими системами» посвящена прикладным аспектам теории автоматического управления и предназначена для освоения методов проектирования систем автоматического управления на уровне формирования профессиональных компетенций в области решения задач синтеза, анализа и коррекции систем автоматического управления. Содержатся методические рекомендации по выполнению практических работ расчета и анализа систем автоматического управления технологическими системами для студентов дневной формы обучения и по выполнению контрольных работ студентами заочной формы. Рассматриваются методы решения конкретных задач проектирования САУ, даны примеры и практические рекомендации по использованию программного обеспечения. Значительное внимание уделяется особенностям использования пакета математического анализа Mathcad для моделирования систем автоматического управления и принятия решений по его результатам.

Предназначен для студентов специальностей 1-36 01 01 «Технология машиностроения», 1-39 02 01 «Моделирование и компьютерное проектирование радиоэлектронных средств». Может быть рекомендован студентам всех технических специальностей в качестве справочного пособия по вопросам автоматического управления объектами профессиональной деятельности при изучении общеинженерных и специальных дисциплин.

**УДК 681.52(075.8)**  
**ББК 32.965я73**

**ISBN 978-985-531-133-2 (Ч. 2)**  
**ISBN 978-985-531-132-5**

© Шестопалова О. Е., Кечко И. Л., 2010  
© УО «Полоцкий государственный университет», 2010

## СОДЕРЖАНИЕ

ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ.....	6
РАБОТА № 1. Моделирование и анализ работы последовательных электрических корректоров систем автоматического управления в режиме переходного процесса.....	6
Теоретические сведения .....	6
Ход выполнения работы .....	8
Примеры и практические рекомендации по использованию программного обеспечения .....	9
Варианты индивидуальных заданий.....	18
РАБОТА № 2. Моделирование и анализ работы последовательных электрических корректоров систем автоматического управления в режиме стационарных колебаний .....	23
Теоретические сведения .....	23
Ход выполнения работы .....	24
Примеры и практические рекомендации по использованию программного обеспечения .....	25
РАБОТА № 3. Разработка и преобразование математических моделей САУ.....	34
Теоретические сведения .....	34
Ход выполнения работы .....	36
Примеры и практические рекомендации по использованию программного обеспечения .....	36
Варианты индивидуальных заданий.....	44
РАБОТА № 4. Анализ работы САУ в стационарном режиме колебаний.....	48
Теоретические сведения .....	48
Ход выполнения работы .....	51
Примеры и практические рекомендации по использованию программного обеспечения .....	51
РАБОТА № 5 Анализ логарифмических частотных характеристик САУ .....	59
Теоретические сведения .....	59
Ход выполнения работы .....	61
Примеры и практические рекомендации по использованию программного обеспечения .....	62
РАБОТА № 6. Анализ устойчивости по теореме Ляпунова.....	71
Теоретические сведения .....	71
Ход выполнения работы .....	72
Примеры и практические рекомендации по использованию программного обеспечения .....	72
РАБОТА № 7. Анализ устойчивости САУ с использованием алгебраических критериев и критериев устойчивости Найквиста .....	76
Теоретические сведения .....	76
Ход выполнения работы .....	81

Примеры и практические рекомендации по использованию программного обеспечения .....	81
РАБОТА № 8. Оценка влияния на устойчивость параметров САУ .....	89
Теоретические сведения .....	89
Ход выполнения работы .....	91
Примеры и практические рекомендации по использованию программного обеспечения .....	91
РАБОТА № 9. Коррекция систем автоматического управления .....	94
Теоретические сведения .....	94
Ход выполнения работы .....	98
Примеры и практические рекомендации по использованию программного обеспечения .....	99
Варианты индивидуальных заданий.....	112
МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТАМИ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ .....	119
Задание на контрольную работу.....	121
Пример выполнения контрольной работы .....	122
Задача № 1 .....	122
Задача № 2.....	124
Задача № 3.....	124
Задача № 4.....	127
Задача № 5.....	129
Задача № 6.....	131
Задача № 7.....	138
Задача № 8.....	142
ЛИТЕРАТУРА .....	146
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	147
Приложение 1. Типовые элементарные звенья САУ .....	148
Приложение 2. Пример оформления титульного листа контрольной работы студента заочной формы обучения .....	150
Приложение 3. Пример оформления индивидуального задания контрольной работы студента заочной формы обучения .....	151
Приложение 4. Бланк проверки и защиты контрольной работы студента заочной формы обучения .....	152
Приложение 5. Краткая инструкция пользователя Mathcad .....	153
Интерфейс окна программы .....	153
Математические панели .....	153
Вычисления и типы данных.....	156
Функции.....	157
Проведение расчетов численными методами .....	158
Формат вывода численного результата.....	159
Работа с размерностями.....	160
Проведение расчетов символьно.....	161
Способы проведения символьных преобразований.....	161
Совместное использование нескольких символьных операторов.....	162

Основные символьные операторы .....	163
Комплексные числа .....	164
Матричные вычисления .....	164
Решение уравнений.....	165
Аналитическое решение уравнений .....	165
Решение уравнений с помощью вычислительного блока Given-Find.....	165
Построение двумерных графиков.....	166
Быстрый метод построения графиков .....	166
Построение двумерных графиков с использованием ранжирования переменной.....	167
Построение нескольких графиков .....	167
Форматирование графиков .....	167

# ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

## РАБОТА № 1. Моделирование и анализ работы последовательных электрических корректоров систем автоматического управления в режиме переходного процесса

**Цель:** моделирование и анализ переходных характеристик последовательных электрических R-L-C корректоров САУ при подаче на вход воздействия в виде единичной ступенчатой функции.

**Программное обеспечение моделирования:** Circuit Maker, программа моделирования систем автоматического управления tau.exe.

**Исходные данные:** см. **Варианты индивидуальных заданий.**

**Примеры выполнения работы:** файл программы tau.exe; *Пример (Р№1).zvp*; файл пакета Circuit Maker *Режим ступеньки\_переходные (Р№1).ckt*

### Теоретические сведения

Система автоматического управления (САУ) осуществляет управление объектом управления без участия человека, формирует воздействия, которые изменяют величины, характеризующие состояние объекта управления, в соответствии с заданным законом.

На первом этапе проектирования САУ решаются задачи синтеза системы на основании данных о назначении системы и особенностях объекта управления. При формировании структуры САУ на этом этапе используют функционально необходимые элементы систем (датчики величин, преобразователи сигналов, исполнительные устройства и т. д.). Вторым этапом проектирования САУ является анализ соответствия качественных характеристик проектируемой системы требуемым. При необходимости в состав САУ на этом этапе вводят корректирующие устройства (*корректоры*).

САУ состоит из *управляющих устройств* (УУ) и *объекта управления* (ОУ). Величины, характеризующие состояние ОУ, называются выходными, или *управляемыми*. Воздействия, поступающие на вход УУ, называются *задающими*. Воздействия, вырабатываемые УУ и непосредственно изменяющие состояние ОУ, называются *управляющими*. Воздействие, приложенное к ОУ и вызывающее несанкционированное отклонение управляемой величины от заданного значения, называется *возмущающим воздействием*.

Для решения задач проектирования САУ используют математические модели, имеющие вид уравнений связи между входными воздействиями и управляемыми величинами. Алгебраические уравнения описывают установившийся режим, когда входные воздействия и управляемые величины не изменяются и их производные равны нулю.

Дифференциальные уравнения характеризуют функционирование САУ в динамическом режиме, т. е. описывают поведение системы при изменении входных воздействий. Динамические свойства отдельного звена или системы описываются дифференциальными уравнениями вида:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = \\ = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x(t) \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x(t)$  – входное воздействие звена (системы);

$y(t)$  – выходная величина звена (системы);

$a_i$  и  $b_j$  – постоянные коэффициенты, определяемые физическими параметрами звена (системы).

Для анализа САУ чаще используют модели динамики в виде передаточных функций. **Передаточной функцией**  $W(p)$  называется отношение операторных изображений по Лапласу выходной и входной величин при нулевых начальных условиях. Изображением по Лапласу функции  $f(t)$  называется функция  $F(p)$ , определяемая как

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

где  $t$  – независимая переменная;

$$p = d/dt.$$

При нулевых начальных условиях, т. е. при  $f(0) = 0$ , переход от оригинала функции к ее изображению по Лапласу может быть осуществлен формальной заменой дифференцирования на символическое умножение на оператор  $p$ , а символа интегрирования – на умножение на  $1/p$ .

Из уравнения (1) передаточная функция может быть получена формальной подстановкой вместо оператора дифференцирования оператора Лапласа  $p = d/dt$  и выражением отношения  $y(p)/x(p)$ :

$$\begin{aligned} a_n p^n y(p) + a_{n-1} p^{n-1} y(p) + \dots + a_0 y(p) = \\ = b_m p^m x(p) + b_{m-1} p^{m-1} x(p) + \dots + b_0 x(p); \\ y(p) (a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0) = x(p) (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0); \end{aligned}$$

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{j=0}^n a_j p^j}; \quad (2)$$

где  $p = d/dt$ ;

$y(p)$  и  $x(p)$  – изображения  $y(t)$  и  $x(t)$  соответственно.

Пусть на САУ, находящуюся в установившемся режиме, в некоторый момент времени  $t_0$  воздействует **ступенчатое** воздействие вида:

$$x(t) = \begin{cases} x_0, & t \geq t_0; \\ 0, & t < t_0, \end{cases}$$

где  $x_0 = \text{const}$  – модуль ступенчатого воздействия.

При приложении ступенчатого воздействия система осуществляет переход из одного установившегося режима в другой, находясь при этом в течение некоторого времени в динамическом режиме. Такой динамический режим называют **переходным процессом**. График изменения  $y(t)$  во время переходного процесса – **переходная характеристика** САУ или звена – может быть получен:

- аналитическим решением уравнения (1);
- экспериментально (при подаче на вход САУ или звена единичного ступенчатого воздействия);
- методами функционального моделирования.

Под **типовым элементарным звеном** понимают совокупность элементов САУ, динамические процессы в которых описываются линейными ДУ не выше второго порядка. Основные типы элементарных звеньев САУ и их уравнения приведены в прил. 1.

Передаточная функция последовательного соединения звеньев определяется как произведение передаточных функций звеньев [1, 3].

### **Ход выполнения работы**

1. Для заданного варианта схемы последовательного электрического R-L-C корректора подобрать номиналы элементов так, чтобы постоянные времени передаточной функции были порядка 0,01...2 с.

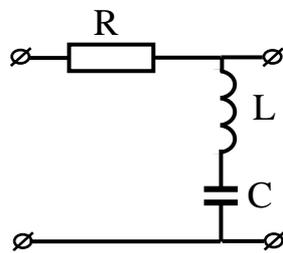
2. По виду передаточной функции определить, последовательным соединением каких типовых элементарных звеньев САУ можно моделировать заданный вариант R-L-C корректора.

3. Построить переходной процесс схемы в программе моделирования систем автоматического управления tau.exe.

4. Смоделировать заданную схему в Circuit Maker. Построить переходной процесс. Сравнить результат с моделированием в tau.exe.

### Примеры и практические рекомендации по использованию программного обеспечения

Рассмотрим пример выполнения работы для заданной схемы последовательного электрического R-L-C корректора и его передаточной функции, приведенной на рис. 1.



$$W(p) = \frac{1 + T^2 p^2}{1 + 2\xi T p + T^2 p^2};$$

$$T = \sqrt{LC}; \xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Рис. 1

Передаточная функция заданной схемы может быть показана в виде:

$$W(p) = \frac{1 + T^2 p^2}{1 + 2\xi T p + T^2 p^2} = \frac{1}{1 + 2\xi T p + T^2 p^2} \cdot (1 + T^2 p^2),$$

следовательно, в терминах моделей управления данная схема может быть представлена последовательным соединением типовых элементарных звеньев: колебательного устойчивого и дифференцирующего второго порядка (прил. 1). Зададим номиналы элементов  $R = 2$  Ом;  $L = 0,1$  Н;  $C = 0,025$  Ф. Постоянные передаточной функции, таким образом, будут равны:  $T = 0,05$ ;  $\xi = 0,5$ . Построим переходной процесс звена с использованием программного обеспечения моделирования.

Запуск программы моделирования переходных процессов осуществляется файлом tau.exe. Выбор типовых элементарных звеньев моделируемой системы, источника входного сигнала и устройства вывода переходных процессов (экран) осуществляется в режиме графического редактора схем (пункт меню *Редактировать / Создать*). Для задания параметров элементов и звеньев, а также для разворачивания устройства вывода – экрана – в отдельное окно используйте двойной щелчок.

Для соединения элементов схемы выделите щелчком мыши элемент-источник, затем – выход элемента-источника, элемент-приемник и вход элемента приемника. Для перемещения элемента его следует выделить однократным щелчком, а затем повторно нажать левую кнопку мыши и, не отпуская ее, перетащить элемент.

Для задания интервала времени, на котором будет осуществляться моделирование переходного процесса, используйте пункт меню *Конфигурация*. Время моделирования следует выбирать в несколько раз большим, чем наибольшая постоянная времени схемы. Критерием корректности выбора времени моделирования служит вид графика переходного процесса – он должен полностью затухать (асимптотически приближаться к установившемуся значению). Шаг детализации следует оставлять по умолчанию.

Запуск моделирования осуществляется из меню *Операции / Старт*. После завершения режима расчета результаты моделирования можно просмотреть, развернув устройство вывода – экран – в отдельное окно.

**Важно!** В звеньях второго порядка ограничение параметра  $\xi < 1$  носит рекомендательный характер и может не выполняться.

Для рассматриваемого примера модель заданной схемы, реализованная в виде последовательного соединения типовых звеньев, в программе tau.exe имеет вид, приведенный на рис. 2 (см. также файл *Пример (Р№1).zvn*), а задание параметров звеньев и результат моделирования – на рис. 3. Как видно, время переходного процесса до достижения значения, отличающегося от установившегося не более чем на 5 %, составляет 0,303 с, а время полного затухания переходного процесса лежит в интервале от 0,6 до 0,7 с.



Рис. 2

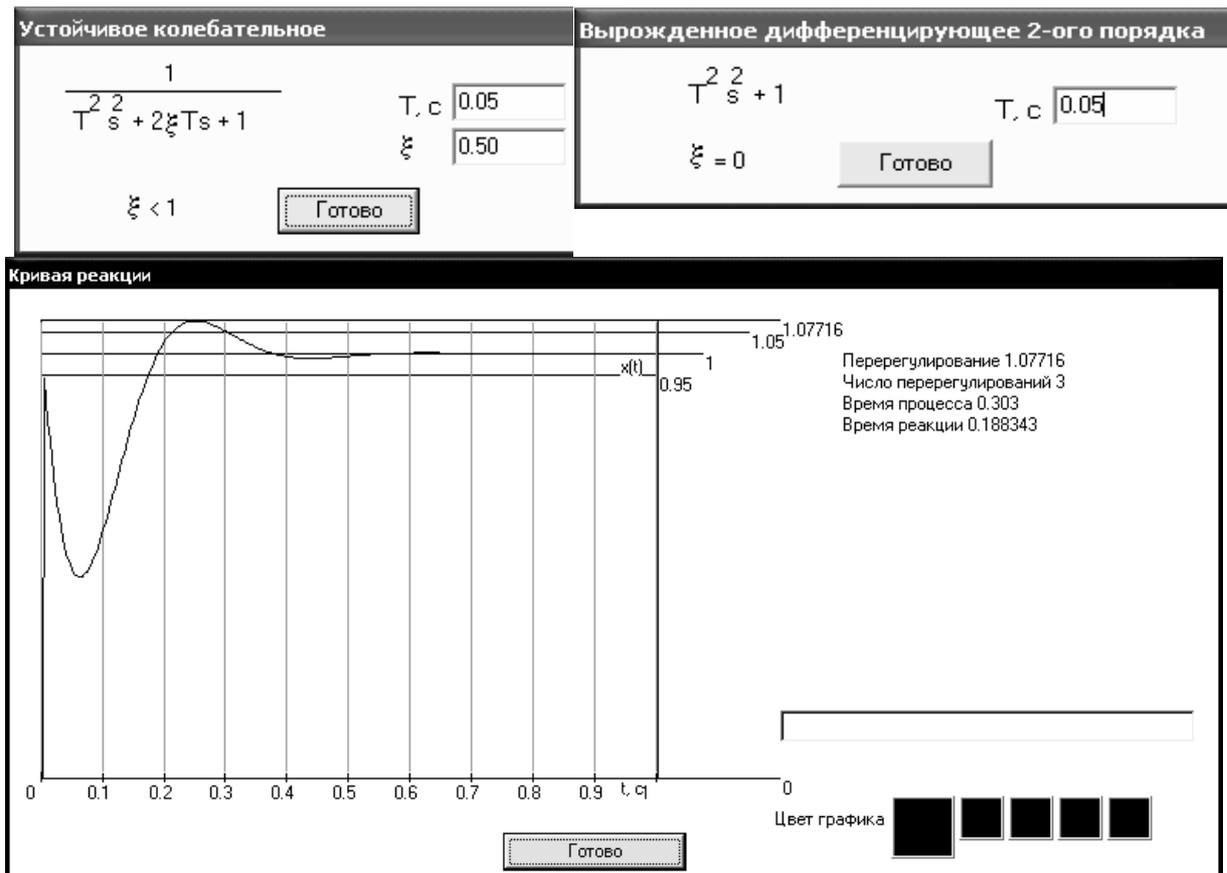


Рис. 3

Пакет моделирования Circuit Maker PRO – это программный продукт моделирования цифровых и аналоговых электрических схем. В панели инструментов Circuit Maker расположены следующие кнопки:

- инструмент  используется для выбора элементов цепи, их перемещения, выбора элементов на панели инструментов и т. д.;
- инструмент для рисования проводников  используется для размещения проводников в рабочей области и соединения элементов цепи;
- инструмент  используется для удаления элемента из схемы;
- клавиша  служит для инициализации схем и отказа от предыдущих результатов анализа (например, от построенных диаграмм);
- клавиша  служит для запуска анализа электрической цепи.

В режиме редактирования схем в левой части рабочего окна Circuit Maker располагается дерево базы данных элементов схем (вывод его на экран осуществляется клавишей  в панели инструментов).

Схема моделирования переходного процесса для заданных исходных данных в Circuit Maker показана на рис. 4 (см. также файл *Режим ступеньки\_переходные (P№1).ckt*). В качестве источника входного напряжения

выбираем генератор гармонического сигнала в базе данных элементов *Analog / Instruments / Signal Gen* и задаем прямоугольную форму сигнала, включив двойным щелчком по источнику режим редактирования и выбрав параметры *Wave... / Pulse*.

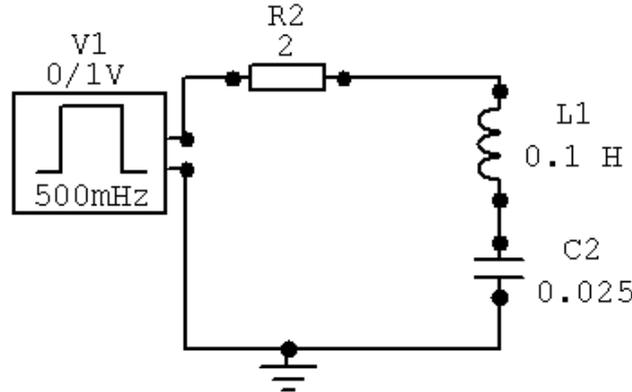


Рис. 4

**Важно!** При задании временных параметров входного сигнала следует учитывать временные характеристики схемы, а также то, что условия моделирования в *tau.exe* и *Circuit Maker* должны быть абсолютно идентичными. Как следует из результатов моделирования для заданного варианта в программе *tau.exe*, для того чтобы схема работала устойчиво (переходной процесс завершался полностью до очередного изменения входного сигнала), необходимо, чтобы длительность прямоугольного импульса была равна 1 с. Зададим параметры генератора, как показано на рис. 5:

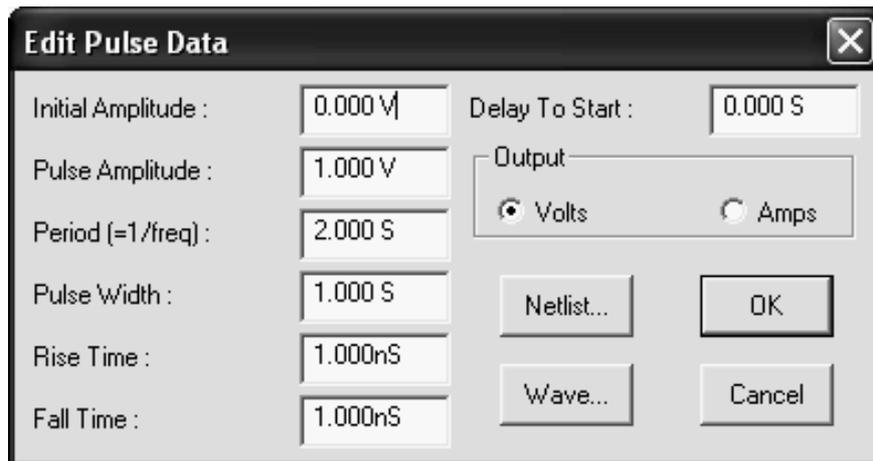


Рис. 5

Параметр *Pulse Width* – ширина (длительность) импульса в секундах – должна составлять половину периода. Эта величина соответствует длительности ступенчатого воздействия и должна быть равна выбранному

времени моделирования в tau.exe. Параметры *Rise Time / Fall Time* задают длительность переключения периодического сигнала из 0 в 1 и наоборот. Для моделирования сигнала прямоугольной формы их следует оставить по умолчанию в значениях 1 наносекунда.

Выбор режимов моделирования осуществляется в диалоговом меню *Analyses Setup*. Для включения режима анализа переходных характеристик следует выбрать режим *Transient/Fourier* (рис. 6).

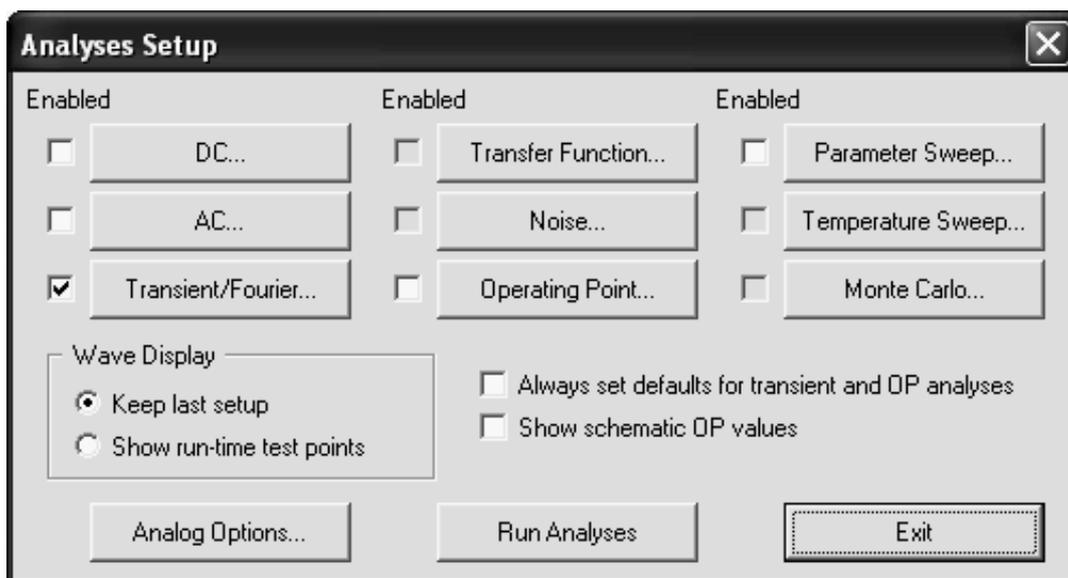


Рис. 6

Далее нажатием кнопки *Transient / Fourier* задаем параметры моделирования, как показано на рис. 7. Параметры *Start / Stop Time* задают начальное / конечное значение общего времени моделирования. В нашем случае трех секунд достаточно, т. к. длительность прямоугольного импульса для гарантии полного завершения переходного процесса выбрана равной 1 с. Параметр *Step Time* задает шаг приращения времени – его оптимальное значение можно задать автоматически нажатием кнопки *Set Defaults*.

Для запуска расчета характеристик воспользуемся кнопкой *Run Analyses* в меню *Analyses Setup* или кнопкой  панели инструментов. Выбор на схеме точки снятия переходной характеристики осуществляется инструментом . Переходную характеристику следует снимать с выхода схемы. Результат анализа для заданного варианта имеет вид, показанный на рис. 8.

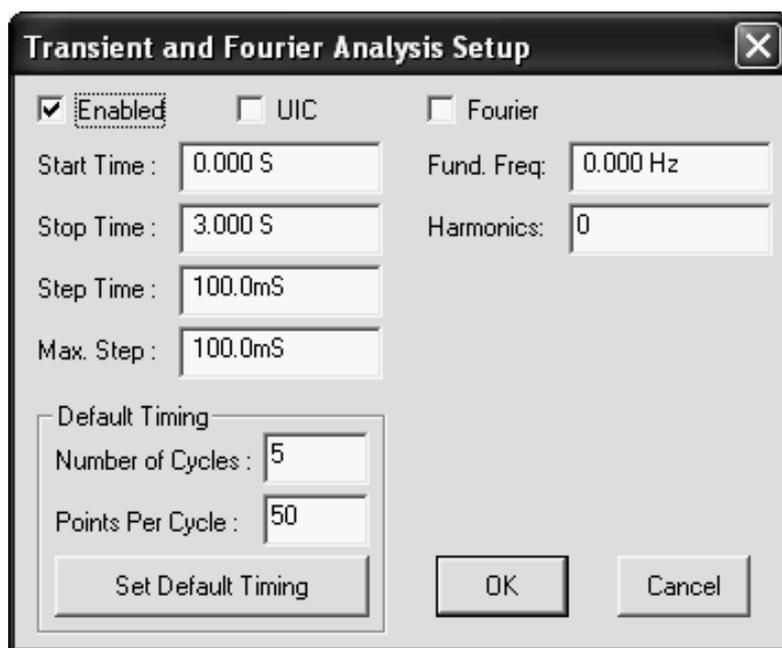


Рис. 7

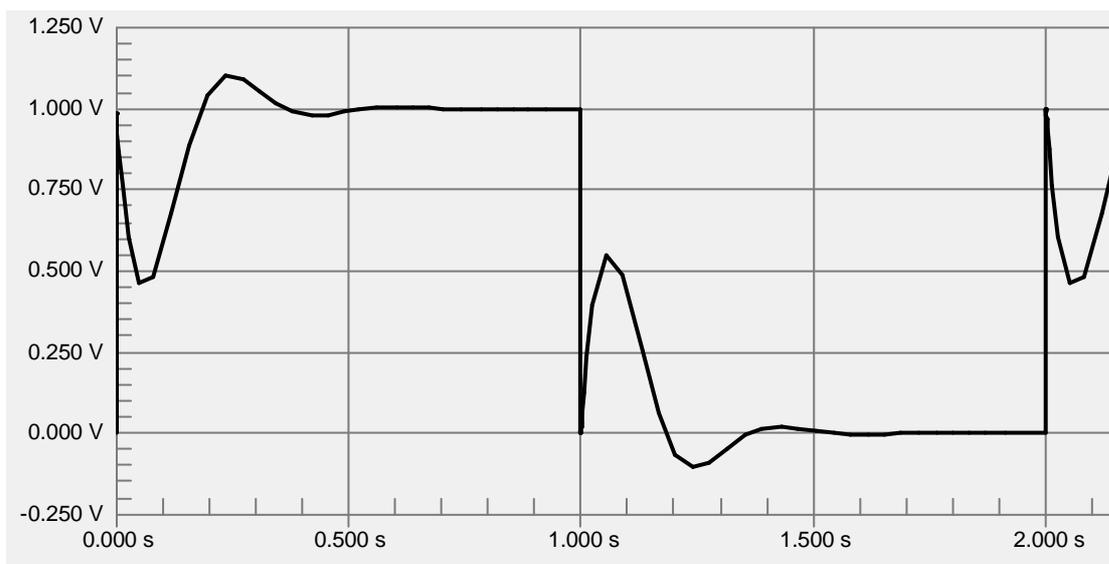


Рис. 8

Как видно из результатов, представленных на рис. 8, полученный график по переднему фронту прямоугольного входного сигнала, который соответствует ступеньке, в точности совпадает с результатом моделирования переходных характеристик корректора в программе tau.exe. Таким образом, результаты моделирования схемы в Circuit Maker, имитирующие натуральный эксперимент, идентичны результатам функционального моделирования с использованием модели корректора в виде передаточной функ-

ции. Для точной проверки соответствия результатов моделирования в Circuit Maker, например для определения длительности переходного процесса или времени достижения максимума, следует использовать измерительные курсоры (*Measurement Cursors*), режим использования которых включается щелчком по кнопке  в правой части поля в режиме вывода графиков (рис. 9). Как видно, координаты позиционирования измерительных курсоров позволяют точно определить время достижения переходной характеристикой максимума 0,247 с и время завершения переходного процесса 0,690 с, что удобно для сопоставительного сравнения с результатами моделирования в tau.exe.

Для копирования и вставки в отчет схем и графиков, построенных в Circuit Maker, следует использовать меню *Edit / Copy to Clipboard*.

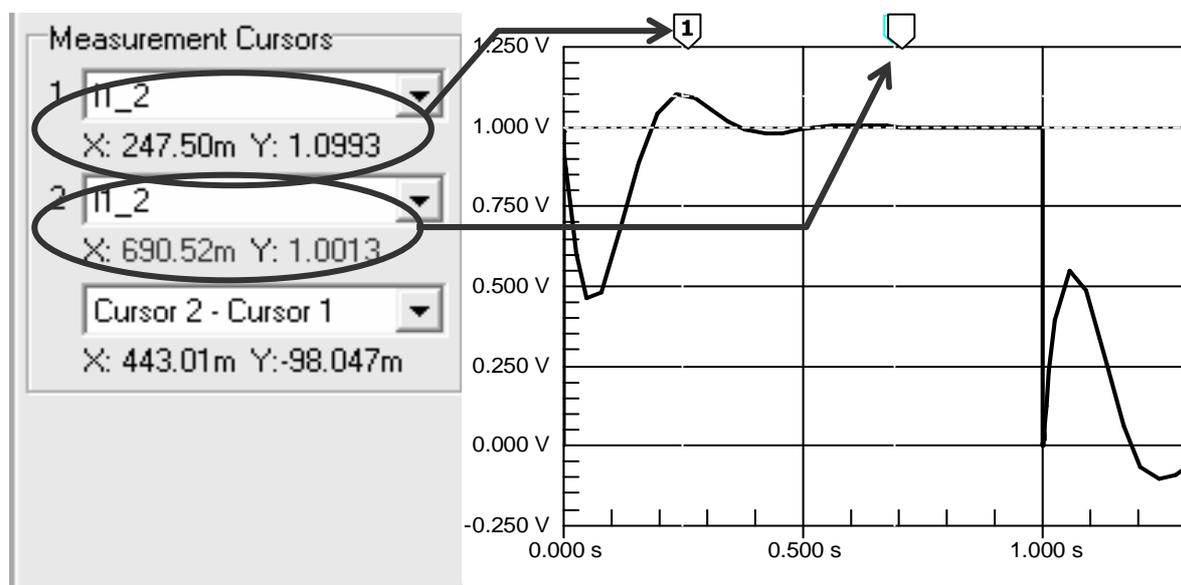


Рис. 9

### Типичные ошибки моделирования и способы их исправления

Если текст сообщения в специальном окне Circuit Maker *XSPICE For Windows* выглядит, как показано на рис. 10, это значит, что получена сингулярная (некорректная) матрица коэффициентов системы уравнений схемы по законам токов и напряжений Кирхгофа, используемой для моделирования всех характеристик схемы. Чаще всего ошибка возникает в схемах, критичных к сопротивлению в цепи заземления.

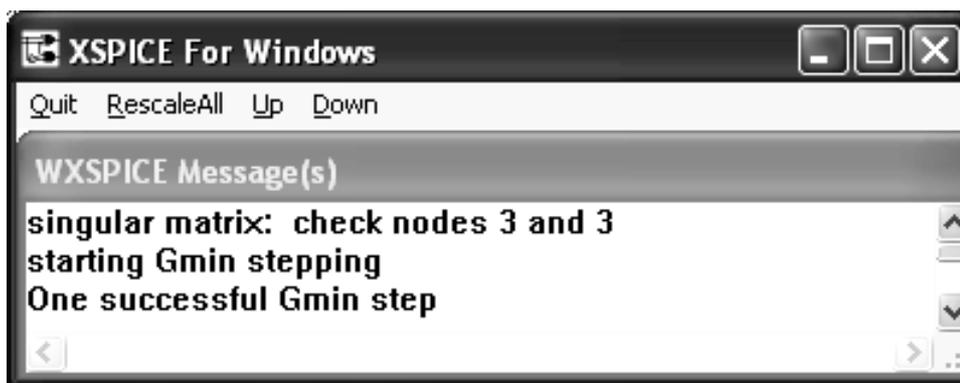


Рис. 10

*Способ исправления:* установить в параметрах моделирования *Analyses Setup/Analog Options* очень большое значение сопротивления в цепи заземления (последний пункт списка, в окне *Analog Options* выделен цветом). Значение вводится в окне ввода *Option Value*, после чего для подтверждения изменений нужно нажать кнопку *Enter* в правом верхнем углу окна *Analog Options* (рис. 11).

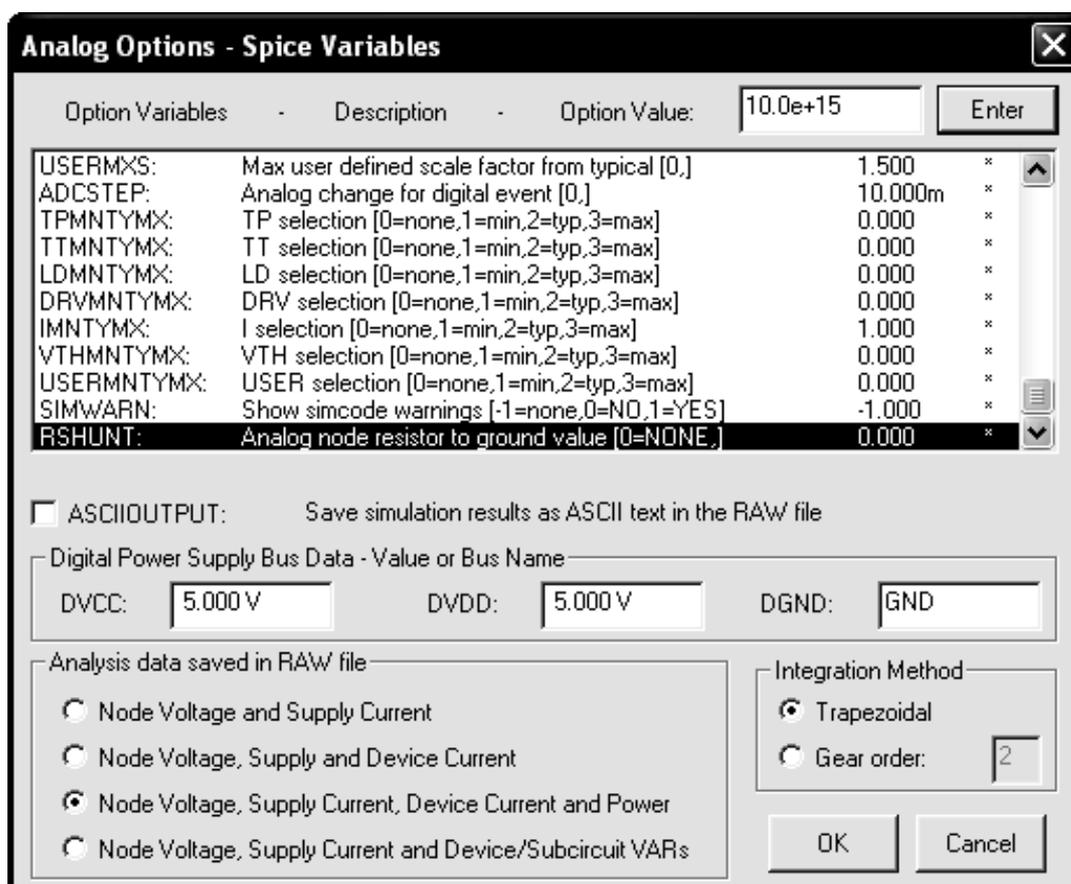


Рис. 11

Если текст сообщения в специальном окне *Circuit Maker XSPICE For Windows* выглядит, как на рис. 12, это значит, что моделирование переходного процесса прервано, так как шаг приращения времени слишком мал.



Рис. 12

*Способ исправления:* увеличить шаг приращения времени, изменив значения в полях *Step Time/Max.Step* в параметрах моделирования *Analyses Setup/TransientFourier*.

Если текст сообщения в специальном окне *tau.exe* выглядит, как показано на рис. 13, это означает, что при редактировании схемы в таблице звеньев не осуществлен выбор звена – ни одна позиция не выделена.



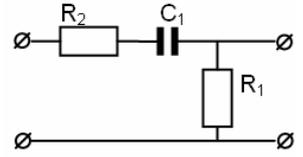
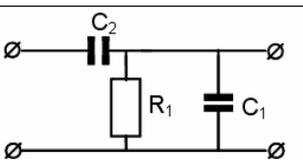
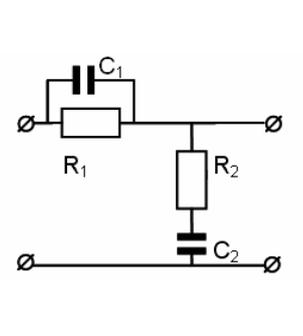
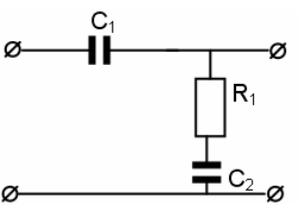
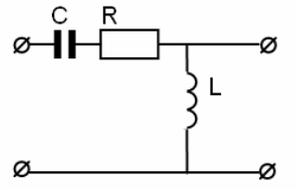
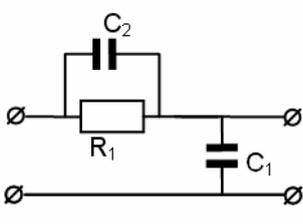
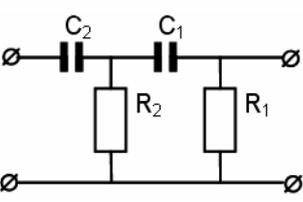
Рис. 13

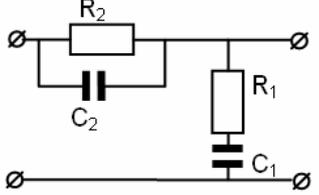
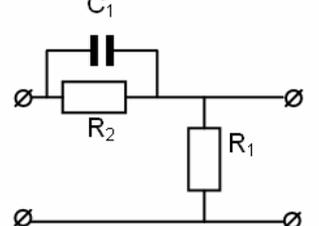
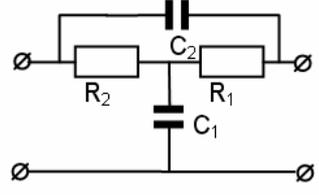
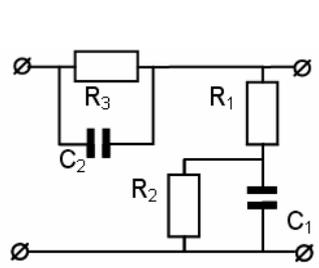
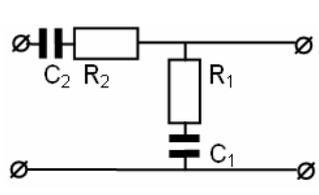
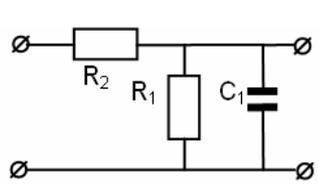
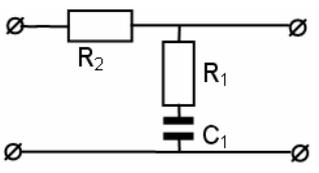
*Способ исправления:* перезапустить программу; при выборе звеньев в режиме редактирования обязательно выделять выбираемую позицию в списке щелчком мыши, как показано на рис. 14.



Рис. 14

### Варианты индивидуальных заданий

№	Схема	Передаточная функция и параметры
1		$\frac{Kp}{1+T_2p}; K=R_1C_1; T_1=R_1C_1; T_2=T_1(1+R_2/R_1)$
2		$\frac{Kp}{1+T_2p}; K=R_1C_2; T_1=R_1C_2; T_2=R_1(C_2+C_1)$
3		$\frac{(1+T_1p)(1+T_2p)}{(1+T_3p)(1+T_4p)};$ $T_{3,4} = \frac{T_1+aT_2}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4T_1T_2}{(T_1+aT_2)^2}} \right);$ $a = \frac{R_1+R_2}{R_2}; T_1 = R_1C_1; T_2 = R_2C_2$
4		$K \frac{(1+T_1p)}{(1+T_2p)}; T_1 = R_1C_2; T_2 = \frac{T_1}{1+C_2/C_1};$ $K = \frac{1}{1+C_2/C_1}$
5		$\frac{Kp^2}{1+2\xi Tp+T^2p^2}; T = K = \sqrt{LC}; 2\xi T = RC$
6		$\frac{T_1p+1}{T_2p+1}; T_1 = R_1C_2; T_2 = R_1(C_1+C_2)$
7		$\frac{Kp^2}{1+2\xi Tp+T^2p^2}; T_1 = R_1C_1; T_2 = R_2C_2;$ $K = T_1T_2; T = \sqrt{T_1T_2}; 2\xi T = T_1(1+R_1/R_2)+T_2$

№	Схема	Передаточная функция и параметры
8		$\frac{(1+T_1p)(1+T_2p)}{T_1T_2p^2 + [T_1(1+R_2/R_1)+T_2]p+1};$ $T_1 = R_1C_1; T_2 = R_2C_2$
9		$K \frac{(1+T_1p)}{(1+T_2p)}; T_1 = R_2C_1; T_2 = \frac{T_1}{1+R_2/R_1};$ $K = \frac{1}{1+R_2/R_1}$
10		$\frac{(1+T_1p)(1+T_2p)}{T_1T_2p^2 + [T_1(1+R_2/R_1)+T_2]p+1};$ $T_1 = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C_1; T_2 = (R_1+R_2)C_2$
11		$\frac{(1+T_1p)(1+T_2p)}{T_1T_2p^2 + [T_1(1+R_3/R_1)+T_2]p+1/K};$ $T_1 = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C_1; T_2 = R_3C_2;$ $K = \left(1 + \frac{R_3}{R_1+R_2}\right)^{-1}$
12		$K \frac{(1+T_1p)}{(1+T_2p)}; T_2 = T_1(1+R_2/R_1)$ $K = \left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)^{-1}; T_1 = R_1C_1K;$
13		$\frac{K}{1+pT_1};$ $K = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)^{-1}; T_1 = R_2C_1K;$
14		$K \frac{(1+T_1p)}{(1+T_2p)};$ $K = 1; T_1 = R_1C_1; T_2 = T_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$

№	Схема	Передаточная функция и параметры
15		$\frac{1}{T_1 T_2 p^2 + [T_1(1 + R_2/R_1) + T_2]p + 1};$ $T_1 = R_1 C_1; T_2 = R_2 C_2$
16		$\frac{1}{T_1 T_2 p^2 + T_1 p + 1}; T_1 = R_1 C_1; T_2 = L_1/R_1$
17		$K \frac{(1 + T_1 p)}{(1 + T_2 p)};$ $T_1 = L_1/R_1; T_2 = \frac{T_1}{1 + R_2/R_1}; K = \frac{1}{1 + R_2/R_1}$
18		$\frac{K}{T_1 T_2 p^2 + \left[ T_1 + T_2 \frac{R_2}{R_2 + R_1} \right] p + 1};$ $T_2 = L_1/R_2; T_1 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C_1; K = \frac{1}{1 + R_2/R_1}$
19		$\frac{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + a)p + 1}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + a + T_2)p + 1};$ $T_1 = R_1 C_1; T_2 = R_2 C_2; a = R_1 C_2$
20		$\frac{(1 + T^2 p^2)}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)};$ $T = RC; T_1 = T(2 + \sqrt{3}); T_2 = T(2 - \sqrt{3})$
21		$\frac{K}{1 + T_1 p}; K = (1 + R_2/R_1)^{-1}; T_1 = \frac{L_1}{R_1 + R_2}$
22		$\frac{Kp}{1 + T_2 p};$ $K = T_1 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_3} C_1; T_2 = \left( R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \right) C_1$

№	Схема	Передаточная функция и параметры
23		$K \frac{(1+T_1 p)}{(1+T_2 p)}; T_2 = \frac{R_1 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3} T_1;$ $K = (1 + R_2/R_1 + R_3/R_1)^{-1}; T_1 = R_2 C_1$
24		$\frac{(1+T_1 p)(1+T_2 p)}{T_1 T_2 \left(1 + \frac{R_3}{R_1}\right) p^2 + T p + 1};$ $T = \left[ T_2 + T_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_3}{R_1}\right) \right]$ $T_1 = R_1 C_1; T_2 = R_2 C_2$
25		$\frac{(1+T_1 p)(1+T_2 p)}{T_1 T_2 \left(1 + \frac{R_2 R_3}{R_1 (R_2 + R_3)}\right) p^2 + T p + 1};$ $T = \left[ T_2 + T_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \right]$ $T_1 = R_1 C_1; T_2 = (R_2 + R_3) C_2.$
26		$\frac{T_1 p}{T_1 T_2 p^2 + T_1 \left[ \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right) \left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right) + \frac{R_3}{R_1} \right] p + 1};$ $T_1 = \frac{R_1 R_2 C_2}{R_1 + R_3}; T_2 = R_3 C_1$
27		$\frac{a T_1 T_2 p^2 + (T_2 + T_1) p + 1}{b T_1 T_2 p^2 + \left[ T_2 + T_1 \left(1 + \frac{R_3}{R_1}\right) \right] p + 1};$ $a = \left[ 1 + \frac{R_2 R_3}{R_1 (R_2 + R_3 + R_4)} \right];$ $b = \left( 1 + \frac{(R_4 + R_2) R_3}{R_1 (R_2 + R_3 + R_4)} \right)$ $T_1 = R_1 C_1; T_2 = (R_2 + R_3 + R_4) C_2$

№	Схема	Передаточная функция и параметры
28		$K \frac{(1+T_1 p)}{(1+T_2 p)}; T_2 = \frac{R_1 + R_3 + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}}{R_1 + R_2 + R_3}$ $K = \frac{1}{1 + R_2/R_1 + R_3/R_1}; T_1 = (R_2 + R_4)C_1;$
29		$K \frac{(1+T_1 p)}{(1+T_2 p)}; T_1 = R_1 C_2; T_2 = \frac{T_1}{1 + C_2/C_1};$ $K = \frac{1}{1 + C_2/C_1}$
30		$K \frac{(1+T_1 p)}{(1+T_2 p)}; T_1 = R_2 C_1; T_2 = \frac{T_1}{1 + R_2/R_1};$ $K = \frac{1}{1 + R_2/R_1}$
31		$\frac{(1+T_1 p)(1+T_2 p)}{T_1 T_2 p^2 + [T_1(1 + R_3/R_1) + T_2]p + 1/K};$ $T_1 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C_1; T_2 = R_3 C_2;$ $K = \left(1 + \frac{R_3}{R_1 + R_2}\right)^{-1}$
32		$\frac{1}{T_1 T_2 p^2 + T_1 p + 1}; T_1 = R_1 C_1; T_2 = L_1/R_1$
33		$\frac{K}{T_1 T_2 p^2 + \left[T_1 + T_2 \frac{R_2}{R_2 + R_1}\right]p + 1};$ $T_2 = L_1/R_2; T_1 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C_1; K = \frac{1}{1 + R_2/R_1}$
34		$\frac{Kp}{1 + T_2 p};$ $K = T_1 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_3} C_1; T_2 = \left(R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}\right) C_1$

№	Схема	Передаточная функция и параметры
35		$\frac{K}{1 + pT_1};$ $K = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)^{-1}; T_1 = R_2 C_1 K;$

## РАБОТА № 2. Моделирование и анализ работы последовательных электрических корректоров систем автоматического управления в режиме стационарных колебаний

**Цель:** моделирование и анализ амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик последовательных R-L-C корректоров САУ; моделирование и анализ выходных сигналов последовательных R-L-C корректоров САУ при подаче на вход синусоидальных гармонических сигналов различной частоты.

**Программное обеспечение моделирования:** Circuit Maker.

**Исходные данные:** см. варианты индивидуальных заданий к Работе № 1.

**Примеры выполнения работы:** файл пакета Circuit Maker *Режим СК (P№2).ckt*

### Теоретические сведения

Работа САУ и ее отдельных устройств в процессе проектирования исследуется с использованием двух основных модельных режимов – режима переходного процесса, возникающего при подаче на вход ступенчатого входного воздействия (см. **Работу № 1**), и режима стационарных колебаний, возникающего при подаче на вход гармонических колебательных воздействий.

При подаче на вход САУ *гармонического воздействия* вида:

$$x(t) = A_{ex} \sin(\omega t),$$

где  $A_{ex}$  – амплитуда,

$\omega$  – частота воздействия (рис. 15),

на выходе системы через некоторое время также установятся гармонические колебания вида:

$$y(t) = A_{ebx} \sin(\omega t + \varphi),$$

отличающиеся от входного воздействия амплитудой и фазой.

Усиление (ослабление) амплитуды  $A = A_{\text{вых}}/A_{\text{вх}}$  и сдвиг фазы  $\varphi$  будут иметь разные значения при разных частотах колебаний  $\omega$ . Такое состояние системы также относится к установившемуся, а режим называют **стационарным режимом колебаний**.

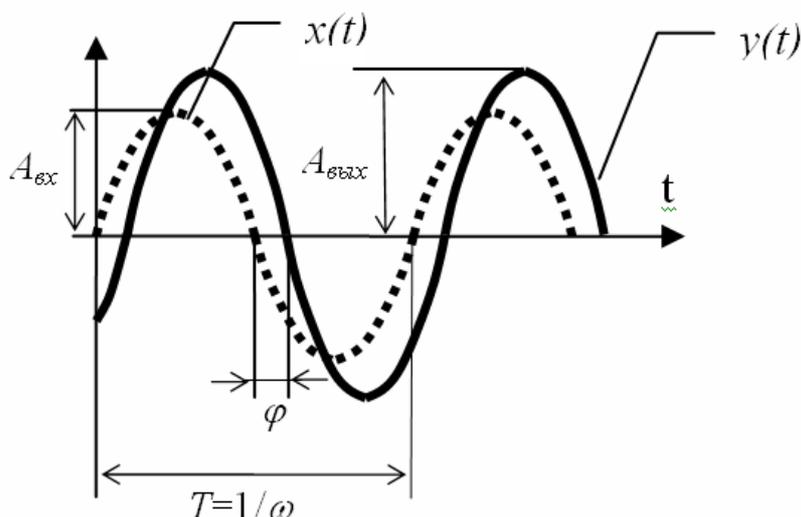


Рис. 15

Характеристики, описывающие вынужденные колебания на выходе САУ, вызванные гармоническим воздействием на ее входе, называются **частотными**. Для исследования усиления (ослабления) амплитуды  $A = A_{\text{вых}}/A_{\text{вх}}$  строят **амплитудно-частотную характеристику** САУ  $A(\omega)$ , для исследования вносимого САУ сдвига фаз – **фазочастотную характеристику**  $\varphi(\omega)$  [1, 2, 5].

### Ход выполнения работы

1. Исследовать работу корректора в режиме стационарных колебаний. Построить амплитудно-частотную (АЧХ) и фазочастотную (ФЧХ) характеристики корректора в Circuit Maker и проанализировать результаты построения.

2. Подтвердить различие характеристик усиления для **трех частот** входных сигналов, выбранных по результатам анализа АЧХ из различных диапазонов (областей АЧХ), построением осциллограмм выходных сигналов корректора в Circuit Maker.

3. Подтвердить различие сдвигов фаз, вносимых корректором, для **трех частот** входных сигналов, выбранных по результатам анализа ФЧХ

из различных диапазонов (областей ФЧХ) построением осциллограмм выходных сигналов корректора в Circuit Maker.

4. Сравнить результаты моделирования частотных характеристик с результатами построения осциллограмм выходных сигналов корректора.

### Примеры и практические рекомендации по использованию программного обеспечения

Для исследования работы схемы в режиме стационарных колебаний необходимо в схеме, созданной для моделирования в Работе № 1, изменить характеристики входного сигнала: он должен быть не прямоугольным, а синусоидальным. Для этого, включив двойным щелчком по источнику режим редактирования, изменим форму сигнала [*Wave.../Sine Wave...*] и зададим параметры, как показано на рис. 16.

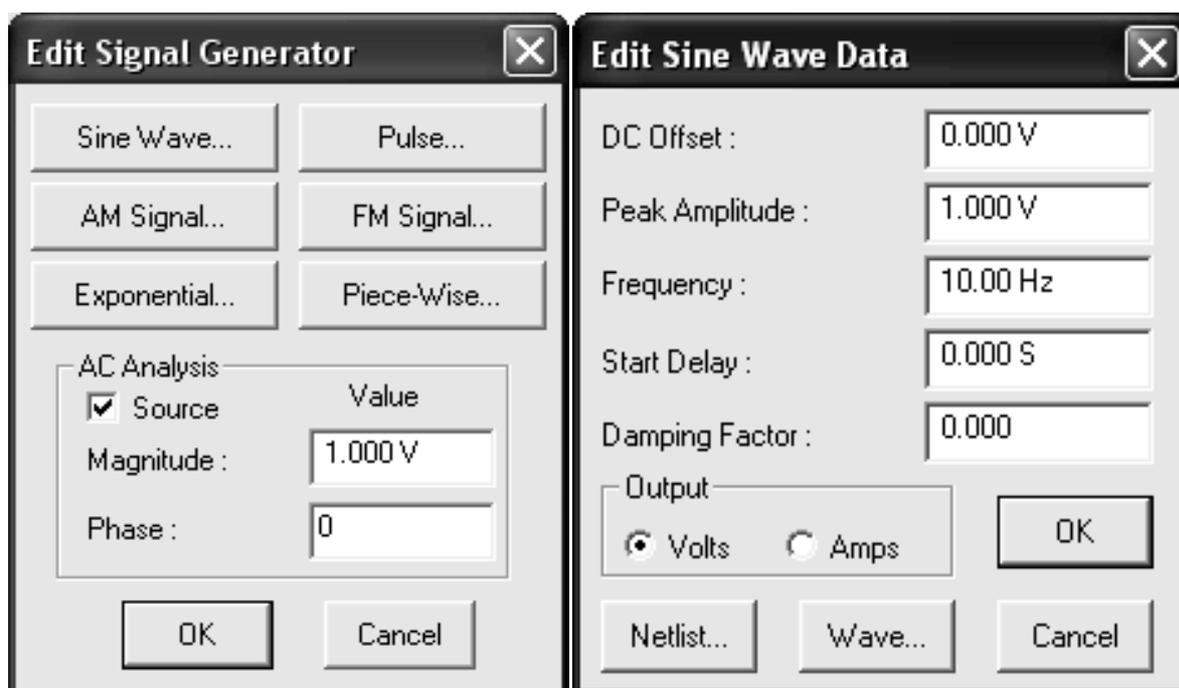


Рис. 16

Здесь *Frequency* (частота) изначально задается произвольно, например в данном случае 10 Гц, а *Peak Amplitude* (амплитуда) должна быть равна 1 В.

Выбор режимов моделирования осуществляется в диалоговом меню *Analyses Setup*. Для включения режима анализа частотных характеристик следует выбрать режим [*AC...*] с заданием параметров, как показано на рис. 17. Как следует из заданных параметров моделирования, мы будем рассматривать частотные характеристики корректора в диапазоне

100 мГц...10 кГц с использованием логарифмического подекадного шаблона (*Sweep / Decade*) оси частот для наибольшей наглядности.

**Важно!** Для каждой схемы диапазон рассматриваемых частот индивидуален. При построении характеристик следует рассмотреть несколько диапазонов в режиме увеличения / уменьшения пределов и выбрать наиболее подходящий, при котором графики АЧХ и ФЧХ видны полностью.

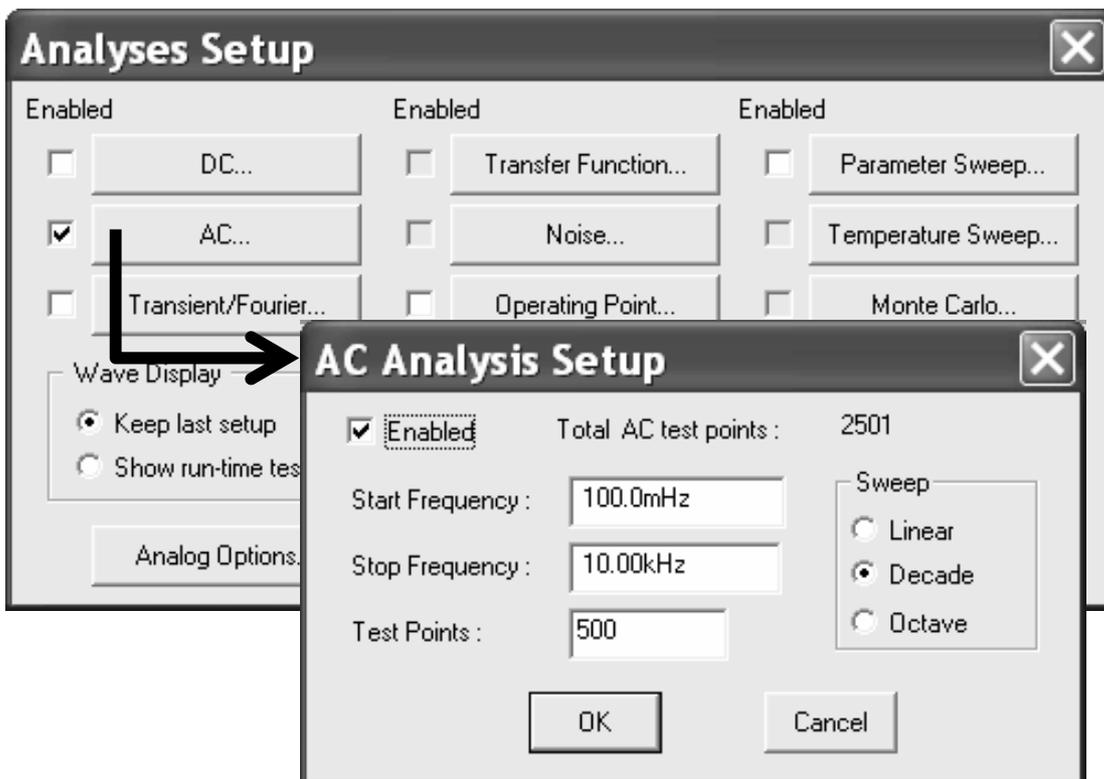


Рис. 17

Для включения режима анализа осциллограмм (переходных характеристик корректора в режиме стационарных колебаний) следует выбрать режим *Transient / Fourier* с заданием параметров автоматически при помощи кнопки *Set Default Timing* (рис. 18).

Для запуска расчета характеристик воспользуемся кнопкой *Run Analyses* в диалоговом меню *Analyses Setup* или кнопкой  панели инструментов. Тип рассчитываемой характеристики выбирается в одной из закладок в окне построения характеристик. Выбор на схеме точки снятия характеристик осуществляется инструментом . Изначально результат построения АЧХ имеет вид, показанный на рис. 19, – график практически совпадает с осью Y и горизонталью 1 В.

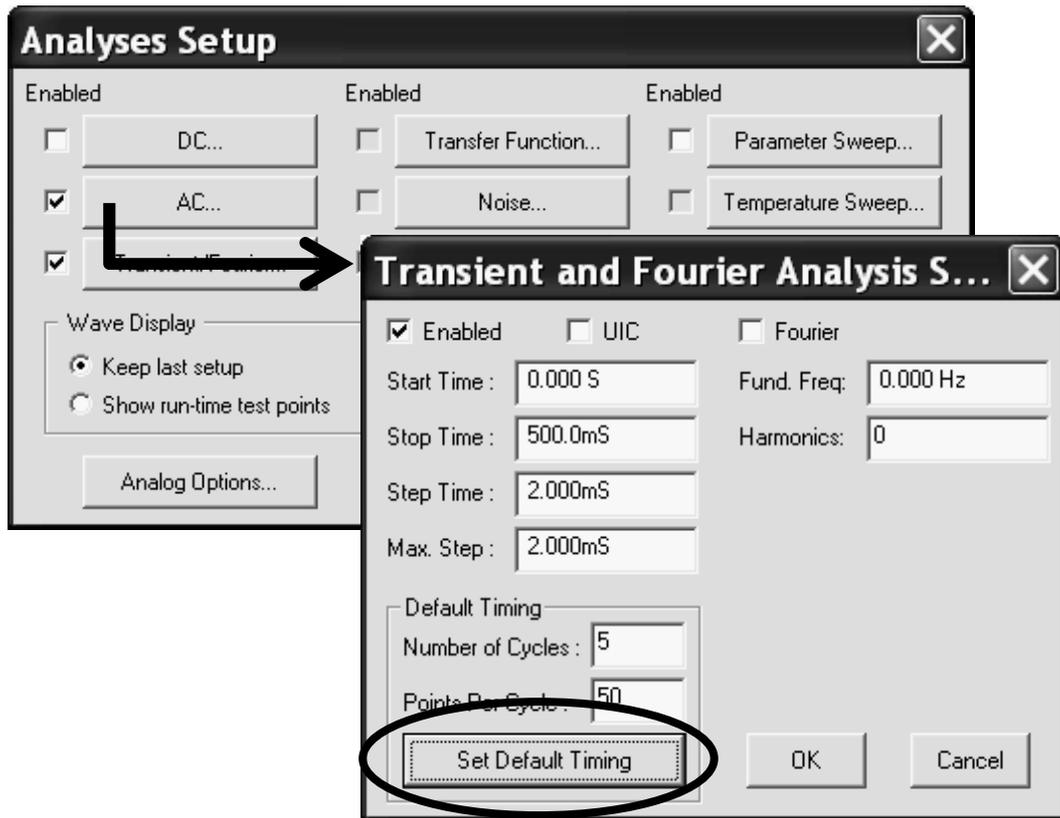


Рис. 18

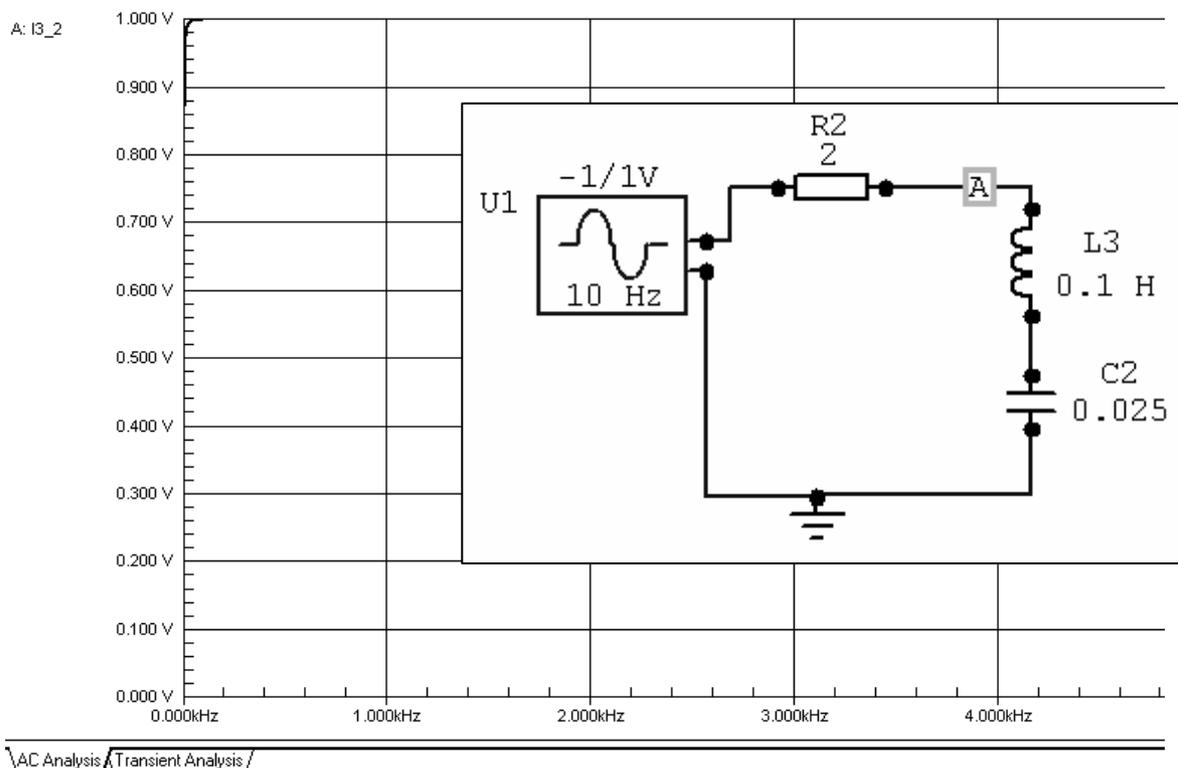


Рис. 19

Для большей наглядности и обеспечения возможности сравнения значений частотных характеристик для различных частот принято использовать логарифмический масштаб по оси частот. Для его задания необходимо щелкнуть в поле построения АЧХ правой кнопкой мыши и, выбрав пункт меню *Scaling*, установить параметры следующим образом: выбрать логарифмический формат оси частот *X Scale* и задать вывод по оси *Y* частотной характеристики усиления амплитуды *Magnitude* (рис. 20).

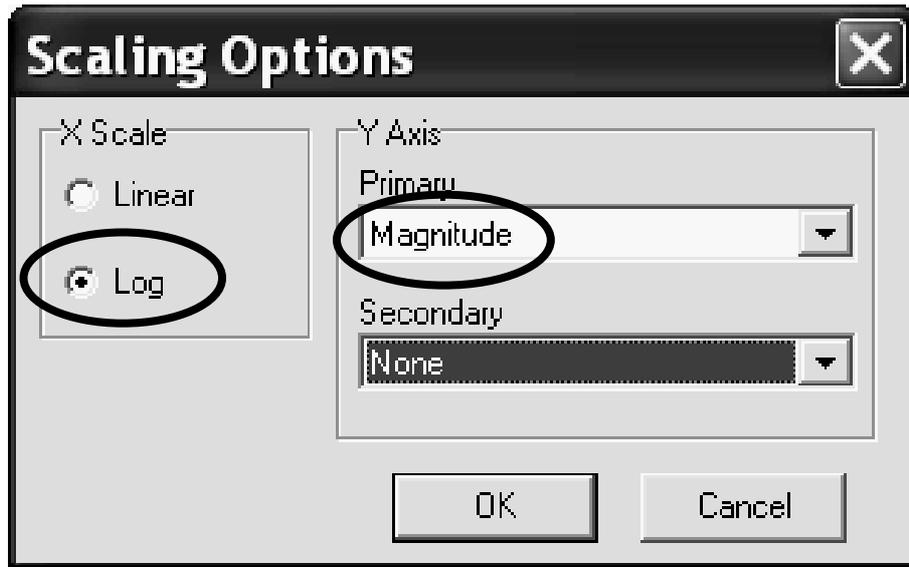


Рис. 20

Результат построения АЧХ с включенными измерительными курсорами *Measurement Cursors* для определения значимых точек характеристики имеет вид, показанный на рис. 21.

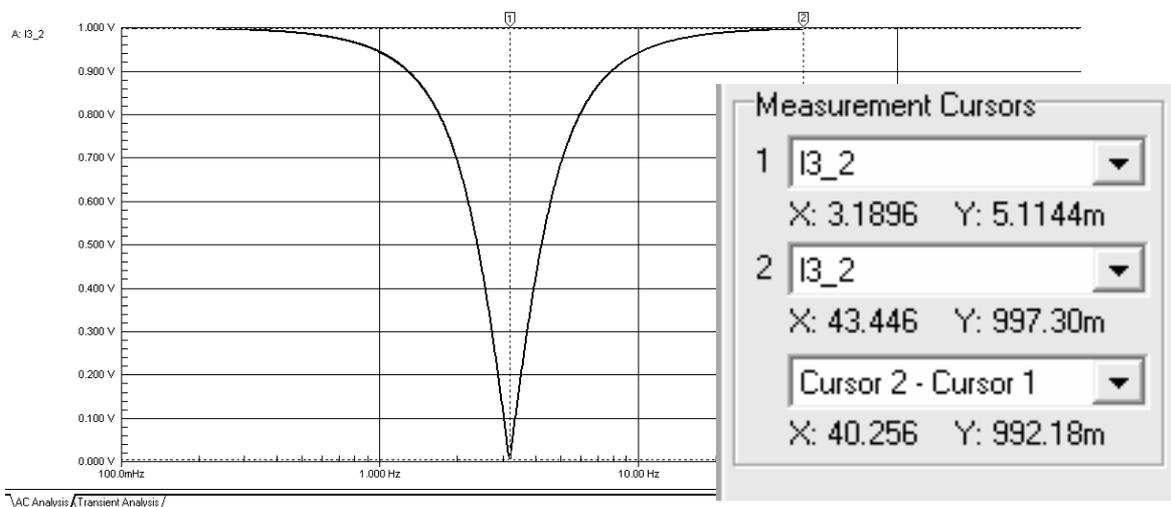


Рис. 21

Как и следовало ожидать, пассивная схема не может усилить входной сигнал. Анализ построенной АЧХ позволяет утверждать следующее: сигналы с частотами более 43,4 Гц (измерительный курсор 2) будут воспроизводиться на выходе схемы без изменения амплитуды, т. е. с амплитудой  $\approx 1$  В. При выборе частоты входного сигнала до 34 Гц на выходе следует ожидать ослабления амплитуды, причем максимальное ослабление будет иметь место на частоте 3,2 Гц (измерительный курсор 1). Ослабление амплитуды в два раза (до 0,5 В) будет иметь место на частотах 2,4 и 4,2 Гц (рис. 22).

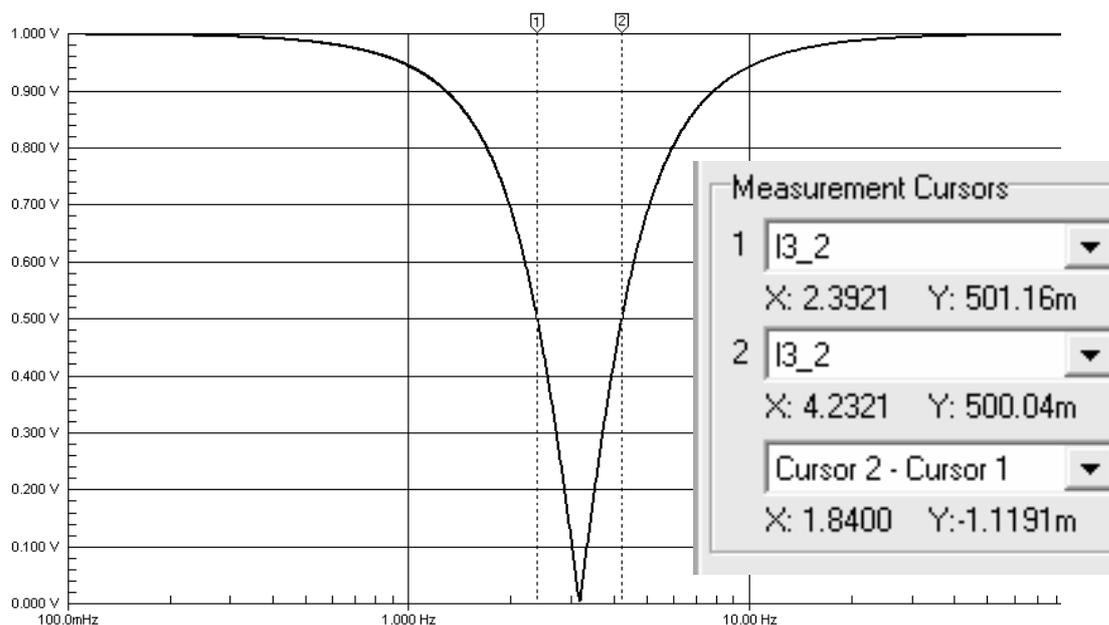


Рис. 22

При дальнейшем уменьшении частоты входного сигнала до значений менее 240 мГц степень ослабления амплитуды уменьшается до 0, т. е. сигналы с частотами менее 240 мГц, как и сигналы с частотами более 43,4 Гц, будут воспроизводиться на выходе схемы без изменения амплитуды. По результатам анализа АЧХ для дальнейшего исследования выберем **три значения частот входных сигналов**: частоту максимального ослабления 3,2 Гц, частоту ослабления амплитуды входного сигнала в 2 раза 4,2 Гц и частоту воспроизведения сигнала без ослабления амплитуды 45 Гц.

Подтвердим результаты анализа АЧХ построением осциллограмм (переходных характеристик корректора в режиме стационарных колебаний) при подаче на вход синусоидальных гармонических сигналов с выбранными значениями частот. Выполним построение осциллограммы для частоты  $\omega = 4,2$  Гц. Для этого изменим частоту входного сигнала, вызвав окно редактирования свойств генератора сигнала двойным щелчком по его обозначению. После этого настроим режим анализа в диалоговом меню

*Analyses Setup* в режиме *Transient / Fourier* с автоматическим заданием оптимальных значений параметров при помощи кнопки *Set Default Timing* (рис. 23) и запустим расчет характеристик кнопкой *Run Analyses* в диалоговом меню *Analyses Setup* или кнопкой  панели инструментов.

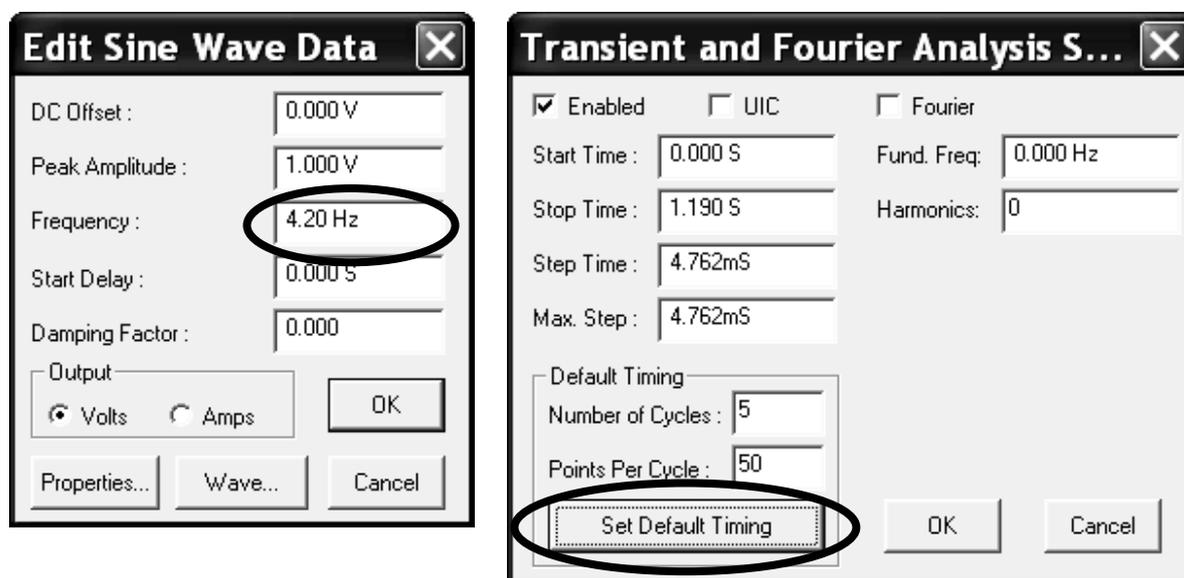


Рис. 23

Для большей наглядности и возможности сравнения выходного сигнала с входным в поле графика построено сразу два переходных процесса – при использовании инструмента  для выбора точки снятия характеристики на схеме следует сначала указать первую точку, а затем при нажатой клавише *Shift* – вторую.

Как следует из графиков, представленных на рис. 24, полученные осциллограммы подтверждают результат анализа АЧХ: амплитуда выходного сигнала с частотой 4,2 Гц после завершения переходного процесса ослаблена по сравнению с входной амплитудой и составляет 490,55 мВ (измерительной курсор 1). Этот результат достаточно точно согласуется с результатом анализа АЧХ, представленным на рис. 22. Данные, полученные с использованием измерительного курсора 2, показывают, что при частоте сигнала 4,2321 Гц амплитуда выходного сигнала равна 500,04 мВ.

**Важно!** Построение и анализ осциллограмм на соответствие АЧХ выполняется для всех трех значений частот входных сигналов, выбранных по результатам анализа АЧХ.

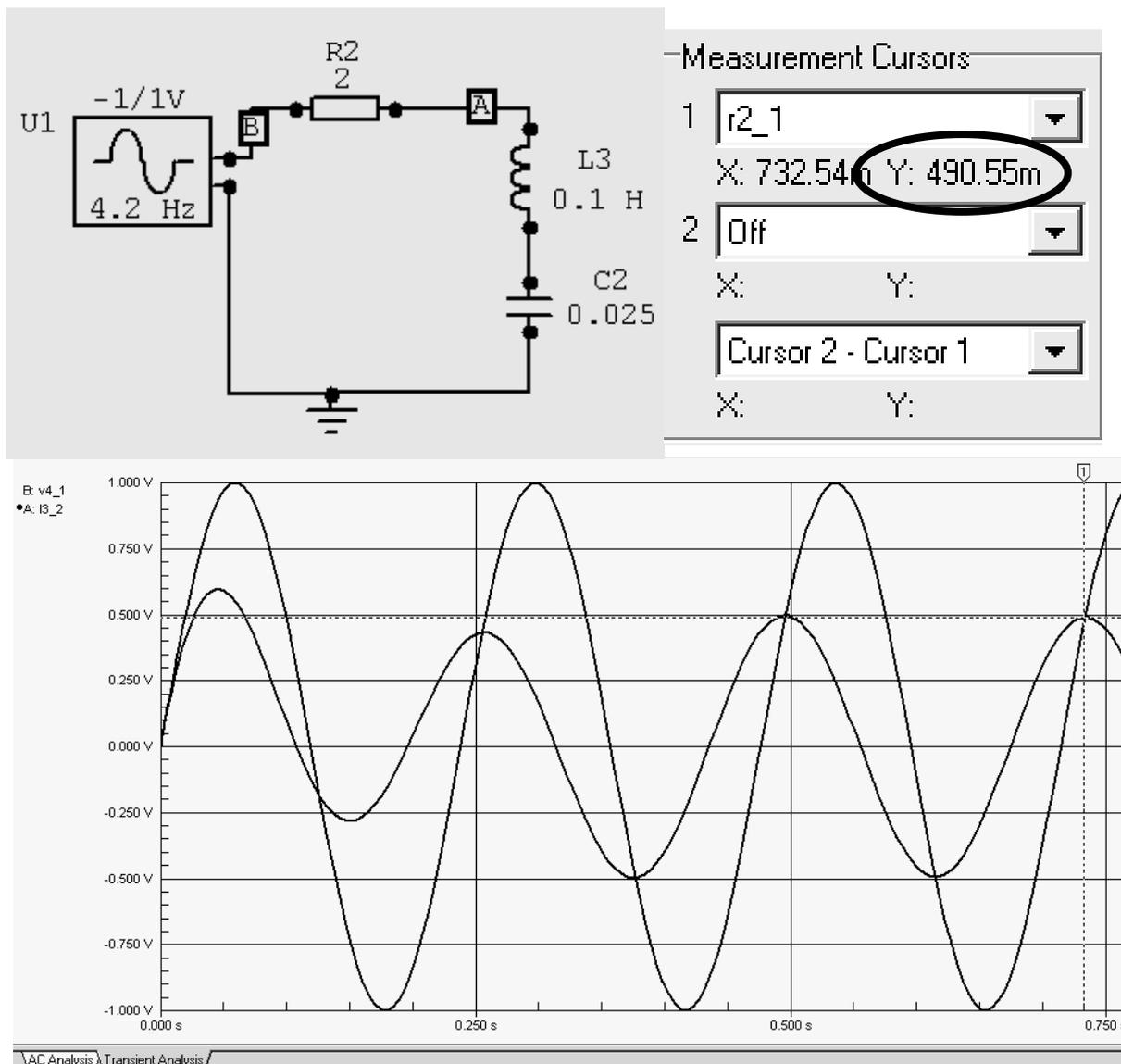


Рис. 24

Теперь исследуем ФЧХ корректора. Для этого в поле построения АЧХ вызовем меню правой кнопкой мыши и, выбрав пункт меню *Scaling*, изменим тип данных, выводимых по оси Y, – выберем ФЧХ в градусах (*Phase in Degrees*) (рис. 25).

Результат построения ФЧХ с результатами измерений, полученными при помощи измерительных курсоров, имеет вид, приведенный на рис. 26. Анализ построенной ФЧХ позволяет утверждать следующее: сигналы с частотами менее 3,16 Гц (измерительный курсор 2) будут на выходе иметь отрицательный фазовый сдвиг, который по абсолютной величине при приближении к граничной частоте возрастает. На частоте 3,16 Гц происходит изменение знака фазового сдвига, и сигналы с частотами более 3,16 Гц бу-

дуг на выходе иметь положительный фазовый сдвиг, который убывает до 0 с ростом частоты. Так, для сигнала с частотой 8,1 Гц (измерительный курсор 1) фазовый сдвиг будет иметь значение около 25°.

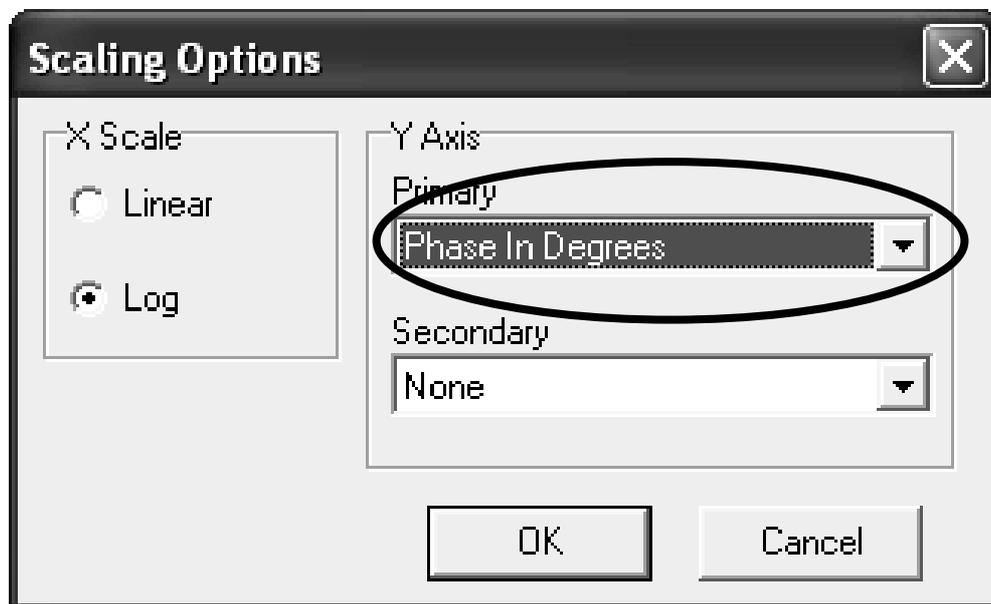


Рис. 25

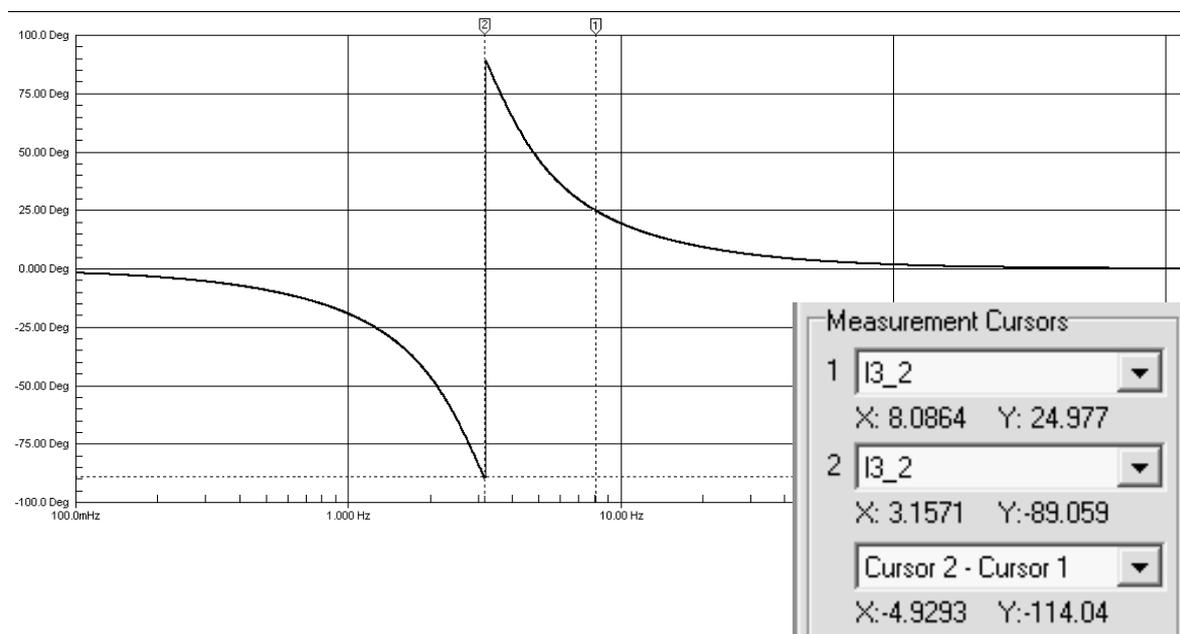


Рис. 26

По результатам анализа ФЧХ для дальнейшего исследования выберем **три значения частот входных сигналов**: частоту, близкую к граничной (частоту изменения знака фазового сдвига), например 3,16 Гц, частоту 8,1 Гц, при которой сдвиг составляет 25°, и любую частоту воспроизведения сигнала без сдвига, например 600 Гц.

Подтвердим результаты анализа ФЧХ построением осциллограмм при подаче на вход синусоидальных гармонических сигналов с выбранными значениями частот. Выполним построение осциллограммы для частоты  $\omega = 8,1$  Гц. Выполним настройки режима анализа, как показано на рис. 23, задавая необходимое нам значение частоты входного сигнала. Результат построения осциллограмм имеет вид, показанный на рис. 27.

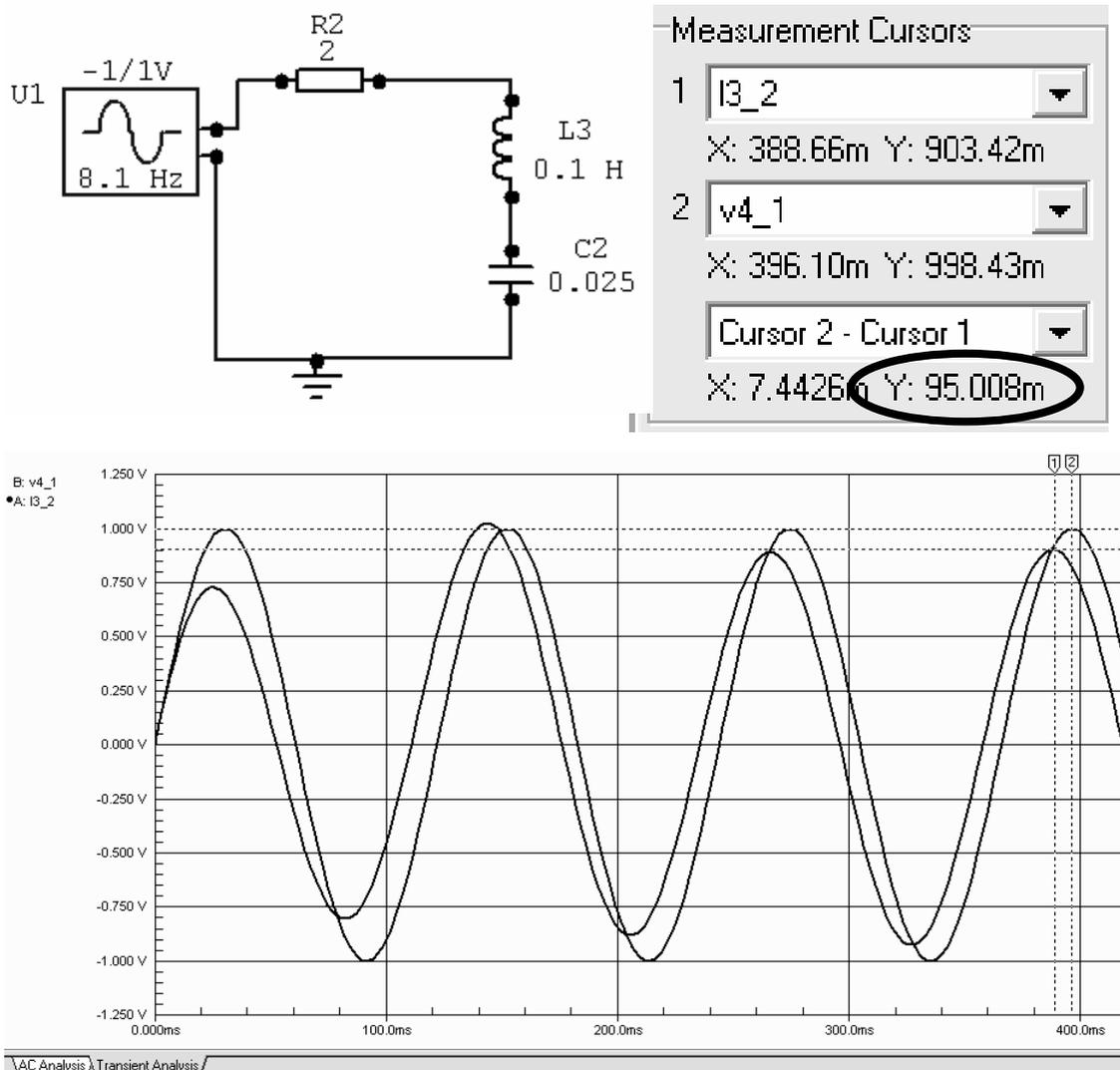


Рис. 27

Как видим, максимум амплитуды выходного сигнала с частотой 8,1 Гц действительно опережает по времени максимум входного сигнала на 7,4426 миллисекунды (см. разницу значений для измерительных курсоров 1 и 2 на рис. 27). Проверим, соответствуют ли эти данные ФЧХ. Согласно результатам, показанным на рис. 26, для частоты 8,1 Гц фазовый сдвиг составляет примерно  $25^\circ$ . Фаза гармонического сигнала изменяется от  $0^\circ$  до  $360^\circ$  в течение полного периода колебаний. Зная период колеба-

ний, можно рассчитать запаздывание выходного сигнала по времени, соответствующее известному сдвигу фазы, с использованием пропорции:

$$\frac{T}{360^\circ} = \frac{\tau}{\varphi},$$

где  $T$  – период сигнала (величина, обратная частоте  $\omega$ );

$\varphi$  – сдвиг фазы на частоте  $\omega$  в градусах;

$\tau$  – запаздывание (опережение) по времени в секундах.

В рассматриваемом случае при периоде сигнала  $T = 1/8,1 = 0,12$  имеем:

$$\frac{0,12}{360^\circ} = \frac{\tau}{25^\circ}, \quad \tau = \frac{0,12 \cdot 25^\circ}{360^\circ} = 0,0077.$$

Таким образом, значение фазового сдвига, полученное по результатам анализа ФЧХ, хорошо согласуется с результатом построения осциллограмм:  $0,0074 \approx 0,0077$  с. Неполное совпадение результатов объясняется дискретностью перемещения измерительных курсоров.

**Важно!** Построение и анализ осциллограмм на соответствие ФЧХ выполняется для всех трех значения частот входных сигналов, выбранных по результатам анализа ФЧХ.

### **РАБОТА № 3. Разработка и преобразование математических моделей САУ**

**Цель:** разработка математической модели замкнутой и разомкнутой САУ в виде передаточной функции по заданной схеме САУ и дифференциальным моделям элементов.

**Программное обеспечение моделирования:** Mathcad.

**Исходные данные:** см. **Варианты индивидуальных заданий.**

#### **Теоретические сведения**

Основные сведения о математических моделях анализа САУ и типовых элементарных звеньях содержатся в методических указаниях к **Работе № 1.**

САУ может быть реализована по принципу:

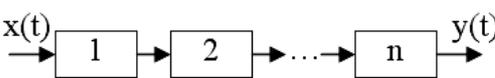
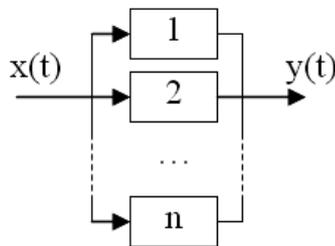
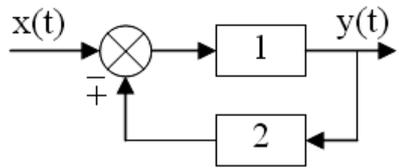
- разомкнутого управления;
- управления по отклонению или принципу обратной связи;
- управления по возмущению или принципу компенсации.

При **разомкнутом управлении** САУ реализует заданный алгоритм функционирования без контроля фактического значения управляемой ве-

личины, т. е. текущее состояние ОУ не учитывается при выработке управляющих воздействий. При реализации **управления по отклонению** управляющее воздействие на ОУ вырабатывается как функция отклонения управляемой величины от заданного значения. Схема управления содержит общую обратную связь, т. е. сигнал с выхода системы подается на вход. Такие системы называются **замкнутыми**. В случае, когда изменение состояния ОУ под действием одного или нескольких определенных возмущений недопустимо, используют принцип **управления по возмущению**. Сущность принципа состоит в том, что измеренное датчиком возмущение преобразуется в воздействие, подаваемое на УУ, которое формирует управляющее воздействие с учетом возмущающего, компенсируя его действие.

При известных передаточных функциях звеньев, передаточные функции групп звеньев САУ определяются по формулам, приведенным в табл. 1.

Таблица 1

Тип и схема соединения	Формула расчета передаточной функции
Последовательное: 	$W = y(p) / x(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p)$
Параллельное: 	$W = y(p) / x(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p)$
С обратной связью: 	$W(p) = y(p) / x(p) = \frac{W_1(p)}{1 \pm W_1(p)W_2(p)},$ <p>где знак «плюс» соответствует отрицательной, а знак «минус» – положительной обратной связи</p>

В ряде случаев может возникнуть необходимость преобразования структурной схемы САУ. Для преобразования используют **правила переноса узлов**:

– при переносе узла по направлению действия сигнала через звено с передаточной функцией  $W_3$  (рис. 28) в цепь обратной связи добавляется звено с передаточной функцией  $1/W_3$ ;

– при переносе узла против направления действия сигнала через звено с передаточной функцией  $W_3$  в цепь обратной связи добавляется звено с передаточной функцией  $W_3$  [2, 3, 5].

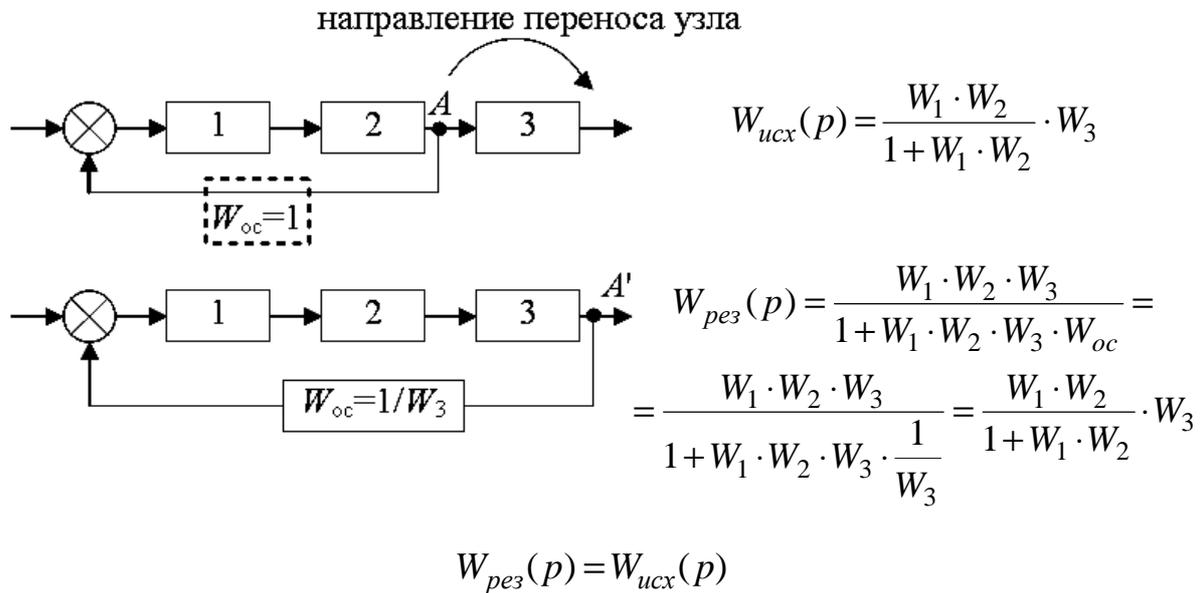


Рис. 28

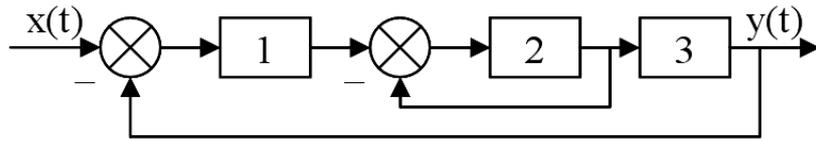
### Ход выполнения работы

1. По заданным дифференциальным моделям элементов САУ определить передаточные функции элементов. Определить типы элементарных звеньев, входящих в состав элементов.
2. Определить передаточную функцию *разомкнутой* и *замкнутой* САУ, при необходимости – с использованием правила переноса узлов.
3. Преобразовать *разомкнутую* систему к последовательному соединению типовых элементарных звеньев.

### Примеры и практические рекомендации по использованию программного обеспечения

Пусть САУ задана структурной схемой и дифференциальными уравнениями элементов (рис. 29).

Разомкнутая система (система без общей обратной связи) представляет собой последовательное соединение первого элемента со вторым, охваченным единичной отрицательной обратной связью, и третьим.



$$1) 0,5 \frac{dy(t)}{dt} - 1,8 \frac{dx(t)}{dt} + y(t) = 0;$$

$$2) 0,1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2x(t);$$

$$3) 0,5 \frac{dy(t)}{dt} + x(t) = 2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2}.$$

Рис. 29

Передаточная функция разомкнутой системы в соответствии с определенными типами соединений элементов будет иметь вид:

$$W_p(p) = W_1(p) \frac{W_2(p)}{1 + W_2(p)} W_3(p).$$

Определим передаточную функцию первого звена:

$$0,5 \frac{dy(t)}{dt} - 1,8 \frac{dx(t)}{dt} + y(t) = 0; \quad 0,5 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 1,8 \frac{dx(t)}{dt};$$

$$0,5p \cdot y(p) + y(p) = 1,8p \cdot x(p); \quad y(p)(0,5p + 1) = 1,8p \cdot x(p);$$

$$W_1(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{1,8p}{(0,5p + 1)} = p \frac{1,8}{(0,5p + 1)}.$$

Передаточная функция элемента № 1 заданной системы представляет собой произведение передаточных функций типовых элементарных звеньев (см. прил. 1), т. е. звено является последовательным соединением идеального дифференцирующего звена и апериодического звена первого порядка с коэффициентом усиления  $k = 1,8$  и постоянной времени  $T = 0,5$  с.

Аналогично определим  $W_2(p) = \frac{2}{(0,1p + 1)}$  (апериодическое неустойчивое

первого порядка с коэффициентом усиления  $k = 2$  и постоянной времени

$T = 0,1$  с) и  $W_3(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{2}{(4p - 1)}$  (последовательное соединение идеального

интегрирующего звена и апериодического неустойчивого первого порядка с коэффициентом усиления  $k = 2$  и постоянной времени  $T = 4$  с). Подставим полученные выражения в формулу передаточной функции разомкнутой системы:

$$W_p(p) = \frac{p \cdot \frac{1,8}{0,5p+1} \cdot \frac{2}{0,1p+1} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{4p-1}}{1 + \frac{2}{0,1p+1}} = \frac{1,2}{(0,5p+1)(0,033p+1)(4p-1)}$$

Таким образом, разомкнутую систему можно представить эквивалентной схемой последовательного соединения трех типовых элементарных звеньев (апериодических первого порядка). Передаточная функция замкнутой системы с учетом общей единичной обратной связи определяется с использованием формулы следующего вида:

$$W_3(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)}$$

Автоматизировать эквивалентные преобразования моделей САУ можно с использованием Mathcad. Основные сведения и приемы работы с этим пакетом математического анализа приведены в прил. 5.

Для выполнения задания необходимо открыть несколько панелей инструментов семейства *Math* (*Математические*): *Calculator* (*Калькулятор*), *Symbolic* (*Символика* или *Символьные*).

#### **Порядок ввода исходных данных и выполнения преобразований**

1. Щелчком левой кнопки мыши установим курсор ввода (маленький красный крестик – *Crosshair*) в произвольное место рабочего листа.
2. Введем в рабочем поле Mathcad исходную формулу передаточной функции разомкнутой системы  $W_p(p)$ , как показано на рис. 30.
3. Упростим данное выражение с помощью специального символьного оператора *Simplify* (*Упростить*), который необходимо ввести с панели инструментов *Symbolic* (*Символика* или *Символьные*).

$$\left( \frac{p \cdot \frac{1,8}{0,5p+1} \cdot \frac{2}{0,1p+1} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{4p-1}}{1 + \frac{2}{0,1p+1}} \right) \text{ simplify} \rightarrow \frac{17,999999992549419403}{(p + 30,0) \cdot (p - 0,25) \cdot (p + 2,0)}$$

Рис. 30

4. Приведем ответ к численной форме. Для этого установим курсор ввода в конец оператора *Simplify* и нажмем на панели инструментов *Symbolic* (*Символика* или *Символьные*) кнопку ввода оператора *Float* (*Пересчитать в десятичную дробь*). В правый маркер оператора введем число значимых цифр в составе числа, которые должен содержать ответ, например 3. При таком задании формата вывода, например, число 4,8915 будет выведено в виде 4,89, число 53,27 – в виде 53,3, а число 0,017869 – в виде 0,0179. Если значимых цифр в числе меньше 3, то в формате вывода присутствуют имеющиеся значимые цифры (рис. 31).

The screenshot shows the Mathcad interface. The top toolbar includes icons for calculator, undo, redo, and various mathematical symbols. The main workspace displays the following expression:

$$\left( \frac{p \cdot \frac{1.8}{0.5p + 1} \cdot \frac{2}{0.1p + 1} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{4p - 1}}{1 + \frac{2}{0.1p + 1}} \right) \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{float, 3} \end{array} \right. \rightarrow \frac{18.0}{(p + 30.0) \cdot (p - 0.25) \cdot (p + 2.0)}$$

Рис. 31

Упрощенное выражение требует дальнейшей модификации, так как передаточные функции апериодических звеньев первого порядка имеют вид  $\frac{1}{(T \cdot p + 1)}$  (см. прил. 1). То есть, для определения параметров звеньев (постоянных времени и коэффициента усиления), входящих в состав приведенного последовательного соединения, необходимо, чтобы второе слагаемое в скобках многочленов первого порядка было равно 1. Произведем требуемые преобразования, вынося за скобки множитель, равный значению второго слагаемого, если это значение отлично от единицы. Для этого в Mathcad:

- выделим выражение, полученное в результате предыдущих преобразований (рис. 31), и скопируем его в буфер обмена (*Ctrl+C*);
- установим курсор ввода ниже нашего выражения и вставим скопированный объект из буфера обмена (*Ctrl+V*);
- преобразовав данное выражение, как показано на рис. 32, получим конечный результат приведения передаточной функции разомкнутой системы к виду последовательного соединения типовых элементарных звеньев САУ.

$$\frac{18.0}{30 \cdot 0.25 \cdot 2} \cdot \frac{(p + 30.0)}{30} \cdot \frac{(p - 0.25)}{0.25} \cdot \frac{(p + 2.0)}{2} \xrightarrow{\text{float,3}} \frac{1.2}{(0.0333 \cdot p + 1.0) \cdot (0.5 \cdot p + 1.0) \cdot (4.0 \cdot p - 1.0)}$$

Рис. 32

Конечный вид выражения позволяет определить параметры типовых элементарных звеньев, входящих в состав последовательного соединения эквивалентной разомкнутой САУ. В состав соединения входят два устойчивых апериодических звена первого порядка с постоянными времени 0,033 и 0,5 с соответственно и одно неустойчивое апериодическое звено первого порядка с постоянной времени 0,4 с. Общий коэффициент статического преобразования (усиления) разомкнутой САУ составляет 1,2.

Если в результате преобразований исходной передаточной функции разомкнутой САУ получаются отношения полиномов высоких степеней, то для их разложения на множители нулевого, первого и второго порядков, соответствующих типовым элементарным звеньям, можно:

- применить команду *Factor* (*Разложить на множители*) меню *Symbolics* к знаменателю выражения, предварительно выделив его,
- применить символьный оператор *Factor* (*Разложить на множители*) ко всему выражению, введя его с панели инструментов *Symbolic* (*Символика* или *Символьные*).

Преобразуем полученное выражение к виду, пригодному для идентификации типовых звеньев, проведя преобразования выражения с помощью команды *Factor* (*Разложить на множители*) из пункта меню *Symbolics* (рис. 33) или с помощью оператора *Factor* панели инструментов *Symbolic* (рис. 34). Полученный результат разложения также может потребовать дополнительных преобразований для приведения к форме, необходимой для идентификации типов элементарных звеньев. Пример такого преобразования с дополнительным применением символьного оператора *Float* для форматирования результатов показан на рис. 34.

Конечный вид выражения, приведенного на рис. 34, позволяет определить коэффициент статического преобразования ( $k = 0,017$ ), а также типы и параметры элементарных звеньев, входящих в состав последовательного соединения эквивалентной разомкнутой САУ:

- идеальное дифференцирующее звено;

- дифференцирующее первого порядка с постоянной времени, равной 0,2 с;
- два апериодических первого порядка с постоянными времени 0,25 с и 0,33 с соответственно;
- колебательное устойчивое звено с постоянной времени, равной  $\sqrt{0,2}$  с.

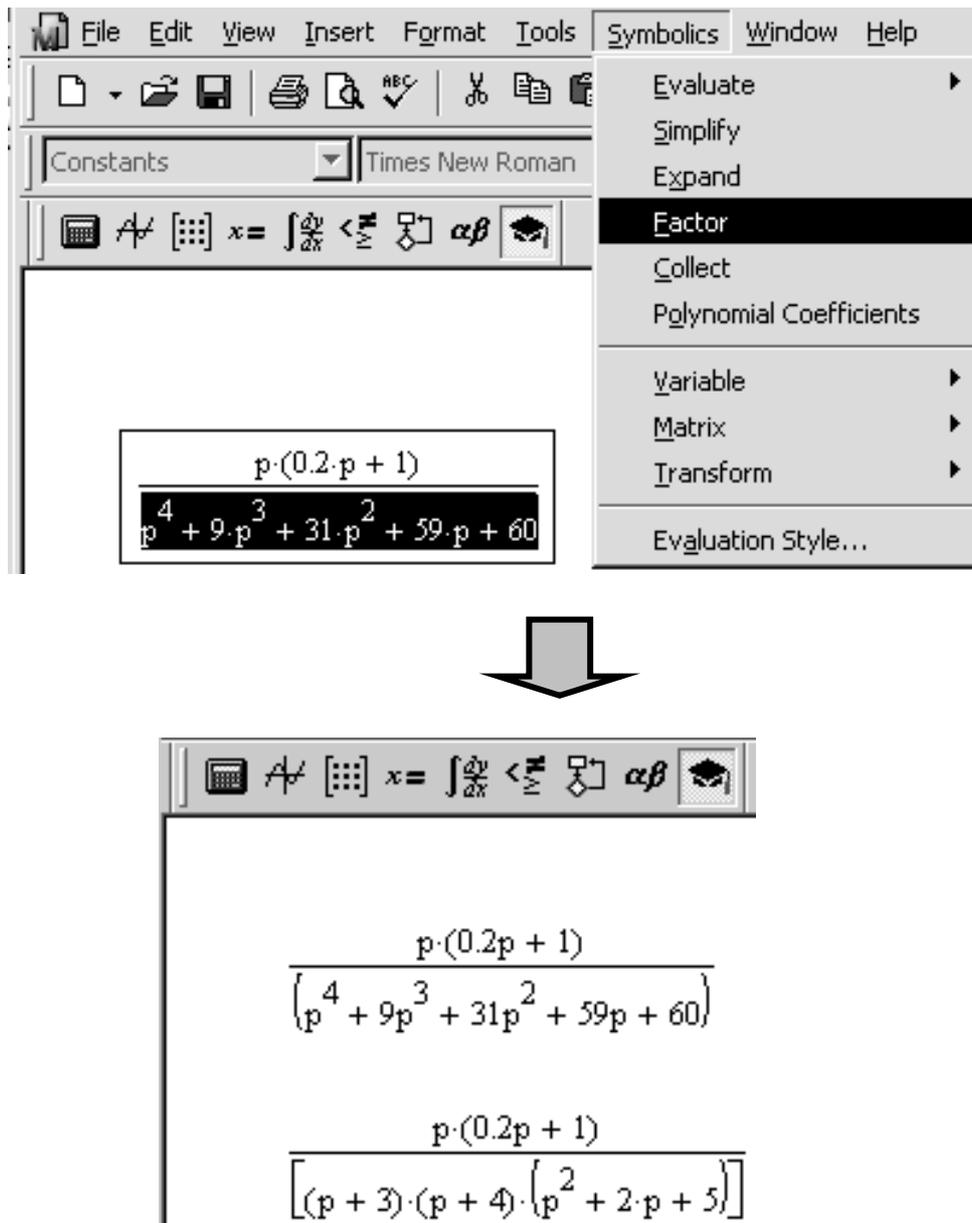
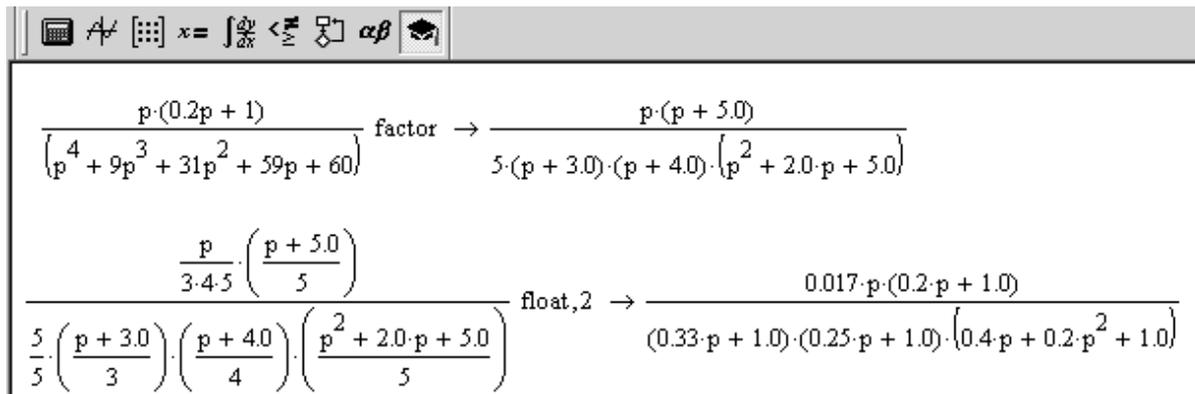


Рис. 33



$$\frac{p \cdot (0.2p + 1)}{p^4 + 9p^3 + 31p^2 + 59p + 60} \xrightarrow{\text{factor}} \frac{p \cdot (p + 5.0)}{5 \cdot (p + 3.0) \cdot (p + 4.0) \cdot (p^2 + 2.0 \cdot p + 5.0)}$$

$$\frac{\frac{p}{3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \left(\frac{p + 5.0}{5}\right)}{\frac{5}{5} \cdot \left(\frac{p + 3.0}{3}\right) \cdot \left(\frac{p + 4.0}{4}\right) \cdot \left(\frac{p^2 + 2.0 \cdot p + 5.0}{5}\right)} \xrightarrow{\text{float,2}} \frac{0.017 \cdot p \cdot (0.2 \cdot p + 1.0)}{(0.33 \cdot p + 1.0) \cdot (0.25 \cdot p + 1.0) \cdot (0.4 \cdot p + 0.2 \cdot p^2 + 1.0)}$$

Рис. 34

Иногда автоматическое разложение многочлена на множители с помощью команды *Factor* выполнить не удастся, в особенности если это многочлен высокой степени. В таком случае прибегают к разложению через корни. Для этого сначала необходимо вынести за скобки коэффициент слагаемого с максимальной  $n$ -ой степенью – обеспечить так называемый **приведенный вид** многочлена. Как известно, любое уравнение  $n$ -го порядка приведенного вида  $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$  имеет  $n$  корней. Корни могут быть действительными и комплексными, и если они известны, то приведенный многочлен  $n$ -го порядка раскладывается на множители вида:

$$(x - k_1)(x - k_2) \dots (x - k_n),$$

где  $k_1, k_2, \dots, k_n$  – корни многочлена.

Реализация данного вида разложения также может быть выполнена с использованием Mathcad.

1. Запишем многочлен и введем с панели инструментов *Symbolic* (*Символика*) оператор *Solve* (*Решить*). Ответ будет выдан в виде вектора. Система найдет как действительные, так и мнимые корни. Как и следовало ожидать, многочлен 4-ой степени имеет 4 корня, из них два действительные, а два комплексно-сопряженные (рис. 35).

2. Запишем разложение по корням и применим команду *Expand* (*Разложить* или *Раскрыть скобки*) к комплексно-сопряженному выражению, как показано на рис. 36. Результат имеет вид произведения двух сомножителей первого порядка и одного сомножителя второго порядка.

Дальнейшие преобразования полученного выражения к виду, пригодному для идентификации типовых звеньев, осуществляются так же, как было рассмотрено ранее.

$p^4 + 9p^3 + 31p^2 + 59p + 60 \text{ solve} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -1 - 2j \\ -1 + 2j \end{pmatrix}$

Рис. 35

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help  
 Evaluate  
 Simplify  
**Expand**  
 Factor  
 Collect  
 Polynomial Coefficients  
 Variable



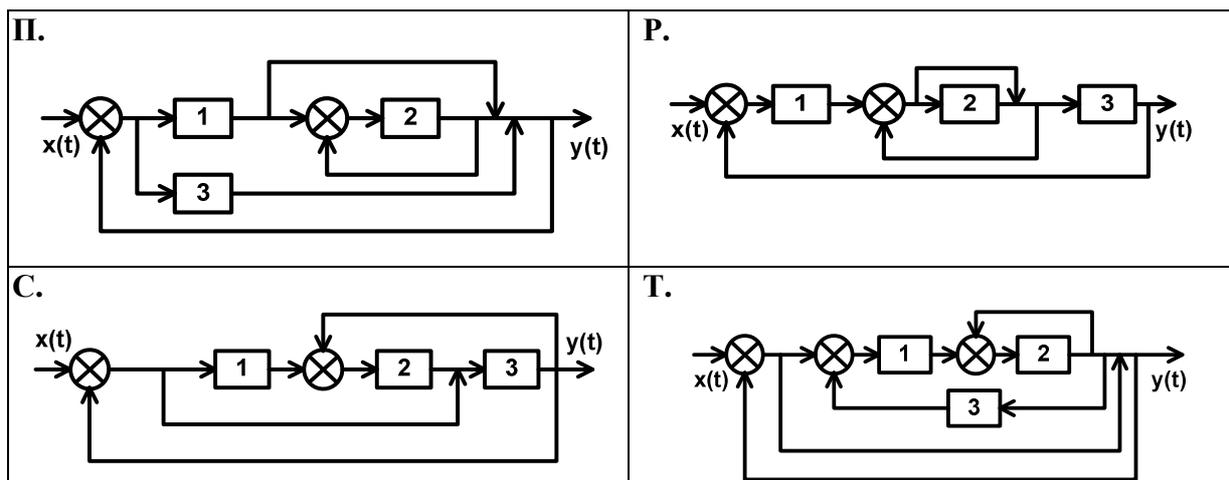
$(p + 3)(p + 4)[(p + 1 + 2j)(p + 1 - 2j)]$   
 $(p + 3)(p + 4)(p^2 + 2p + 5)$

Рис. 36

# Варианты индивидуальных заданий

## Варианты схем САУ

<p><b>А.</b></p>	<p><b>Б.</b></p>
<p><b>В.</b></p>	<p><b>Г.</b></p>
<p><b>Д.</b></p>	<p><b>Е.</b></p>
<p><b>Ж.</b></p>	<p><b>З.</b></p>
<p><b>И.</b></p>	<p><b>К.</b></p>
<p><b>Л.</b></p>	<p><b>М.</b></p>
<p><b>Н.</b></p>	<p><b>О.</b></p>



**Варианты дифференциальных уравнений элементов САУ**

<p><b>1.</b></p> <p>1) <math>0.25 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 0.7 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 100x(t)</math></p> <p>2) <math>0.01 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{dx(t)}{dt} = y(t)</math></p> <p>3) <math>\frac{dy(t)}{dt} = 5x(t)</math></p>	<p><b>2.</b></p> <p>1) <math>\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = 0.3 \frac{dx(t)}{dt} + x(t)</math></p> <p>2) <math>0.2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 50x(t)</math></p> <p>3) <math>0.1 \frac{dy(t)}{dt} = 10x(t)</math></p>
<p><b>3.</b></p> <p>1) <math>1.2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 5 \frac{dx}{dt}</math></p> <p>2) <math>0.04 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 0.6 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)</math></p> <p>3) <math>y(t) = 25x(t)</math></p>	<p><b>4.</b></p> <p>1) <math>0.5 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 25x(t)</math></p> <p>2) <math>0.3 \frac{dy(t)}{dt} = 5x(t)</math></p> <p>3) <math>0.4 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2x(t)</math></p>
<p><b>5.</b></p> <p>1) <math>0.81 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 0.25 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = 0.4 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t)</math></p> <p>2) <math>0.6 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 20x(t)</math></p> <p>3) <math>\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = 85x(t) - y(t)</math></p>	<p><b>6.</b></p> <p>1) <math>0.25 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = 0.1 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t)</math></p> <p>2) <math>0.5 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 10x(t)</math></p> <p>3) <math>\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = x(t) - y(t)</math></p>

<p><b>7.</b></p> <p>1) <math>0.5 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 40x(t)</math></p> <p>2) <math>y(t) = 2x(t)</math></p> <p>3) <math>0.5 \frac{dy(t)}{dt} + 51y(t) = 100x(t)</math></p>	<p><b>8.</b></p> <p>1) <math>3.2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2x(t)</math></p> <p>2) <math>0.3 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 65x(t)</math></p> <p>3) <math>y(t) = 3.5x(t)</math></p>
<p><b>9.</b></p> <p>1) <math>0.04 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 0.6 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 25x(t)</math></p> <p>2) <math>10 \frac{dy(t)}{dt} = 0.15 \frac{dx(t)}{dt} + x(t)</math></p> <p>3) <math>\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{dx(t)}{dt}</math></p>	<p><b>10.</b></p> <p>1) <math>\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t)</math></p> <p>2) <math>0.5 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2x(t)</math></p> <p>3) <math>\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = x(t) - y(t)</math></p>
<p><b>11.</b></p> <p>1) <math>\frac{dy(t)}{dt} = 2 \frac{dx(t)}{dt} + 10x(t)</math></p> <p>2) <math>0.2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2x(t)</math></p> <p>3) <math>0.25 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 0.2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)</math></p>	<p><b>12.</b></p> <p>1) <math>\frac{dy(t)}{dt} = x(t)</math></p> <p>2) <math>0.6 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{dx(t)}{dt}</math></p> <p>3) <math>0.02 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 0.4 \frac{dy(t)}{dt} + 1.8y(t) = 22x(t)</math></p>
<p><b>13.</b></p> <p>1) <math>0.25 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 0.7 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 100x(t)</math></p> <p>2) <math>0.01 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{dx(t)}{dt} = y(t)</math></p> <p>3) <math>\frac{dy(t)}{dt} = 5x(t)</math></p>	<p><b>14.</b></p> <p>1) <math>(0.5)^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 1.2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 24x(t)</math></p> <p>2) <math>0.2 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = 10y(t)</math></p> <p>3) <math>y(t) = 85x(t)</math></p>

<p><b>15.</b></p> <p>1) <math>\frac{dy(t)}{dt} = 4 \frac{dx(t)}{dt}</math></p> <p>2) <math>0.5 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 25x(t)</math></p> <p>3) <math>0.1 \frac{dy(t)}{dt} = 20x(t)</math></p>	<p><b>16.</b></p> <p>1) <math>\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = 8 \left( \frac{dx(t)}{dt} + x(t) \right)</math></p> <p>2) <math>0.5 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2x(t)</math></p> <p>3) <math>0.1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 10x(t)</math></p>
<p><b>17.</b></p> <p>1) <math>0.5 \frac{dy(t)}{dt} - \frac{dx(t)}{dt} + y(t) = 0</math></p> <p>2) <math>0.1 \frac{dy(t)}{dt} - y(t) = 25x(t)</math></p> <p>3) <math>0.5 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2x(t)</math></p>	<p><b>18.</b></p> <p>1) <math>0.8 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 10x(t)</math></p> <p>2) <math>0.3 \frac{dy(t)}{dt} = x(t)</math></p> <p>3) <math>0.7 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 65x(t)</math></p>
<p><b>19.</b></p> <p>1) <math>0.2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2x(t)</math></p> <p>2) <math>0.1 \frac{dy(t)}{dt} = 20x(t)</math></p> <p>3) <math>\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 0.5 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) =</math>  <math>= 12 \left( \frac{dx(t)}{dt} + 0.7x(t) \right)</math></p>	<p><b>20.</b></p> <p>1) <math>3 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) =</math>  <math>= 10 \left( x(t) + 0.6 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \right)</math></p> <p>2) <math>0.2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2x(t)</math></p> <p>3) <math>\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 35x(t)</math></p>
<p><b>21.</b></p> <p>1) <math>0.5 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 20x(t)</math></p> <p>2) <math>0.04 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3.2 \frac{dy(t)}{dt} =</math>  <math>= 10x(t)</math></p> <p>3) <math>\frac{dy(t)}{dt} = 5x(t)</math></p>	<p><b>22.</b></p> <p>1) <math>(0.25)^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 1.2 \frac{dy(t)}{dt} +</math>  <math>+ y(t) = 5 \frac{dx}{dt}</math></p> <p>2) <math>0.2 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = y(t)</math></p> <p>3) <math>y(t) = 2.5x(t)</math></p>

<p><b>23.</b></p> <p>1) <math>\frac{dy(t)}{dt} = 25x(t)</math></p> <p>2) <math>8\frac{dx(t)}{dt} + 10x(t) =</math>  <math>= 0.25\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt}</math></p> <p>3) <math>\frac{dy(t)}{dt} = 0.5\frac{dx(t)}{dt} + x(t)</math></p>	<p><b>24.</b></p> <p>1) <math>(0.25)^2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 1.2\frac{dy(t)}{dt} +</math>  <math>+ y(t) = 5\frac{dx}{dt}</math></p> <p>2) <math>0.2\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = y(t)</math></p> <p>3) <math>y(t) = 2.5x(t)</math></p>
---	--

#### РАБОТА № 4. Анализ работы САУ в стационарном режиме колебаний

**Цель:** построение амплитудно-фазовой и вещественной частотной характеристики разомкнутой системы; исследование взаимосвязи вещественной частотной характеристики с переходным процессом САУ.

**Программное обеспечение моделирования:** Mathcad, программа моделирования систем автоматического управления tau.exe.

**Исходные данные:** результаты выполнения **Работы № 3**.

#### Теоретические сведения

Основные сведения о режиме стационарных колебаний приведены в методических указаниях к **Работе № 2**.

Одной из основных характеристик САУ для режима стационарных колебаний является **амплитудно-фазовая характеристика (АФХ)**, являющаяся функцией комплексной частоты  $j\omega$ .

**Комплексным** называют число, алгебраическая форма записи которого имеет вид

$$M = \alpha + j\beta,$$

где  $\alpha$  – **действительная** часть комплексного числа;

$j\beta$  – **мнимая** часть;

$\beta$  – коэффициент при мнимой части;

$j$  – **мнимая единица**. Мнимую единицу формально определяют как число, дающее в квадрате минус единицу:  $j^2 = -1$ .

Если  $\beta = 0$ , то  $M = \alpha$  – обычное действительное число; если  $\alpha = 0$ , то  $M = j\beta$  – чисто мнимое число.

Так же, как действительные числа могут быть изображены точками координатной плоскости, комплексные числа изображают точками **комплексной плоскости**: число  $M = \alpha + j\beta$  изображается точкой с абсциссой  $\alpha$  и ординатой  $\beta$  (рис. 37).

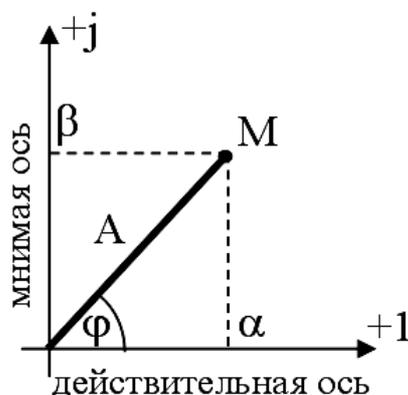


Рис. 37

Часто вместо алгебраической используется показательная форма записи комплексного числа  $M = A \cdot e^{j\varphi}$ , где  $A$  – длина радиус-вектора соответствующей точки на комплексной плоскости (рис. 37) – называется **модулем** комплексного числа, а угол  $\varphi$  (в радианах) – **аргументом** или **фазой** комплексного числа. Модуль и аргумент комплексного числа  $M$  обозначаются соответственно  $\text{mod}(M)$  или  $|M|$  и  $\text{arg}(M)$ .

Два комплексных числа называются **взаимно сопряженными**, если их действительные части равны, а мнимые отличаются знаком.

**Выражение для расчета АФХ** получают из выражения передаточной функции заменой  $p$  на комплексную переменную  $j\omega$ .

АФХ определяет изменение амплитуды и фазы выходной величины САУ или элемента при приложении на входе гармонического воздействия.  $A(\omega)$  – **модуль (амплитуда)** АФХ, равный отношению амплитуд выходного сигнала к входному, а  $\varphi(\omega)$  – **аргумент (фаза)**, равный сдвигу фаз выходного сигнала относительно входного. Значение АФХ, рассчитанное для конкретного значения частоты входного сигнала  $\omega$ , показывает, во сколько раз амплитуда выходного сигнала САУ будет отличаться от амплитуды входного сигнала данной частоты и насколько по фазе выходной сигнал будет сдвинут относительно входного. АФХ как функцию комплексной переменной можно представить в виде:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \Rightarrow W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega).$$

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}; \tag{3}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)},$$

где  $P(\omega)$  – действительная часть АФХ,

$jQ(\omega)$  – мнимая часть АФХ.

АФХ строится на комплексной плоскости при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $+\infty$ .

График зависимости действительной части АЧХ  $P(\omega)$  от частоты называется *вещественной частотной характеристикой* САУ. Между ВЧХ и переходной характеристикой САУ (см. методические рекомендации к **Работе № 1**) имеется взаимосвязь, в частности:

– начальное значение ВЧХ  $P(0)$  равно установившемуся значению переходной характеристики:  $y_\infty = \lim_{\omega \rightarrow 0} P(\omega) = P(0)$ ;

– если  $\frac{P_{\max}(\omega)}{P(0)} \rightarrow \infty$ , то САУ неустойчива, т. е. переходная характеристика с течением времени не сходится к постоянному значению, а расходится:  $y_\infty = \lim_{\omega \rightarrow 0} P(\omega) = P(0)$ .

Помимо этого, форма ВЧХ определяет форму переходной характеристики (рис. 38).

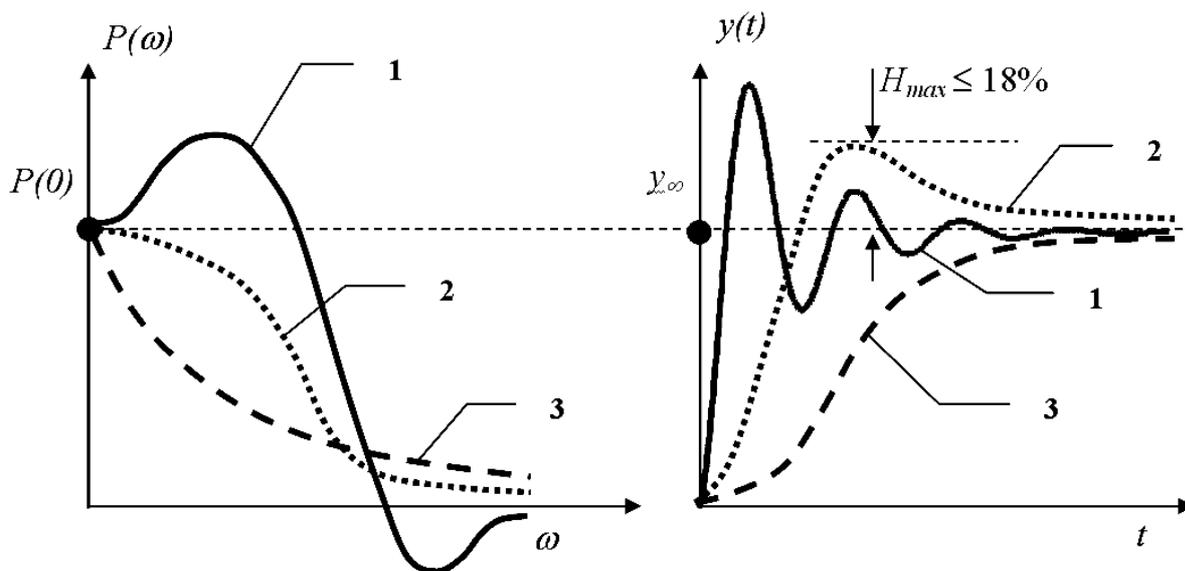


Рис. 38

Вогнутой ВЧХ (№ 1 на рис. 38) соответствует монотонный переходной процесс без перерегулирования; ВЧХ с одной точкой перегиба (№ 2 на рис. 38) – переходной процесс, возможно, с перерегулированием не более 18 %; ВЧХ с несколькими точками перегиба и изменением знака (№ 3 на рис. 38) – колебательный переходной процесс [2, 3].

### Ход выполнения работы

1. Построить амплитудно-фазовую характеристику (АФХ) и вещественную частотную характеристику (ВЧХ) разомкнутой системы.
2. Определить для разомкнутой САУ усиление и запаздывание по фазе сигналов с частотами 0,1 Гц, 10 Гц, 50 Гц.
3. Оценить по виду ВЧХ ожидаемую форму переходной характеристики разомкнутой системы. Подтвердить анализ построением переходной характеристики в программе tau.exe.

### Примеры и практические рекомендации по использованию программного обеспечения

Для выполнения задания в Mathcad необходимо открыть несколько панелей инструментов семейства *Math* (Математические): *Calculator* (Калькулятор), *Symbolic* (Символика или Символьные), *Matrix* (Матрица или Матричные), *Graph* (Графические), *Greek* (Греческие).

Рассмотрим построение АФХ. Пусть передаточная функция разомкнутой САУ имеет вид:

$$W(p) = \frac{100}{p(0,25p^2 + 0,1p + 1)}$$

Получим выражение для расчета АФХ заменой  $p$  на комплексную переменную  $j\omega$ :

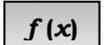
$$W(\omega) = \frac{100}{j\omega \cdot (0,25 \cdot (j\omega)^2 + 0,1 \cdot j\omega + 1)}$$

Учитывая, что  $(j\omega)^2 = j^2\omega^2 = -\omega^2$ , запишем окончательный вид выражения для расчета и построения АФХ:

$$W(\omega) = \frac{100}{j\omega \cdot (-0,25 \cdot \omega^2 + 0,1 \cdot j\omega + 1)}$$

Чтобы построить график функции на определенном интервале, необходимо определить диапазон изменения аргумента (частоты  $\omega$ ).

**Важно!** По теории график АФХ строится при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $+\infty$ . На практике для каждой САУ диапазон рассматриваемых частот подбирается индивидуально. Если при подстановке  $\omega = 0$  в формулу АФХ не получается деления на 0, нижний предел изменения частоты при построении графика следует выбрать равным нулю. В рассматриваемом примере в знаменателе  $W(\omega)$  имеется сомножитель  $j\omega$ , т. е. при подстановке  $\omega = 0$  будет иметь место деление на 0, следовательно, нижний предел изменения частоты следует выбирать  $\omega \rightarrow 0$  (например,  $\omega = 0,3$ ). Верхний предел подбирается экспериментально в режиме увеличения так, чтобы график АФХ имел законченный вид – сходил к некоторой постоянной величине либо стремился в бесконечность. В рассматриваемом примере примем шаг изменения значения частоты равным 0,01, а верхний предел равным 25.

При построении АФХ, которая является функцией комплексной переменной и строится в комплексной плоскости, по горизонтальной оси следует откладывать значения действительной части  $W(j\omega)$ , а по вертикальной оси – мнимой, рассчитываемых для заданных значений частоты. В Mathcad этот расчет можно выполнить с использованием встроенных функций  $\text{Re}(W(\omega))$  и  $\text{Im}(W(\omega))$ . Названия данных функций можно ввести с клавиатуры, или с помощью встроенного мастера функций с использованием пункта меню *Insert (Вставка) → Function (Функция)*, или нажать на панели инструментов *Standard (Стандартная)* одноименную кнопку с изображением стилизованного знака функции .

### **Порядок построения**

1. Щелчком левой кнопки мыши установим курсор ввода (маленький красный крестик – *Crosshair*) в произвольное место рабочего листа. Введем имя аргумента  $\omega$  вместе со знаком присваивания (вводится с панелей инструментов *Calculator (Калькулятор)*, *Evaluation (Оценка или Выражение)* или сочетанием «горячих» клавиш *Ctrl+:*).

2. Введем нижний предел изменения частоты 0,3 и поставим запятую. Введем оператор ранжирования переменной  с панели инструментов *Matrix (Матрица или Матричные)* или нажатием на клавиатуре клавиши с обозначением точки с запятой. В левом маркере введенного оператора зададим вторую точку на промежутке – 0,31. Значение этой точки равно сумме начального значения и шага приращения аргумента (часто-

ты  $\omega$ ):  $0,3 + 0,01$ . В правый маркер оператора ранжированной переменной введем значение верхнего предела изменения частоты (25) и нажмем *Enter*.

3. Внизу под формулой введем имя передаточной функции разомкнутой САУ  $W(\omega)$  вместе со знаком присваивания. При записи выражения функции используем необходимые кнопки панели инструментов *Calculator* (*Калькулятор*) или соответствующие клавиши на клавиатуре.

**Важно!** Комплексная единица вводится с клавиатуры как  $1j$  (но не  $1 \cdot j$  или  $1*j$ ), а в рабочем поле отображается как  $j$ . То есть при необходимости ввести в выражение комплексную частоту  $j\omega$  последовательно набирается  $1j*\omega$ , а в рабочем поле отображается  $j \cdot \omega$  (рис. 39).

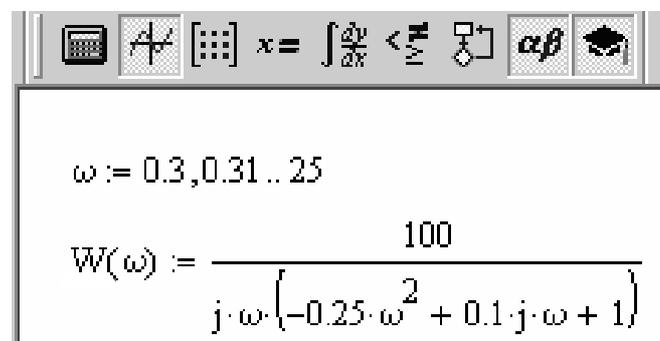


Рис. 39

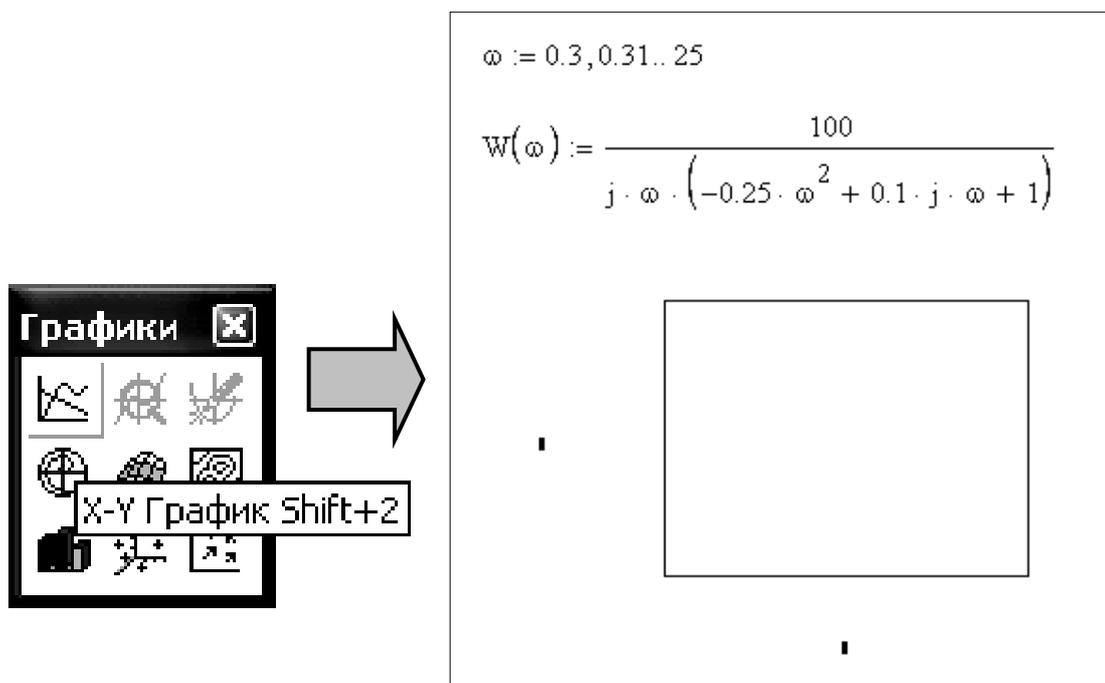


Рис. 40

4. Установим курсор ввода ниже выражения передаточной функции разомкнутой САУ  $W(\omega)$  и введем графическую область для построения графика, нажав кнопку  *X-Y Plot* на панели инструментов *Graph* (*Графические*) или применив комбинацию «горячих» клавиш *Shift + 2* (рис. 40).

5. В маркер, расположенный слева от внутренней рамки графической области для построения графика, введем имя функции  $\text{Im}(W(\omega))$ , которая служит для нахождения мнимой части  $W(\omega)$ . В маркер, расположенный под внутренней рамкой, введем имя функции  $\text{Re}(W(\omega))$ , которая служит для нахождения действительной части  $W(\omega)$ , и нажмем *Enter*. Результат построения графика имеет вид, представленный на рис. 41.

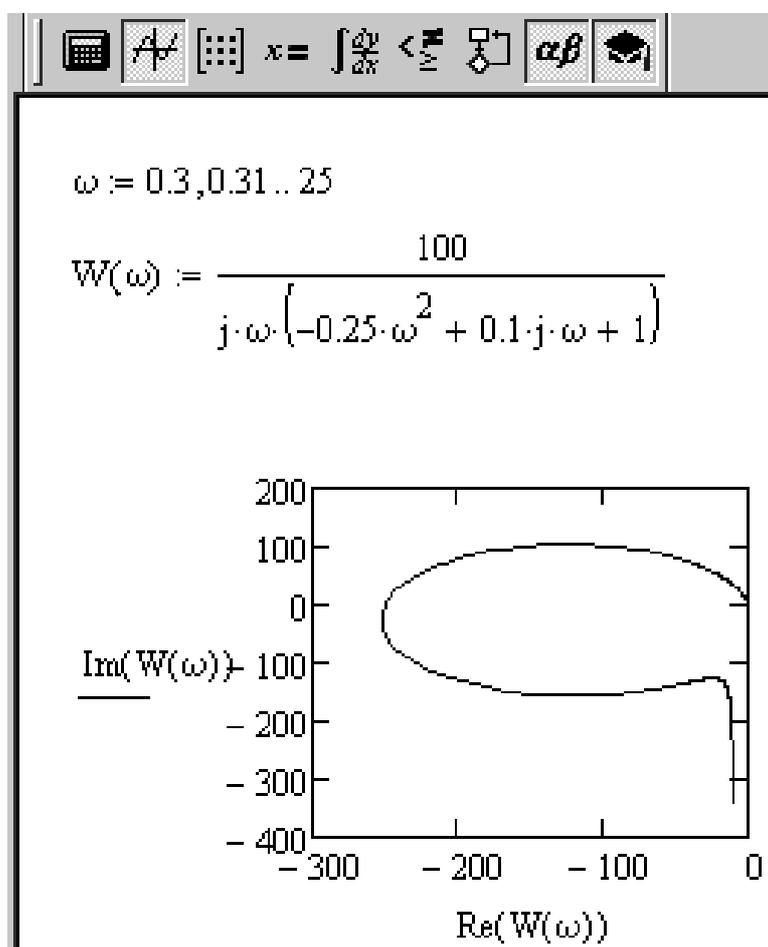


Рис. 41

6. Добавим отображение на графике линий координатной сетки, координатные оси и заголовок с помощью диалогового окна *Formatting Currently Selected X-Y Plot* (*Форматирование выделенной декартовой плоскости*) (рис. 42), которое открывается двойным щелчком левой кнопкой мыши по области графика (более подробно основные средства форматирования графиков описаны в прил. 5).

Окончательный результат построения графика АФХ имеет вид, показанный на рис. 43.

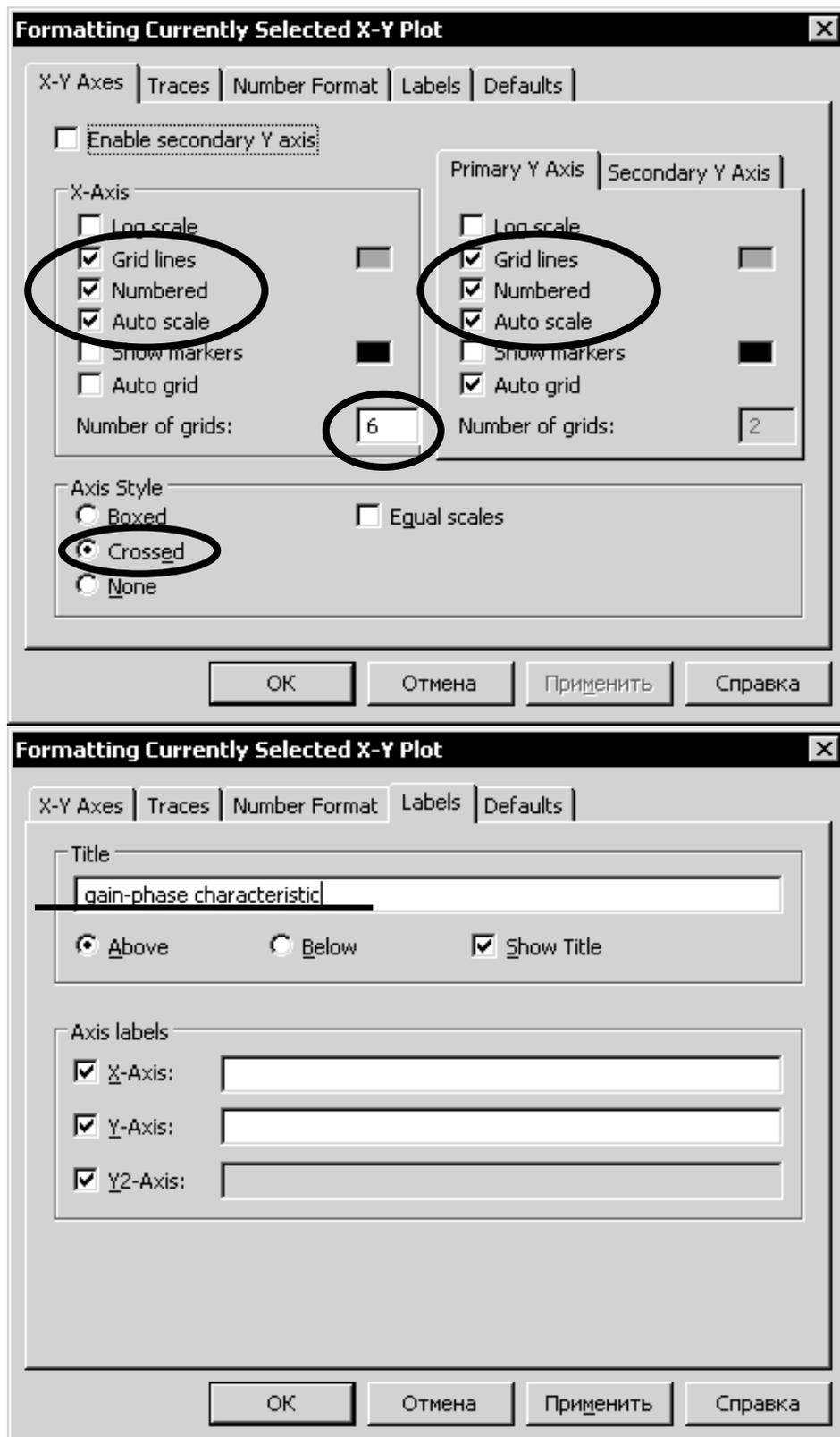


Рис. 42

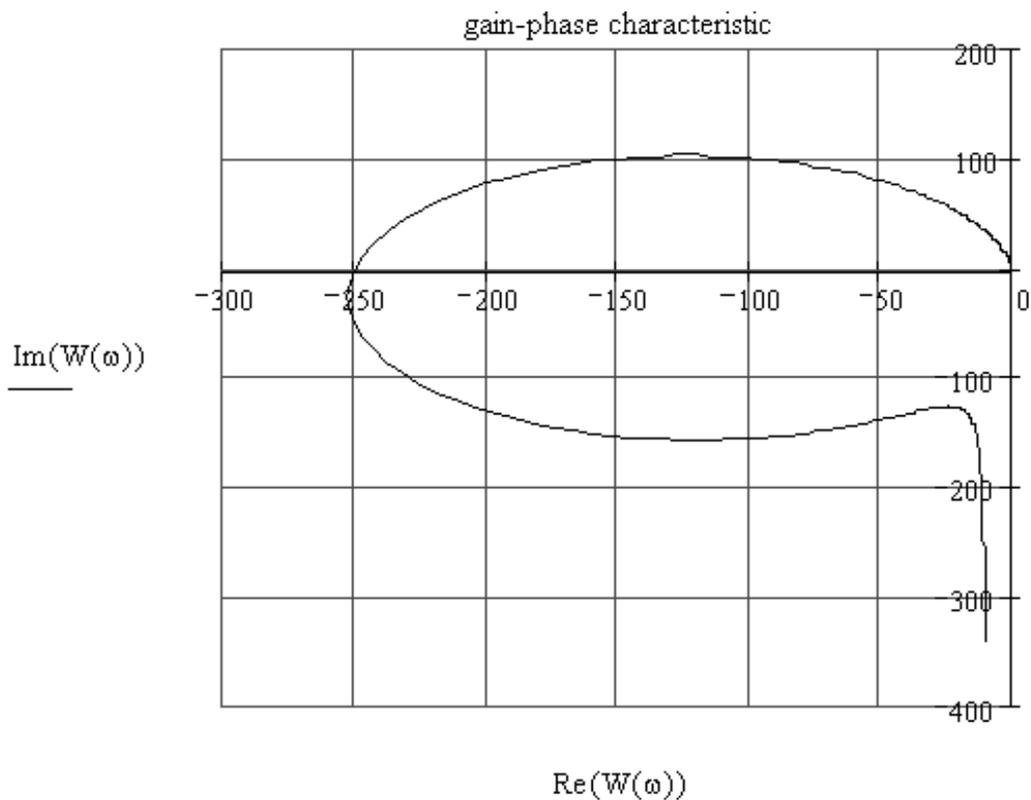


Рис. 43

АФХ описывает работу САУ в стационарном режиме колебаний и позволяет определить усиление (ослабление) амплитуды и сдвиг по фазе гармонического сигнала заданной частоты. Для рассматриваемого примера определим, во сколько раз входной гармонический сигнал с частотой, например, 10 Гц будет усилен на выходе САУ и насколько по фазе он будет отставать от входного. Усиление амплитуды характеризуется модулем АФХ, рассчитанным для заданного значения частоты, а сдвиг фаз – аргументом. Выполним расчеты в Mathcad, как показано на рис. 44.

$$W(\omega) := \frac{100}{j \cdot \omega \cdot (-0.25 \cdot \omega^2 + 0.1 \cdot j \cdot \omega + 1)}$$

$$\omega := 10$$

$$|W(\omega)| = 0.416$$

$$\arg(W(\omega)) = 1.612$$

Рис. 44

Как видно по результатам расчета (рис. 44), амплитуда сигнала с частотой 10 Гц будет на выходе САУ ослаблена в 0,416 раза, а запаздывание по фазе составит 1,612 радиан. Аналогично рассчитывается усиление (ослабление) и запаздывание по фазе сигналов с другими частотами.

Рассмотрим анализ ВЧХ САУ. Пусть передаточная функция разомкнутой САУ имеет вид:

$$W(p) = \frac{25}{(0,1p+1)(0,2p+1)(0,4p+1)}$$

Построим ВЧХ в Mathcad. Порядок построения графика и способы его форматирования аналогичны рассмотренным выше для АФХ. Результат построения приведен на рис. 45.

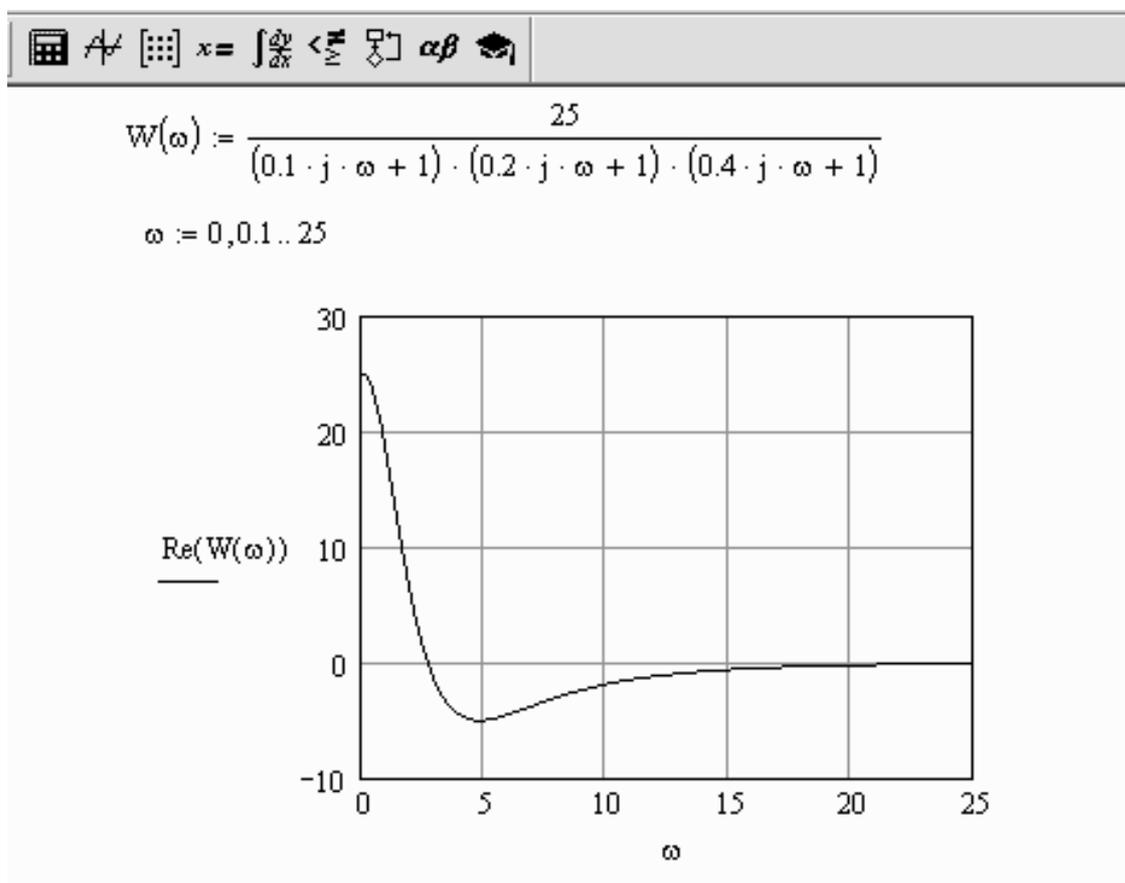


Рис. 45

Как видно на рис. 45, начальное значение ВЧХ  $P(0) = 25$ , т. е. переходной процесс САУ должен сходиться к этому значению, тем более что  $\frac{P(\omega \rightarrow \infty)}{P(0)} \rightarrow 0$ , следовательно, САУ устойчива. ВЧХ имеет несколько точек перегиба – переходной процесс данной разомкнутой САУ будет немонотонным, с перерегулированием не более 18 % (рис. 38). Проверим эти

предположения построением переходной характеристики САУ в программе tau.exe (см. методические указания к **Работе № 1**). Схема САУ и результат построения переходного процесса приведены на рис. 46.

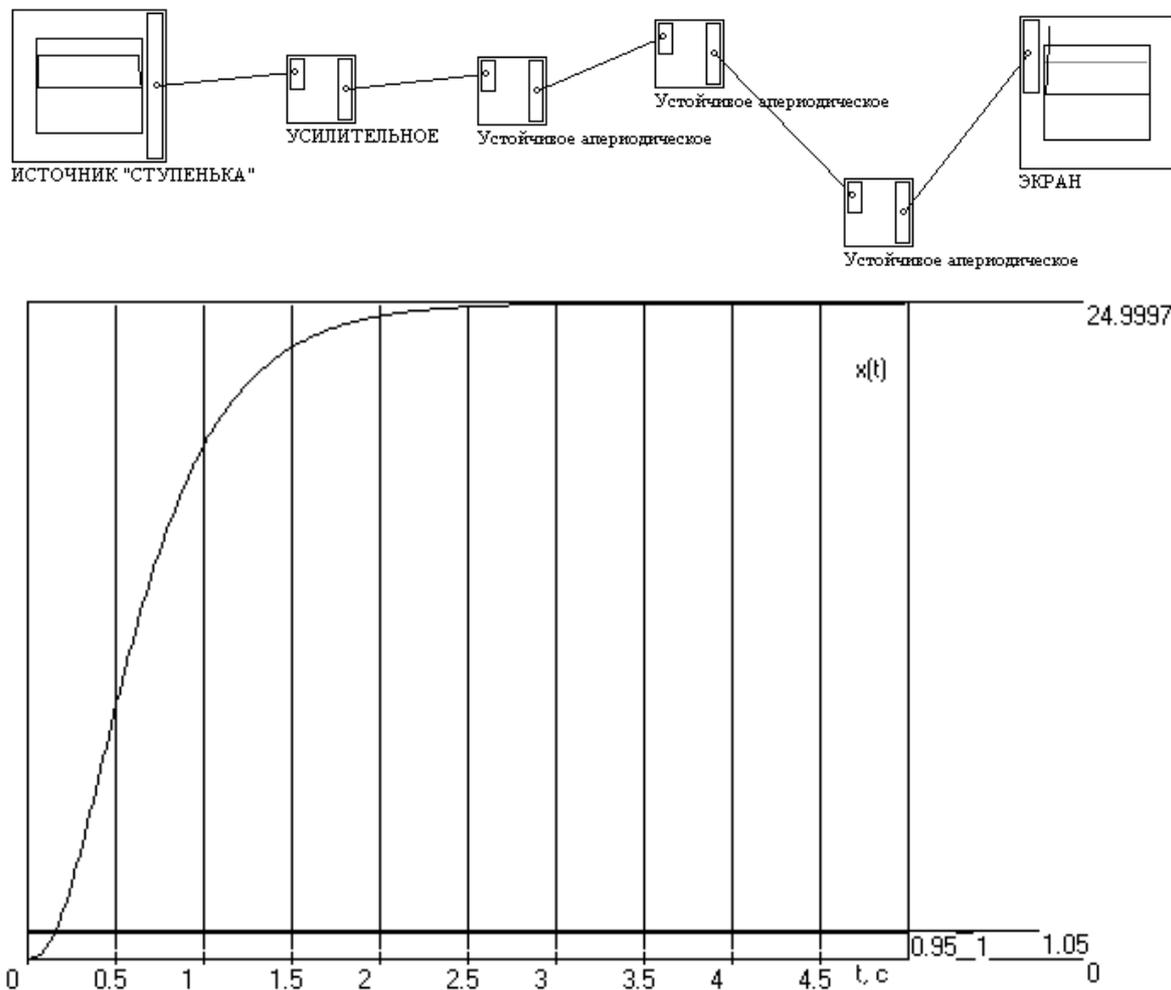


Рис. 46

Как видно, полученный переходной процесс действительно имеет точку перегиба, нулевое перерегулирование и сходится к значению 25, что соответствует анализу ВЧХ.

## РАБОТА № 5 Анализ логарифмических частотных характеристик САУ

**Цель:** построение амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик САУ; построение асимптотической логарифмической амплитудно-частотной характеристики САУ.

**Программное обеспечение моделирования:** Mathcad.

**Исходные данные:** результаты выполнения **Работы № 3** и **№ 4**.

### Теоретические сведения

Сведения о режиме стационарных колебаний содержатся в методических указаниях к **Работе № 2**; понятие амплитудно-фазовой характеристики САУ приведено в методических указаниях к **Работе № 4**.

АФХ одновременно определяет изменения и амплитуды и фазы выходного сигнала САУ относительно входного. На практике удобнее анализировать отдельно изменения амплитуд сигналов и сдвиги фаз, вносимые САУ на различных частотах. Прологарифмируем левую и правую части выражения частотной передаточной функции (3):

$$\ln(W(j\omega)) = \ln(A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}) = \ln A(\omega) + j \cdot \varphi(\omega).$$

Логарифм частотной передаточной функции равен комплексному выражению, действительной частью которого является логарифм модуля (амплитуды), а мнимой – аргумент (фаза). Для практических целей удобнее пользоваться десятичными логарифмами и строить отдельно *логарифмическую амплитудно-частотную*  $\lg A(\omega)$  и *логарифмическую фазочастотную*  $\varphi(\omega)$  характеристики САУ или звена.

При построении логарифмической амплитудно-частотной характеристики (ЛАЧХ) и логарифмической фазочастотной характеристики (ЛФЧХ) по оси абсцисс откладывается угловая частота в логарифмическом масштабе. Отрезок логарифмической шкалы, соответствующий увеличению частоты в десять раз, называется декадой. По оси ординат откладываются значения ЛАЧХ в децибелах или значения ЛФЧХ в градусах. Для этой цели на ось ординат наносится равномерный масштаб.

Поскольку ЛАЧХ показывает усиление амплитуды выходного сигнала САУ относительно входного, ее величину принято измерять в *децибелах* (стандартной единице оценки соотношения двух величин). *Бел* представляет собой логарифмическую единицу, соответствующую десятикрат-

ному увеличению мощности. Один бел соответствует увеличению мощности в 10 раз, 2 бела – в 100 раз и т. д. Децибел равен одной десятой части бела. Если бы  $A(\omega)$  было отношением мощностей, то перед логарифмом в правой части формулы для перевода белов в децибелы должен был бы стоять множитель 10. Но  $A(\omega)$  представляет собой отношение не мощностей, а амплитуд выходной и входной величин. Увеличение этого отношения в десять раз будет соответствовать увеличению мощностей в сто раз, что соответствует двадцати децибелам. Поэтому в правой части формулы перевода  $A(\omega)$  в децибелы стоит множитель 20. **Выражение для расчета ЛАЧХ в децибелах**, таким образом, имеет вид  $L(\omega) = 20 \cdot \lg A(\omega)$  [1, 3].

Часто для анализа САУ используют приближенную, так называемую **асимптотическую ЛАЧХ**, аппроксимирующую ломаной линией точную характеристику, рассчитываемую по формуле:

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg A(\omega).$$

Погрешность такой аппроксимации не превышает 3дБ (в точках излома).

**Правила построения асимптотической ЛАЧХ САУ, представляющей собой последовательное соединение звеньев** [3]:

1. Для всех звеньев первого и второго порядков определяются значения **частот сопряжения** – величин, обратных постоянным времени звеньев:

$$\omega_{c_i} = \frac{1}{T_i}.$$

Значения частот наносятся на логарифмическую ось.

2. В частотном диапазоне до первой, минимальной частоты сопряжения из числа рассчитанных в п. 1, т. е. для  $\omega < \omega_{c1}$ , проводится первая асимптота. Для ее проведения необходимо определить два параметра – угол наклона и высоту проведения. Угол наклона первой асимптоты равен  $-20\nu$  дБ/дек, где  $\nu$  – **степень астатизма системы**. При определении угла наклона первой асимптоты могут иметь место три случая:

- в составе последовательного соединения есть *идеальные интегрирующие звенья*, одно или несколько; в этом случае величина  $\nu$  равна числу идеальных интегрирующих звеньев, взятому со знаком «плюс»;
- в состав системы входят *идеальные дифференцирующие звенья*, одно или несколько; в этом случае величина  $\nu$  равна числу идеальных дифференцирующих звеньев, взятому со знаком «минус»;

– если в состав системы не входят ни идеальные интегрирующие, ни идеальные дифференцирующие звенья,  $\nu = 0$  и асимптота в первом частотном диапазоне имеет нулевой наклон (параллельна оси частот).

При определении высоты проведения первой асимптоты могут иметь место два случая:

– если частота  $\omega = 1$  входит в первый частотный диапазон  $\omega < \omega_{c1}$ , т. е. минимальная частота сопряжения из числа рассчитанных в п. 1  $\omega_{c1} > 1$ , то высота проведения первой асимптоты на частоте  $\omega = 1$  рассчитывается по формуле  $L(1) = 20 \cdot \lg \cdot k$ , где  $k$  – коэффициент статического преобразования системы;

– если частота  $\omega = 1$  не входит в рассматриваемый диапазон, высота проведения асимптоты определяется на любой произвольной частоте  $\omega < \omega_{c1}$  по формуле  $L(\omega) = 20 \cdot \lg \cdot (k/\omega^\nu)$ ;

3. В остальных частотных диапазонах угол наклона асимптотической ЛАЧХ меняется следующим образом:

– для апериодического звена первого порядка угол наклона изменяется на  $-20$  дБ/дек;

– для колебательного звена – на  $-40$  дБ/дек;

– для дифференцирующего звена первого порядка – на  $+20$  дБ/дек;

– для дифференцирующего звена второго порядка – на  $+40$  дБ/дек.

**Важно!** Указанные величины изменения наклона при построении графика алгебраически суммируются со значением предшествующего наклона. Например, если в первом, начальном диапазоне наклон характеристики составлял  $-20$  дБ/дек, а первая частота сопряжения соответствует дифференцирующему звену первого порядка, то наклон в диапазоне от первой до второй частоты сопряжения составит  $-20 + 20 = 0$  дБ/дек.

### Ход выполнения работы

1. Рассчитать и построить амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики *разомкнутой* САУ, приведенной к последовательному соединению типовых элементарных звеньев по заданию индивидуального варианта **Работы № 3**.

2. Определить для заданной САУ усиление, запаздывание по фазе и времени сигналов с частотами 0,1 Гц; 10 Гц; 50 Гц.

3. Рассчитать и построить асимптотическую ЛАЧХ САУ, сравнить результат построения с точной ЛАЧХ.

## Примеры и практические рекомендации по использованию программного обеспечения

Для выполнения задания в Mathcad нам необходимо открыть несколько панелей инструментов семейства *Math* (Математические): *Calculator* (Калькулятор), *Matrix* (Матрица или Матричные), *Graph* (Графические), *Greek* (Греческие).

Рассмотрим разомкнутую САУ с передаточной функцией вида:

$$W_p(p) = \frac{100(p+1)}{p(0,1p+1)(0,025p+1)}.$$

Выполним расчет и построение в Mathcad ЛАЧХ и ЛФЧХ для диапазона изменения аргумента – частоты  $\omega$  – от 0,1 до 1000 Гц с шагом приращения.

### Порядок построения

1. Введем имя аргумента  $\omega$  вместе со знаком присваивания (вводится с панелей инструментов *Calculator* (Калькулятор), *Evaluation* (Оценка или Выражение) или сочетанием «горячих» клавиш *Ctrl+:*).

2. Введем нижний предел изменения частоты 0,1 и нажмем на клавиатуре клавишу с изображением точки с запятой для ввода оператора ранжирования переменной. Если шаг приращения аргумента не задается, то его величина равна значению, принятому в Mathcad по умолчанию, – 1. В правом маркере введем значение верхнего предела изменения частоты (1000).

3. Ниже введем формулы для расчета АФХ САУ  $W(\omega)$ , ЛАЧХ  $L(\omega)$  и ЛФЧХ  $\varphi(\omega)$  (рис. 47).

4. Построим график ЛАЧХ  $L(\omega)$ :

– ниже формул введем графическую область построения графика (*Shift + 2*);

– в маркер, расположенный слева от внутренней рамки, введем имя функции  $L(\omega)$ ;

– в маркер, расположенный под внутренней рамкой графической области, введем имя аргумента –  $\omega$ .

Результат построения имеет вид, приведенный на рис. 48.

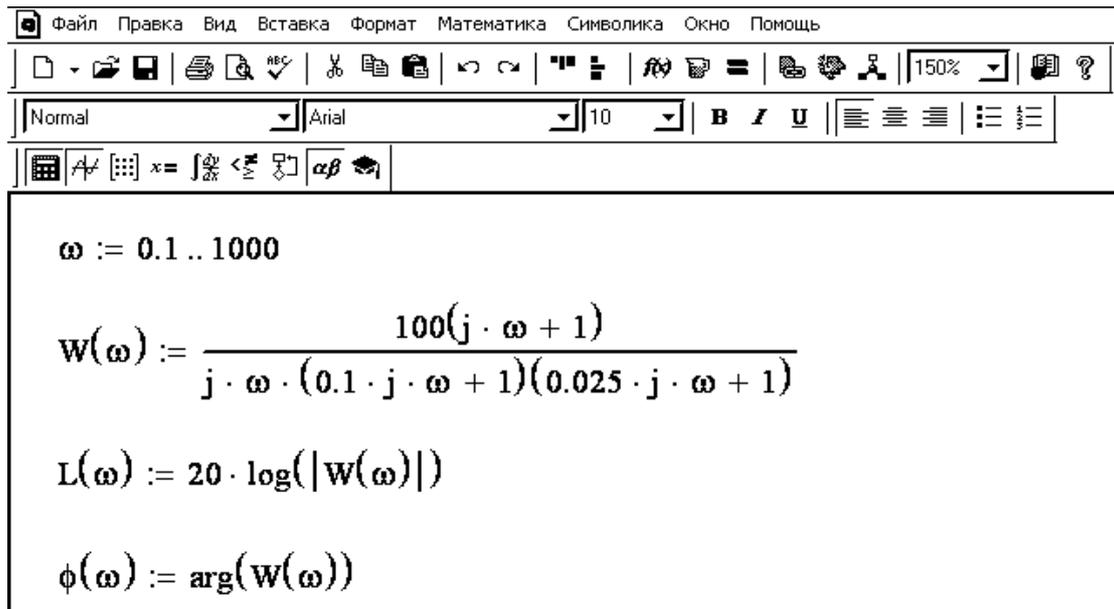


Рис. 47

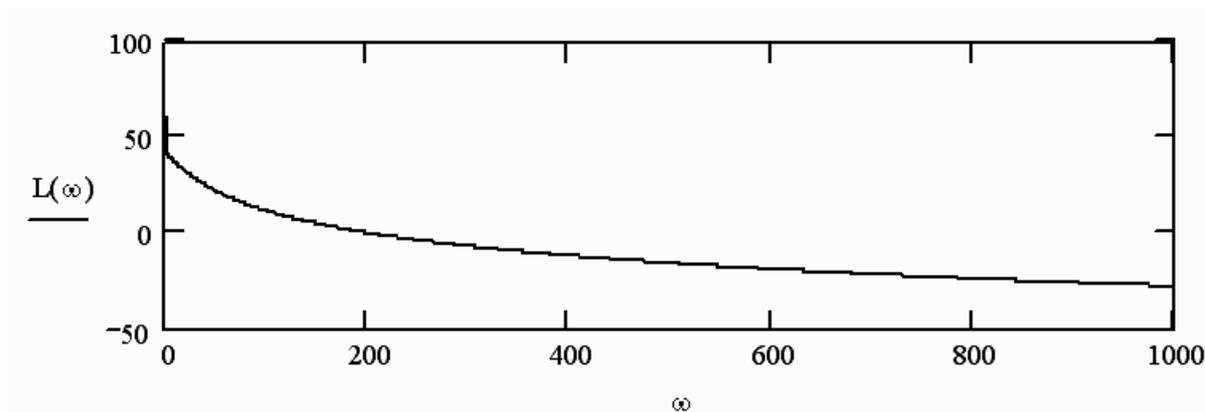


Рис. 48

5. Как видно на рис. 48, по умолчанию Mathcad назначает равномерный масштаб по обеим координатным осям. Отредактируем график – назначим логарифмический масштаб по оси частот и вывод линий координатной сетки. С помощью диалогового окна *Formatting Currently Selected X-Y Plot (Форматирование выделенной декартовой плоскости)*, которое открывается двойным щелчком левой кнопкой мыши по области графика, зададим отображение на графике линий координатной сетки, координатные оси и установим для оси частот логарифмическую шкалу, добавив флажок вывода логарифмического масштаба по оси  $X$  в поле параметра *Log Scale* (рис. 49).

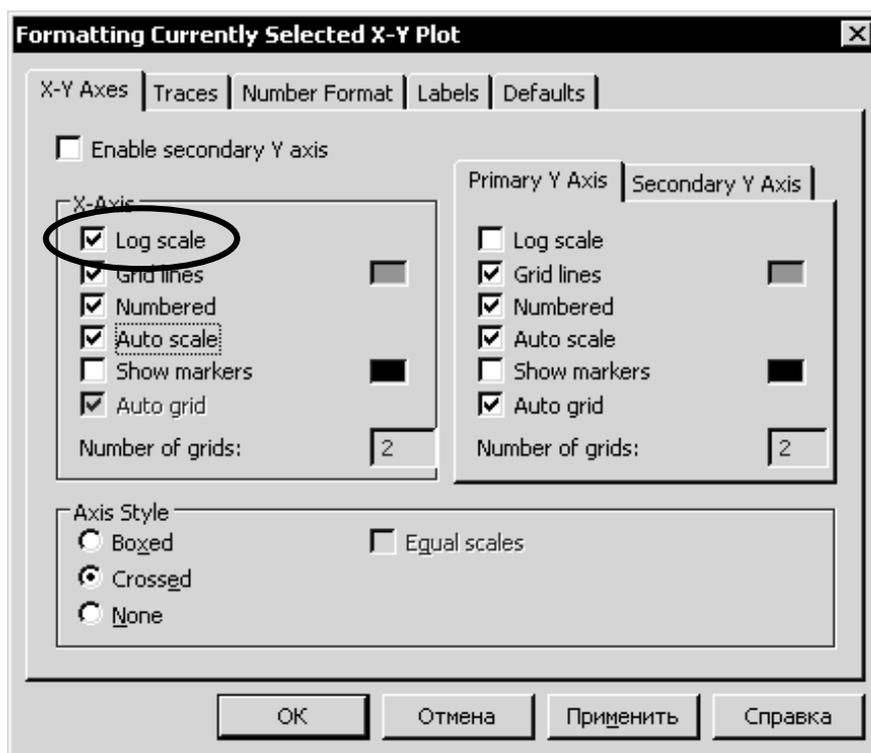


Рис. 49

Результат построения графика ЛАЧХ имеет вид, приведенный на рис. 50.

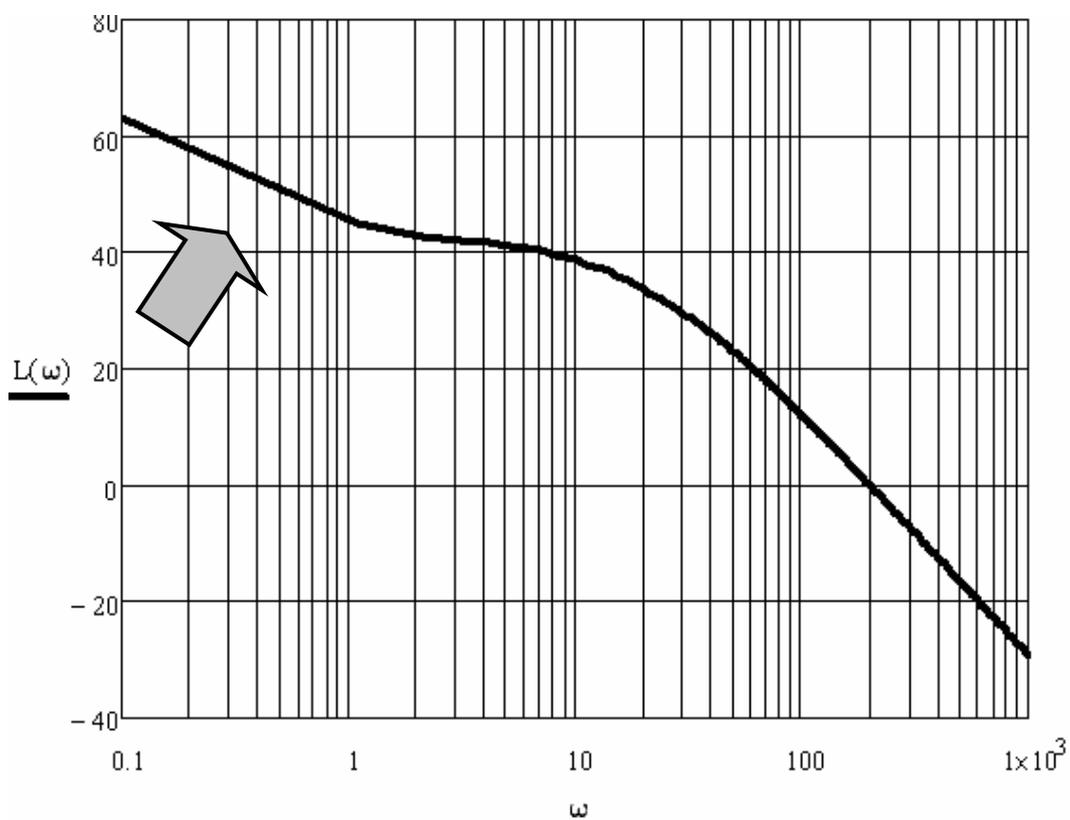


Рис. 50

**Важно!** Если промежуточные линии координатной сетки не отобразились на экране, а видны только линии, разделяющие декады, и соответствующие, например, значениям 1, 10, 100 и т. д., необходимо увеличить размер графической области построения, выделив ее щелчком левой кнопки мыши и растянув рамку области за соответствующие маркеры.

Как видно из результата построения – фрагмента графика, указанной стрелкой на рис. 50, – выбор шага приращения значения аргумента (частоты  $\omega$ ) по умолчанию равным 1 является не слишком удачным решением для логарифмического формата оси X. На логарифмической оси равные отрезки масштаба соответствуют декадам, т. е. десятикратному увеличению частоты, например, от 0,1 до 1, от 1 до 10, от 20 до 200 и т. д. В пределах каждой декады масштаб является неравномерным – логарифмическим (рис. 51). Поэтому при задании шага приращения по умолчанию равным единице мы получаем на начальном интервале две расчетные точки построения:  $L(0,1)$  и  $L(1,1)$ . Из-за этого в диапазоне от 0,1 до 1,1 график выглядит как прямая линия, хотя реальная характеристика является плавной. Для более точного представления графика ЛАЧХ выполним построение с заданием шага 0,01 (рис. 52).

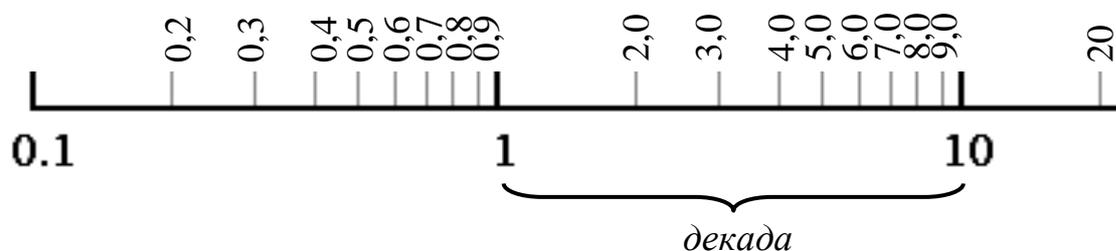


Рис. 51

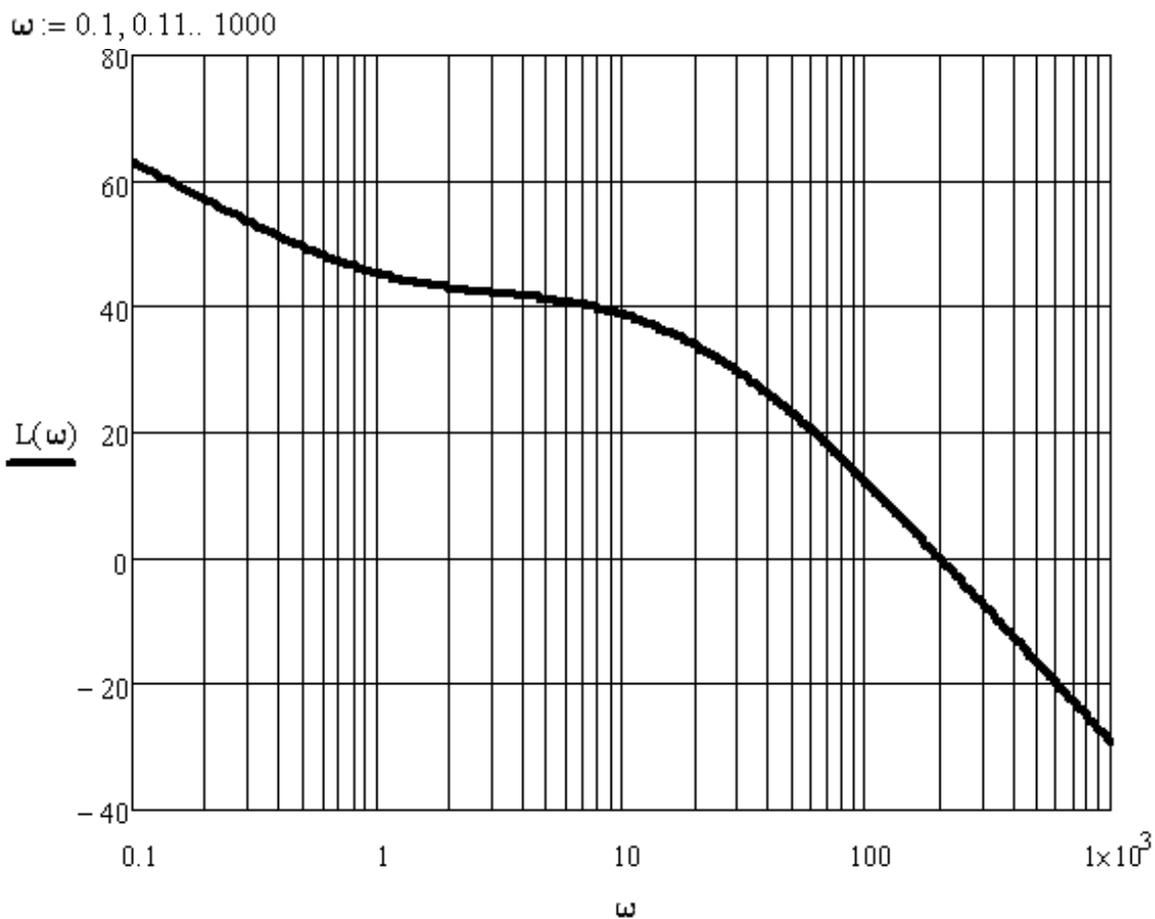
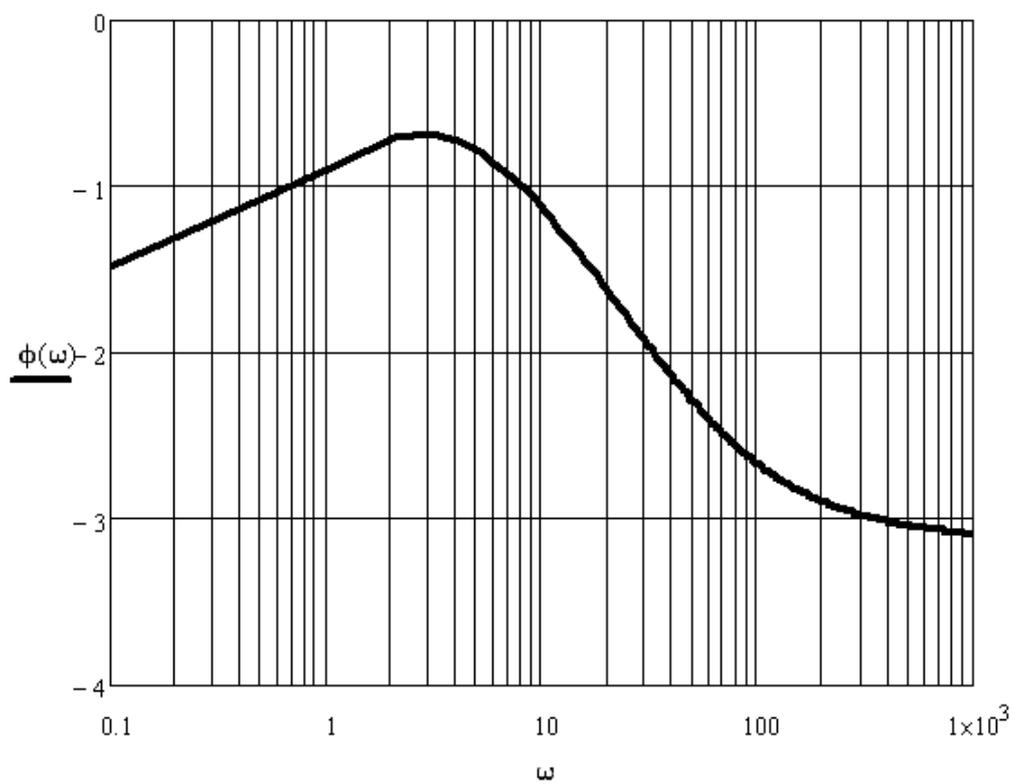


Рис. 52

Аналогичным образом построим и отформатируем график ЛФЧХ. На рис. 53 для сравнения представлены результаты построения ЛФЧХ с шагом, по умолчанию равным 1, и с шагом, равным 0,01. Как видно, и в этом случае задание меньшего значения шага приращения частоты  $\omega$  обеспечивает большую точность построения в области низких частот.

$\omega := 0.1..1000$



$\omega := 0.1, 0.11..1000$

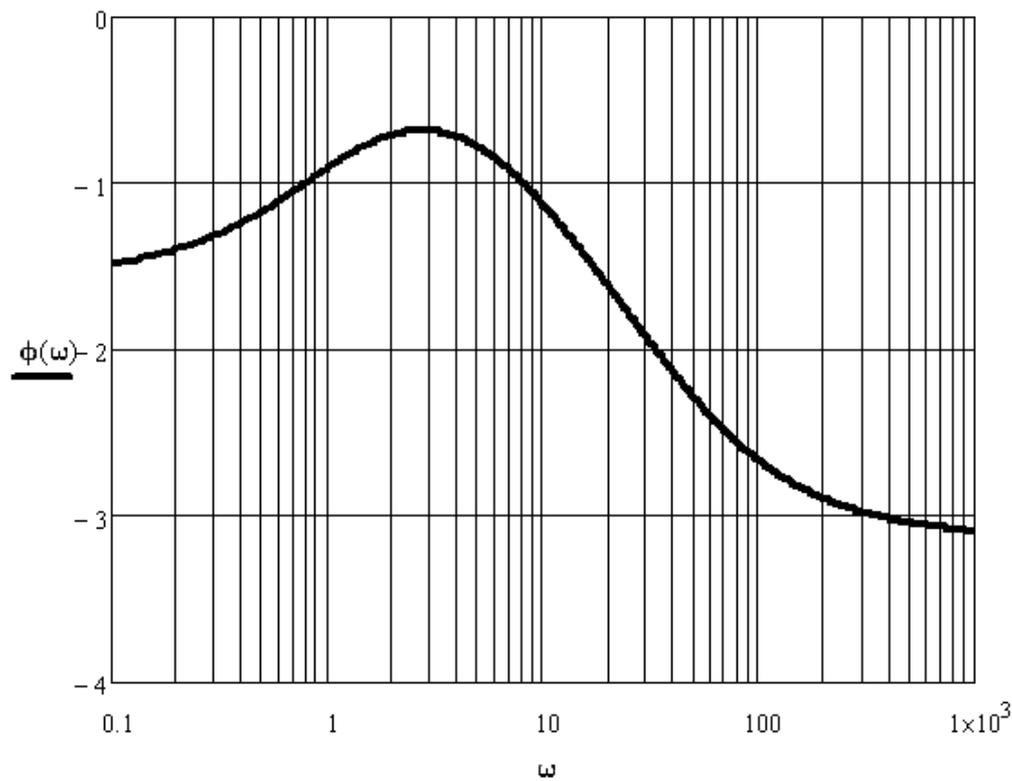


Рис. 53

По графику ЛАЧХ определяют, во сколько раз входной гармонический сигнал определенной частоты будет усилен (ослаблен) на выходе САУ. Пусть на вход рассматриваемой САУ подан сигнал с частотой 20 Гц. Определим приближенно (визуально по графику ЛАЧХ на рис. 52) соответствующую этому значению частоты величину  $L(\omega)$ :  $L(20) \approx 34$  дБ. Определим коэффициент усиления САУ для данной частоты сигнала:

$$20 \cdot \lg[A(\omega)] = 20 \cdot \lg[A(20)] = 34;$$

$$\lg[A(20)] = 34/20 = 1,7;$$

$$A(20) = 10^{1,7} = 50,12,$$

т. е., амплитуда входного сигнала с частотой 20 Гц на выходе САУ будет усилена в 50,12 раза.

По графику ЛФЧХ определяют, какую задержку по фазе входной гармонический сигнал определенной частоты будет иметь на выходе САУ. Так, по графику ЛФЧХ на рис. 53 для рассматриваемой САУ определяем, что для сигнала с частотой 20 Гц запаздывание по фазе на выходе САУ составит приближенно  $-93^\circ$ . Определим запаздывание выходного сигнала относительно входного по времени. За полный период  $T$  фаза гармонического сигнала изменяется на  $360^\circ$  (или  $2\pi$  радиан), поэтому запаздывание  $\tau$  выходного сигнала по времени для известного значения запаздывания по фазе  $\varphi(\omega)$  можно определить из пропорции:

$$\frac{T}{360^\circ} = \frac{\tau}{\varphi(\omega)}.$$

Полный период колебаний в рассматриваемом примере равен  $1/\omega = 1/20 = 0,05$  с. Следовательно, запаздывание выходного сигнала в секундах составит (рис. 54):

$$\tau = \frac{-93^\circ \cdot T}{360^\circ} = -0,013.$$

Продолжим работу с документом Mathcad. Так как формула для расчета АФХ уже задана, расчет характеристик усиления и запаздывания для сигнала с частотой, например, 10 Гц можно выполнить так же, как в **Работе № 3**. Результат расчета имеет вид, приведенный на рис. 55.

Согласно расчету, амплитуда входного сигнала с частотой 10 Гц на выходе данной САУ будет усилена в 68,942 раза, а запаздывание по фазе составит  $-1,13$  радиан. Выполним расчет запаздывания по времени (рис. 56).

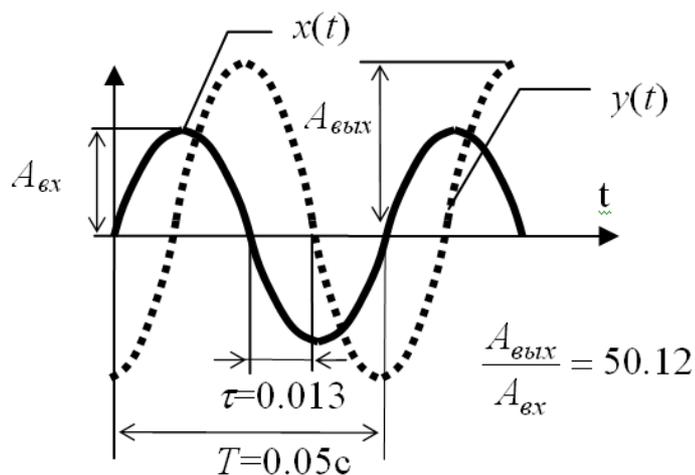


Рис. 54

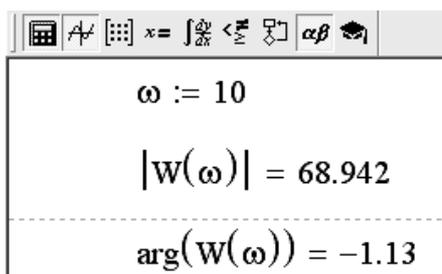


Рис. 55

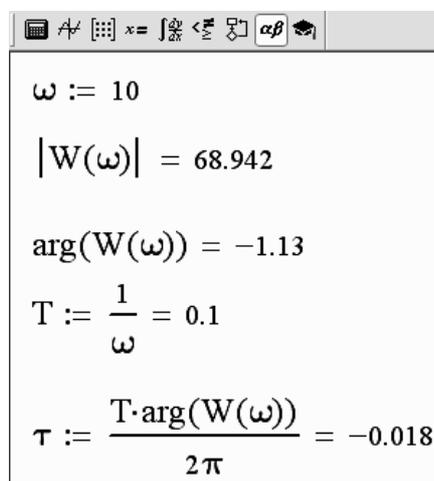


Рис. 56

Таким образом, выходной сигнал САУ с частотой 10 Гц будет отставать от входного на 0,018 с.

Рассмотрим построение асимптотической ЛАЧХ для рассматриваемой САУ. Передаточная функция САУ, приведенная к виду последовательного соединения типовых элементарных звеньев, имеет вид:

$$W_p(p) = 100 \cdot \frac{1}{p} \cdot (p+1) \cdot \frac{1}{(0,1p+1)} \cdot \frac{1}{(0,025p+1)},$$

следовательно, система представляет собой последовательное соединение идеального интегрирующего звена ( $\nu = 1$ ), дифференцирующего звена первого порядка с постоянной времени  $T_1 = 1$  с и двух апериодических звеньев первого порядка с постоянными времени  $T_2 = 0,1$  с и  $T_3 = 0,025$  с соответственно. Коэффициент статического преобразования системы  $k$  равен 100.

Рассчитаем частоты сопряжения для построения асимптотической ЛАЧХ:

$$\omega_1 = 1/T_1 = 1 \text{ Гц};$$

$$\omega_2 = 1/T_2 = 1/0,1 = 10 \text{ Гц};$$

$$\omega_3 = 1/T_3 = 1/0,025 = 40 \text{ Гц}.$$

Определим угол наклона проведения первой асимптоты в частотном диапазоне до первой частоты сопряжения как  $-20 \nu$  дБ/дек =  $-20$  дБ/дек. Определим высоту проведения первой асимптоты для любой частоты меньше первой частоты сопряжения  $\omega_1$ , например для частоты  $0,1$  Гц:

$$20 \cdot \lg(k/\omega^\nu) = 20 \cdot \lg(100/0,1^1) = 20 \cdot \lg(1000) = 60 \text{ дБ}.$$

В остальных частотных диапазонах угол наклона асимптоты будет определяться типом звена. Частота сопряжения  $\omega_1$  соответствует дифференцирующему звену, которое изменяет наклон ЛАЧХ на  $+20$  дБ/дек, следовательно, с учетом наклона первой асимптоты в диапазоне от первой до второй частоты сопряжения угол наклона ЛАЧХ составит  $0$  дБ/дек. Вторая и третья частоты сопряжения соответствуют апериодическим звеньям, следовательно, наклон ЛАЧХ в третьем и четвертом диапазоне частот составит  $-20$  дБ/дек и  $-40$  дБ/дек соответственно. Результат построения асимптотической ЛАЧХ приведен на рис. 57. Для проведения асимптот удобно использовать образцовые наклоны, построенные в координатных осях графика, как показано на рис. 57 пунктиром. В этом случае асимптоты строят как параллельные образцовому наклону, проводя их от точки пересечения предыдущей асимптоты с вертикалью частоты сопряжения до пересечения с вертикалью следующей частоты сопряжения.

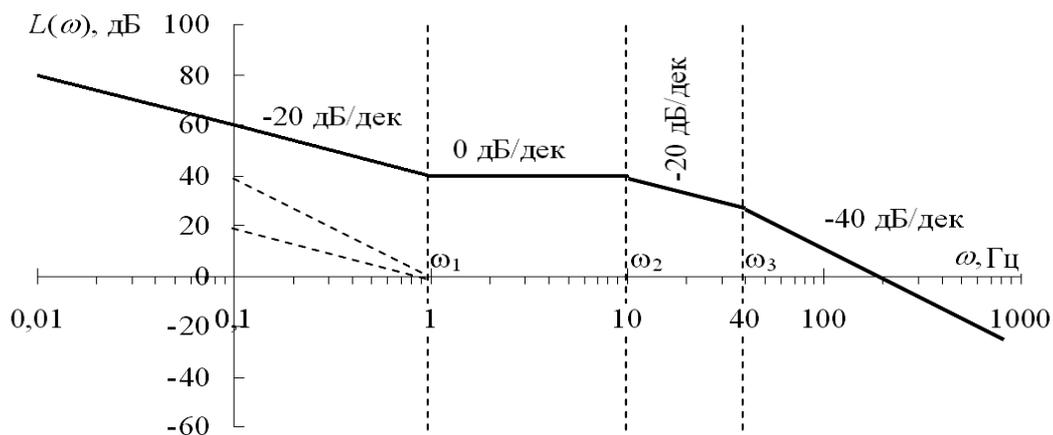


Рис. 57

Сравним полученный результат приближенного построения ЛАЧХ с точной ЛАЧХ (рис. 52). Как видно, приближенная асимптотическая ЛАЧХ достаточно точно описывает реальную характеристику САУ.

## РАБОТА № 6. Анализ устойчивости по теореме Ляпунова

**Цель:** анализ устойчивости САУ по теореме Ляпунова с подтверждением результатов анализа построением переходной характеристикой САУ.

**Программное обеспечение моделирования:** Mathcad, программа моделирования систем автоматического управления tau.exe.

**Исходные данные:** результаты выполнения **Работы № 3.**

### Теоретические сведения

**Устойчивостью** называют свойство системы самостоятельно приходить к установившемуся режиму после приложения входного воздействия, которое вывело ее из состояния равновесия. Исследование устойчивости является одной из основных задач теории автоматического управления.

Процесс управления определяется решением дифференциального уравнения САУ, которое может быть представлено как сумма двух составляющих – вынужденной  $y_s(t)$  и переходной  $y_n(t)$ :

$$y(t) = y_s(t) + y_n(t),$$

где  $y_s(t)$  определяется свойствами системы и видом входного воздействия. Система автоматического управления будет устойчивой, если с течением времени переходная составляющая будет стремиться к нулю:  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_n(t) \rightarrow 0$ .

Судить об устойчивости системы можно по виду ее переходного процесса: затухающий переходной процесс (сходящийся к некоторой постоянной) соответствует устойчивой системе, расходящийся – неустойчивой.

Необходимое и достаточное условие устойчивости линейных САУ формулируется в **теореме Ляпунова**:

- если характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет все корни с отрицательной действительной частью, то система устойчива;
- если хотя бы один корень имеет положительную действительную часть, то система неустойчива.

Характеристическое уравнение САУ записывается по виду дифференциального уравнения или передаточной функции системы. Характеристическое уравнение **замкнутой** системы можно записать как сумму полиномов числителя и знаменателя передаточной функции **разомкнутой** системы, приравняв полученное выражение к нулю:

$$A_z(p) = A_p(p) + B_p(p) = a_0 p^n + a_1 a^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0. \quad (4)$$

Корни характеристического уравнения могут быть действительными, комплексными и чисто мнимыми, их можно представить в виде точек на комплексной плоскости. Согласно теореме, для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все корни лежали в левой полуплоскости.

Если среди корней характеристического уравнения имеется нулевой корень или пара сопряженных чисто мнимых корней (расположенных на мнимой оси), система оказывается *на границе устойчивости* [2, 3, 5].

### Ход выполнения работы

1. Вывести характеристическое уравнение *замкнутой* САУ. Оценить устойчивость *замкнутой* САУ по теореме Ляпунова.

2. Подтвердить результат оценки устойчивости, полученный в п. 1, построением переходного процесса *замкнутой* САУ в программе моделирования систем автоматического управления tau.exe.

### Примеры и практические рекомендации по использованию программного обеспечения

Для выполнения задания в Mathcad необходимо открыть несколько панелей инструментов семейства *Math* (*Математические*): *Calculator* (*Калькулятор*), *Symbolic* (*Символика* или *Символьные*), *Matrix* (*Матрица* или *Матричные*), *Graph* (*Графические*). Для нахождения корней характеристического уравнения можно использовать оператор *Solve* (*Решить*), расположенный на панели инструментов *Symbolic* (*Символьные*).

Пусть передаточная функция разомкнутой САУ имеет вид:

$$W_p(p) = \frac{100}{p(0,25p^2 + 0,1p + 1)}.$$

### Порядок вычислений

1. Для оценки устойчивости замкнутой системы запишем ее характеристическое уравнение как сумму числителя и знаменателя передаточной функции разомкнутой системы. Установим курсор ввода в конце полученного уравнения и применим команду *Expand* (*Разложить / Раскрыть скобки*) для приведения характеристического уравнения к полиномиальному виду по форме (4).

2. Скопируем результат применения команды *Expand*, при необходимости отредактируем его после вставки так, чтобы слагаемые полинома

следовали по убыванию степеней переменной  $p$  для полного соответствия с формой (4). Установим курсор ввода в конце полученного уравнения и найдем корни характеристического уравнения с помощью символьного оператора *Solve* (*Решить*), который необходимо ввести с панели инструментов *Symbolic* (*Символьные*).

3. Пересчитаем полученные результаты с точностью до трех значимых цифр с помощью символьного оператора *Float* (*Пересчитать в десятичную дробь*). Для этого установим курсор после оператора *Solve* (*Решить*) и с панели инструментов *Symbolic* (*Символьные*) введем оператор *Float*. В правый маркер оператора введем число знаков после запятой, которые должен содержать ответ (3), и нажмем *Enter*. Результат вычислений имеет вид, приведенный на рис. 58.

The screenshot shows a software interface with a toolbar at the top containing icons for a calculator, undo, redo, and other functions. Below the toolbar, the following mathematical operations are displayed:

$$p(0.25p^2 + 0.1p + 1) + 100 \text{ expand} \rightarrow p + 0.25p^3 + 0.1p^2 + 100$$

$$0.25p^3 + 0.1p^2 + p + 100 \left| \begin{array}{l} \text{solve} \\ \text{float, 3} \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} -7.32 \\ 3.46 + 6.53i \\ 3.46 - 6.53i \end{pmatrix}$$

Рис. 58

Множество корней характеристического уравнения на рис. 58 представлено в круглых скобках. Как и следовало ожидать, характеристическое уравнение третьей степени имеет три корня. Один из корней уравнения действительный и отрицательный, а два других – комплексно-сопряженные с положительными действительными частями. Следовательно, по теореме Ляпунова, данная САУ является неустойчивой.

Подтвердим результат анализа устойчивости по теореме Ляпунова построением кривой переходного процесса замкнутой САУ с использованием программы *tau.exe*. Передаточная функция замкнутой системы с учетом общей единичной обратной связи определяется как

$$W_3(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)},$$

где  $W_p(p)$  – передаточная функция разомкнутой системы.

В нашем случае:

$$W_3(p) = \frac{\frac{100}{p(0,25p^2 + 0,1p + 1)}}{1 + \frac{100}{p(0,25p^2 + 0,1p + 1)}}.$$

Представим замкнутую САУ эквивалентной схемой последовательного соединения типовых элементарных звеньев, осуществив в Mathcad эквивалентные преобразования передаточной функции замкнутой системы (см. методические указания к **Работе № 3**):

1. Преобразуем выражение передаточной функции замкнутой системы  $W_3$  с помощью символьного оператора *Factor*:

$$W_3(p) := \frac{\frac{100}{p \cdot (0.25p^2 + 0.1p + 1)}}{1 + \frac{100}{p \cdot (0.25p^2 + 0.1p + 1)}} \text{ factor} \rightarrow \frac{2000}{5.0 \cdot p^3 + 2.0 \cdot p^2 + 20.0 \cdot p + 2000.0}.$$

2. Преобразуем полином 3-й степени в знаменателе к приведенному виду, разделив числитель и каждое слагаемое в знаменателе на коэффициент при слагаемом с максимальной степенью:

$$\frac{\frac{2000}{5}}{\frac{5.0 \cdot p^3}{5} + \frac{2.0 \cdot p^2}{5} + \frac{20.0 \cdot p}{5} + \frac{2000.0}{5}} \rightarrow \frac{400}{4.0 \cdot p + 0.4 \cdot p^2 + 1.0 \cdot p^3 + 400.0}.$$

3. Найдем корни полинома, используя символьный оператор *Solve*, с форматированием результата символьным оператором *Float*:

$$4.0 \cdot p + 0.4 \cdot p^2 + 1.0 \cdot p^3 + 400.0 \left| \begin{array}{l} \text{solve} \\ \text{float}, 3 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} -7.32 \\ 3.46 + 6.53i \\ 3.46 - 6.53i \end{pmatrix}.$$

4. Разложим знаменатель передаточной функции замкнутой САУ  $W_3(p)$  на множители с использованием найденных корней:

$$\frac{400}{(p + 7.32) \cdot [(p - 3.46 - 6.53j) \cdot (p - 3.46 + 6.53j)]}.$$

5. Выделим комплексно-сопряженное выражение в знаменателе и применим к нему команду *Expand*:

$$\frac{400}{(p + 7.32) \cdot \{-6.92 \cdot p + p^2 + 54.6125\}}.$$

6. Преобразуем полученное выражение к виду, пригодному для идентификации типовых звеньев:

$$\frac{\frac{400}{7.32 \cdot 54.6125}}{\left(\frac{p + 7.32}{7.32}\right) \cdot \left(\frac{-6.92 \cdot p + p^2 + 54.6125}{54.6125}\right)} \xrightarrow{\text{float}, 2} \frac{1.0}{(0.14 \cdot p + 1.0) \cdot (-0.13 \cdot p + 0.018 \cdot p^2 + 1.0)}$$

Реализуем эквивалентную схему замкнутой САУ в программе tau.exe и построим кривую переходной характеристики (см. методические указания к **Работе № 1** и рис. 59).

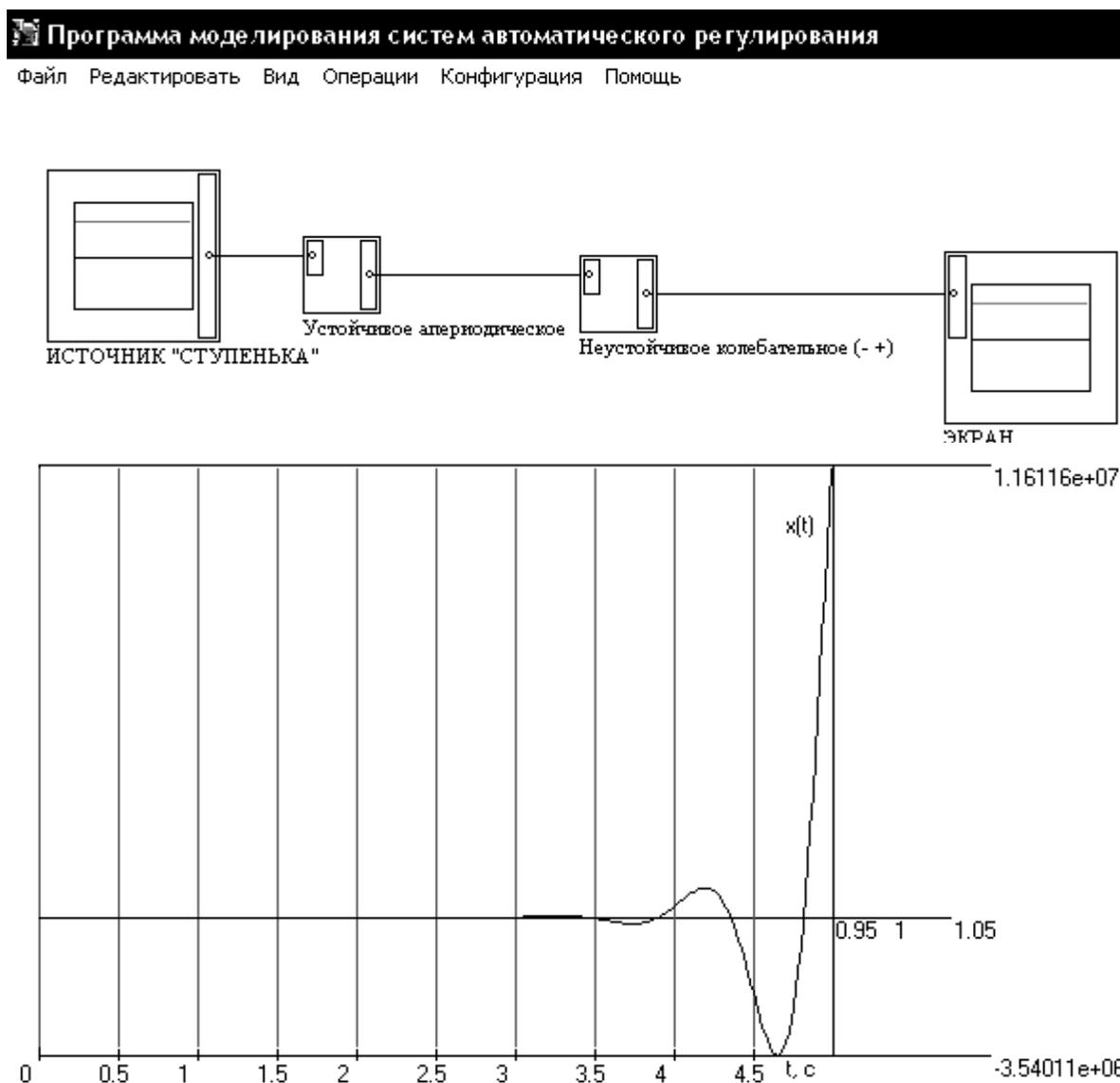


Рис. 59

Как следует из конечного вида эквивалентной передаточной функции, замкнутую САУ можно представить эквивалентной схемой последовательного соединения типовых элементарных звеньев (см. прил. 1): апериодического первого порядка с постоянной времени 0,14 с и колебательного неустойчивого с постоянными времени  $T_2 = \sqrt{0,018} = 0,134$  с и  $T_1 = -0,13$  с. Общий коэффициент статического преобразования замкнутой САУ  $k$  равен 1. Кривая переходного процесса (рис. 59) с течением времени расходится, т. е. переходная составляющая  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_n(t) \rightarrow \infty$ . Это подтверждает вывод, полученный в результате анализа устойчивости по теореме Ляпунова: замкнутая САУ неустойчива.

### **РАБОТА № 7. Анализ устойчивости САУ с использованием алгебраических критериев и критериев устойчивости Найквиста**

**Цель:** подтверждение результатов анализа устойчивости САУ по теореме Ляпунова с использованием алгебраических критериев устойчивости и критериев устойчивости Найквиста.

**Программное обеспечение моделирования:** Mathcad.

**Исходные данные:** результаты выполнения **Работы № 4, № 5 и № 6.**

#### **Теоретические сведения**

Понятие амплитудно-фазовой характеристики, частотных характеристик САУ, понятие устойчивости САУ и теорему Ляпунова – см. методические указания к **Работам № 4, № 5 и № 6.**

Для оценки устойчивости по теореме Ляпунова необходимо оценить расположение корней характеристического уравнения системы относительно координатных осей комплексной плоскости. Эту оценку можно осуществить непосредственным решением характеристического уравнения. Однако для определения устойчивости не обязательно знать значения корней, достаточно проверить, являются ли действительные части всех корней отрицательными.

Правила, позволяющие исследовать устойчивость системы без непосредственного нахождения корней характеристического уравнения, называются **критериями устойчивости**. Математически все формы критериев устойчивости эквивалентны, т. к. они определяют условия, при которых

корни характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости комплексной системы координат.

К алгебраическим критериям устойчивости относятся критерии Гурвица и Михайлова.

**Критерий Гурвица** позволяет оценить устойчивость САУ с помощью анализа коэффициентов характеристического уравнения. Если характеристическое уравнение записать в виде:

$$A(p) = a_0 p^n + a_1 a^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0, \quad (5)$$

то система будет устойчива, если при  $a_0 > 0$  все  $n$  определителей Гурвица, получаемые из матрицы коэффициентов, также будут больше нуля. Матрица коэффициентов Гурвица имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}.$$

Она составляется следующим образом:

- по главной диагонали выписываются все коэффициенты характеристического уравнения, начиная с  $a_1$ ;
- каждая строка дополняется коэффициентами с возрастающими индексами слева направо так, чтобы чередовались строки с четными и нечетными индексами;
- в случае отсутствия коэффициента, а также если индекс меньше 0 или больше  $n$ , на его месте пишется 0.

Определители Гурвица составляются по следующему правилу:

$$\Delta_1 = a_1 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0; \dots$$

Последний определитель включает в себя всю матрицу.

**Критерий Михайлова** формулируется следующим образом: САУ является устойчивой, если при изменении частоты от 0 до  $+\infty$  годограф вектора Михайлова  $a(j\omega)$  начинается на положительной части вещест-

венной оси  $u$ , нигде не обращаясь в 0, поворачиваясь против часовой стрелки, проходит последовательно  $n$  квадрантов комплексной плоскости ( $n$  – порядок характеристического уравнения), нумеруемых также против часовой стрелки.

Выражение для расчета и построения годографа получают подстановкой в характеристическое уравнение (5) вместо оператора Лапласа комплексной переменной  $j\omega$ :

$$a(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n.$$

Годограф Михайлова для устойчивых систем всегда имеет плавную спиралевидную форму и уходит в бесконечность в том квадранте комплексной плоскости, номер которого равен степени характеристического уравнения. Примеры годографов Михайлова для устойчивой (1) и неустойчивой (2) САУ 3-го порядка показаны на рис. 60.

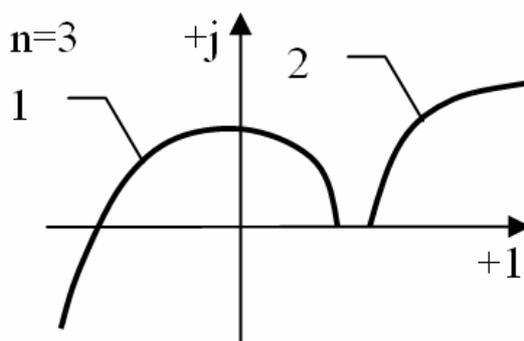


Рис. 60

Критерии устойчивости Найквиста позволяют оценить устойчивость замкнутой системы по частотным характеристикам соответствующей разомкнутой системы.

**Критерий Найквиста для АФХ:** замкнутая система будет устойчивой, если АФХ соответствующей разомкнутой системы при изменении частоты от 0 до  $+\infty$  не охватывает точку с координатами  $[-1, j0]$ .

На рис. 61 показаны примеры АФХ устойчивых (а – с), неустойчивых САУ (d, e) и САУ, находящейся на границе устойчивости (f).

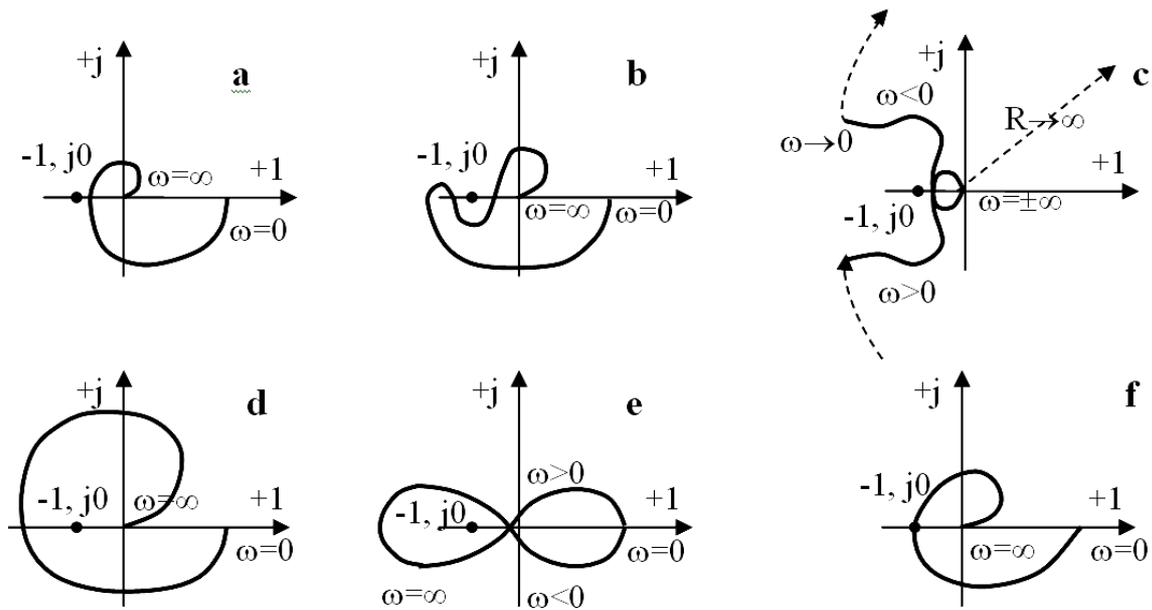


Рис. 61

**Критерий Найквиста для логарифмической амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик:** замкнутая система устойчива, если для характеристик соответствующей ей разомкнутой системы выполняются два условия:

- при частоте, равной частоте среза, модуль фазочастотной характеристики меньше  $180^\circ$ :  $|\varphi(\omega_c)| < 180^\circ$ ;

- при частоте, равной  $\omega_\pi$ , значение ЛАЧХ меньше нуля:  $L(\omega_\pi) < 0$ .

Частотой среза САУ называется частота, при которой ЛАЧХ системы пересекает ось частот, т. е.  $L(\omega_c) = 0$ . Частотой  $\omega_\pi$  САУ называется частота, при которой ФЧХ САУ равняется  $\pm 180^\circ$ . Если ФЧХ несколько раз пересекает ординату  $\pm 180^\circ$ , то выполнение условия проверяется для крайней правой точки.

**Важно!** Рассматриваемые характеристики – частоты среза  $\omega_c$  и частота  $\omega_\pi$  – имеются не у всякой САУ. Если ЛАЧХ системы вообще не пересекает ось частот, т. е.  $L(\omega) \neq 0$  ни при каких значениях  $\omega$ , то у такой системы нет частоты среза. Аналогично, если ФЧХ системы ни при каких значениях частоты не принимает значение  $\pm 180^\circ$ , то данная САУ не характеризуется параметром  $\omega_\pi$ .

На рис. 62 приведены примеры характеристик САУ, находящейся на границе устойчивости (а), устойчивой САУ (б) и неустойчивой САУ (с).

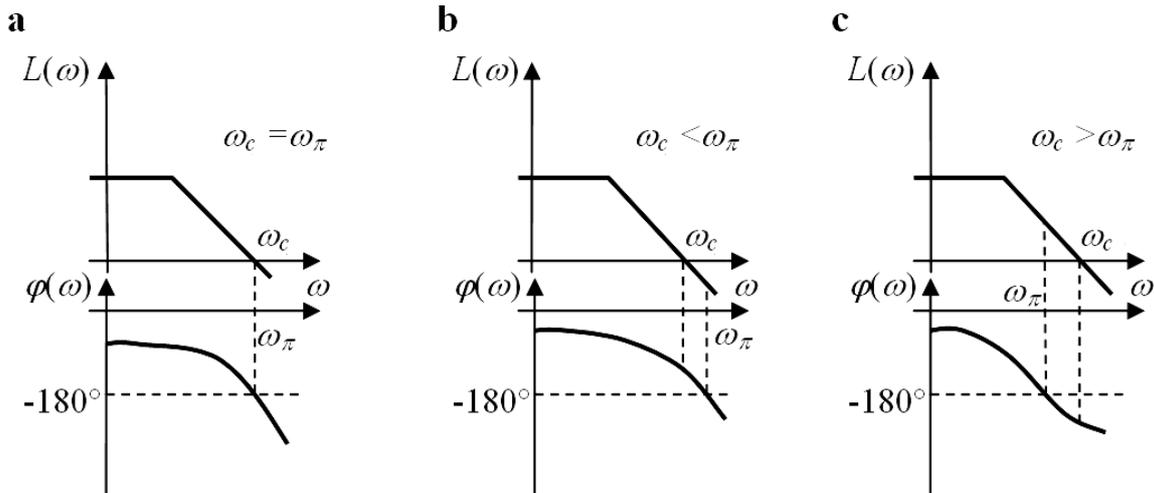


Рис. 62

Для обеспечения хорошего затухания переходного процесса и его малой колебательности нужно иметь достаточное удаление от границы устойчивости. Для определения удаленности САУ от границы устойчивости вводятся понятия о *запасах устойчивости*.

**Запасом устойчивости по амплитуде  $\Delta L$**  называется величина в децибелах, на которую нужно изменить коэффициент усиления САУ, для того чтобы привести ее к границе устойчивости:

$$\Delta L = |L(\omega_\pi)|. \quad (6)$$

**Запасом устойчивости по фазе  $\Delta\varphi(\omega_c)$**  называется угол, на который нужно повернуть АФХ разомкнутой системы, чтобы замкнутая системы оказалась на границе устойчивости:

$$\Delta\varphi(\omega_c) = 180^\circ - |\varphi(\omega_c)|. \quad (7)$$

На рис. 63 показано, как определяются запасы устойчивости САУ по АФХ и логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой системы. Видно, что если коэффициент усиления САУ в децибелах изменить на  $\Delta L$ , т. е. сдвинуть график ЛАЧХ параллельно самому себе вверх на величину  $\Delta L$ , то  $\omega_c$  станет равной  $\omega_\pi$ , т. е. система окажется на границе устойчивости. Аналогичный результат будет при смещении ЛФЧХ вниз на величину  $\Delta\varphi(\omega_c)$  или повороте на тот же угол АФХ системы [1, 2, 3, 5].

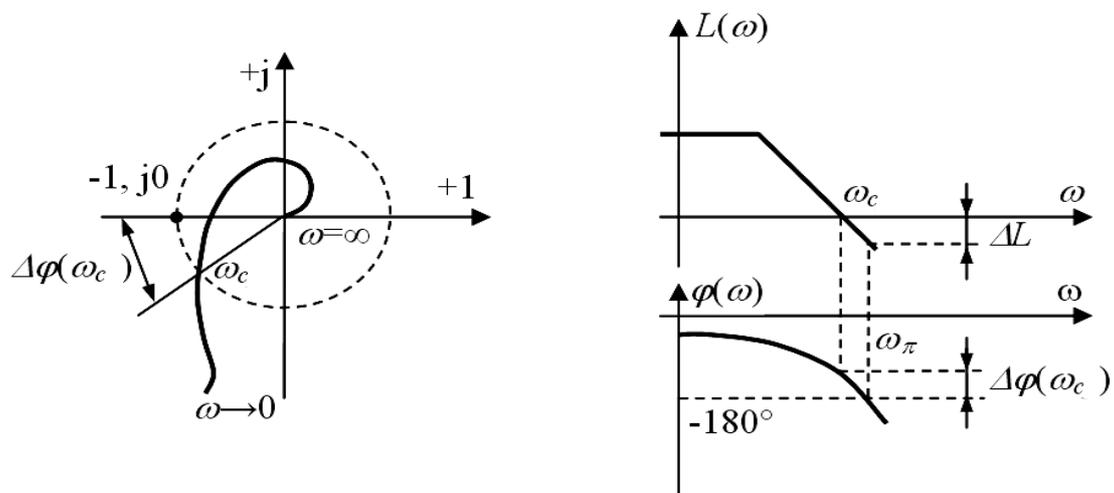


Рис. 63

### Ход выполнения работы

1. С использованием характеристического уравнения замкнутой САУ, полученного в результате выполнения индивидуального варианта **Работы № 6**, оценить устойчивость *замкнутой* САУ по алгебраическим критериям Гурвица и Михайлова.

2. По АФХ *разомкнутой* САУ, построенной в результате выполнения индивидуального варианта **Работы № 4**, оценить устойчивость *замкнутой* САУ с использованием критерия Найквиста для АФХ. Если система устойчива, определить по АФХ запас устойчивости САУ по фазе  $\Delta\varphi(\omega_c)$ .

3. По частотным характеристикам *разомкнутой* САУ, построенным в результате выполнения индивидуального варианта **Работы № 5**, оценить устойчивость *замкнутой* САУ с использованием критерия Найквиста для ЛАЧХ и ЛФЧХ. Если система устойчива, определить с использованием ЛАЧХ и ЛФЧХ запас устойчивости САУ по фазе  $\Delta\varphi(\omega_c)$  и амплитуде  $\Delta L$ .

4. Сравнить результаты анализа устойчивости *замкнутой* САУ, полученные в результате выполнения пп. 1 – 3, с результатами, полученными в **Работе № 6**. Сделать выводы.

### Примеры и практические рекомендации по использованию программного обеспечения

Для выполнения задания в Mathcad нам необходимо открыть несколько панелей инструментов семейства *Math* (*Математические*): *Calculator* (*Калькулятор*), *Matrix* (*Матрица* или *Матричные*), *Graph* (*Графические*), *Boolean* (*Логические* или *Булевы*), *Greek* (*Греческие*).

Выполним оценку устойчивости замкнутой САУ, рассмотренной в примере к **Работе № 6**, с использованием критерия Гурвица. Полученное характеристическое уравнение замкнутой САУ имеет вид:

$$0,25p^3 + 0,1p^2 + p + 100; \quad a_0 = 0,25, \quad a_1 = 0,1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 100.$$

Построим матрицу коэффициентов Гурвица:

$$\begin{bmatrix} 0,1 & 100 & 0 \\ 0,25 & 1 & 0 \\ 0 & 0,1 & 100 \end{bmatrix}$$

Вычислим второй и третий определитель матрицы Гурвица в Mathcad.

### Порядок вычислений

1. Зададим матрицы M2 и M3 для расчета. Для этого с помощью кнопки  панели инструментов *Matrix (Матрица)* или сочетания «горячих» клавиш **Ctrl+M** откроем специальную панель *Insert Matrix (Вставить матрицу)*, где определим размер матрицы – количество *Rows (Строк)* и количество *Columns (Столбцов)*. Заполним шаблоны матриц, как показано на рис. 64.

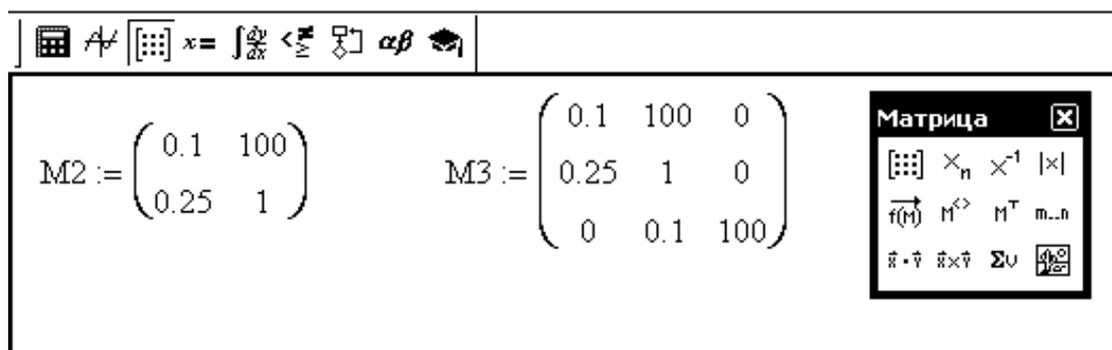


Рис. 64

2. Для расчета определителя (детерминанта) каждой матрицы выберем на панели инструментов *Matrix (Матрица)* оператор вычисления определителя (*Determinant*) .

**Важно!** Не путайте оператор вычисления детерминанта матрицы на панели инструментов *Matrix (Матрица)* и модуля на панели инструментов *Calculator (Калькулятор)*. Результат вычислений показан на рис. 65.

Таким образом, для рассматриваемого примера при  $a_0 = 0,25 > 0$  и  $\Delta_1 = a_1 = 0,1 > 0$  два других определителя матрицы коэффициентов Гурвица  $\Delta_2$  и  $\Delta_3$  оказались меньше нуля (рис. 65), следовательно, замкнутая САУ

неустойчива, что согласуется с результатами исследования устойчивости по теореме Ляпунова, полученными в **Работе № 5**.

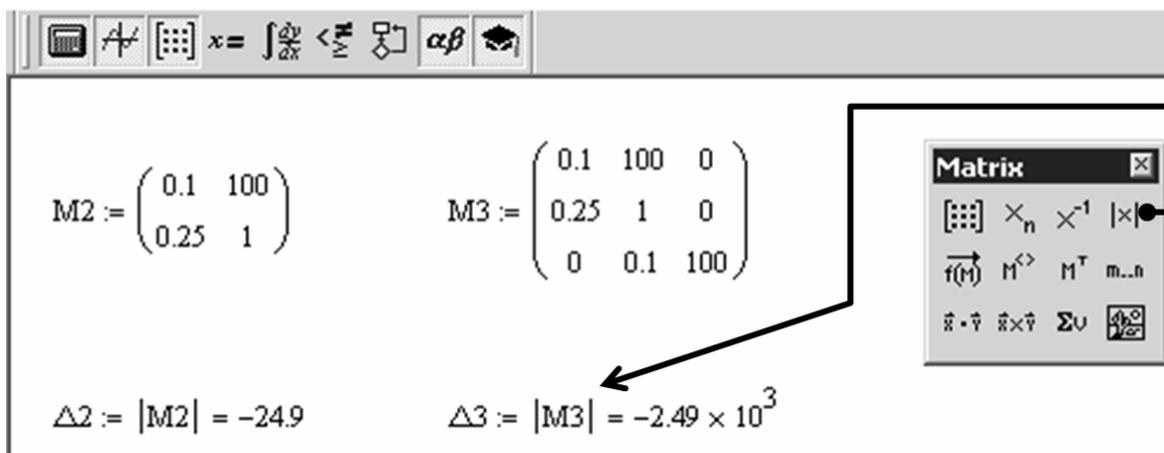


Рис. 65

Оценим устойчивость той же замкнутой САУ *по критерию Михайлова*. Получим выражение для расчета годографа Михайлова подстановкой в характеристическое уравнение замкнутой САУ комплексной частоты  $j\omega$ , рассчитаем и построим годограф в комплексной плоскости при изменении частоты от 0 до  $+\infty$ .

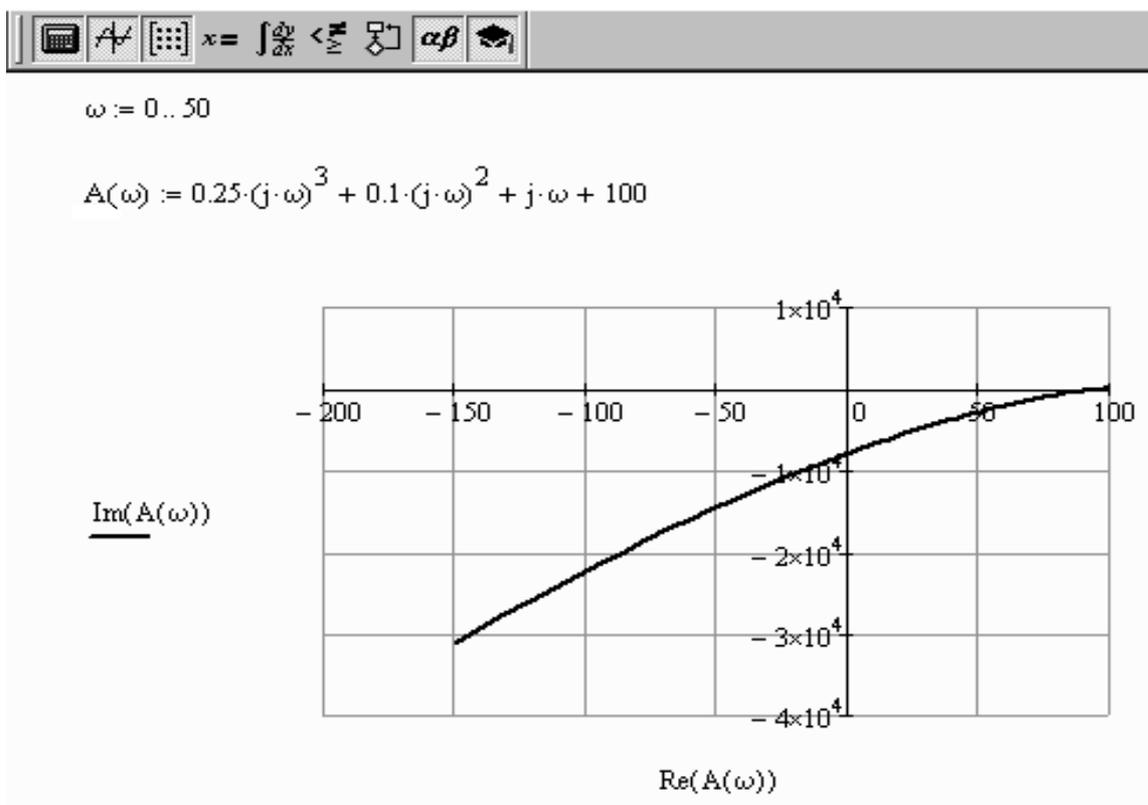


Рис. 66

**Важно!** На практике для каждой САУ диапазон рассматриваемых частот подбирается индивидуально. Верхний предел подбирается экспериментально в режиме увеличения так, чтобы годограф имел законченный вид – уходил в бесконечность в некотором квадранте комплексной плоскости (рис. 66).

Как видно на рис. 66, годограф Михайлова, начинаясь на положительной полуоси действительной оси, проходит квадранты комплексной плоскости непоследовательно: сначала уходит в 4-ый, а затем в 3-ий. Следовательно, замкнутая САУ неустойчива, что согласуется с ранее полученными результатами исследования устойчивости.

3. Для оценки устойчивости замкнутой САУ *по критериям Найквиста* необходимо проанализировать частотные характеристики соответствующей ей разомкнутой системы. АФХ разомкнутой САУ, соответствующей замкнутой системе, исследованной выше с использованием критериев Гурвица и Михайлова, была построена в примере к **Работе № 4**. Как видно из рис. 43, график АФХ разомкнутой САУ при изменении частоты от 0 до  $+\infty$  охватывает точку с координатами  $[-1, j0]$ , следовательно, замкнутая САУ является неустойчивой, что согласуется с ранее полученными результатами исследования устойчивости.

Рассмотрим для другого примера АФХ разомкнутой САУ с передаточной функцией  $W(p) = \frac{5}{(0,6p+1)(0,1p+1)}$  (рис. 67). График АФХ данной САУ при изменении частоты от 0 до  $+\infty$  не охватывает точку с координатами  $[-1, j0]$ , следовательно, САУ является устойчивой.

Определим запас устойчивости по фазе  $\Delta\varphi(\omega_c)$  для рассматриваемой САУ по формуле (7). Частота среза САУ является частотой единичного усиления, т. е. сигнал с такой частотой будет на выходе САУ воспроизведен без изменения амплитуды. На графике АФХ точка, соответствующая  $\omega_c$ , может быть определена путем построения пересечения графика АФХ с окружностью единичного радиуса (рис. 63).

Определим для данного примера расчетное значение  $\omega_c$ . Для этого необходимо найти значение частоты, при котором модуль АФХ будет равен 1. Для решения уравнений в Mathcad используется специальный вычислительный блок *Given-Find*, который имеет следующую структуру:

- начальные приближения (если используется оператор численного вывода =);
- вводное слово *Given*;

- уравнение, в котором в качестве знака равенства нужно использовать логическое равенство (вводится с панели инструментов *Boolean* (Логические или Булевы) или сочетанием «горячих» клавиш *Ctrl+=*);
- ограничения на величины корней (если это необходимо);
- функция *Find(имя переменной)* – эта функция возвращает значение решения уравнения. В качестве оператора вывода результата используйте или оператор символьного вывода  $\rightarrow$  (вводится с панели инструментов *Symbolic* (Символика), или сочетание «горячих» клавиш *Ctrl+.*), или оператор численного вывода  $=$  (вводится с клавиатуры или с панели инструментов *Calculator* (Калькулятор)).

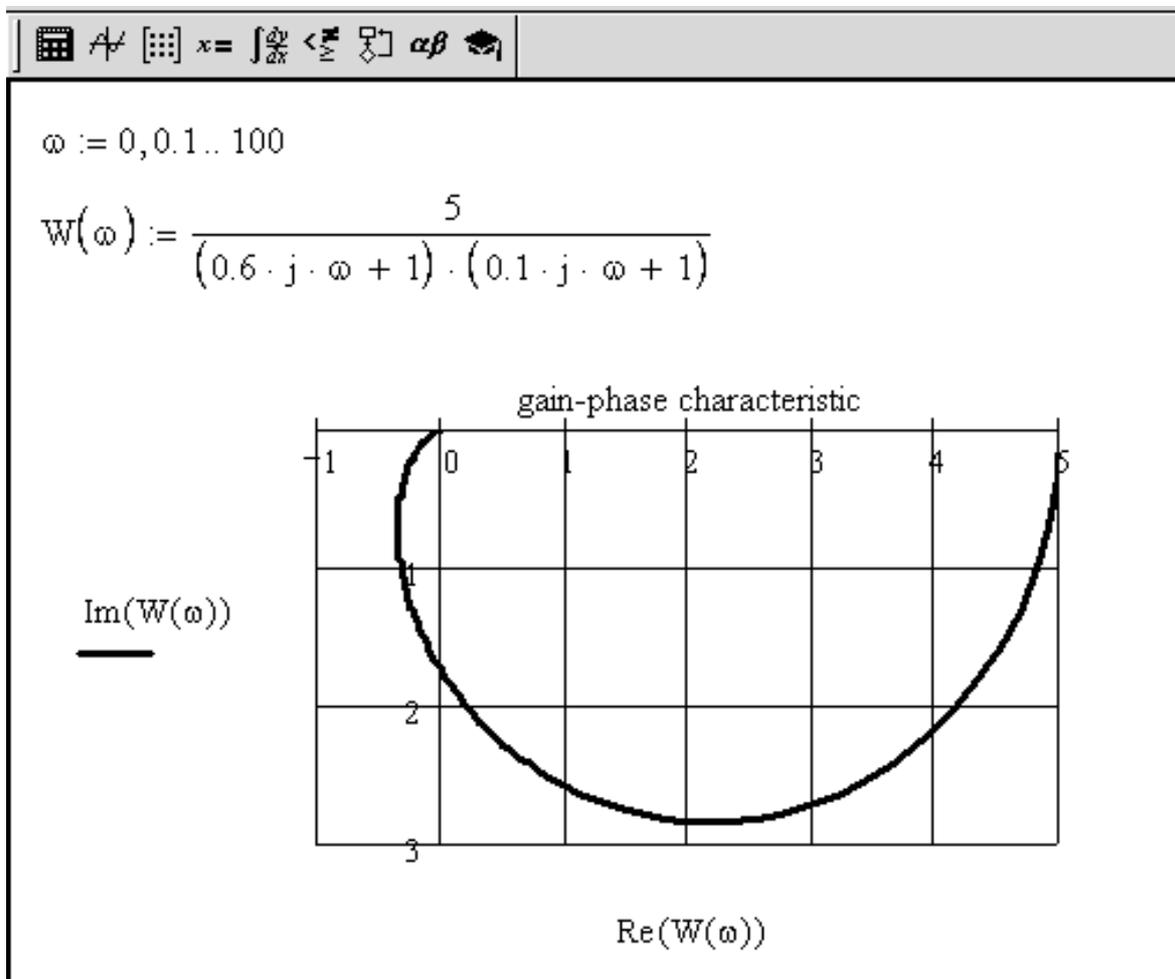


Рис. 67

### Порядок вычислений

1. Введем выражение АФХ  $W(\omega)$ .
2. Зададим начальное приближение частоты  $\omega:=0$ .
3. Введем вводное слово Given.
4. Под вводным словом введем уравнение  $|W(\omega)|=1$ .
5. Найдем искомое значение  $\omega_c:=\text{Find}(\omega)$ .
6. Для найденного значения частоты среза рассчитаем запас устойчивости по фазе  $\Delta\phi:=\pi-|\arg(W(\omega_c))|$ .
7. Переведем радианы в градусы. Для преобразования градусов в радианы сделаем двойной щелчок левой кнопкой мыши по черному маркеру, который появляется правее результата:  $\Delta\phi = 1.223$ . В открывшемся диалоговом окне *Insert Unit (Вставить размерность)* в окошке *Unit (Единица)* выберем из списка размерность *Degree (°)* (рис. 68) и нажмем на кнопку ОК. Диалоговое окно закроется, в ответе отобразится новая единица измерения  $\Delta\phi = 1.223^\circ$ ; для подтверждения пересчета нажмем *Enter*. Результат будет пересчитан в градусы (рис. 69).

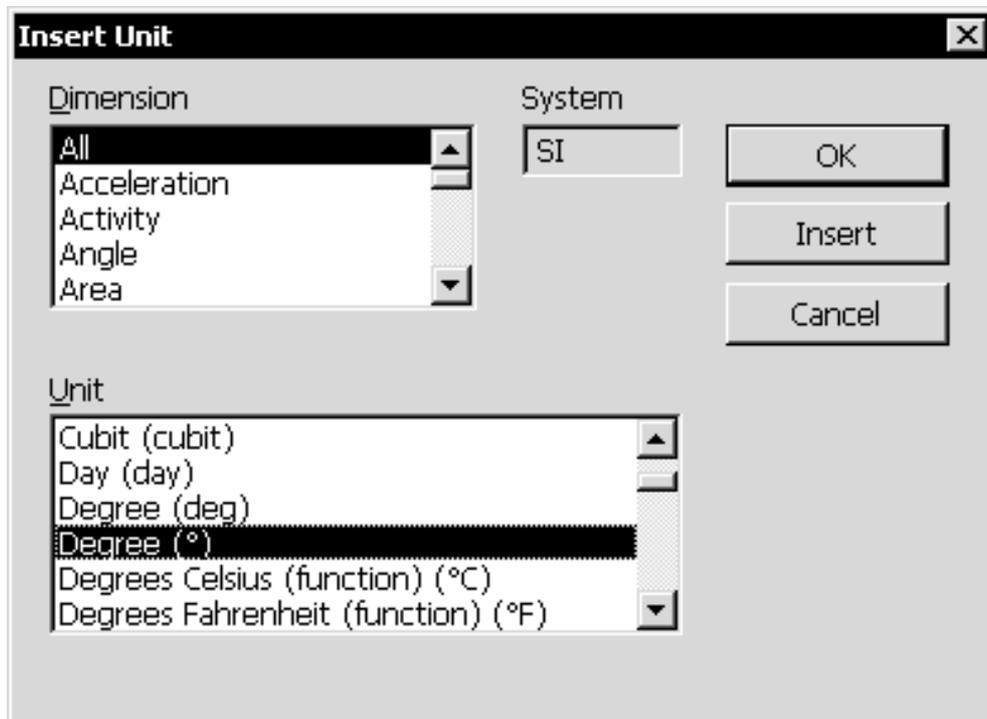


Рис. 68

$$W(\omega) := \frac{5}{(0.6 \cdot j \cdot \omega + 1) \cdot (0.1 \cdot j \cdot \omega + 1)}$$

$$\omega := 0$$
 Given
 
$$|W(\omega)| = 1$$

$$\omega_c := \text{Find}(\omega) = 6.715$$

$$\Delta\phi := \pi - |\arg(W(\omega_c))| = 1.223$$

$$\Delta\phi = 70.06^\circ$$

Рис. 69

Результат расчета, приведенный на рис. 69, показывает, что частота среза рассматриваемой САУ равна 6,715 Гц, а запас устойчивости по фазе составляет 1,223 радиана или 70,06°.

Рассмотрим оценку устойчивости по критерию Найквиста для ЛАЧХ и ЛФЧХ на примере замкнутой САУ, которой соответствует разомкнутая система с передаточной функцией  $W_p(p) = \frac{25}{p(0,1p+1)(0,025p+1)}$ . ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой системы для данного примера имеют вид, приведенный на рис. 70 (способ построения ЛАЧХ и ЛФЧХ – см. теоретические сведения и примеры к **Работе № 5**).

Для проверки условий критерия Найквиста для ЛАЧХ и ЛФЧХ дополним документ расчета ЛАЧХ и ЛФЧХ вычислительными блоками определения частот  $\omega_c$  и  $\omega_\pi$  (рис. 71).

Выполним проверку условий критерия Найквиста для ЛАЧХ и ЛФЧХ по найденным значениям частот  $\omega_c$  и  $\omega_\pi$  (рис. 72, а). Как видно, условия  $L(\omega_\pi) < 0$  и  $|\phi(\omega_c)| < 180^\circ$  выполняются, следовательно, замкнутая

система устойчива. Рассчитаем запасы устойчивости системы по амплитуде и фазе, как показано на рис. 72, б.

$$W(\omega) := \frac{25}{j \cdot \omega (0.1 \cdot j \cdot \omega + 1)(0.025 \cdot j \cdot \omega + 1)}$$

$$L(\omega) := 20 \cdot \log(|W(\omega)|)$$

$$\phi(\omega) := \arg(W(\omega))$$

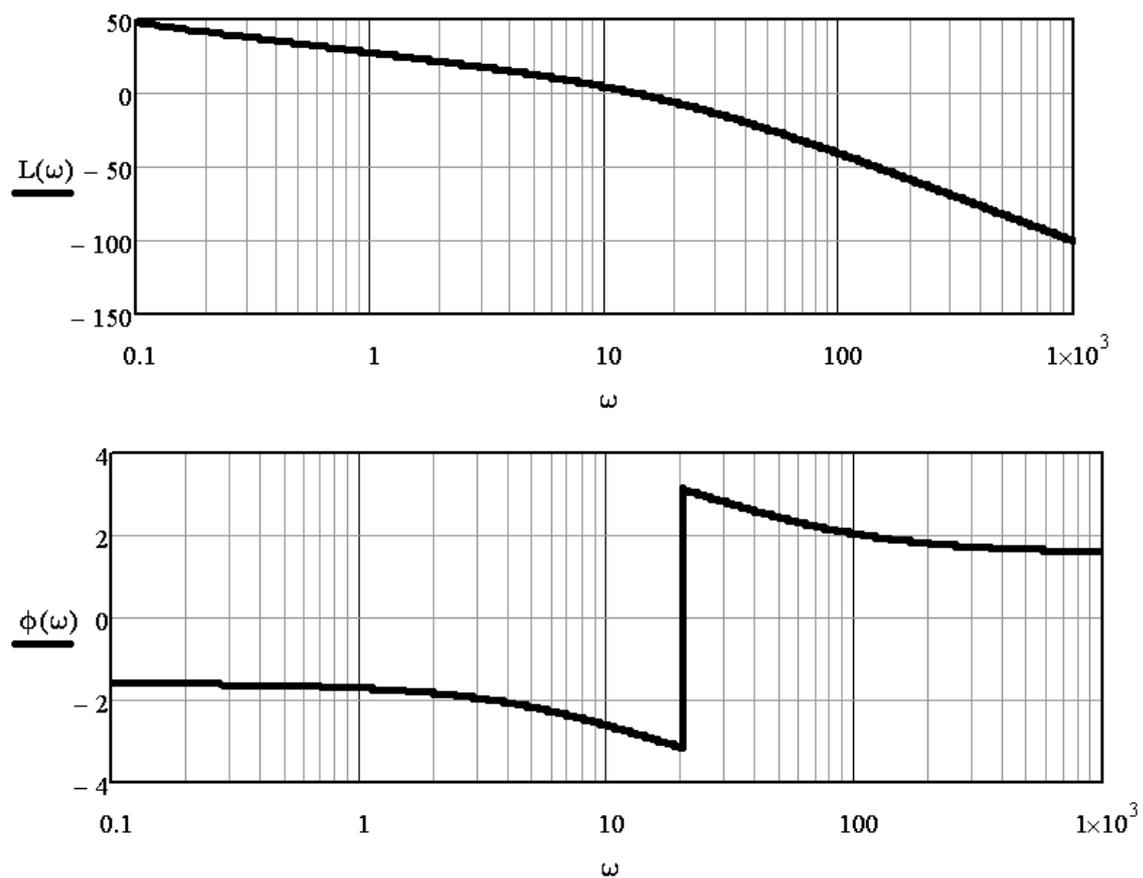


Рис. 70

```

ω := 1
Given
  L(ω) = 0
  ωc := Find(ω)
  ωc = 13.838
Given
  φ(ω) = -π
  ωπ := Find(ω)
  ωπ = 20

```

Рис. 71

**а**

$$L(\omega_{\pi}) = -6.021$$

$$|\phi(\omega_c)| = 2.849$$

$$|\phi(\omega_c)| = 163.23^\circ$$

**б**

$$\Delta\phi := \pi - |\phi(\omega_c)| = 0.293$$

$$\Delta\phi := \pi - |\phi(\omega_c)| = 16.77^\circ$$

$$\Delta L := |L(\omega_{\pi})| = 6.021$$

Рис. 72

**Важно!** Если у САУ нет частоты среза  $\omega_c$  или частоты  $\omega_{\pi}$ , то проверка устойчивости осуществляется с использованием того из двух условий критерия Найквиста, которое можно проверить. Если у САУ нет ни частоты среза  $\omega_c$ , ни частоты  $\omega_{\pi}$ , то использовать данный критерий для оценки устойчивости нельзя – следует прибегнуть к любому другому критерию или к теореме Ляпунова.

## РАБОТА № 8. Оценка влияния на устойчивость параметров САУ

**Цель:** оценка влияния на устойчивость заданного параметра САУ с использованием метода D-разбиения.

**Программное обеспечение моделирования:** Mathcad.

**Исходные данные:** результаты выполнения **Работы № 3** и **№ 7**.

### Теоретические сведения

Согласно теореме Ляпунова, САУ является устойчивой, если все корни характеристического уравнения имеют отрицательную действительную часть, т. е. располагаются в левой полуплоскости комплексной плоскости. Границей устойчивости САУ является мнимая ось комплексной плоскости. Граница области устойчивости в плоскости коэффициентов или

параметров САУ называется *границей D-разбиения*. Переход через границу D-разбиения в плоскости параметров соответствует переходу корней через мнимую ось в плоскости корней.

Обычно при проектировании САУ большинство параметров систем задано конструктивно и возможно изменение в некоторых пределах только одного или двух параметров. Если решается задача оценки влияния на устойчивость САУ одного параметра, то графически определяют область устойчивости путем построения границы D-разбиения в плоскости рассматриваемого параметра.

Представим характеристическое уравнение замкнутой САУ в виде:

$$A_3(p) = A_1(p) + P \cdot A_2(p) = 0, \quad (8)$$

где  $P$  – рассматриваемый параметр,

$A_1(p)$  – часть характеристического уравнения, не содержащая параметр  $P$ .

Решив уравнение (8) относительно  $P$ , получим:

$$P = \frac{-A_1(p)}{A_2(p)}.$$

Подставив вместо  $p$  граничное значение  $j\omega$ , запишем выражение в комплексном виде:

$$P(j\omega) = \frac{-A_1(j\omega)}{A_2(j\omega)}.$$

Кривая  $P(j\omega)$ , построенная в комплексной системе координат при различных значениях  $\omega$ , является границей D-разбиения. Если следовать по этой кривой от значений  $\omega \rightarrow -\infty$  до значений  $\omega \rightarrow +\infty$ , то слева остается область, которая является отображением левой полуплоскости корней и представляет область устойчивости. Граница области устойчивости отмечается штриховкой слева при следовании по кривой от  $\omega \rightarrow -\infty$  до значений  $\omega \rightarrow +\infty$ . Так как реальные параметры САУ имеют действительные значения, то рассматривают только отрезок действительной оси, попадающий в область устойчивости. Все значения параметра, определяемые координатами этого отрезка, соответствуют устойчивому состоянию системы [1, 3].

## Ход выполнения работы

1. С использованием метода D-разбиения оценить влияние на устойчивость замкнутой САУ коэффициента статического преобразования разомкнутой системы.

2. Подтвердить результат анализа, полученный в результате выполнения п. 1 с использованием заданного критерия устойчивости (указывается преподавателем).

### Примеры и практические рекомендации по использованию программного обеспечения

Для выполнения задания в *Mathcad* необходимо открыть несколько панелей инструментов семейства *Math* (Математические): *Calculator* (Калькулятор), *Matrix* (Матрица или Матричные), *Graph* (Графические), *Boolean* (Логические или Булевы), *Greek* (Греческие).

Продолжим исследование САУ с передаточной функцией разомкнутой системы вида  $W_p(p) = \frac{25}{p(0,1p+1)(0,025p+1)}$ , заданной в последнем примере к **Работе № 7**. Оценим влияние на ее устойчивость значения коэффициента усиления (коэффициента статического преобразования). Запишем передаточную функцию разомкнутой системы с подстановкой коэффициента усиления в общем виде:

$$W_p(p) = \frac{k}{p(0,1p+1)(0,025p+1)}.$$

Запишем характеристические уравнения замкнутой САУ как сумму числителя и знаменателя передаточной функции разомкнутой системы и решим в общем виде относительно  $k$ :

$$\begin{aligned} A_s(p) &= k + p(0,1p+1)(0,025p+1) = 0; \\ k(p) &= -p(0,1p+1)(0,025p+1). \end{aligned}$$

Подставив вместо  $p$  комплексную частоту  $j\omega$ , запишем выражение для  $k(j\omega)$  в комплексном виде, рассчитаем и построим D-разбиение в плоскости параметра  $k$  (рис. 72).

**Важно!** По теории график D-разбиения строится при изменении частоты  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . На практике для каждой САУ диапазон рассматри-

ваемых частот подбирается индивидуально в режиме увеличения модуля граничных значений.

### Порядок построения

1. Зададим диапазон изменения частоты  $\omega := -25 \dots 25$ ;
  2. Введем выражение для вычисления  $k(\omega)$ ;
  3. Построим D-разбиение в плоскости параметра  $k$ .
- Результат построения приведен на рис. 73.

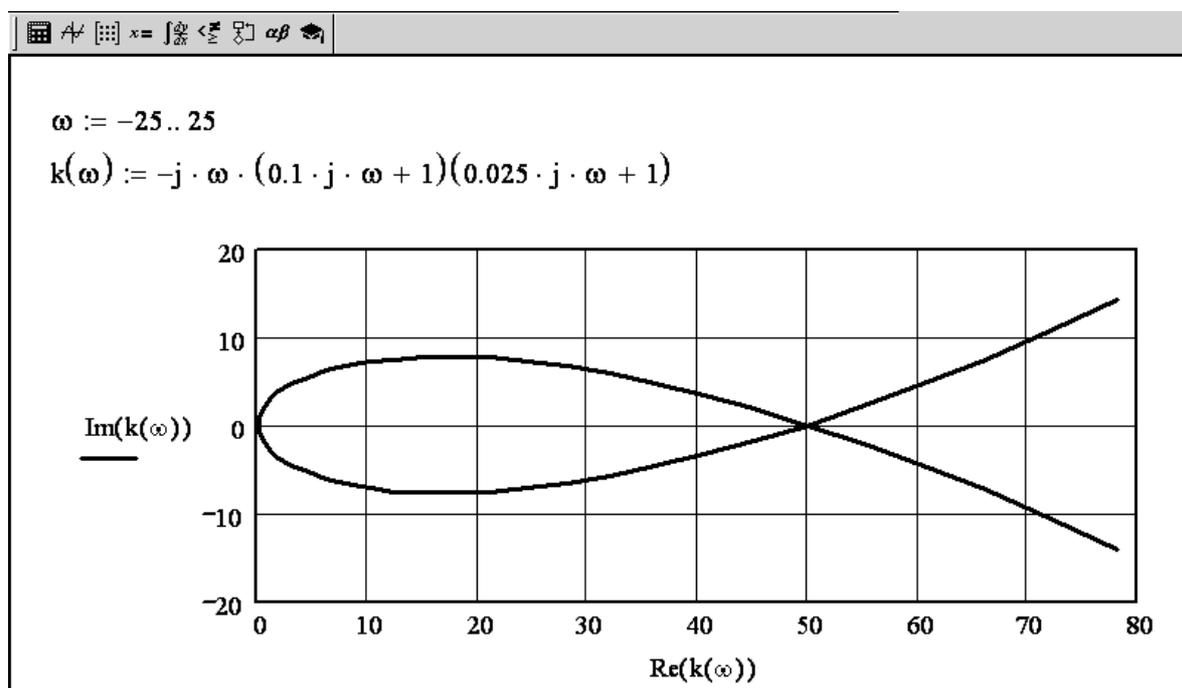


Рис. 73

В полученном результате, следуя по ходу графика D-разбиения от значений, соответствующих  $\omega = -\infty$ , до значений  $\omega = +\infty$ , наложим штриховку слева. Область положительной части действительной оси, окаймленная штриховкой, соответствует значениям параметра  $k$ , обеспечивающим устойчивое состояние системы (рис. 74).

**Важно!** Специальных автоматических средств для построения штриховки по указанным правилам в Mathcad нет. Штриховка наносится вручную в распечатанном отчете. Также для ее нанесения можно использовать любой графический редактор.

Результаты построения области устойчивости позволяют утверждать, что значение коэффициента усиления  $k$  для обеспечения устойчиво-

сти САУ не должно превышать 50. Данный вывод отчасти подтверждается результатами оценки устойчивости данной САУ по критерию Найквиста для ЛАЧХ и ЛФЧХ (см. последний пример к **Работе № 7**): при начальном значении коэффициента усиления  $k = 25$  система оказалась устойчивой.

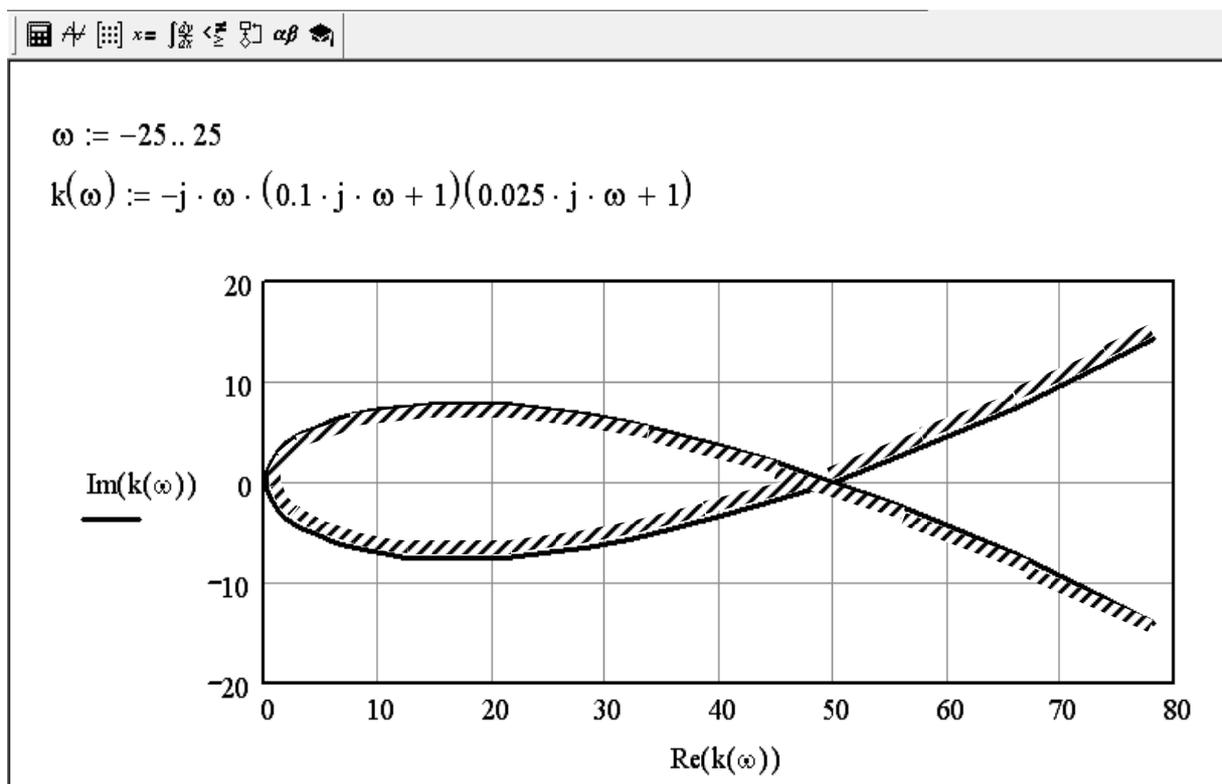


Рис. 74

Дополним проверку результатов построения области устойчивости, осуществив оценку устойчивости по критерию Найквиста для ЛАЧХ и ЛФЧХ для значения  $k$ , выбранного вне области устойчивости, например при  $k = 100$  (рис. 75).

Как видно из рис. 75, при  $k = 100$  второе условие критерия Найквиста для ЛАЧХ **не выполняется** (должно быть  $L(\omega_r) < 0$ ), следовательно, выбор значения параметра  $k$  вне области устойчивости действительно приводит САУ к неустойчивому состоянию.

$$W(\omega) := \frac{100}{j \cdot \omega \cdot (0.1 \cdot j \cdot \omega + 1)(0.025 \cdot j \cdot \omega + 1)}$$

$$L(\omega) := 20 \cdot \log(|W(\omega)|) \quad \phi(\omega) := \arg(W(\omega))$$

$$\omega := 1$$

Given

$$L(\omega) = 0$$

$$\omega_c := \text{Find}(\omega)$$

$$\omega_c = 27.798$$

Given

$$\phi(\omega) = -\pi$$

$$\omega_\pi := \text{Find}(\omega)$$

$$\omega_\pi = 20$$

Проверка выполнения условий критерия Найквиста:

$$L(\omega_\pi) = 6.021$$

$$|\phi(\omega_c)| = 2.88$$

$$|\phi(\omega_c)| = 164.989^\circ$$

Рис. 75

## РАБОТА № 9. Коррекция систем автоматического управления

**Цель:** исследование возможности обеспечения заданных значений показателей качества управления САУ с использованием различных методов повышения точности управления.

**Программное обеспечение моделирования:** Mathcad, программа моделирования систем автоматического управления tau.exe.

**Исходные данные:** см. **Варианты индивидуальных заданий.**

### Теоретические сведения

К основным показателям качества управления относятся показатели, определяемые по переходной характеристике САУ, а также запасы устойчивости по фазе и амплитуде, определяемые по ЛАЧХ и ЛФЧХ (см. методические указания к **Работе № 7**).

Исходные параметры переходной характеристики, используемые для расчета показателей качества, показаны на рис. 76. По переходной характеристике определяются:

1) перерегулирование  $H_{\max}$  (относительная величина (в процентах) максимального выброса переходной характеристики):

$$H_{\max} = \frac{y_{\max}(t_y) - (y_{\infty} - y_0)}{y_{\infty} - y_0} \cdot 100 \% ;$$

2) время установления  $t_y$  – время достижения характеристикой первого максимума;

3) время переходного процесса  $t_p$  – время, начиная с которого переходная характеристика не превышает установившегося значения более чем на величину  $\delta \cdot y_{\infty}$  ( $\delta \leq 0,05$ ), т. е.  $y(t) - y_{\infty} \leq \delta \cdot y_{\infty}$  при  $t \geq t_p$ ;

4) колебательность переходного процесса  $n$  определяется количеством полных колебаний за время  $t_p$ ;

5) статическая ошибка управления  $D_{cm}$  – отклонение действительного значения управляемой величины от заданного в установившемся режиме:  $D_{cm} = y_{\infty} - k \cdot x(t)$  при  $t \geq t_p$ .

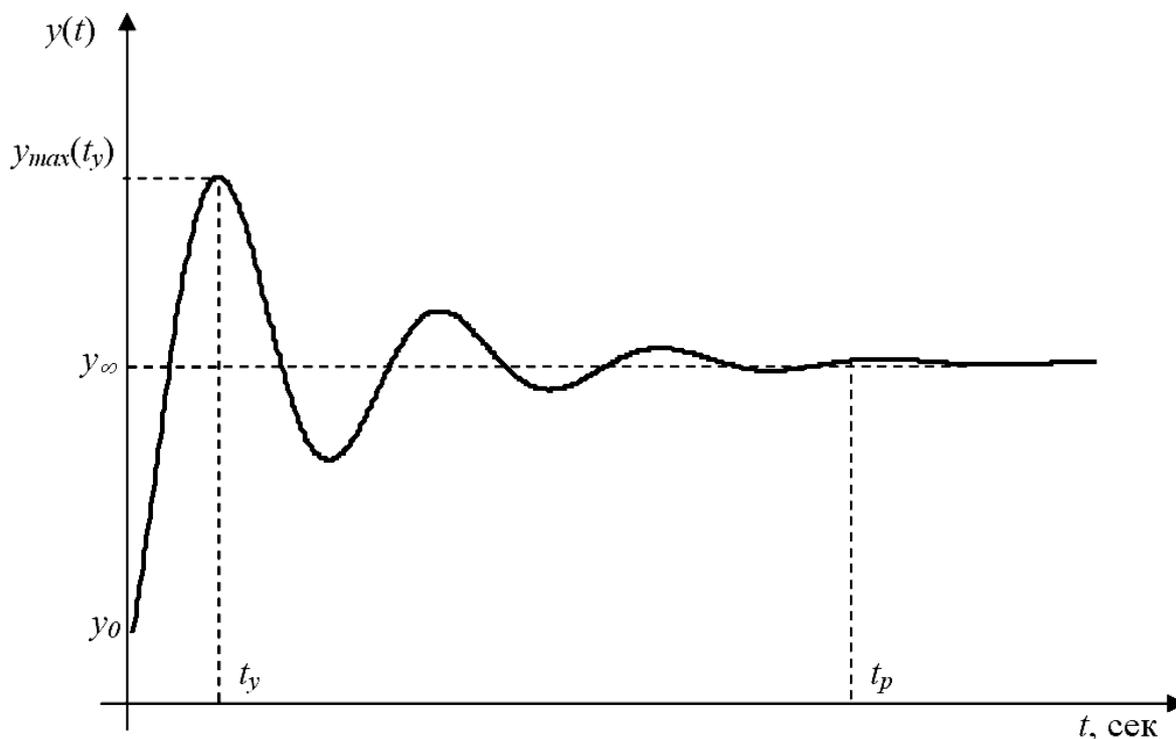


Рис. 76

**Повышение точности САУ увеличением коэффициента усиления** – это самый простой способ повышения быстродействия замкнутой САУ и точности воспроизведения задающего воздействия в виде единичной ступенчатой функции. При повышении коэффициента усиления ЛАЧХ системы смещается вверх параллельно самой себе, в результате чего частота среза  $\omega_c$  САУ смещается вправо, т. е. возрастает, и, следовательно, уменьшается время переходного процесса, которое с частотой среза связано обратно пропорциональным соотношением. Однако эффективность данного метода ограничивается снижением запасов устойчивости (см. **Работу №7**), т. к. изменение коэффициента усиления не влияет на ЛФЧХ (рис. 77).

**Повышение точности САУ с использованием изодромных устройств.** Изодромным называется устройство, передаточная функция которого имеет вид:

$$W_{из}(p) = 1 + \frac{k_{из}}{p} = \frac{k_{из} + p}{p} = \frac{k_{из} \left( 1 + \frac{1}{k_{из}} p \right)}{p} = \frac{k_{из} (1 + T_{из} p)}{p}.$$

Введение в состав САУ изодромного устройства приводит к изменению и ЛАЧХ, и ЛФЧХ. Если постоянную времени изодромного устройства  $T_{из}$  выбрать достаточно большой, то вносимый фазовый сдвиг будет несущественным в области частоты среза  $\omega_c$  и не повлияет значимым образом на запасы устойчивости САУ. Однако при этом, поскольку постоянная времени изодромного устройства оказывается обычно максимальной в САУ, то она определяет наиболее медленную составляющую переходного процесса, и, следовательно, введение изодромного устройства ухудшает быстродействие.

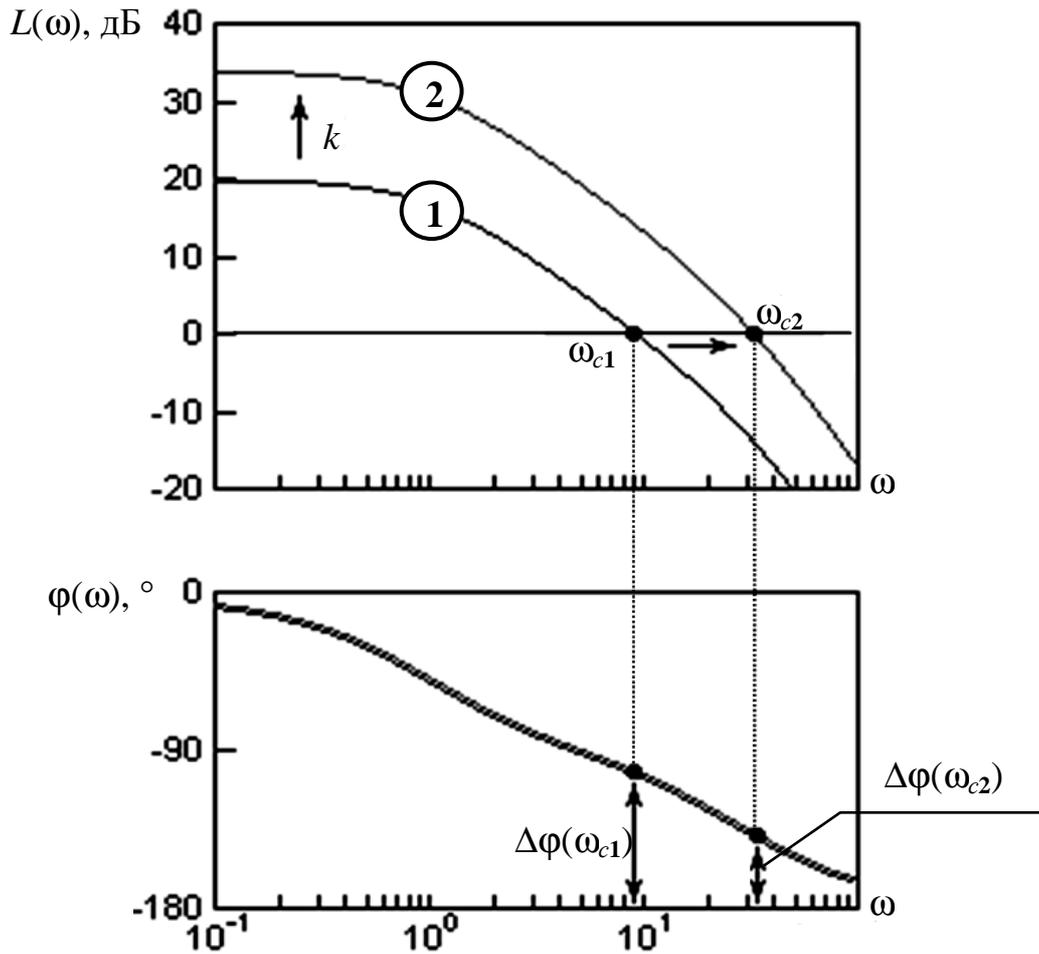


Рис. 77

Схема реализации изодромного устройства показана на рис. 78 пунктиром (обратите внимание: второй элемент сравнения выполняет функцию суммирования).

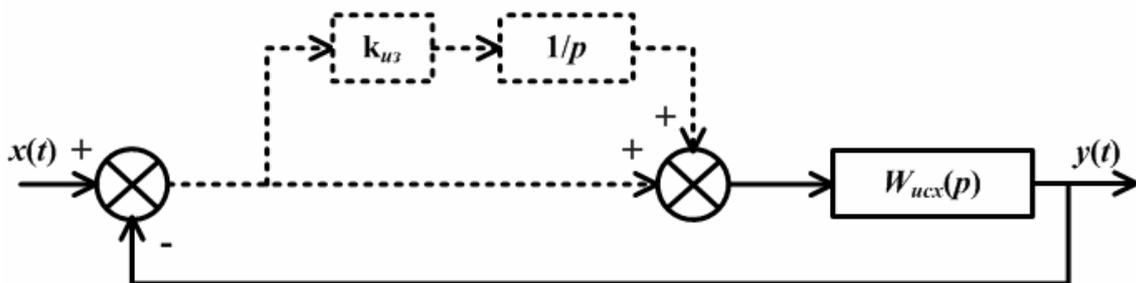


Рис. 78

**Повышение точности САУ с введением производных в закон управления.** Данный метод состоит во введении в закон управления производной от величины рассогласования – отклонения реального значения управляемой величины от заданного значения. Точность управления в этом случае повышается, так как:

- система реагирует не просто на наличие ошибки, но и на тенденцию к ее изменению;
- можно увеличить общий коэффициент усиления значительно, чем в первом методе, без существенного изменения запасов устойчивости [1, 4].

Варианты схем реализации закона управления с введением производной пунктиром приведены на рис. 79.

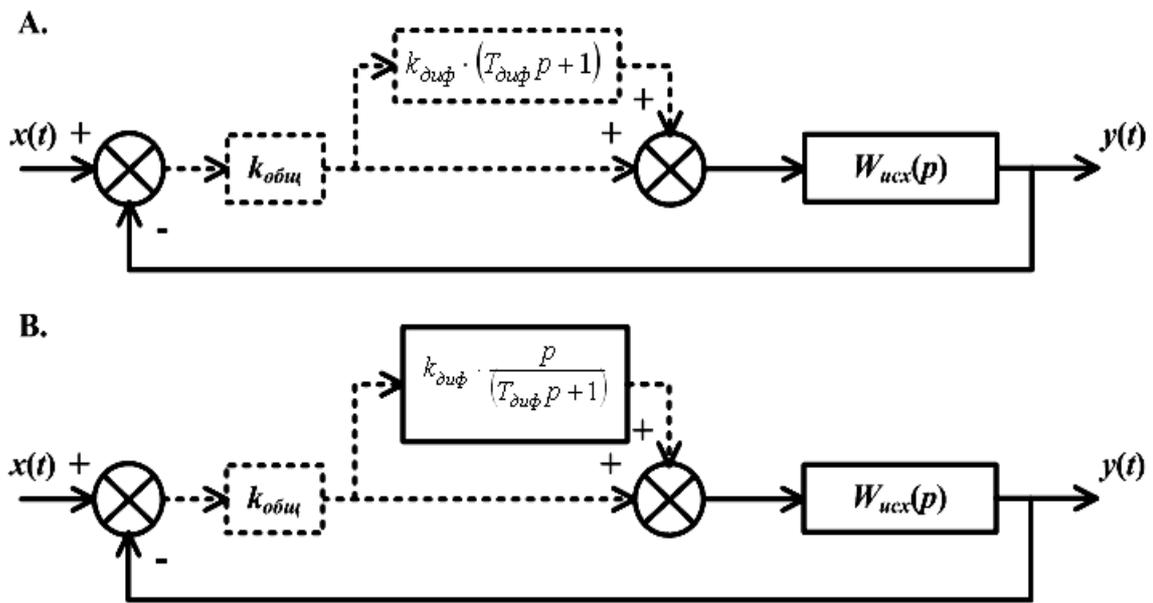


Рис. 79

### Ход выполнения работы

1. По заданному варианту передаточной функции **разомкнутой** САУ построить кривую переходного процесса **замкнутой**, ЛАЧХ и ЛФЧХ **разомкнутой** САУ. Оценить соответствие значений показателей качества заданным. Сформулировать задачу коррекции.

2. Скорректировать значения показателей качества с использованием **двух** заданных методов повышения точности. Для каждого метода построить кривые переходного процесса **замкнутой**, ЛАЧХ и ЛФЧХ **разомкнутой** скорректированной САУ, оценить показатели качества.

3. Сделать выводы об эффективности заданных методов для обеспечения заданных показателей качества управления.

## Примеры и практические рекомендации по использованию программного обеспечения

Для выполнения задания в *Mathcad* необходимо открыть несколько панелей инструментов семейства *Math* (Математические): *Calculator* (Калькулятор), *Matrix* (Матрица или Матричные), *Graph* (Графические), *Boolean* (Логические или Булевы), *Greek* (Греческие).

Пусть передаточная функция исходной **разомкнутой** САУ имеет вид:  $W(p) = \frac{5}{(p+1)(0,03p+1)}$ , т. е. исходная система представляет собой последовательное соединение двух апериодических звеньев первого порядка с постоянными времени 1 и 0,03 с. Пусть требуется обеспечить следующие показатели качества управления для **замкнутой** САУ:

- время переходного процесса  $t_p$  не более 0,2 с;
- перерегулирование  $H_{max}$  не более 10 %;
- точность воспроизведения задающего воздействия не менее 98 %;
- запас устойчивости по фазе  $\Delta\varphi(\omega_c)$  не менее  $45^\circ$ .

Оценим показатели качества исходной САУ. Построим переходной процесс САУ с использованием программы tau.exe. Для этого реализуем схему замкнутой САУ с учетом общей единичной отрицательной обратной связи: сигнал с выхода разомкнутой системы подадим на вход вычитающего элемента сравнения (компаратора) и построим переходной процесс (рис. 80).

Как видно на рис. 80, время переходного процесса не соответствует требуемому значению и составляет приблизительно 0,8 с, т. е. быстродействие системы значительно хуже требуемого. Кроме того, с учетом заданной точности воспроизведения входного воздействия (не менее 98 %), значение  $y(t)$  после завершения переходного процесса должно составлять не менее 0,98, а в исходной САУ составляет 0,83. Эти параметры нуждаются в коррекции.

С использованием *Mathcad* построим ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой САУ, определим частоту среза и оценим запас устойчивости по фазе. Запас устойчивости по фазе удовлетворяет заданному ограничению (не менее  $45^\circ$ ) и составляет  $93,388^\circ$  (рис. 81, 82).

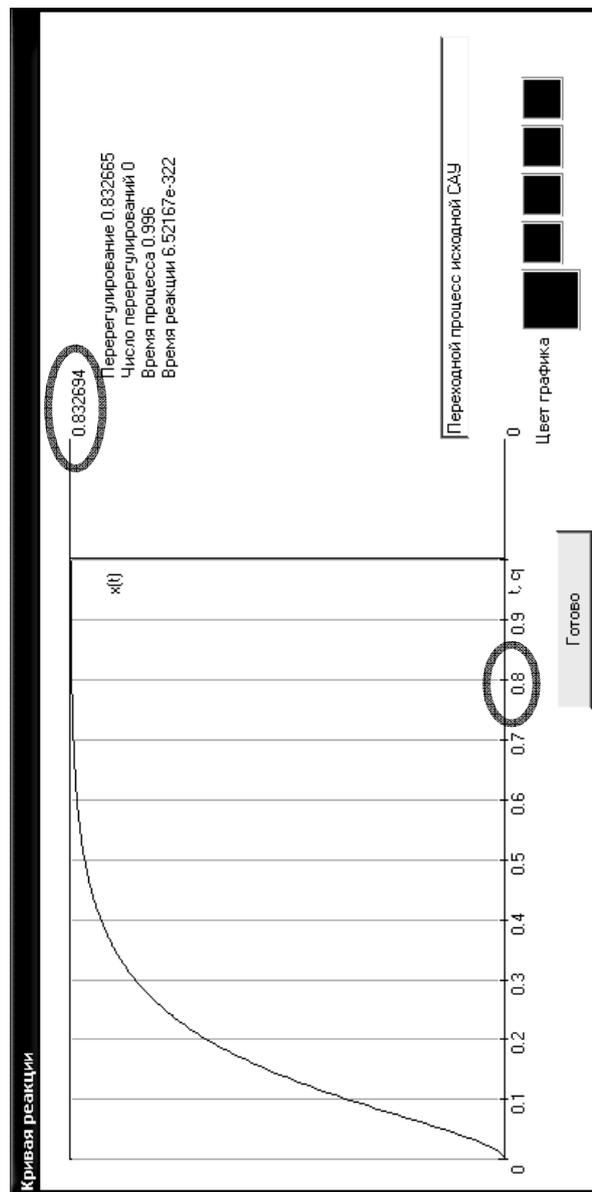
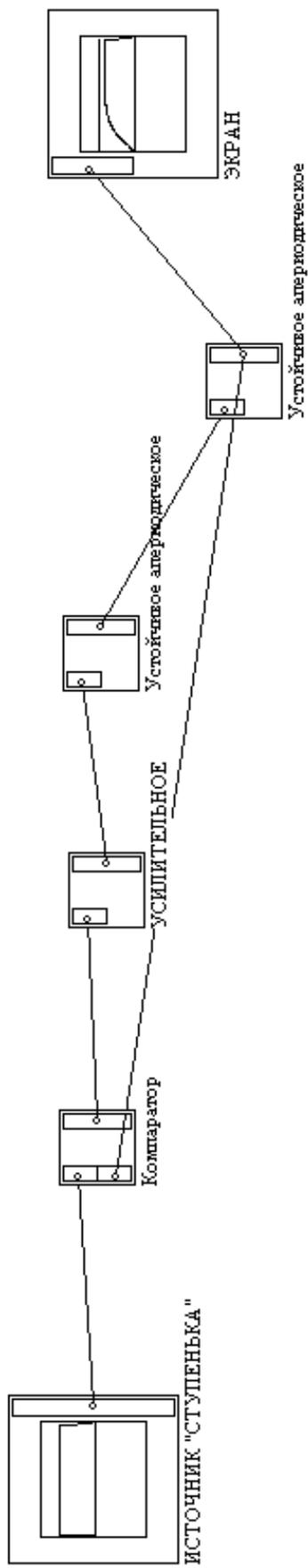
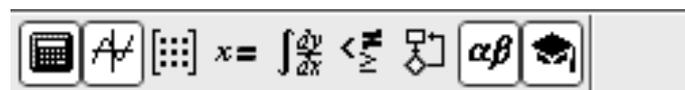


Рис. 80



$$\omega := 0.1, 0.11.. 1000$$

$$W(\omega) := \frac{5}{(j \cdot \omega + 1)(0.03j \cdot \omega + 1)}$$

$$L(\omega) := 21 \cdot \log(|W(\omega)|)$$

$$\phi(\omega) := \arg(W(\omega))$$

$$\omega := 1$$

Given

$$L(\omega) = 0$$

$$\omega_c := \text{Find}(\omega) = 4.846$$

$$\Delta\phi := \pi - |\phi(\omega_c)| = 93.388^\circ$$

Рис. 81

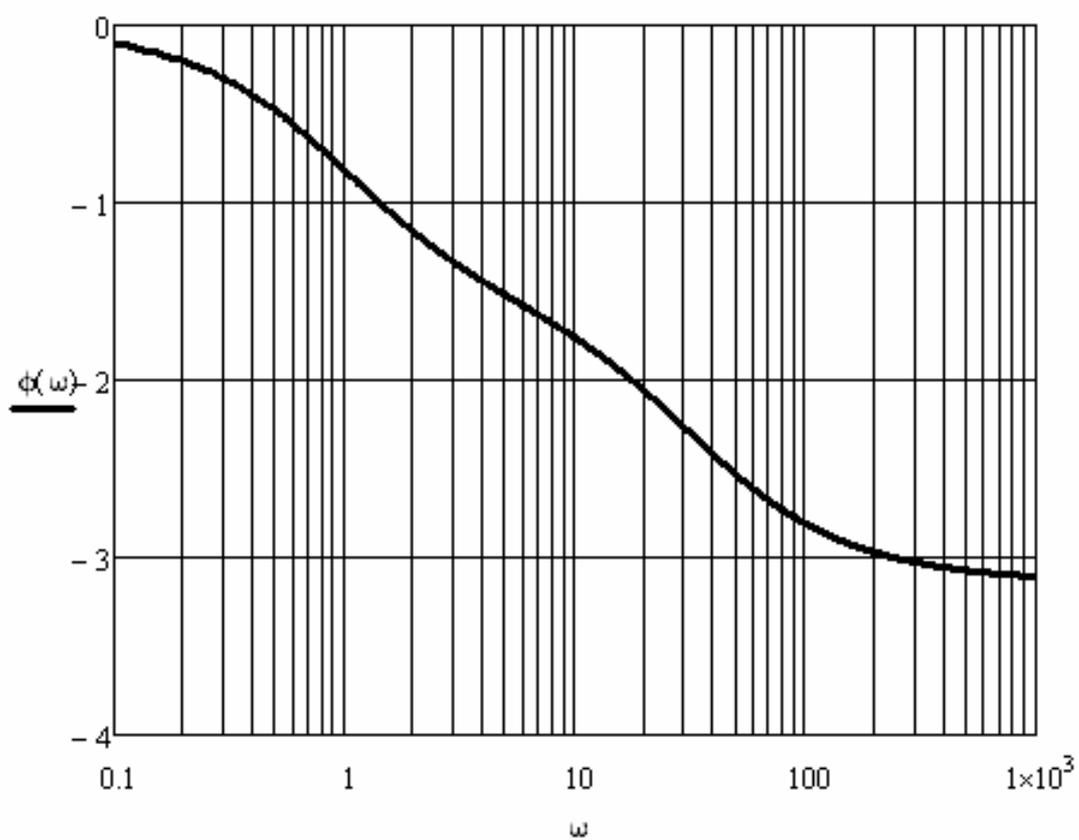
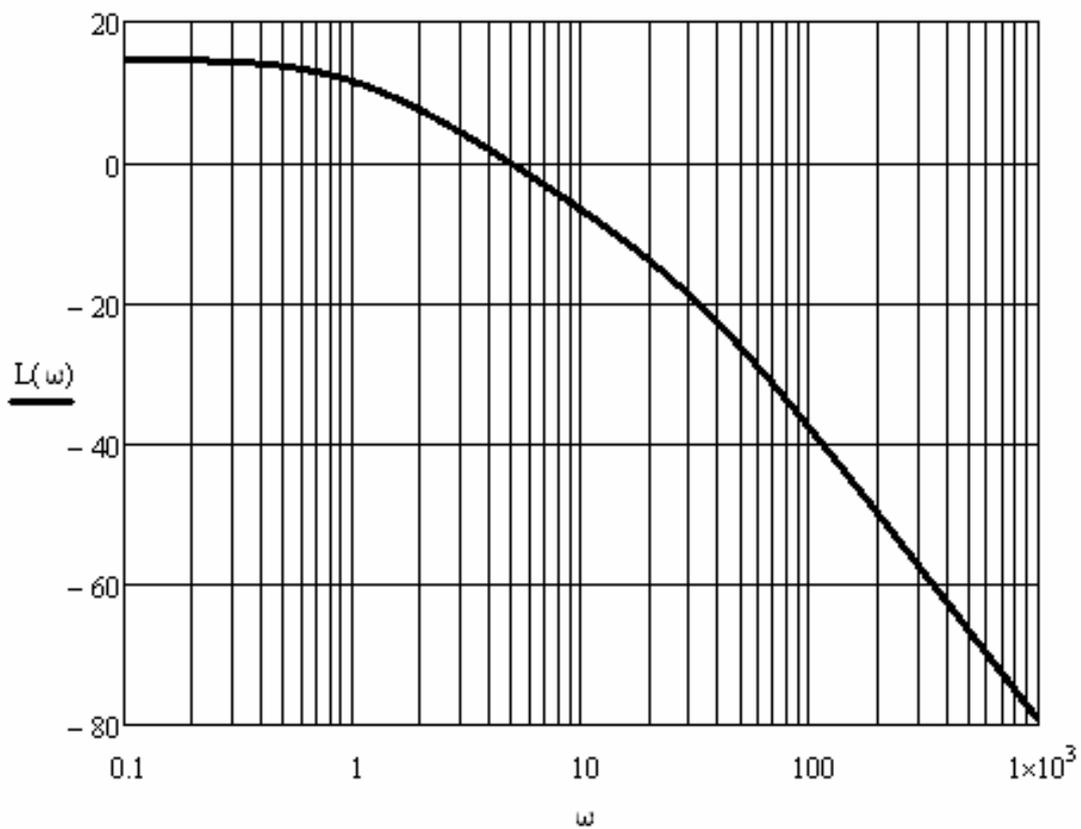


Рис. 82

**Коррекция параметров САУ с использованием методов повышения точности.** Исследуем возможность коррекции параметров САУ с использованием метода повышения коэффициента усиления. Для этого, не изменяя схемы исходной замкнутой САУ, построим переходные характеристики с увеличением коэффициента усиления.

**Важно!** Для построения в tau.exe нескольких переходных процессов одновременно необходимо реализовать нужное количество схем, выход каждой вывести на отдельный экран, а потом совместить экраны (рис. 83). Итог построения переходных процессов показан на рис. 84.

Результаты исследования отобразим в табл. 2.

Таблица 2

Коэффициент усиления	Время переходного процесса $t_p$	Точность воспроизведения	Перерегулирование $H_{max}$
5 (исходное)	0,996	83 %	0 %
20	0,375	95 %	2 %
40	0,222	97 %	17 %
65	0,117	98 %	28 %

Как видно, ограничения по времени переходного процесса (не более 0,2 с) и по точности воспроизведения (не менее 98 %) для коэффициента усиления, равного 65, выполняются. Однако с возрастанием  $k$  возрастает колебательность переходного процесса и нарушается ограничение по допустимой величине перерегулирования (не более 10 %): при  $k = 65$  она составляет 28 %.

Проверим, выполняется ли ограничение по запасу устойчивости по фазе для различных значений  $k$ , выполнив расчеты в Mathcad (рис. 85).

Как и следовало ожидать, с возрастанием  $k$  растет частота среза и, соответственно, уменьшается запас устойчивости по фазе. Для  $k = 65$  ограничение (не менее  $45^\circ$ ) не выполняется.

Таким образом, с использованием метода повышения коэффициента усиления в заданной САУ можно обеспечить только выполнение ограничений по  $t_p$  и точности воспроизведения, а по  $H_{max}$  и  $\Delta\varphi(\omega_c)$  невозможно.



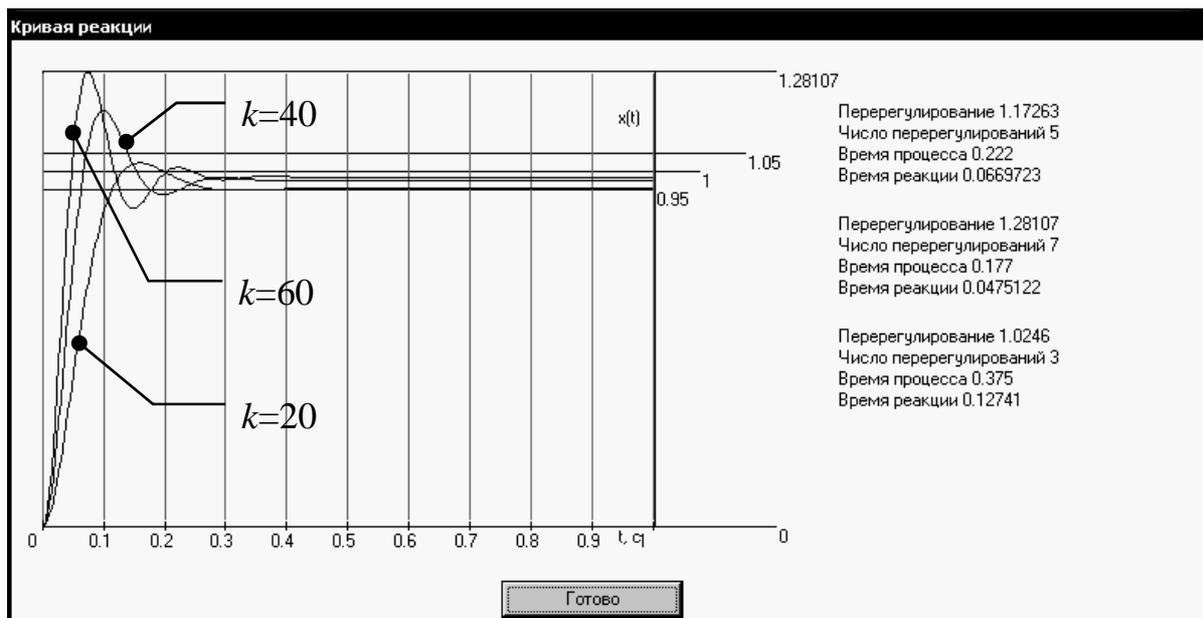


Рис. 84

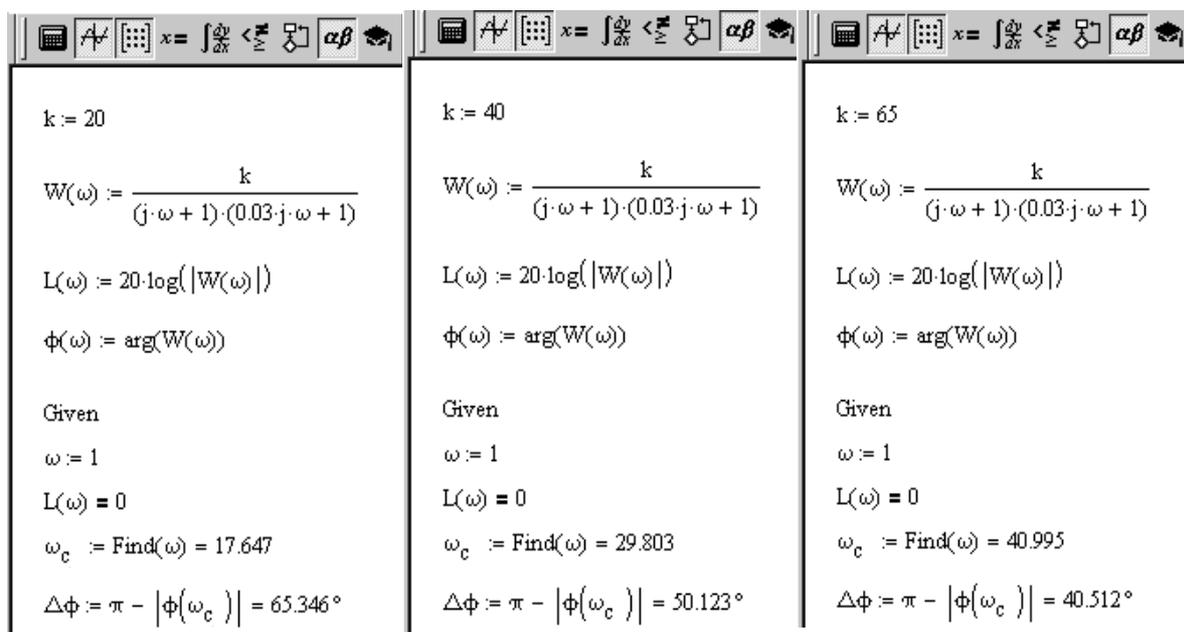


Рис. 85

Исследуем возможность коррекции параметров САУ с использованием изодромного устройства. Реализуем схему и построим переходные процессы для  $k_{из} = 1$  и 3 (рис. 86, 87).

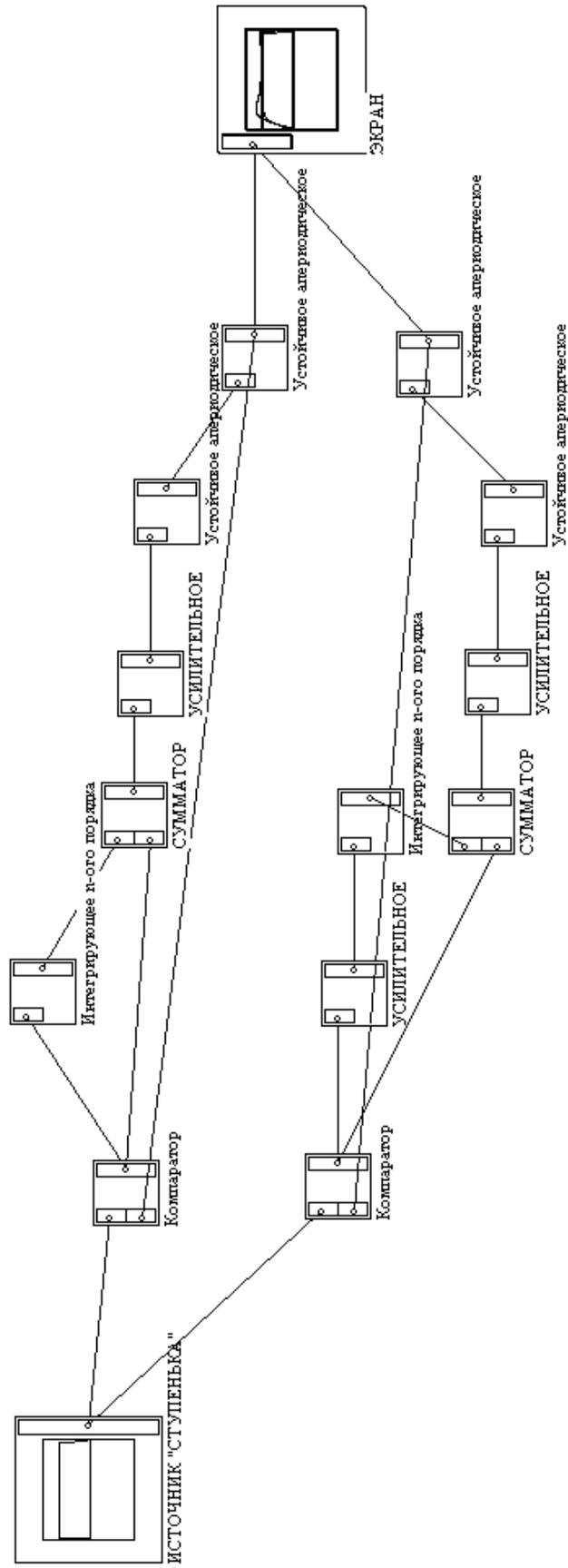


Рис. 86

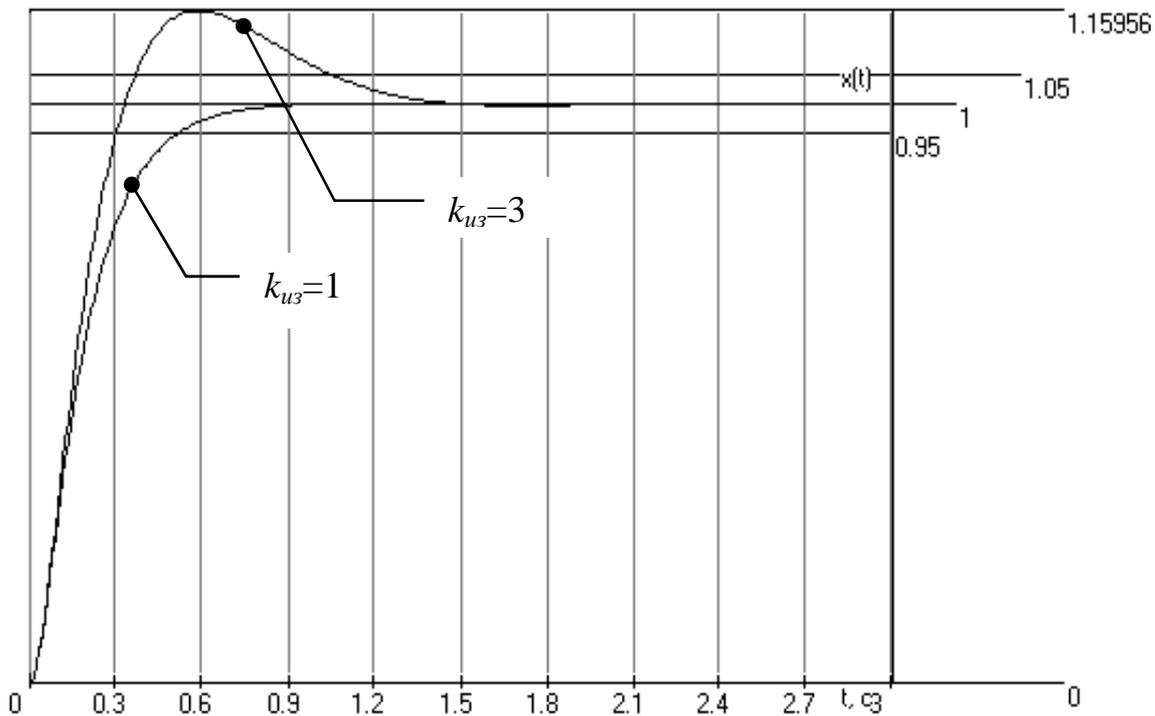


Рис. 87

Как видно по рис. 87, уже при  $k_{uz} = 1$  точность воспроизведения составляет 100 %, однако время переходного процесса – около 0,6 с, что меньше исходного значения, но больше заданного ограничения. При дальнейшем увеличении  $k_{uz}$  время переходного процесса растет, и, кроме того, возрастает перерегулирование: для  $k_{uz} = 3H_{\max} \approx 16\%$  при заданном не более 10 %. Проверим, выполняется ли ограничение по запасу устойчивости по фазе для различных значений  $k_{uz}$ . Запишем передаточную функцию разомкнутой САУ с включенным изодромным устройством:

$$W(p) = \left(1 + \frac{k_{uz}}{p}\right) \cdot \frac{5}{(p+1)(0,03p+1)}$$

и рассчитаем запас устойчивости по фазе в Mathcad (рис. 88).

Как и следовало ожидать, введение изодромного устройства незначительно снижает запас устойчивости по фазе: при выбранных значениях  $k_{uz} = 1$  и  $k_{uz} = 3$   $\Delta\varphi(\omega_c)$  составляет соответственно  $81,56^\circ$  и  $62,345^\circ$  при необходимом не менее  $45^\circ$ .

Таким образом, с использованием метода повышения коэффициента усиления в заданной САУ можно обеспечить выполнение ограничений только по  $\Delta\varphi(\omega_c)$  и точности воспроизведения, а по  $H_{\max}$  и  $t_p$  невозможно.

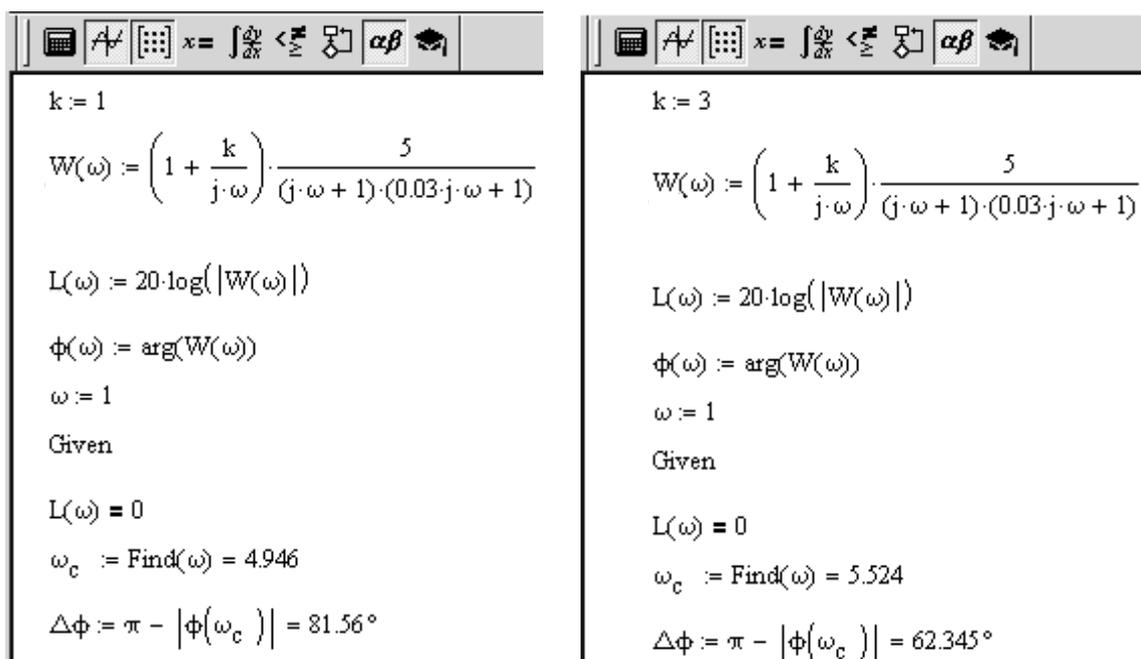


Рис. 88

Исследуем возможность коррекции параметров САУ *с введением производных в закон управления*. Реализуем в программе tau.exe схему введения производной в закон управления по варианту А (рис. 79) и построим переходные процессы для различных параметров дифференцирующего устройства. Реализованная схема приведена на рис. 89, а результаты построения переходных процессов для разных значений параметров – на рис. 90 – 92.

Как видно из рис. 90, при увеличении постоянной времени дифференцирующего устройства уменьшается перерегулирование и незначительно – время переходного процесса, а точность воспроизведения существенно не изменяется.

Результаты, приведенные на рис. 91, показывают, что при увеличении общего коэффициента усиления дифференцирующего устройства возрастает перерегулирование и точность воспроизведения, а время переходного процесса существенно уменьшается.

На основании результатов, приведенных на рис. 92, можно утверждать, что при уменьшении коэффициента усиления дифференцирующего устройства возрастает точность воспроизведения, время переходного процесса существенно уменьшается, а перерегулирование практически не изменяется.

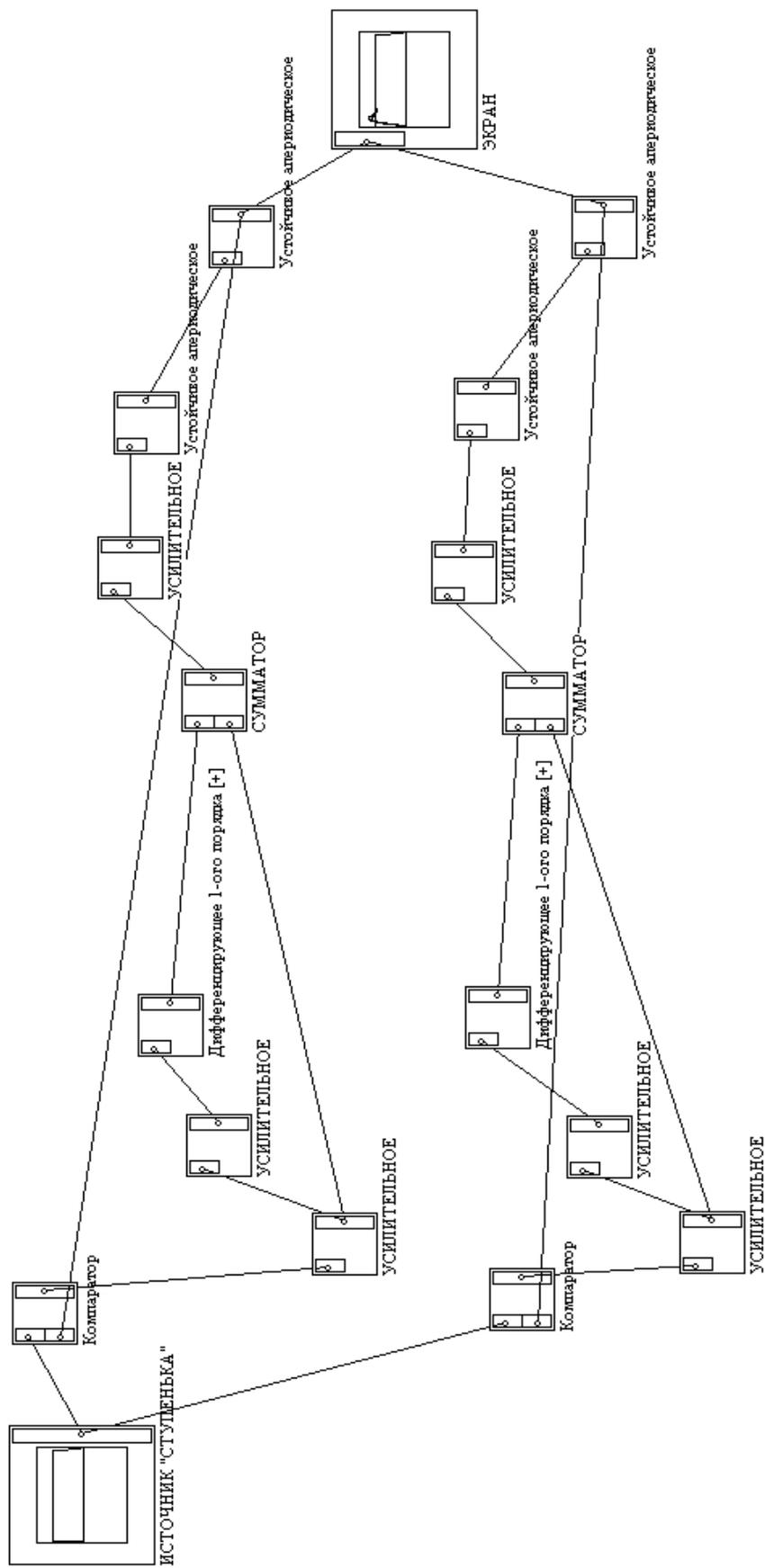


Рис. 89

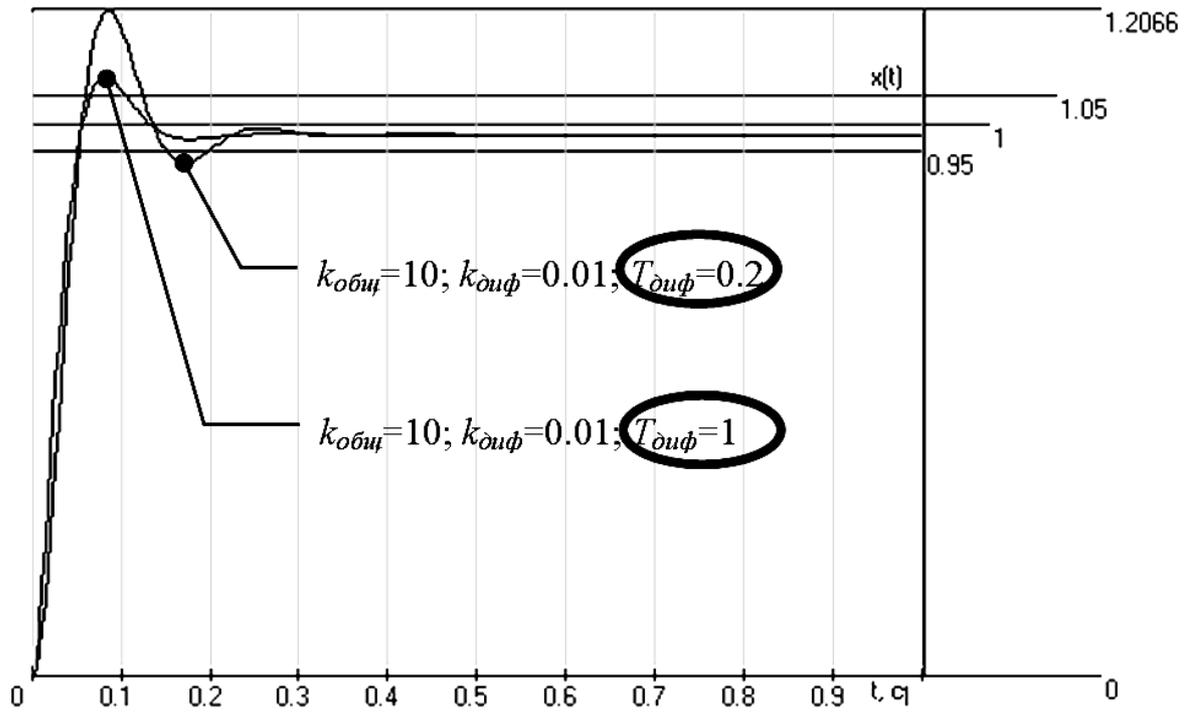


Рис. 90

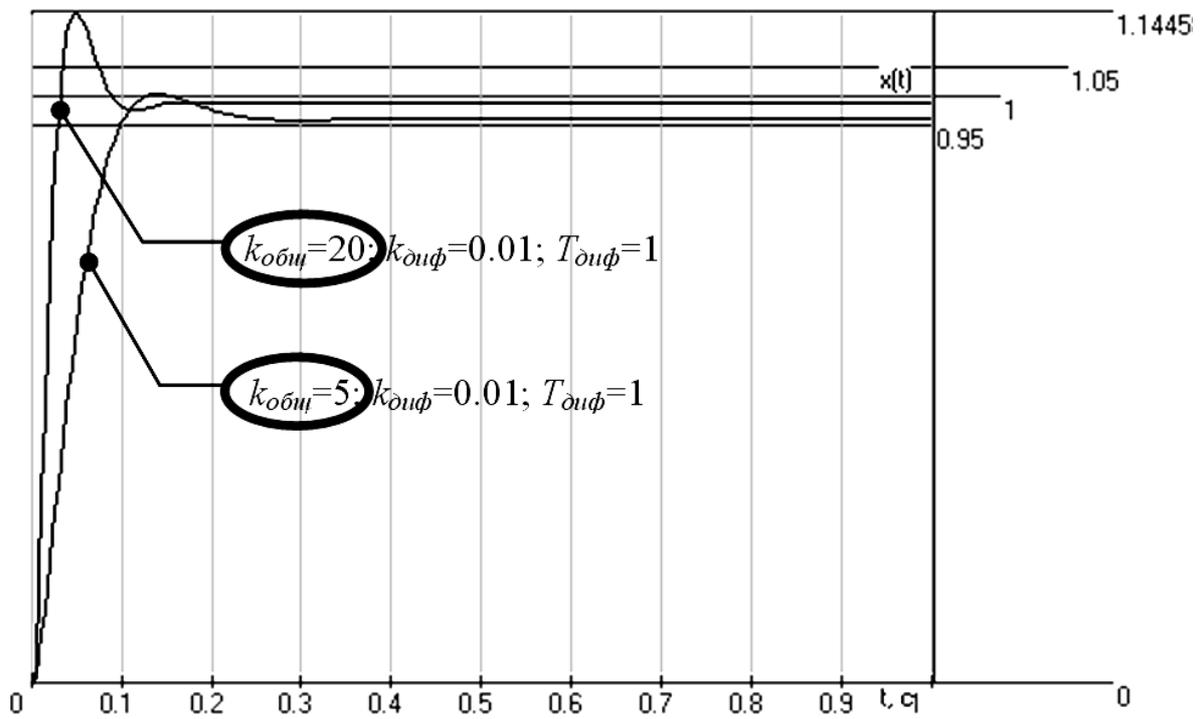


Рис. 91

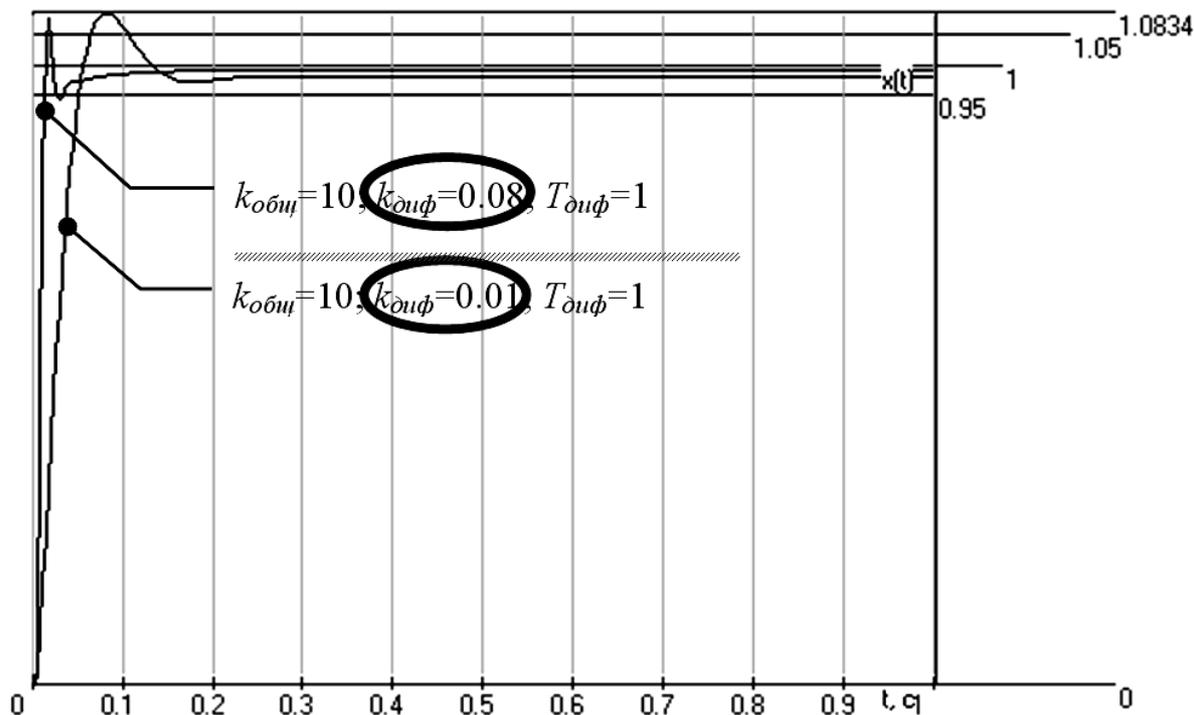


Рис. 92

Таким образом, наилучшие значения показателей качества управления при использовании коррекции с введением производных в закон управления по схеме А обеспечиваются при  $k_{общ} = 10$ ;  $k_{диф} = 0,08$ ;  $T_{диф} = 1$  и составляют  $t_p = 0,03$  с,  $H_{max} = 7,44$  % и точность  $\approx 98$  %. Проверим, выполняется ли ограничение по запасу устойчивости по фазе для этого случая. Запишем передаточную функцию разомкнутой САУ с включенным дифференцирующим устройством в общем виде:

$$W(p) = k_{общ} \left( 1 + k_{диф} (1 + T_{диф} p) \right) \cdot \frac{5}{(p+1)(0,03p+1)}.$$

Подставим в передаточную функцию значения  $k_{общ} = 10$ ;  $k_{диф} = 0,08$ ;  $T_{диф} = 1$  и рассчитаем запас устойчивости по фазе в Mathcad (рис. 93).

Как видно, несмотря на существенное увеличение частоты среза ( $129,8 \text{ с}^{-1}$  по сравнению с исходным  $4,85 \text{ с}^{-1}$ , рассчитанным в примере № 1), запас устойчивости по фазе практически не изменился, удовлетворяет заданному ограничению (не менее  $45^\circ$ ) и составляет  $\approx 98,9^\circ$ . Таким образом, данный способ повышения точности управления позволяет обеспечить все заданные показатели качества управления.

```

k := 3

W(omega) := [1 + 0.08 * (j * omega + 1)] * 50 / ((j * omega + 1) * (0.03 * j * omega + 1))

L(omega) := 20 * log(|W(omega)|)

phi(omega) := arg(W(omega))

omega := 1

Given

L(omega) = 0

omega_c := Find(omega) = 129.838

Delta phi := pi - |phi(omega_c)| = 98.904 degrees

```

Рис. 93

Аналогичным образом для данного случая можно реализовать введение в закон управления производной и по схеме типа В (рис. 79). Реализация схемы в программе tau.exe приведена на рис. 94. Наилучшие значения показателей качества управления для этого варианта схемы обеспечиваются при  $k_{общ} = 9$ ;  $k_{диф} = 0,01$ ;  $T_{диф} = 0,01$  и составляют  $t_p = 0,1$  с,  $H_{max} = 9,8$  % и точность  $\approx 98$  %, а также  $\Delta\phi(\omega_c) = 60,6$  (рис. 95).

### Варианты индивидуальных заданий

Типы передаточных функций исходных разомкнутых САУ:

**А:**  $W(p) = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$ ;

**Б:**  $W(p) = \frac{k}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$ ;

**В:**  $W(p) = \frac{k(T_3 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$ ;

**Г:**  $W(p) = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T^2 p^2 + 2T\xi p + 1)}$ ;

**Д:**  $W(p) = \frac{k}{p(T_1 p + 1)(T^2 p^2 + 2T\xi p + 1)}$ ;

**Е:**  $W(p) = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}$ .

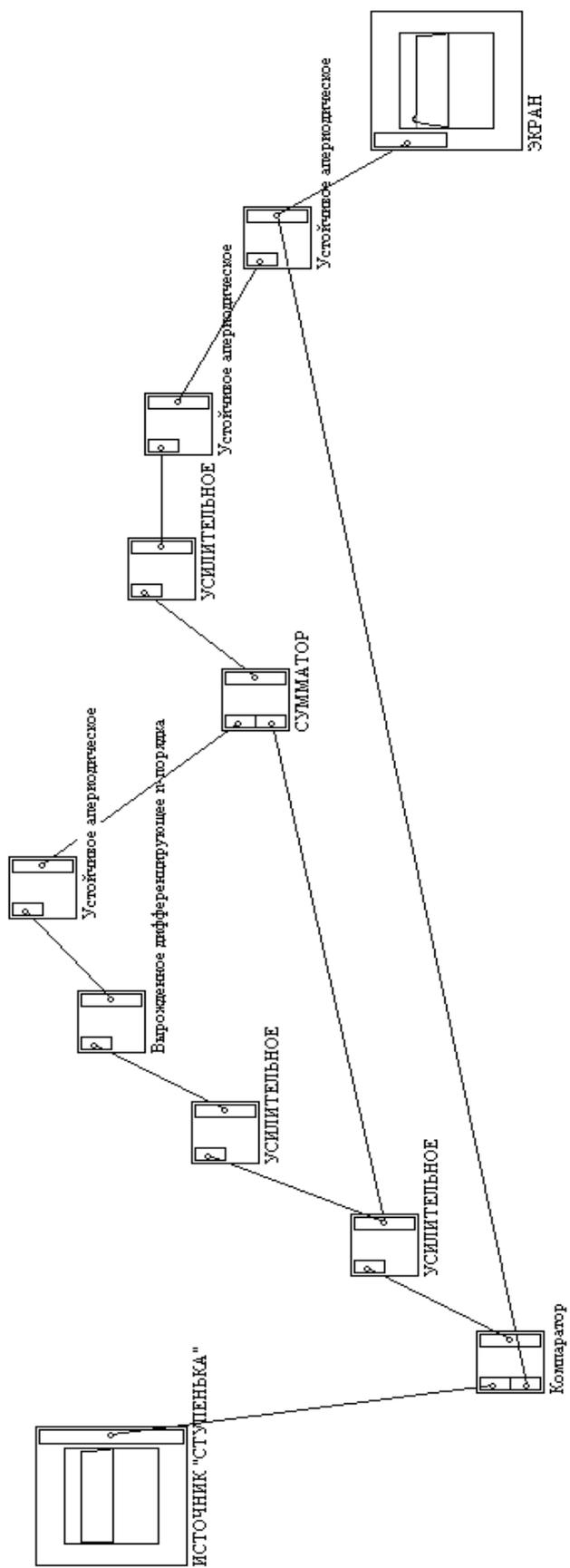


Рис. 94

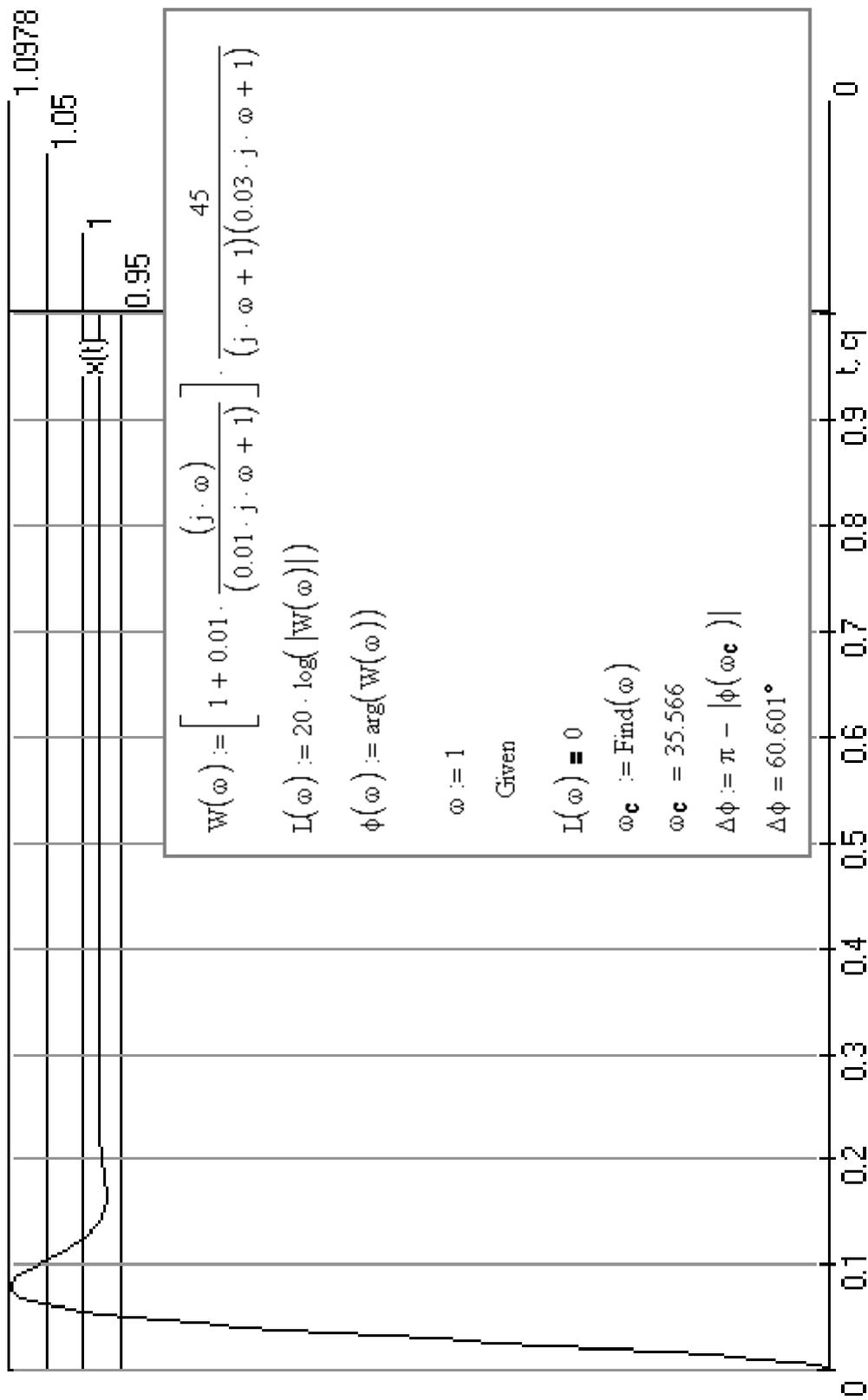


Рис. 95

В каждом варианте индивидуального задания заданы два метода повышения точности управления. Обозначения: 1 – повышение точности САУ увеличением коэффициента усиления; 2 – повышение точности САУ с использованием изодромного устройства; 3А и 3В – повышение точности САУ с введением производной в закон управления по схеме А и В соответственно (рис. 79).

№	Метод повышения точности	Тип $W_{раз}(p)$	Параметры $W_{раз}(p)$	Показатели качества управления					
				$t_y, c$ , не более	$t_p, c$ , не более	$H_{max}$ , не более	Точность воспроизведения, не менее	$\Delta\varphi(\omega_c), ^\circ$ , не менее	$\Delta L$ , дБ, не менее
1.	1, 3А	А.	$k = 2$ $T_1 = 1,2$ $T_2 = 0,4$	–	0,3	15 %	95 %	60	–
2.	1, 3В	Б.	$k = 1,5$ $T_1 = 1$ $T_2 = 0,03$	0,8	–	15 %	–	–	20
3.	2, 3А	В.	$k = 2$ $T_1 = 0,05$ $T_2 = 1$ $T_3 = 0,03$	–	1	10 %	95 %	60	–
4.	1, 3В	Е.	$k = 2$ $T_1 = 0,05$ $T_2 = 1$ $T_3 = 0,3$	0,6	–	10 %	96 %	–	20
5.	2, 3А	А.	$k = 2$ $T_1 = 1,2$ $T_2 = 0,4$	–	0,3	15 %	95 %	60	–
6.	1, 3А	В.	$k = 2$ $T_1 = 0,05$ $T_2 = 1$ $T_3 = 0,03$	–	1	10 %	95 %	60	–
7.	2, 3А	А.	$k = 5$ $T_1 = 0,2$ $T_2 = 0,2$	–	0,6	10 %	95 %	55	–
8.	2, 3В	Г.	$k = 5$ $T_1 = 0,03$ $T = 1$ $\xi = 0,8$	0,7	1,2	12 %	98 %	45	–

№	Метод повышения точности	Тип $W_{раз}(p)$	Параметры $W_{раз}(p)$	Показатели качества управления					
				$t_y, c$ , не более	$t_p, c$ , не более	$H_{max}$ , не более	Точность воспроизведения, не менее	$\Delta\varphi(\omega_c), ^\circ$ , не менее	$\Delta L, дБ$ , не менее
9.	1, 3А	Д.	$k = 3$ $T_1 = 0,3$ $T = 0,05$ $\xi = 0,8$	1,5	–	15 %	–	–	15
10.	2, 3В	Б.	$k = 1,5$ $T_1 = 1$ $T_2 = 0,03$	0,8	–	15 %	–	–	20
11.	1, 3В	Г.	$k = 5$ $T_1 = 0,03$ $T = 1$ $\xi = 0,8$	0,7	1,2	12 %	98 %	45	–
12.	2, 3А	Д.	$k = 3$ $T_1 = 0,3$ $T = 0,05$ $\xi = 0,8$	1,5	–	15 %	–	–	15
13.	1, 3В	Б.	$k = 5$ $T_1 = 0,02$ $T_2 = 0,1$	–	0,5	5 %	–	–	20
14.	2, 3А	В.	$k = 2$ $T_1 = 0,2$ $T_2 = 0,3$ $T_3 = 0,5$	–	0,8	10 %	92 %	90	–
15.	1, 3А	Д.	$k = 5$ $T_1 = 0,2$ $T = 0,05$ $\xi = 0,6$	0,8	1,5	15 %	–	45	–
16.	1, 3В	Е.	$k = 1$ $T_1 = 0,05$ $T_2 = 0,02$ $T_3 = 0,03$	–	0,4	20 %	90 %	–	15
17.	2, 3В	Е.	$k = 2$ $T_1 = 0,05$ $T_2 = 1$ $T_3 = 0,3$	0,6	–	10 %	96 %	–	20

№	Метод повышения точности	Тип $W_{раз}(p)$	Параметры $W_{раз}(p)$	Показатели качества управления					
				$t_y, c$ , не более	$t_p, c$ , не более	$H_{max}$ , не более	Точность воспроизведения, не менее	$\Delta\varphi(\omega_c), ^\circ$ , не менее	$\Delta L$ , дБ, не менее
18.	1, 3A	A.	$k = 5$ $T_1 = 0,2$ $T_2 = 0,4$	0,2	0,4	12 %	95 %	45	–
19.	1, 3B	Г.	$k = 2$ $T_1 = 0,01$ $T = 0,02$ $\xi = 0,9$	–	0,1	35 %	80 %	60	–
20.	2, 3B	Г.	$k = 5$ $T_1 = 0,5$ $T = 0,02$ $\xi = 0,5$	–	0,7	10 %	95 %	60	–
21.	2, 3A	Д.	$k = 1$ $T_1 = 0,3$ $T = 0,1$ $\xi = 0,6$	–	1,3	5 %	–	–	20
22.	2, 3B	Е.	$k = 2$ $T_1 = 0,01$ $T_2 = 0,02$ $T_3 = 0,03$	–	0,3	20 %	95 %	45	–
23.	2, 3A	Б.	$k = 1$ $T_1 = 0,1$ $T_2 = 0,6$	2	–	12 %	100 %	60	–
24.	2, 3B	В.	$k = 3$ $T_1 = 0,2$ $T_2 = 0,3$ $T_3 = 0,5$	–	1,5	10 %	90 %	90	–
25.	1, 3A	Г.	$k = 2.2$ $T_1 = 0,1$ $T = 0,4$ $\xi = 0,8$	–	1,8	20 %	90 %	45	–
26.	2, 3B	Б.	$k = 3$ $T_1 = 0,1$ $T_2 = 0,2$	–	1	15 %	98 %	60	–

№	Метод повышения точности	Тип $W_{раз}(p)$	Параметры $W_{раз}(p)$	Показатели качества управления					
				$t_p, c$ , не более	$t_p, c$ , не более	$H_{max}$ , не более	Точность воспроизведения, не менее	$\Delta\varphi(\omega_c), ^\circ$ , не менее	$\Delta L, дБ$ , не менее
27.	1, 3А	В.	$k = 5$ $T_1 = 0,2$ $T_2 = 0,03$ $T_3 = 0,05$	–	0,15	10 %	95 %	45	–
28.	1, 3А	А.	$k = 10$ $T_1 = 0,2$ $T_2 = 0,8$	0,8	–	15 %	95 %	55	–
29.	1, 3В	Б.	$k = 0,6$ $T_1 = 0,1$ $T_2 = 0,2$	–	1,2	–	100 %	60	–
30.	1, 3В	Е.	$k = 0,5$ $T_1 = 0,5$ $T_2 = 0,05$ $T_3 = 0,05$	–	1	10 %	75 %	45	10
31.	1, 3В	Д.	$k = 2,1$ $T_1 = 0,3$ $T = 0,1$ $\xi = 1,1$	–	0,8	5 %	95 %	40	–
32.	2, 3В	Г.	$k = 0,8$ $T_1 = 0,1$ $T = 0,1$ $\xi = 0,8$	–	0,6	15 %	80 %	45	–
33.	2, 3А	Е.	$k = 0,6$ $T_1 = 0,2$ $T_2 = 0,03$ $T_3 = 0,5$	–	1,1	–	90 %	60	10
34.	1, 3А	Д.	$k = 1,1$ $T_1 = 0,03$ $T = 0,29$ $\xi = 0,9$	1,5	–	8 %	100 %	–	10
35.	2, 3А	В.	$k = 0,8$ $T_1 = 0,02$ $T_2 = 0,3$ $T_3 = 0,2$	–	0,8	10 %	90 %	60	–

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ  
К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ  
СТУДЕНТАМИ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

## Общие сведения

Целью выполнения контрольной работы студентами заочной формы обучения является освоение методов расчета и анализа систем автоматического управления. Задачи, аналогичные решаемым в контрольной работе, входят в состав экзаменационных тестов.

Контрольная работа состоит из *восьми задач*, решаемых по индивидуальным вариантам исходных данных. Каждая задача оценивается в **20 баллов**. Максимальная сумма баллов за контрольную работу составляет **160 баллов**. Условием допуска к защите работы является набор *не менее 120 баллов*. Защита контрольных работ проводится на практических занятиях по расписанию дней заочника и во время сессии. **Выполнение и успешная защита контрольной работы является обязательным условием допуска к экзамену по дисциплине.** На защите проверяется самостоятельность выполнения работы путем проверочных заданий на демонстрацию основных навыков использования программного обеспечения; способность анализировать полученные результаты («читать» графики, пояснять численные значения характеристик); способность вносить изменения в решения при изменении исходных данных по заданию преподавателя. В процессе защиты разрешается пользоваться данным УМК, распечатками выданных электронных материалов по курсу и любой справочной литературой.

Индивидуальный вариант исходных данных к выполнению контрольной работы задается трехэлементным шифром, например: **А 12 М**. Первый элемент шифра – буква – означает вариант схемы системы автоматического управления (САУ), второй элемент шифра – число – означает вариант системы уравнений. Каждое уравнение описывает соответствующий элемент в заданной схеме САУ; номер уравнения соответствует номеру элемента. **Варианты схем и систем уравнений приведены в данном УМК в разделе «Практические работы по теории автоматического управления технологическими системами» – см. варианты индивидуальных заданий к Работе № 3.** Третий элемент шифра – буква или две буквы – задает критерий устойчивости, который необходимо использовать при решении задачи № 5 задания на контрольную работу: **М** – критерий Михайлова; **Г** – критерий Гурвица; **НА** – критерий Найквиста для амплитудно-фазовой характеристики САУ; **НЛ** – критерий Найквиста для логарифмических частотных характеристик.

Для выполнения контрольной работы рекомендуется использовать пакет Mathcad или любой другой пакет математического анализа. Для ре-

шения задачи № 7 требуется специальная программа моделирования систем автоматического управления  $\tau.u.exe$ , которая выдается в составе электронных материалов по дисциплине.

Контрольная работа сдается на проверку в распечатанном виде **не позднее** календарной даты начала сессии. Титульный лист контрольной работы оформляется в соответствии с **прил. 2**. Первой страницей после титульного листа подшивается распечатанный вариант индивидуального задания, оформленного в соответствии с **прил. 3**. Второй страницей подшивается распечатанный бланк проверки и защиты контрольной работы (**прил. 4**). Решение о времени и месте защиты принимается преподавателем после проверки. На обложке контрольной работы указываются фамилия, имя, отчество полностью и контактный телефон или адрес электронной почты для назначения срока защиты после проверки. До начала сессии контрольные работы на проверку можно присылать по электронной почте.

При выполнении контрольной работы рекомендуется пользоваться примером и первым разделом данного УМК. В разделах «Теоретические сведения» и «Примеры и практические рекомендации по использованию программного обеспечения» каждой из работ практикума рассматриваются соответствующие методы анализа САУ и примеры реализации расчетов.

### Задание на контрольную работу

1. По заданным дифференциальным уравнениям элементов САУ определить передаточные функции элементов. Определить типы элементарных звеньев, входящих в состав элементов.

2. Определить передаточную функцию *разомкнутой* и *замкнутой* САУ (при необходимости использовать правила переноса узлов). Преобразовать *разомкнутую* систему к последовательному соединению типовых элементарных звеньев. Определить типы элементарных звеньев, входящих в состав преобразованной *разомкнутой* САУ.

3. Построить амплитудно-фазовую характеристику (АФХ) *разомкнутой* системы. Рассчитать и построить логарифмические амплитудно-частотную (ЛАЧХ) и фазочастотную (ЛФЧХ) характеристики *разомкнутой* САУ, приведенной к последовательному соединению типовых элементарных звеньев.

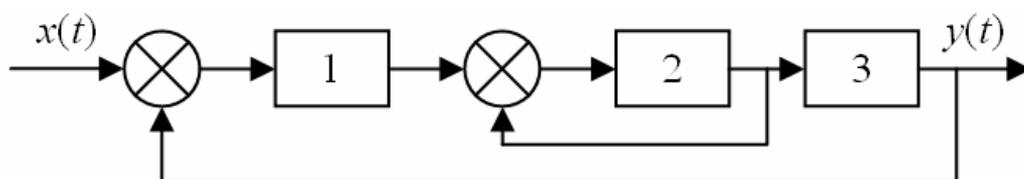
4. Рассчитать и построить асимптотическую ЛАЧХ *разомкнутой* САУ.  
 5. Оценить устойчивость *замкнутой* САУ по теореме Ляпунова.  
 6. Оценить устойчивость *замкнутой* САУ по заданному критерию устойчивости.

7. Подтвердить результат оценки устойчивости построением переходного процесса *замкнутой* САУ в программе моделирования систем автоматического управления tau.exe.

8. Используя метод D-разбиения, оценить влияние на устойчивость *замкнутой* САУ коэффициента статического преобразования *разомкнутой* САУ. Подтвердить результат анализа с использованием теоремы Ляпунова для значений коэффициента, выбранного внутри и вне пределов области устойчивости, построенной в результате D-разбиения.

### Пример выполнения контрольной работы

Рассмотрим пример выполнения контрольной работы по исходным данным: схеме САУ и уравнениям ее элементов, приведенным на рис. 96.



$$1) 0,5 \frac{dy(t)}{dt} - 1,8 \frac{dx(t)}{dt} + y(t) = 0;$$

$$2) 0,1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2x(t);$$

$$3) 0,5 \frac{dy(t)}{dt} + x(t) = 2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2}.$$

Рис. 96

#### Задача № 1

**Условие:** по заданным дифференциальным уравнениям элементов САУ определить передаточные функции элементов; определить типы элементарных звеньев, входящих в состав элементов.

Определим передаточную функцию первого элемента САУ:

$$\begin{aligned}
0,5 \frac{dy(t)}{dt} - 1,8 \frac{dx(t)}{dt} + y(t) &= 0; \\
0,5 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) &= 1,8 \frac{dx(t)}{dt}; \\
0,5p \cdot y(p) + y(p) &= 1,8p \cdot x(p); \\
y(p)(0,5p + 1) &= 1,8p \cdot x(p); \\
W_1(p) = \frac{y(p)}{x(p)} &= \frac{1,8p}{(0,5p + 1)} = p \cdot \frac{1,8}{(0,5p + 1)}.
\end{aligned}$$

Передаточная функция первого элемента САУ  $W_1(p)$  представляет собой произведение передаточных функций типовых элементарных звеньев (прил. 1), и, следовательно, элемент является последовательным соединением идеального дифференцирующего звена и апериодического звена первого порядка с коэффициентом усиления  $k = 1,8$  и постоянной времени  $T = 0,5$  с.

Определим передаточную функцию второго элемента САУ:

$$\begin{aligned}
0,1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) &= 2x(t); \\
0,1p \cdot y(p) + y(p) &= 2x(p); \\
y(p) \cdot (0,1p + 1) &= 2x(p); \\
W_2(p) = \frac{y(p)}{x(p)} &= \frac{2}{(0,1p + 1)}.
\end{aligned}$$

Передаточная функция второго элемента САУ  $W_2(p)$  представляет собой апериодическое устойчивое звено первого порядка с коэффициентом усиления  $k = 2$  и постоянной времени  $T = 0,1$  с.

Определим передаточную функцию третьего элемента САУ:

$$\begin{aligned}
0,5 \frac{dy(t)}{dt} + x(t) &= 2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2}; \\
2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 0,5 \frac{dy(t)}{dt} &= x(t); \\
2p^2 \cdot y(p) - 0,5p \cdot y(p) &= x(p); \\
y(p) \cdot (2p^2 - 0,5p) &= x(p); \\
W_3(p) = \frac{y(p)}{x(p)} &= \frac{1}{(2p^2 - 0,5p)} = \frac{1}{0,5p \cdot (4p - 1)} = \frac{2}{p \cdot (4p - 1)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{2}{(4p - 1)}.
\end{aligned}$$

Передаточная функция третьего элемента САУ  $W_3(p)$  представляет собой произведение передаточных функций типовых элементарных звеньев,

и, следовательно, элемент является последовательным соединением идеального интегрирующего звена и апериодического неустойчивого первого порядка с коэффициентом усиления  $k = 2$  и постоянной времени  $T = 4$  с.

### Задача № 2

**Условие:** определить передаточную функцию *разомкнутой* и *замкнутой* САУ, при необходимости использовать правила переноса узлов; преобразовать *разомкнутую* систему к последовательному соединению типовых элементарных звеньев; определить типы элементарных звеньев, входящих в состав преобразованной *разомкнутой* САУ.

Пример решения задачи № 2 по заданным исходным данным рассмотрен в подразделе «Примеры и практические рекомендации по использованию программного обеспечения» **Работы № 3**. Конечный результат решения задачи показан на рис. 32. Определение типов элементарных звеньев, входящих в состав преобразованной разомкнутой САУ, приведено в выводах, следующих непосредственно после рис. 32.

### Задача № 3

**Условие:** построить амплитудно-фазовую характеристику (АФХ) *разомкнутой* системы; рассчитать и построить логарифмические амплитудно-частотную (ЛАЧХ) и фазочастотную (ЛФЧХ) характеристики *разомкнутой* САУ, приведенной к последовательному соединению типовых элементарных звеньев.

Одной из основных характеристик САУ для режима стационарных колебаний является амплитудно-фазовая характеристика (АФХ), представляющая собой функцию комплексной частоты  $j\omega$ . Выражение для расчета АФХ получают из выражения передаточной функции заменой  $p$  на комплексную переменную  $j\omega$ .

АФХ определяет изменение амплитуды и фазы выходной величины САУ или элемента при приложении на входе гармонического воздействия.  $A(\omega)$  – модуль (амплитуда) АФХ, равный отношению амплитуд выходного сигнала к входному, а  $\varphi(\omega)$  – аргумент (фаза), равный сдвигу фаз выходного сигнала относительно входного. Значение АФХ, рассчитанное для конкретного значения частоты входного сигнала  $\omega$ , показывает, во сколько раз амплитуда выходного сигнала САУ будет отличаться от амплитуды входного сигнала данной частоты и насколько будет сдвинут по фазе выходной сигнал относительно входного.

Передаточная функция разомкнутой системы, приведенная к последовательному соединению типовых элементарных звеньев, имеет вид:

$$W_p(p) = \frac{1,2}{(0,5p+1)(0,033p+1)(4p-1)}$$

Для построения АФХ используется частотная передаточная функция системы, получаемая подстановкой в формулу передаточной функции комплексной частоты  $j\omega$  вместо переменной Лапласа  $p$ :

$$W_p(j\omega) = \frac{1,2}{(0,5j\omega+1)(0,033j\omega+1)(4j\omega-1)}$$

АФХ строится для значений частоты входного сигнала  $\omega$  от 0 до  $+\infty$ . Введем формулу для расчета АФХ и диапазон изменения аргумента (частоты  $\omega$ ) в Mathcad, как показано на рис. 97.

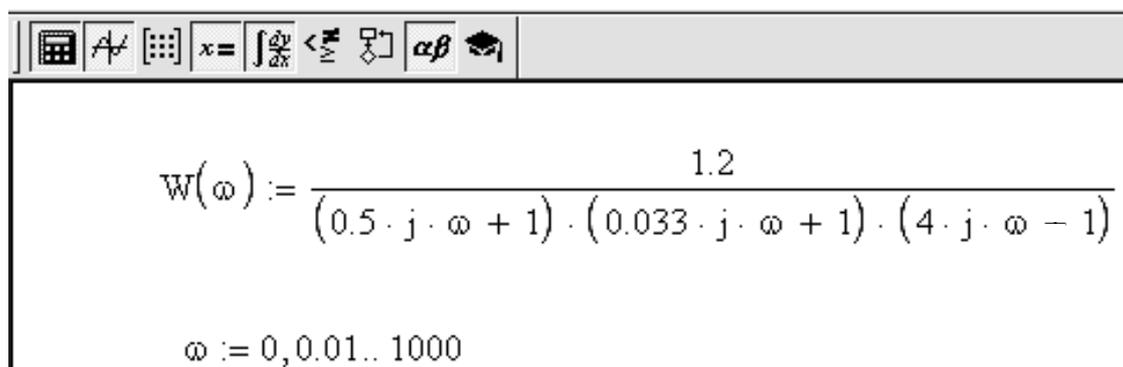


Рис. 97

При построении АФХ, которая является функцией комплексной переменной и строится в комплексной плоскости, по горизонтальной оси следует откладывать значения действительной части  $W(\omega)$ , а по вертикальной оси – значения мнимой, рассчитываемые для заданных значений частоты. В Mathcad этот расчет можно выполнить с использованием встроенных функций  $\text{Re}(W(\omega))$  и  $\text{Im}(W(\omega))$ . Результат построения графика АФХ для разомкнутой системы имеет вид, приведенный на рис. 98.

АФХ одновременно определяет изменения и амплитуды, и фазы выходного сигнала САУ относительно входного. На практике удобнее анализировать отдельно изменения амплитуд сигналов и сдвиги фаз, вносимые САУ на различных частотах, и строить отдельно логарифмическую амплитудно-частотную  $\text{lg}A(\omega)$  и логарифмическую фазочастотную  $\varphi(\omega)$  характеристики САУ или звена. При построении логарифмической амплитудно-

частотной (ЛАЧХ) и логарифмической фазочастотной характеристики (ЛФЧХ) по оси абсцисс откладывается угловая частота в логарифмическом масштабе. Отрезок логарифмической шкалы, соответствующий увеличению частоты в десять раз, называется декадой. По оси ординат откладываются значения ЛАЧХ в децибелах или значения ЛФЧХ в градусах. Для этой цели на ось ординат наносится равномерный масштаб.

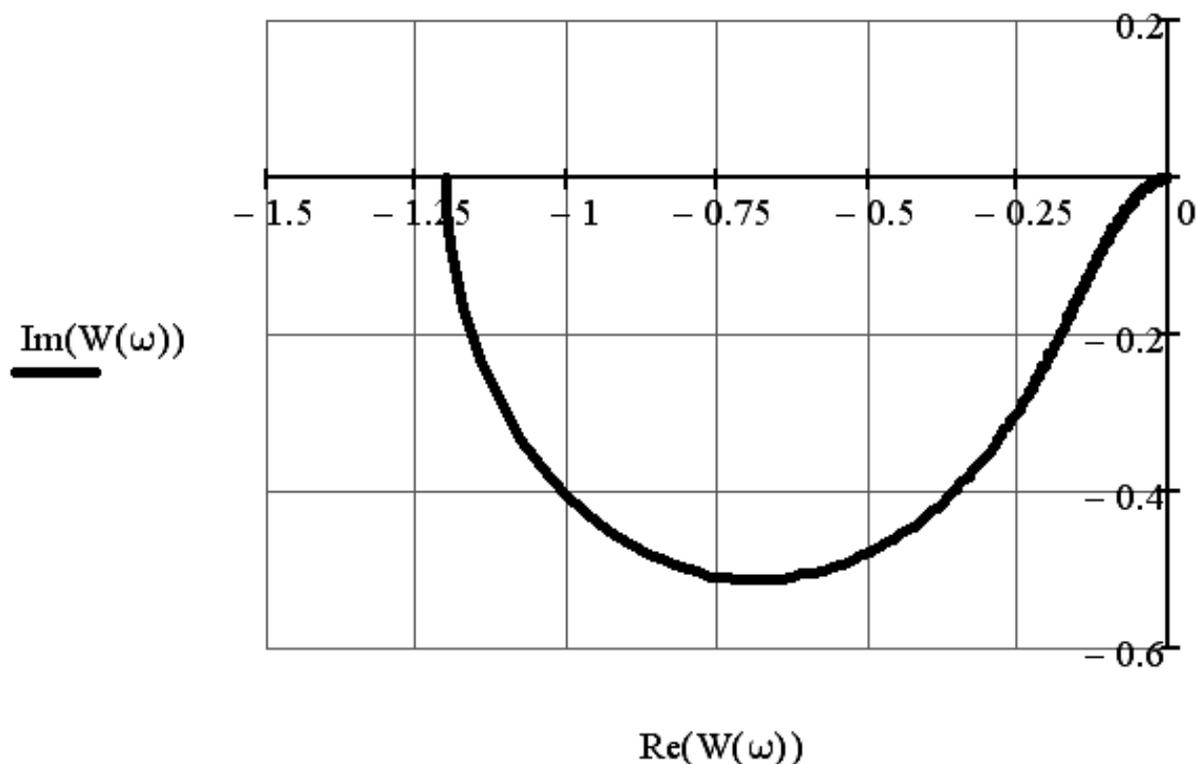


Рис. 98

Выражение для расчета ЛАЧХ в децибелах имеет вид:

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg A(\omega).$$

Введем в рабочем поле Mathcad формулы расчета логарифмической амплитудно-частотной (ЛАЧХ) и логарифмической фазочастотной (ЛФЧХ) характеристик разомкнутой САУ, а также диапазон изменения аргумента – частоты  $\omega$  (рис. 99).

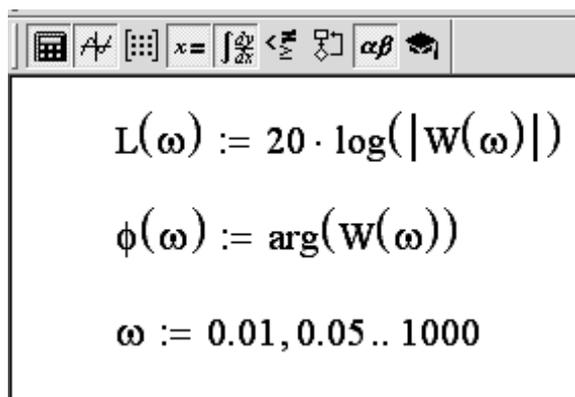


Рис. 99

Для построения графика ЛАЧХ укажем в шаблоне построения в месте ввода по горизонтальной оси имя аргумента –  $\omega$ , а в месте ввода по вертикальной оси – имя функции  $L(\omega)$ . При построении графиков по умолчанию Mathcad назначает равномерный масштаб по обеим осям. Однако ЛАЧХ и ЛФЧХ САУ принято строить в полулогарифмическом формате: значения частоты  $\omega$  на горизонтальной оси откладывают в логарифмическом формате, а значения  $L(\omega)$  по горизонтальной – в равномерном масштабе. Отредактируем график – назначим логарифмический масштаб по оси частот и вывод линий координатной сетки. Для этого, вызвав в поле построения графика щелчком правой кнопки мыши меню и выбрав пункт *Format (Формат)*, в закладке *XY-Axes (XY-оси)* установим флажки построения сетки для обеих осей *Grid lines (Сетка)*, пересечения координатных осей *Crossed (Пересеченные)* и флажок вывода логарифмического масштаба по оси *X – Log Scale (Журнал)*. Результат построения ЛАЧХ для разомкнутой системы имеет вид, приведенный на рис. 100. Аналогично построим и отредактируем график ЛФЧХ для разомкнутой САУ (рис. 100).

#### Задача № 4

**Условие:** рассчитать и построить асимптотическую ЛАЧХ разомкнутой САУ.

Передаточная функция разомкнутой системы, приведенная к последовательному соединению типовых элементарных звеньев, имеет вид:

$$W_p(p) = \frac{1,2}{(0,5p + 1)(0,033p + 1)(4p - 1)}.$$

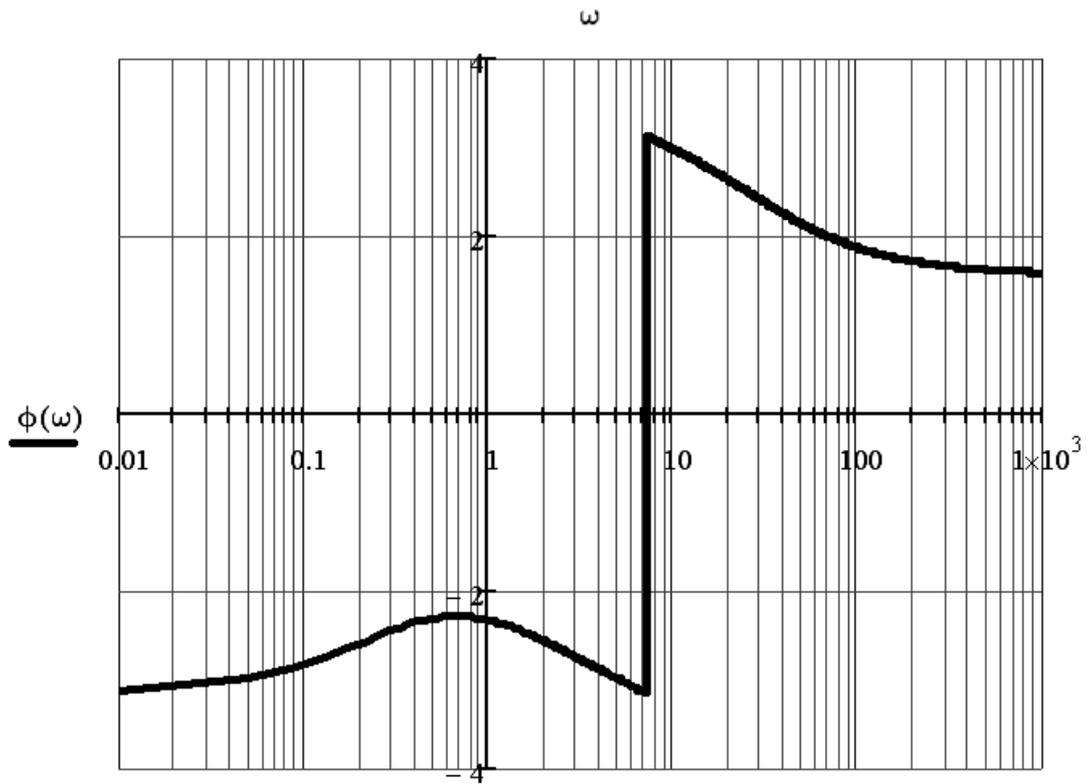
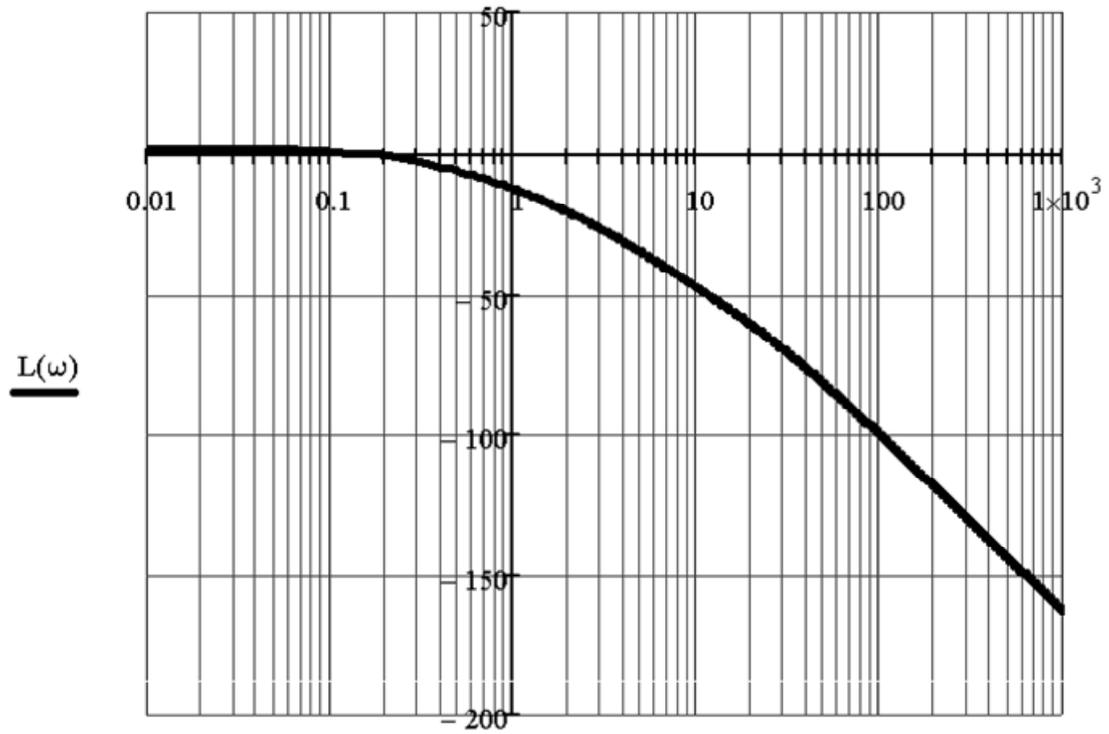


Рис. 100

Рассчитаем параметры, необходимые для построения асимптотической ЛАЧХ разомкнутой САУ. Определим частоты сопряжения асимптотической ЛАЧХ как величины, обратные постоянным времени звеньев, входящих в состав последовательного соединения:

$$\omega_1 = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ c}^{-1}; \quad \omega_2 = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ c}^{-1}; \quad \omega_3 = \frac{1}{0,033} = 30,3 \text{ c}^{-1}.$$

Определим угол наклона проведения первой асимптоты в частотном диапазоне до первой частоты сопряжения по формуле:

$$-20\nu \text{ дБ/дек},$$

где  $\nu$  – степень астатизма разомкнутой САУ.

Степень астатизма разомкнутой САУ равна 0, поэтому угол наклона первой асимптоты составит 0 дБ/дек.

Определим высоту проведения первой асимптоты для любой частоты, меньше первой частоты сопряжения  $\omega_1$ , например, для частоты 0,1 Гц:

$$20 \cdot \lg(k/\omega^\nu) = 20 \cdot \lg(1,2/0,1^0) = 20 \cdot \lg(1,2) = 1,58 \text{ дБ}.$$

В остальных частотных диапазонах угол наклона асимптоты будет определяться типом звена. Частота сопряжения  $\omega_1$  соответствует апериодическому неустойчивому звену первого порядка, которое изменяет наклон ЛАЧХ на  $-20$  дБ/дек, следовательно, с учетом нулевого наклона первой асимптоты в диапазоне от первой до второй частоты сопряжения угол наклона ЛАЧХ составит  $-20$  дБ/дек. Вторая и третья частоты сопряжения также соответствуют апериодическим звеньям, каждое из которых изменяет наклон в своем диапазоне на  $-20$  дБ/дек, следовательно, наклон ЛАЧХ в третьем и четвертом диапазоне частот составит  $-40$  дБ/дек и  $-60$  дБ/дек соответственно. Результат построения асимптотической ЛАЧХ имеет вид, приведенный на рис. 101. Как видно, результат построения асимптотической ЛАЧХ достаточно близко совпадает с результатом точного расчета и построения ЛАЧХ, выполненного в **Задаче № 4** (рис. 100).

### Задача № 5

**Условие:** оценить устойчивость *замкнутой* САУ по теореме Ляпунова.

Согласно теореме Ляпунова, для устойчивости САУ необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения имели отрицательную действительную часть.

Если известна передаточная функция разомкнутой САУ, то характеристическое уравнение соответствующей ей замкнутой САУ может быть получено как сумма числителя и знаменателя передаточной функции разомкнутой САУ.

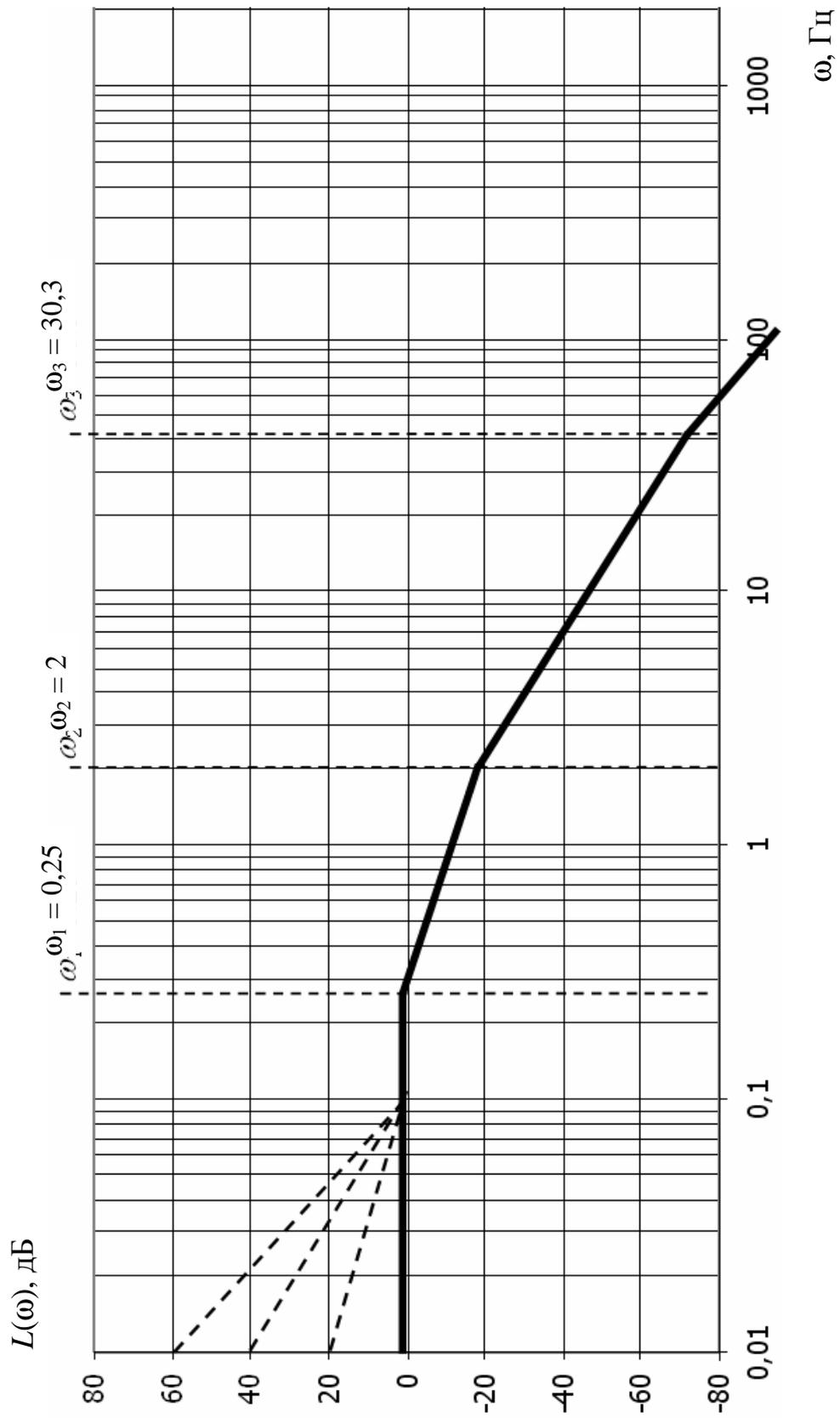


Рис. 101

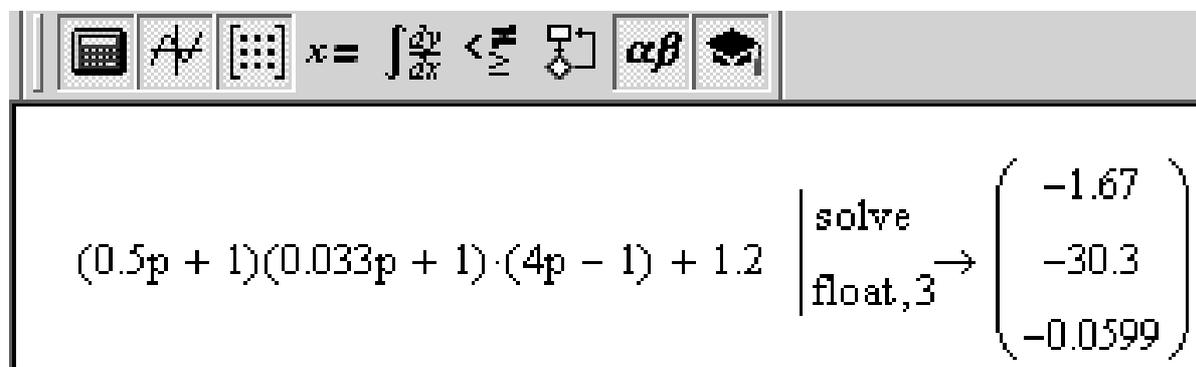
Передаточная функция разомкнутой системы, приведенная к последовательному соединению типовых элементарных звеньев, имеет вид:

$$W_p(p) = \frac{1,2}{(0,5p+1)(0,033p+1)(4p-1)}.$$

Запишем характеристический полином замкнутой САУ:

$$A_3(p) = 1,2 + (0,5p+1)(0,033p+1)(4p-1) = 0.$$

Введем характеристическое уравнение замкнутой САУ в рабочем поле Mathcad, найдем его корни с помощью символьного оператора *Solve* (*Решить*) и пересчитаем ответ в десятичную дробь с точностью до трех значимых цифр в числе, применив символьный оператор *Float* (рис. 102).



The screenshot shows the Mathcad software interface. At the top, there is a toolbar with various icons. Below the toolbar, the characteristic equation is entered:  $(0.5p + 1)(0.033p + 1) \cdot (4p - 1) + 1.2$ . To the right of the equation, the *solve* and *float, 3* operators are used to find the roots. The result is shown in a vector form:  $\begin{pmatrix} -1.67 \\ -30.3 \\ -0.0599 \end{pmatrix}$ .

Рис. 102

Множество корней характеристического уравнения замкнутой САУ представлено на рис. 102 в круглых скобках. Все корни отрицательны, следовательно, замкнутая САУ является *устойчивой*.

### Задача № 6

**Условие:** оценить устойчивость *замкнутой* САУ по заданному критерию устойчивости.

**Критерий Гурвица** позволяет оценить устойчивость САУ с помощью анализа коэффициентов характеристического уравнения. Если характеристическое уравнение записать в виде:

$$A(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0,$$

то система будет устойчива, если при  $a_0 > 0$  все  $n$  определителей Гурвица, получаемые из матрицы коэффициентов, также будут больше нуля.

Матрица коэффициентов Гурвица имеет вид:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_n \end{bmatrix}$$

Она составляется следующим образом:

- по главной диагонали выписываются все коэффициенты характеристического уравнения, начиная с  $a_1$ ;
- каждая строка дополняется коэффициентами с возрастающими индексами слева направо так, чтобы чередовались строки с четными и нечетными индексами;
- в случае отсутствия коэффициента, если индекс меньше 0 или больше  $n$ , на его месте пишется 0.

Определители Гурвица составляются по следующему правилу:

$$\Delta_1 = a_1 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0; \dots$$

Последний определитель включает в себя всю матрицу.

Характеристическое уравнение замкнутой САУ, полученное при решении **Задачи № 5**, имеет вид:

$$A_3(p) = 1,2 + (0,5p + 1)(0,033p + 1)(4p - 1) = 0.$$

После приведения к полиномиальному виду (в Mathcad данная операция может быть выполнена с применением команды *Expand*):

$$A(p) = 0,066p^3 + 2,1155p^2 + 3,467p + 0,2 = 0.$$

В общем виде:

$$A(p) = a_0p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3 = 0;$$

$$a_0 = 0,066; \quad a_1 = 2,1155; \quad a_2 = 3,467; \quad a_3 = 0,2.$$

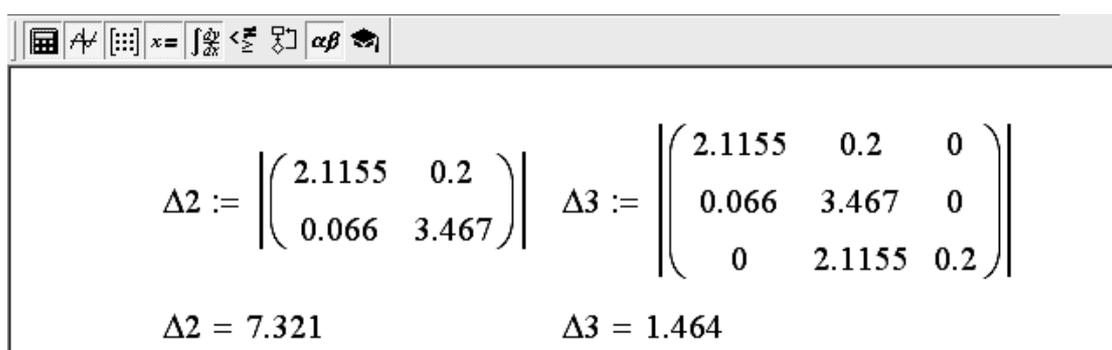
Составим матрицу Гурвица для замкнутой системы и запишем определители Гурвица:

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix}; \quad M = \begin{bmatrix} 2,1155 & 0,2 & 0 \\ 0,066 & 3,467 & 0 \\ 0 & 2,1155 & 0,2 \end{bmatrix};$$

$$\Delta_1 = 2,1155; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2,1155 & 0,2 \\ 0,066 & 3,467 \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2,1155 & 0,2 & 0 \\ 0,066 & 3,467 & 0 \\ 0 & 2,1155 & 0,2 \end{vmatrix}.$$

Как следует из критерия Гурвица, для устойчивости заданной САУ необходимо, чтобы при  $a_0 > 0$  все три определителя Гурвица, получаемые из матрицы коэффициентов, также были больше нуля. Для заданной замкнутой САУ  $a_0 = 0,066 > 0$ ;  $\Delta_1 = 2,1155 > 0$ .

Вычислим оставшиеся определители с использованием Mathcad (рис. 103).



$$\Delta_2 := \left| \begin{pmatrix} 2.1155 & 0.2 \\ 0.066 & 3.467 \end{pmatrix} \right| \quad \Delta_3 := \left| \begin{pmatrix} 2.1155 & 0.2 & 0 \\ 0.066 & 3.467 & 0 \\ 0 & 2.1155 & 0.2 \end{pmatrix} \right|$$

$$\Delta_2 = 7.321 \quad \Delta_3 = 1.464$$

Рис. 103

Как видно из рис. 103,  $\Delta_2 = 7,321 > 0$ ;  $\Delta_3 = 1,464 > 0$ . Таким образом, по критерию Гурвица, замкнутая САУ устойчива, что согласуется с оценкой устойчивости по теореме Ляпунова, выполненной при решении **Задачи № 5**.

**Критерий Михайлова** формулируется следующим образом: САУ является устойчивой, если при изменении частоты от 0 до  $+\infty$  годограф вектора Михайлова  $a(j\omega)$  начинается на положительной части вещественной оси и, нигде не обращаясь в 0, поворачиваясь против часовой стрелки, проходит последовательно  $n$  квадрантов комплексной плоскости ( $n$  – порядок характеристического уравнения).

Выражение для расчета и построения годографа получают подстановкой в характеристическое уравнение вместо оператора Лапласа комплексной переменной  $j\omega$ :

$$a(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n.$$

Характеристическое уравнение замкнутой САУ, полученное при решении **Задачи № 5**, имеет вид:

$$A(p) = 0,066p^3 + 2,1155p^2 + 3,467p + 0,2 = 0.$$

Запишем выражение для расчета годографа Михайлова:

$$A(j\omega) = 0,066(j\omega)^3 + 2,1155(j\omega)^2 + 3,467j\omega + 0,2 = 0.$$

Годограф строится для значений частоты входного сигнала  $\omega$  от 0 до  $+\infty$ .

**Важно!** На практике для каждой САУ диапазон рассматриваемых частот подбирается индивидуально. Верхний предел подбирают экспериментально в режиме увеличения так, чтобы годограф имел законченный вид – уходил в бесконечность в некотором квадранте комплексной плоскости. В Mathcad введем формулу для расчета годографа  $A(\omega)$ , диапазон изменения аргумента (частоты  $\omega$ ) примем от 0 до 8 с шагом 0,01 и построим график (рис. 104).

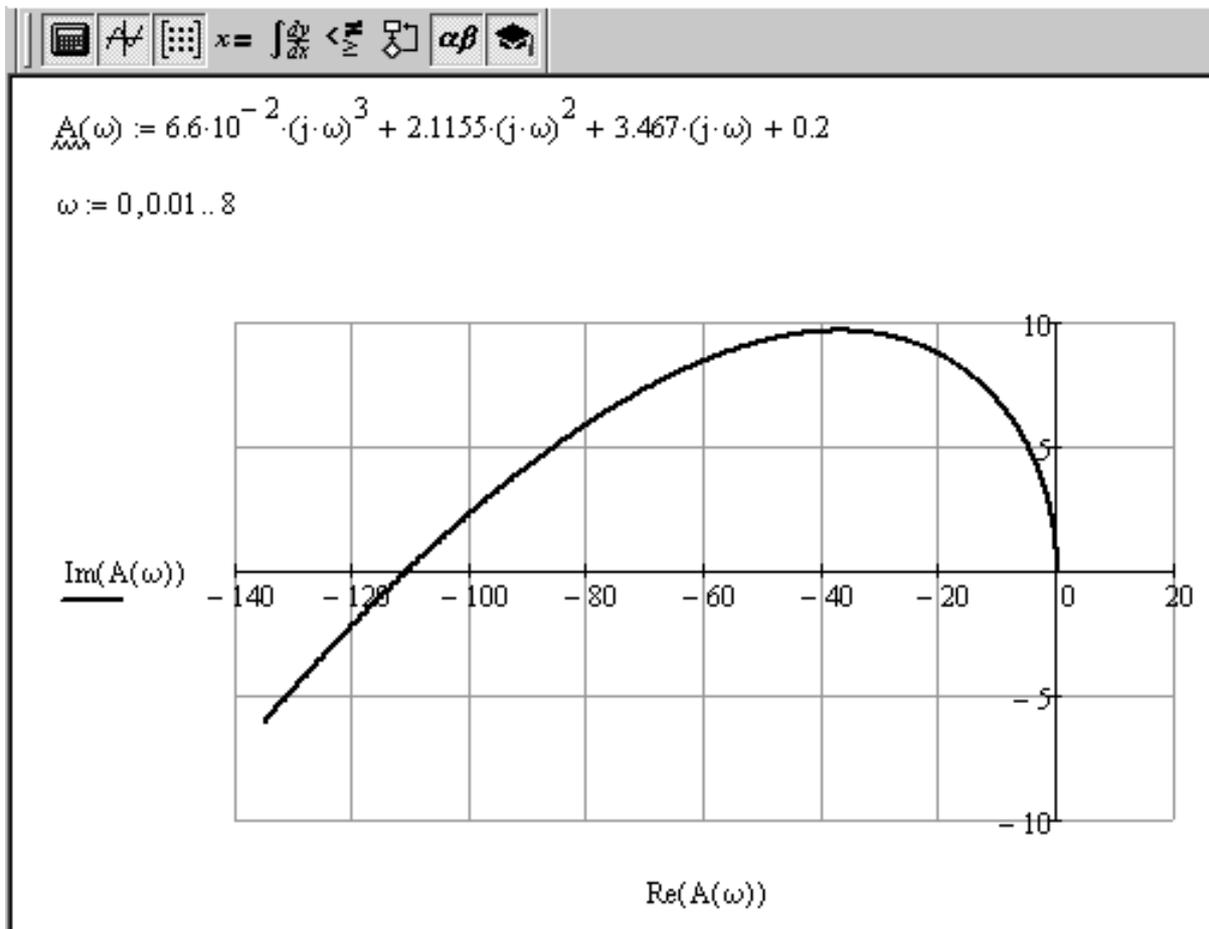


Рис. 104

Как видно, годограф Михайлова для заданной замкнутой САУ начинается на положительной части действительной оси комплексной плоскости (при  $\omega = 0$   $\text{Re}(A(\omega)) = 0,2$ ) и, поворачиваясь против часовой стрелки, проходит последовательно первый, второй квадрант комплексной плоскости.

сти и в третьем уходит в бесконечность. Таким образом, по критерию Михайлова, замкнутая САУ устойчива, что согласуется с оценкой устойчивости по теореме Ляпунова, выполненной при решении **Задачи № 5**.

**Критерий Найквиста для амплитудно-фазовой характеристики** формулируется следующим образом: замкнутая система будет устойчивой, если АФХ соответствующей разомкнутой системы при изменении частоты от 0 до  $+\infty$  не охватывает точку с координатами  $[-1, j0]$ .

График АФХ для разомкнутой системы, построенный в результате решения **Задачи № 3**, имеет вид, приведенный на рис. 98. Форма графика представляет определенные сложности для анализа по данному критерию: важно знать, откуда график начинается и к какому значению стремится при увеличении частоты. Чтобы дать однозначную оценку, построим данный график для разных интервалов изменения частоты  $\omega$  (рис. 105).

Как видно из графиков, представленных на рис. 105, при частоте  $\omega = 0$  значение  $W(\omega) = -1,2$ , а с увеличением частоты  $\omega$  график АФХ стремится к 0, что хорошо видно на окончательном результате построения АФХ (рис. 98). Таким образом, при изменении частоты от 0 до  $+\infty$  АФХ разомкнутой системы не охватывает точку с координатами  $[-1, j0]$ . Следовательно, по критерию Найквиста для АФХ, замкнутая САУ, соответствующая данной разомкнутой, устойчива, что согласуется с оценкой устойчивости по теореме Ляпунова, выполненной при решении **Задачи № 5**.

**Критерий Найквиста для логарифмической амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик** формулируется следующим образом: замкнутая система устойчива, если для характеристик соответствующей ей разомкнутой системы выполняются **два условия**:

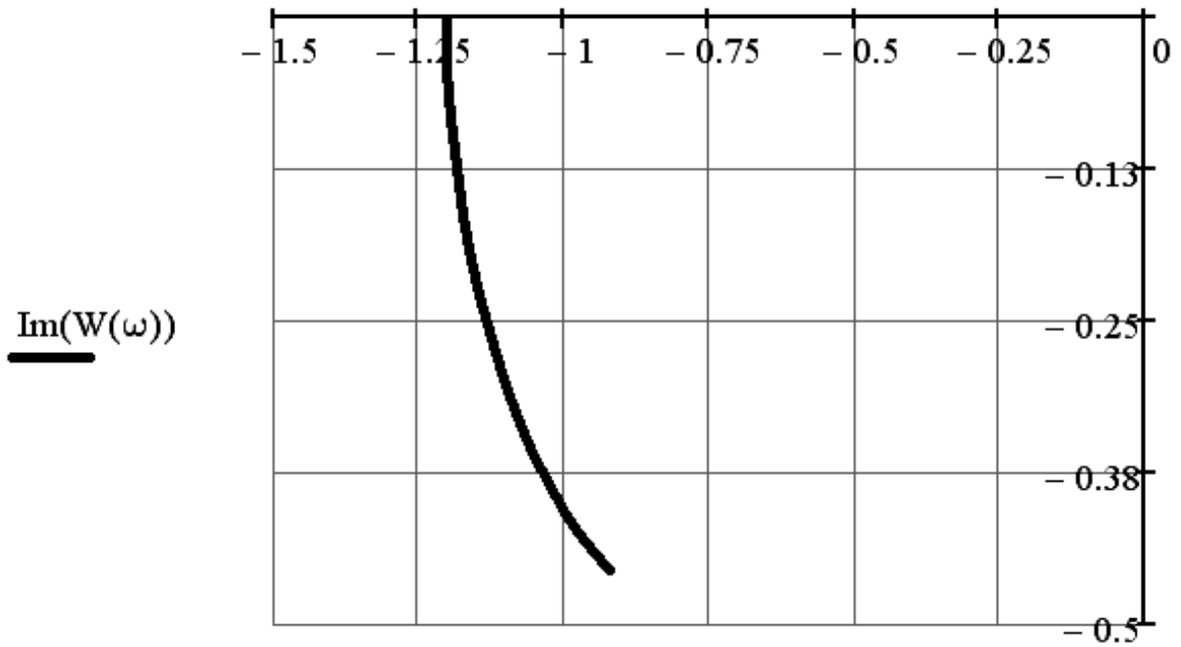
– при частоте, равной частоте среза, модуль фазочастотной характеристики меньше  $180^\circ$ :  $|\varphi(\omega_{cp})| < 180^\circ (< \pi \text{ радиан})$ ;

– при частоте, равной  $\omega_\pi$ , значение ЛАЧХ меньше нуля:  $L(\omega_\pi) < 0$ .

Частотой среза САУ называется частота, при которой ЛАЧХ системы пересекает ось частот, т. е.  $L(\omega_c) = 0$ . Частотой  $\omega_\pi$  САУ называется частота, при которой ФЧХ САУ равняется  $\pm 180^\circ (\pm \pi \text{ радиан})$ . Если ФЧХ несколько раз пересекает ординату  $\pm 180^\circ (\pm \pi \text{ радиан})$ , то выполнение условия проверяется для крайней правой точки.

При решении **Задачи № 3** были рассчитаны и построены ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой САУ (рис. 100, 101). Для проверки условий критерия Найквиста для ЛАЧХ и ЛФЧХ дополним документ расчета ЛАЧХ и ЛФЧХ вычислительными блоками определения частот  $\omega_c$  и  $\omega_\pi$ , как показано на рис. 106.

$\omega := 0, 0.01.. 0.15$



$\omega := 0, 0.01.. 0.5$

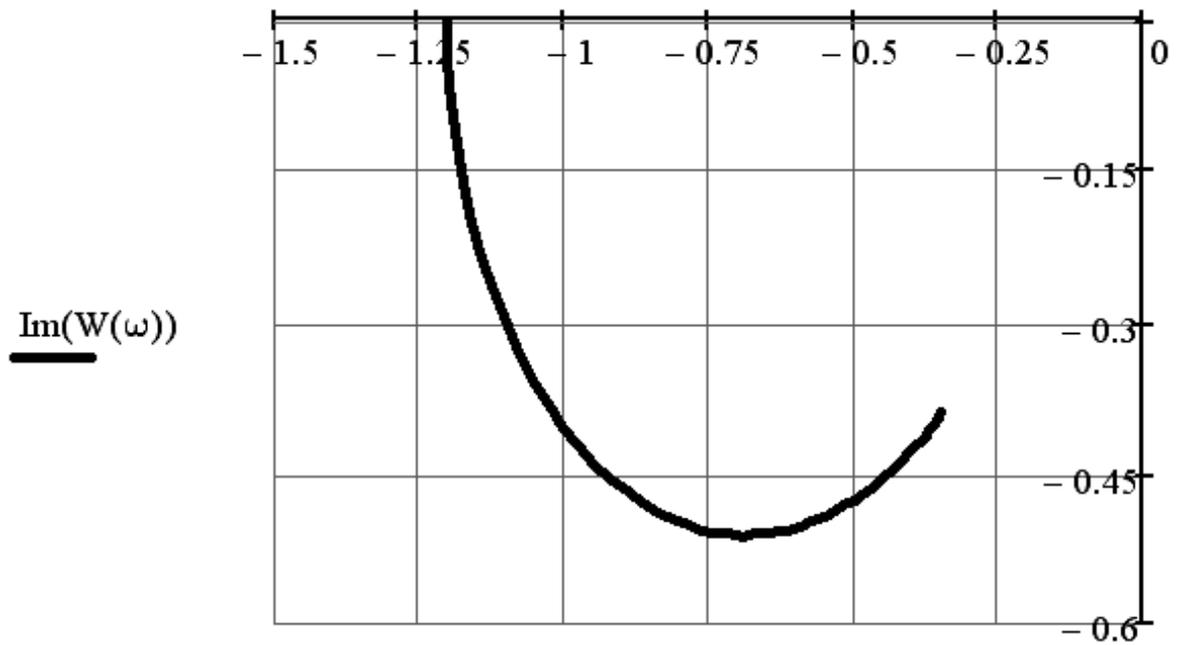
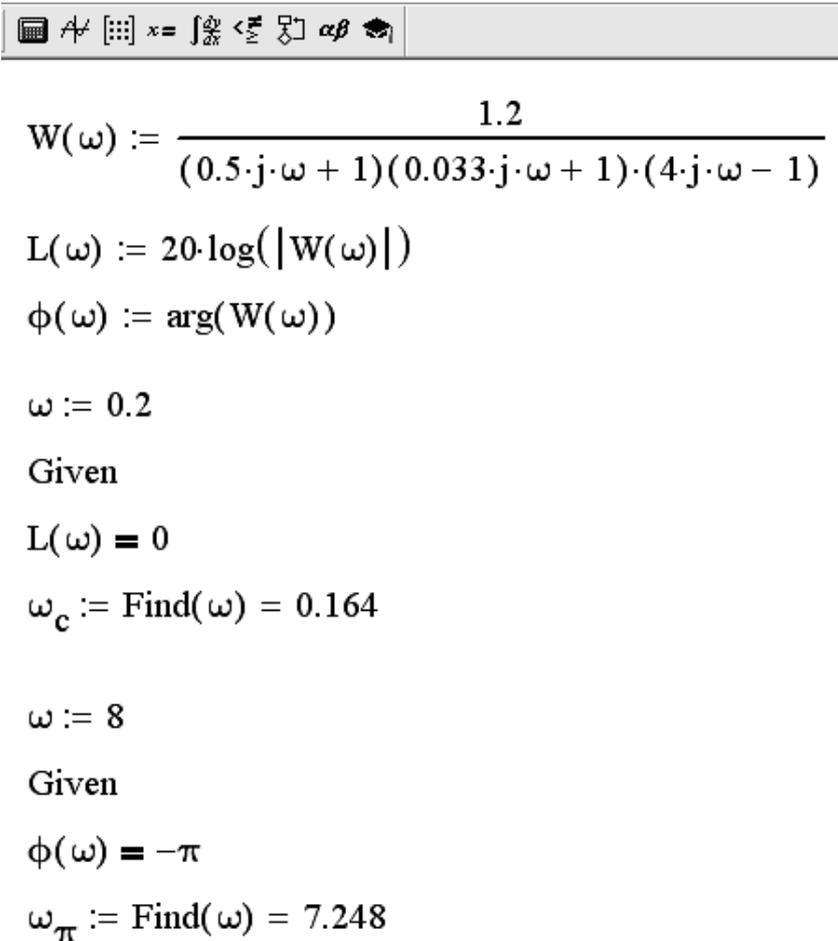


Рис. 105

**Важно!** Перед проведением этого расчета следует, во-первых, убедиться в наличии у системы искомых параметров: если ЛАЧХ системы вообще не пересекает ось частот, т. е.  $L(\omega) \neq 0$  ни при каких значениях  $\omega$ , то у такой системы нет частоты среза. Аналогично, если ФЧХ системы ни при каких значениях частоты не принимает значение  $\pm 180^\circ$  ( $\pm \pi$  радиан), то данная САУ не характеризуется параметром  $\omega_\pi$ . Если параметр системы отсутствует, а вы предпримете попытку его расчета, то Mathcad будет выдавать сообщение об ошибке. Во-вторых, рекомендуется задавать начальные приближения для расчетов как можно ближе к искомому значению, т. е. предварительно следует по построенным графикам ЛАЧХ и ЛФЧХ приближенно оценить эти параметры. Так, для рассматриваемого случая по графику ЛАЧХ, приведенному на рис. 100, видно, что он пересекает ось частот при  $\omega \approx 0,2$ . Это значение и следует задать в качестве начального приближения при расчете  $\omega_c$ . Также очевидно, что  $\omega_c$  и  $\omega_\pi$  могут быть только положительными величинами.



$$W(\omega) := \frac{1.2}{(0.5 \cdot j \cdot \omega + 1)(0.033 \cdot j \cdot \omega + 1) \cdot (4 \cdot j \cdot \omega - 1)}$$

$$L(\omega) := 20 \cdot \log(|W(\omega)|)$$

$$\phi(\omega) := \arg(W(\omega))$$

$$\omega := 0.2$$

Given

$$L(\omega) = 0$$

$$\omega_c := \text{Find}(\omega) = 0.164$$

$$\omega := 8$$

Given

$$\phi(\omega) = -\pi$$

$$\omega_\pi := \text{Find}(\omega) = 7.248$$

Рис. 106

Выполним проверку условий критерия Найквиста для ЛАЧХ и ЛФЧХ по найденным значениям частот  $\omega_c$  и  $\omega_\pi$  (рис. 107). Как видно, условия  $L(\omega_\pi) = -39,411 \text{ дБ} < 0$  и  $|\phi(\omega_c)| = 2,648 \text{ рад} < \pi$  выполняются, следовательно, замкнутая система устойчива, что согласуется с оценкой устойчивости по теореме Ляпунова, выполненной при решении **Задачи № 5**.



$$L(\omega_\pi) = -39.411$$

$$|\phi(\omega_c)| = 2.648$$

Рис. 107

### Задача № 7

**Условие:** подтвердить результат оценки устойчивости построением переходного процесса **замкнутой** САУ в программе моделирования систем автоматического управления tau.exe.

Передаточная функция замкнутой системы с учетом общей единичной отрицательной обратной связи определяется, как

$$W_z(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)}.$$

Подставим передаточную функцию разомкнутой системы  $W_p(p)$ , полученную в результате решения **Задачи № 2**, в приведенную формулу и выполним эквивалентные преобразования передаточной функции замкнутой системы с использованием Mathcad для преобразования ее к последовательному соединению типовых элементарных звеньев.

Для выполнения задания в Mathcad нам необходимо открыть несколько панелей инструментов семейства *Math* (*Математические*): *Calculator* (*Калькулятор*), *Symbolic* (*Символика* или *Символьные*), *Matrix* (*Матрица* или *Матричные*), *Graph* (*Графические*), *Greek* (*Греческие*).

#### **Порядок решения:**

1. Введем в рабочем поле Mathcad передаточную функцию замкнутой системы, как показано на рис. 108, и применим символьный оператор *Factor* (*Разложить на множители и привести к общему знаменателю*).



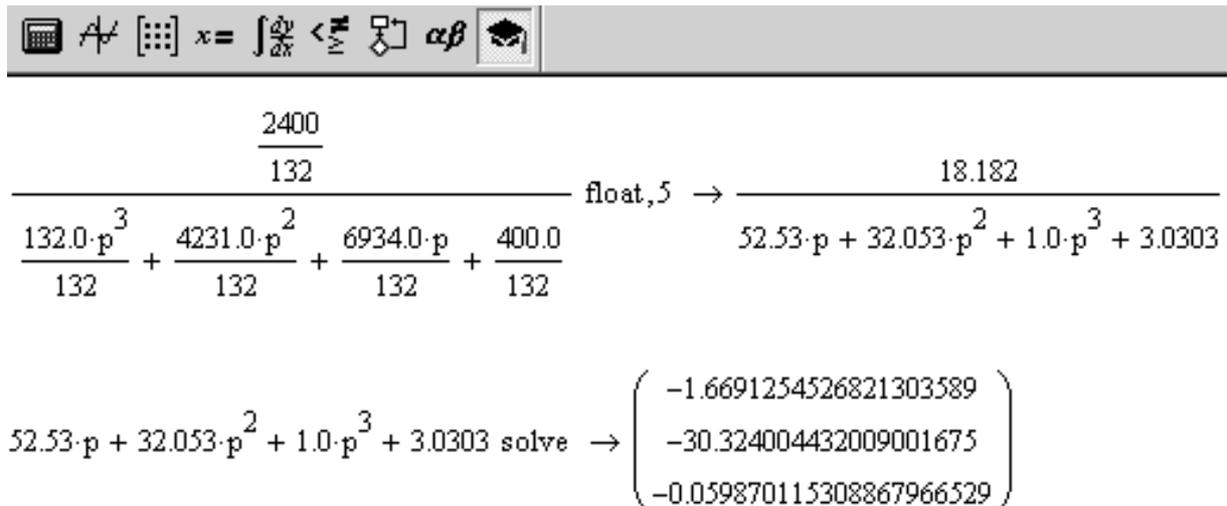
$$1 + \frac{1.2}{(0.033p+1) \cdot (4p-1) \cdot (0.5p+1)} \xrightarrow{\text{factor}} \frac{2400}{132.0 \cdot p^3 + 4231.0 \cdot p^2 + 6934.0 \cdot p + 400.0}$$

Рис. 108

2. Для идентификации типов элементарных звеньев, входящих в состав последовательного соединения, эквивалентного замкнутой САУ, знаменатель полученного выражения (рис. 108) нужно разложить на множители нулевого, первого и/или второго порядка. В данном случае выполнить это автоматически не удалось, поэтому используем разложение через корни многочлена. Как известно, уравнение  $n$ -го порядка вида  $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$  имеет  $n$  корней. Корни могут быть действительными и комплексными, и если они известны, то приведенный многочлен  $n$ -го порядка раскладывается на множители вида  $(x - k_1)(x - k_2) \dots (x - k_n)$ , где  $k_1, k_2 \dots k_n$  – корни многочлена. Для реализации расчета в Mathcad сначала необходимо вынести за скобки коэффициент слагаемого с максимальной  $n$ -ой степенью – обеспечить так называемый приведенный вид многочлена. Вынесем в знаменателе число 132 за скобки, чтобы обеспечить приведенный вид знаменателя, и выполним поиск корней многочлена знаменателя в Mathcad при помощи символьного оператора *Solve (Решить)*. Результат вычислений показан на рис. 109.

3. Введем в рабочем поле Mathcad вид передаточной функции замкнутой САУ  $W_3(p)$  с разложением знаменателя на множители с использованием найденных корней многочлена (рис. 110).

4. Показанное на рис. 110 выражение требует дальнейшей модификации, так как передаточные функции апериодических звеньев первого порядка имеют вид  $\frac{1}{(T \cdot p + 1)}$ . То есть для определения параметров звеньев (постоянных времени и коэффициента усиления), входящих в состав приведенного последовательного соединения, необходимо, чтобы второе слагаемое в скобках многочленов первого порядка было равно 1. Для достижения этого отредактируем полученное выражение, как показано на рис. 111.

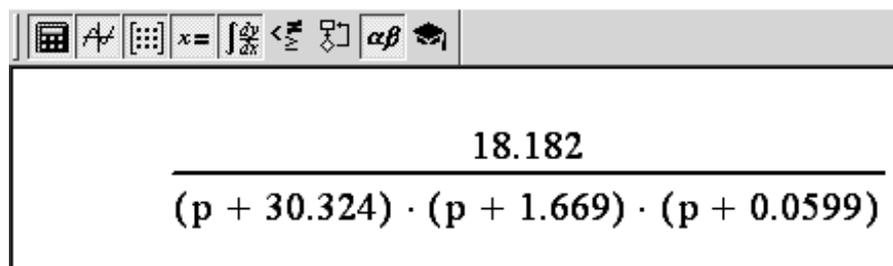


The image shows a MATLAB command window with the following input and output:

$$\frac{\frac{2400}{132}}{\frac{132.0 \cdot p^3}{132} + \frac{4231.0 \cdot p^2}{132} + \frac{6934.0 \cdot p}{132} + \frac{400.0}{132}} \text{float},5 \rightarrow \frac{18.182}{52.53 \cdot p + 32.053 \cdot p^2 + 1.0 \cdot p^3 + 3.0303}$$

$$52.53 \cdot p + 32.053 \cdot p^2 + 1.0 \cdot p^3 + 3.0303 \text{ solve} \rightarrow \begin{pmatrix} -1.6691254526821303589 \\ -30.324004432009001675 \\ -0.059870115308867966529 \end{pmatrix}$$

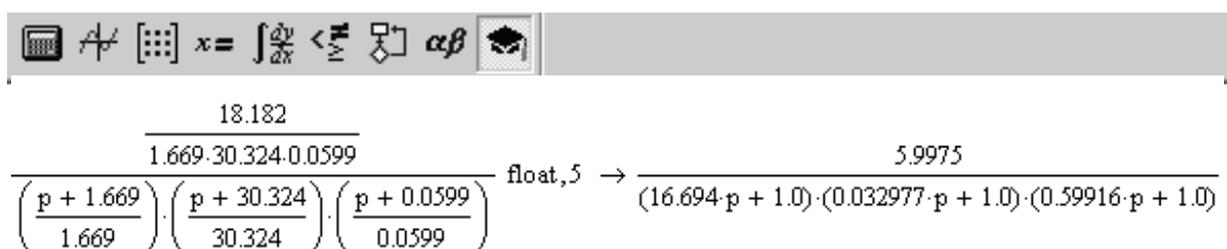
Рис. 109



The image shows a MATLAB command window with the following input and output:

$$\frac{18.182}{(p + 30.324) \cdot (p + 1.669) \cdot (p + 0.0599)}$$

Рис. 110



The image shows a MATLAB command window with the following input and output:

$$\frac{18.182}{1.669 \cdot 30.324 \cdot 0.0599} \text{float},5 \rightarrow \frac{5.9975}{\left(\frac{p + 1.669}{1.669}\right) \cdot \left(\frac{p + 30.324}{30.324}\right) \cdot \left(\frac{p + 0.0599}{0.0599}\right) \cdot (16.694 \cdot p + 1.0) \cdot (0.032977 \cdot p + 1.0) \cdot (0.59916 \cdot p + 1.0)}$$

Рис. 111

Таким образом, передаточную функцию замкнутой САУ можно представить эквивалентным последовательным соединением трех апериодических звеньев первого порядка с постоянными времени, соответственно 0,03; 0,6 и 16,7 с. Общий коэффициент усиления замкнутой САУ (коэффициент статического преобразования) равен 5,99. Реализуем схему эквивалентного последовательного соединения в программе tau.exe, зададим параметры звеньев и построим переходной процесс замкнутой САУ как реакцию на ступенчатое входное воздействие (рис. 112).

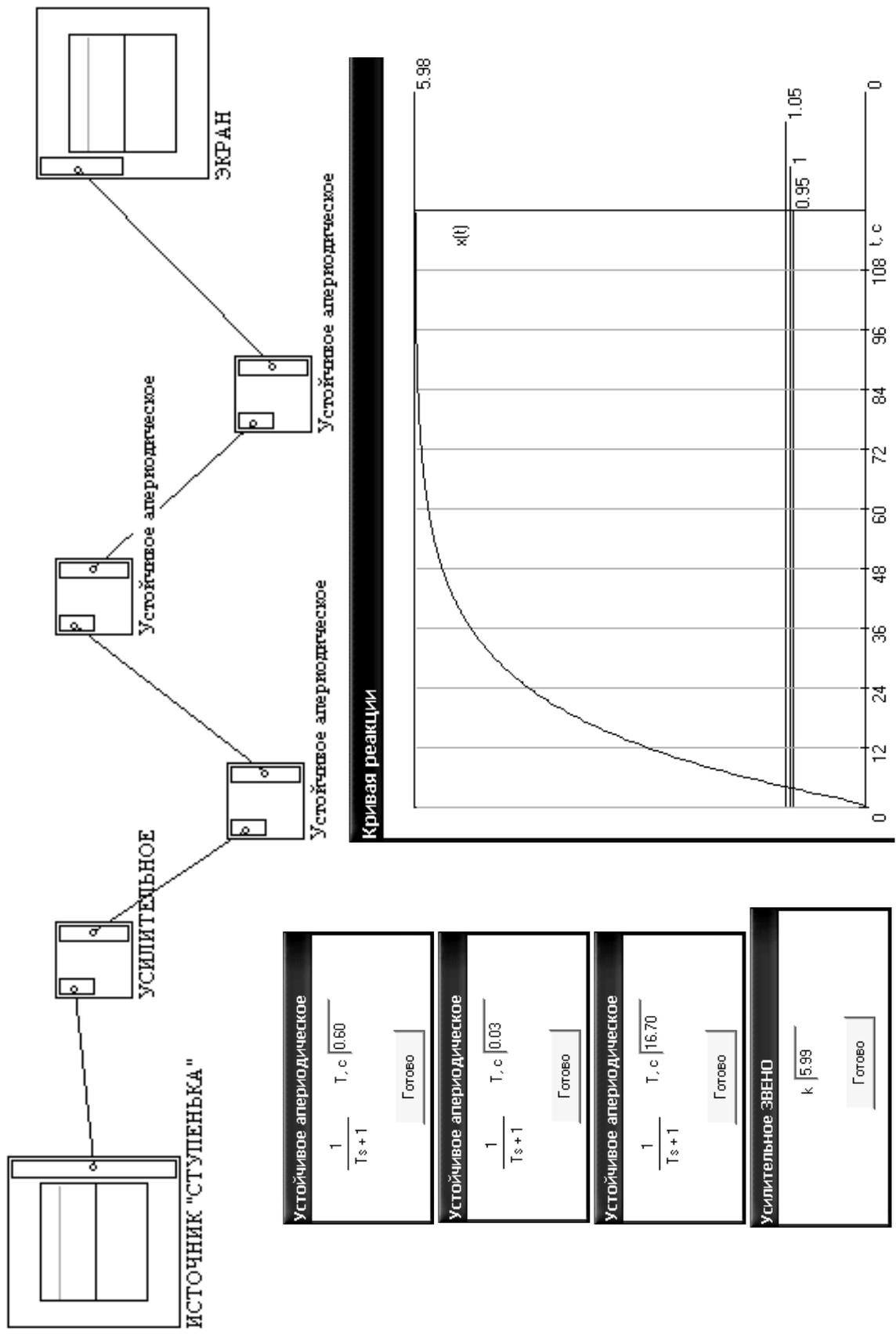


Рис. 112

Как видно на рис. 112, переходной процесс замкнутой САУ подтверждает ее устойчивость: он сходится к значению, равному коэффициенту статического преобразования. Однако данную САУ отличает крайне низкое быстродействие: время, за которое переходной процесс достигает установившегося значения, составляет порядка 95 с.

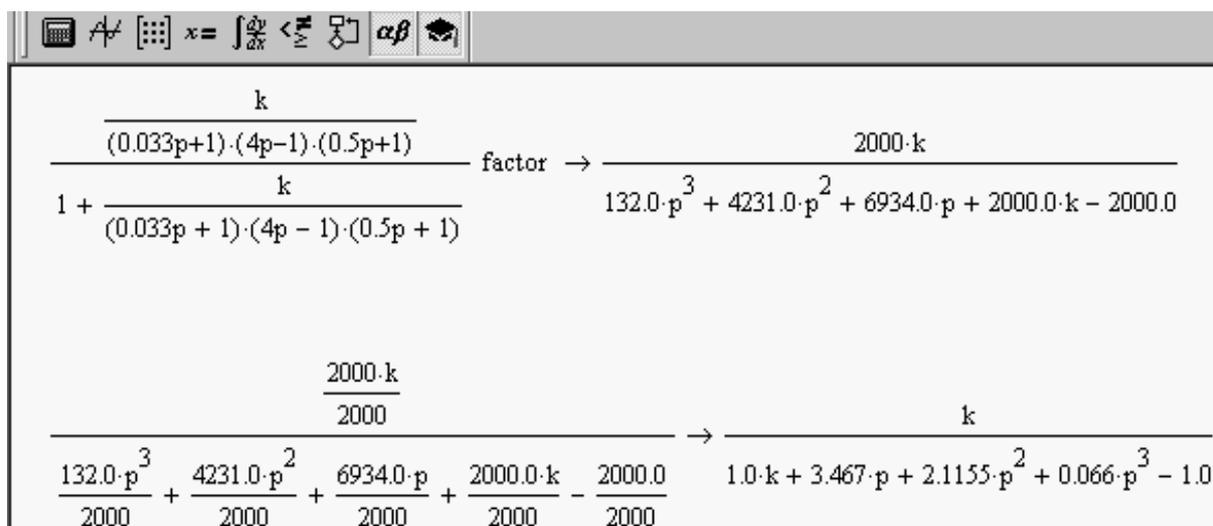
### Задача № 8

**Условие:** с использованием метода *D-разбиения* оценить влияние на устойчивость *замкнутой* САУ коэффициента статического преобразования *разомкнутой* САУ; подтвердить результат анализа с использованием заданного критерия устойчивости для значений коэффициента, выбранного внутри и вне пределов области устойчивости, построенной в результате *D-разбиения*.

Коэффициентом статического преобразования разомкнутой САУ является общий коэффициент усиления. Передаточная функция разомкнутой САУ, полученная в результате решения **Задачи № 2**, имеет вид:

$$W_p(p) = \frac{1,2}{(0,5p+1)(0,033p+1)(4p-1)}$$

Как видно, исходное значение коэффициента статического преобразования *k* разомкнутой САУ составляет 1,2. Введем в рабочем поле Mathcad передаточную функцию замкнутой системы с подстановкой вместо исходного значения коэффициента статического преобразования разомкнутой САУ введенного обозначения *k* и выполним упрощение, как показано на рис. 113.



$$1 + \frac{k}{(0.033p+1) \cdot (4p-1) \cdot (0.5p+1)} \xrightarrow{\text{factor}} \frac{2000 \cdot k}{132.0 \cdot p^3 + 4231.0 \cdot p^2 + 6934.0 \cdot p + 2000.0 \cdot k - 2000.0}$$

$$\frac{2000 \cdot k}{2000} \rightarrow \frac{k}{1.0 \cdot k + 3.467 \cdot p + 2.1155 \cdot p^2 + 0.066 \cdot p^3 - 1.0}$$

Рис. 113

В результате преобразований, показанных на рис. 113, получена передаточная функция замкнутой САУ, записанная в общем виде относительно коэффициента статического преобразования разомкнутой системы. По виду передаточной функции замкнутой системы ее характеристическое уравнение записывается путем приравнивания знаменателя к 0:

$$A_3(p) = 0,066p^3 + 2,12p^2 + 3,47p - 1 + k = 0.$$

Запишем в явном виде относительно  $k$ :

$$k(p) = -0,066p^3 - 2,12p^2 - 3,47p + 1.$$

Подставив вместо  $p$  комплексную частоту  $j\omega$ , получим:

$$k(j\omega) = -0,066(j\omega)^3 - 2,12(j\omega)^2 - 3,47(j\omega) + 1.$$

Согласно теореме Ляпунова, САУ является устойчивой, если все корни характеристического уравнения имеют отрицательную действительную часть, т. е. располагаются в левой полуплоскости комплексной плоскости. Границей устойчивости САУ является мнимая ось комплексной плоскости. Граница области устойчивости в плоскости коэффициентов или параметров САУ называется границей D-разбиения. Переход через границу D-разбиения в плоскости параметров соответствует переходу корней через мнимую ось в плоскости корней.

В данном случае кривая  $k(j\omega)$ , построенная в комплексной плоскости при различных значениях  $\omega$ , является границей D-разбиения. Если следовать по этой кривой от значений  $\omega = -\infty$  до значений  $\omega = +\infty$ , то слева остается область, которая является отображением левой полуплоскости корней и представляет область устойчивости. Граница области устойчивости отмечается штриховкой слева при следовании по кривой от  $\omega = -\infty$  до значений  $\omega = +\infty$ .

**Важно!** На практике для каждой САУ диапазон рассматриваемых частот подбирается индивидуально. Верхний и нижний пределы построения *подбираются экспериментально в режиме увеличения так, чтобы кривая D-разбиения имела законченный вид.* Рассчитаем и построим D-разбиение в плоскости параметра  $k$  (рис. 114).

Следуя по ходу графика D-разбиения от значений, соответствующих  $\omega = -\infty$ , до значений  $\omega = +\infty$ , наложим штриховку слева. Область положительной части действительной оси, окаймленная штриховкой, соответствует значениям параметра  $k$ , обеспечивающим устойчивое состояние системы (рис. 115).

**Важно!** Автоматических средств наложения штриховок на графики в Mathcad нет. В электронном варианте отчета по работе штриховку можно наложить с использованием любого графического редактора или нарисовать ее вручную в распечатанном варианте.

$$k(\omega) := -0.066 \cdot (j \cdot \omega)^3 - 2.12(j \cdot \omega)^2 - 3.47(j \cdot \omega) + 1$$

$$\omega := -8, -7.9 \dots 8$$

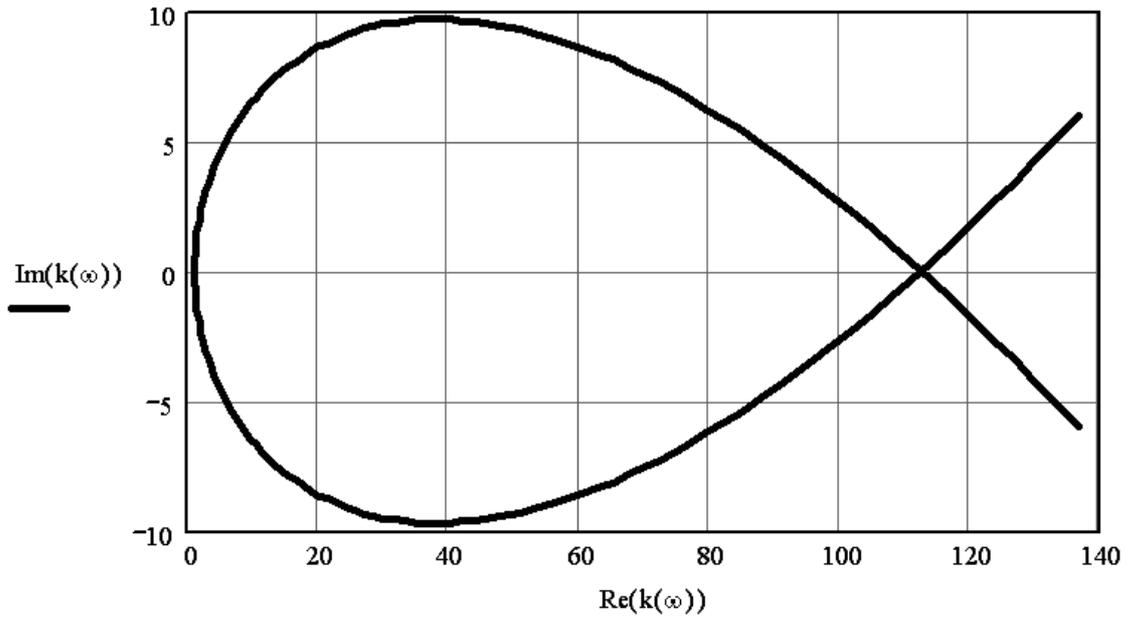


Рис. 114

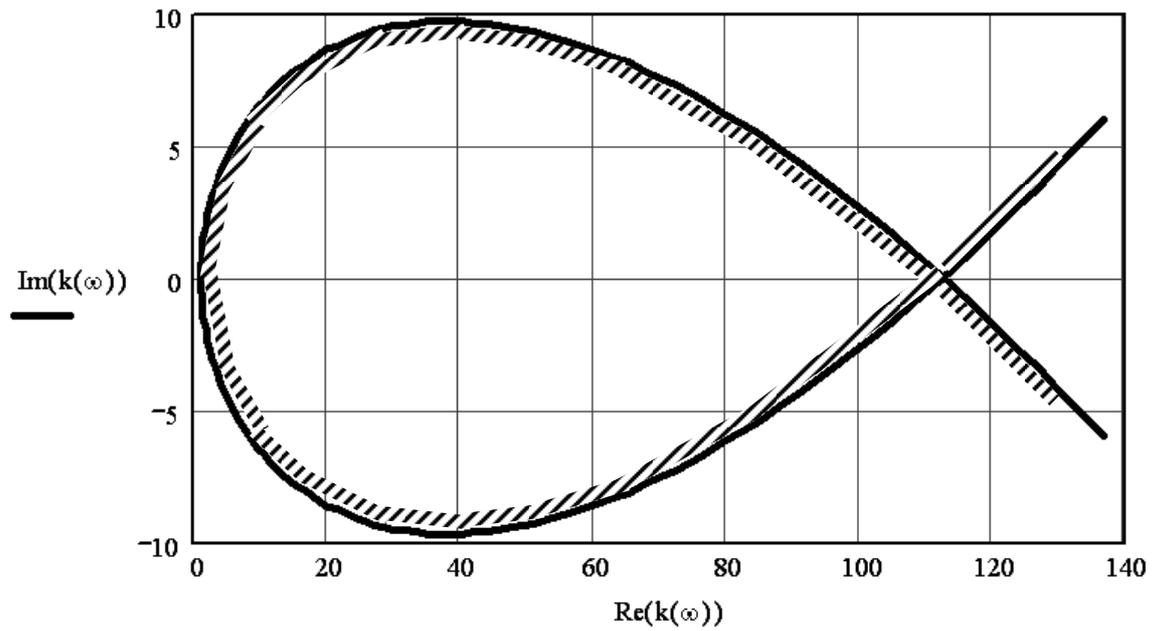


Рис. 115

Результаты построения области устойчивости, приведенные на рис. 115, позволяют утверждать, что значение коэффициента статического преобразования  $k$  разомкнутой системы для обеспечения устойчивости замкнутой САУ не должно превышать приблизительно 112. Для проверки данного вывода необходимо оценить устойчивость замкнутой САУ при двух значениях  $k$ : одном, лежащем в пределах области устойчивости, и другом, вне пределов полученной области. Оценка устойчивости при исходном значении  $k = 1,2$ , выполненная в **Задачах № 5** и **№ 6**, показала устойчивость замкнутой САУ. Покажем с использованием теоремы Ляпунова, что при значении  $k$  вне зоны устойчивости, например при  $k = 120$ , замкнутая САУ станет неустойчивой. Запишем передаточную функцию разомкнутой системы с учетом выбранного значения  $k$ :

$$W_p(p) = \frac{120}{(0,5p+1)(0,033p+1)(4p-1)}.$$

Если известна передаточная функция разомкнутой САУ, то характеристическое уравнение соответствующей ей замкнутой САУ может быть получено как сумма числителя и знаменателя передаточной функции разомкнутой САУ. Запишем характеристический полином замкнутой САУ:

$$A_s(p) = 120 + (0,5p+1)(0,033p+1)(4p-1) = 0.$$

Введем характеристическое уравнение замкнутой САУ в рабочем поле Mathcad, упростим его и найдем корни характеристического уравнения замкнутой САУ (рис. 116).

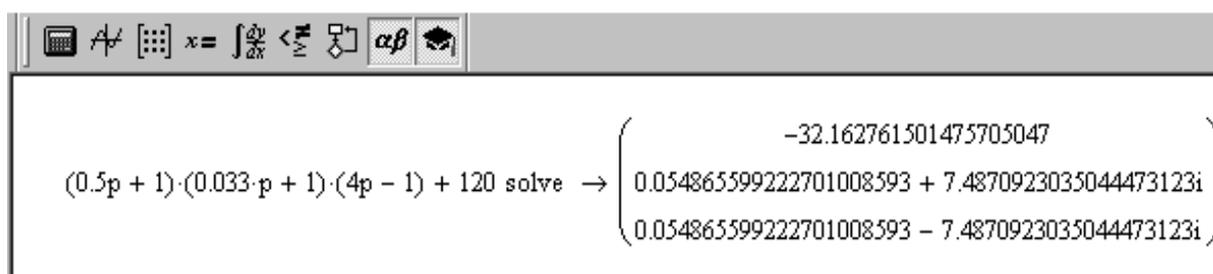


Рис. 116

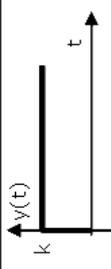
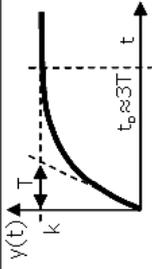
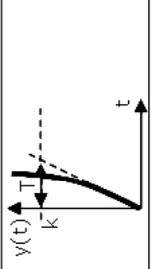
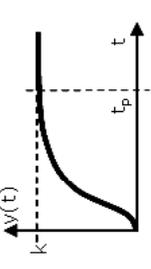
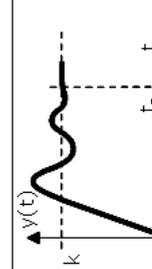
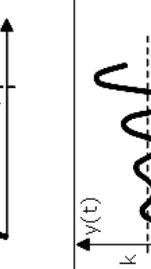
Уравнение имеет три корня: один корень действительный и отрицательный ( $-32,163$ ), а два других – комплексно-сопряженные, причем оба имеют положительные действительные части ( $0,0549$ ). Следовательно, замкнутая САУ при значении  $k = 120$  является неустойчивой, что и требовалось доказать.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Анхимюк, В. Л. Теория автоматического управления / В. Л. Анхимюк, О. Ф. Опейко, Н. Н. Михеев; под ред. В. Л. Анхимюк. – Минск : Дизайн ПРО, 2000. – 352 с.
2. Андриющенко, В. А. Теория систем автоматического управления / В. А. Андриющенко. – Л. : ЛГУ, 1990. – 256 с.
3. Бесекерский, В. А. Теория систем автоматического регулирования / В. А. Бесекерский, В. П. Попов. – М. : Наука, 1975. – 766 с.
4. Гурский, Д. Mathcad для студентов и школьников. Популярный самоучитель / Д. Гурский, Е. Турбина. – СПб. : Питер, 2005. – 400 с.
5. Клиначев, Н. В. Теория систем автоматического регулирования и управления: учеб.-метод. комплекс. – Offline версия 1.7 (1,98 Мб) – Челябинск : Клиначев Н. В., 2002. – 543 файла, ил. 314, учебных моделей 87, список лит. 12 назв.
6. Шестопалова, О. Е. Методические указания по выполнению практических и расчетных работ по курсу «Теория автоматического управления технических систем» для студентов специальностей 36.01.01, 36.01.03, 36.01.04, 39.02.02 / О. Е. Шестопалова. – Новополоцк : ПГУ, 2003. – 54 с.
7. Дьяконов, В. Mathcad 2001: учебный курс / В. Дьяконов. – СПб. : Питер, 2001. – 624 с.
8. Очков, В. Ф. Mathcad 14 для студентов, инженеров и конструкторов / В. Ф. Очков. – СПб : БХВ-Петербург, 2007. – 361 с.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

Типовые элементарные звенья САУ

Тип звена	Дифференциальное уравнение	Передаточная функция $W(p)$	Переходная характеристика для $x(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases}$	Примечания
Усилительное безынерционное	$y(t) = kx(t)$	$k$		$k$ – коэффициент усиления звена; При подаче на вход ступенчатого воздействия соответствующее значение выходной величины устанавливается мгновенно.
Апериодическое первого порядка (устойчивое)	$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$	$\frac{k}{Tp + 1}$		$k$ – коэффициент усиления звена; $T$ – постоянная времени звена; Постоянная времени определяется как проекция касательной на линию установившегося значения. Время переходного процесса $t_p \approx 3T$ ; Величина, обратная постоянной времени называется <b>частотой среза</b> звена $\omega_c$ .
Апериодическое первого порядка (неустойчивое)	$T \frac{dy(t)}{dt} - y(t) = kx(t)$	$\frac{k}{Tp - 1}$		$k$ – коэффициент усиления звена; $T$ – постоянная времени звена; Величина, обратная постоянной времени называется <b>частотой среза</b> звена $\omega_c$ .
Апериодическое второго порядка	$T_2^2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t), T_1 > 2T_2$	$\frac{k}{(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)} = \frac{k}{(T_2 p + 1)(T_2 p + 1)}$ $T_{3\lambda} = \frac{T_1 \pm \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}}{2}$		$k$ – коэффициент усиления звена; $T_1, T_2$ – постоянные времени звена. Величина, обратная постоянной времени $T_2$ называется <b>частотой среза</b> звена $\omega_c$ . Звено сводится к последовательному соединению двух апериодических звеньев первого порядка. Переходная характеристика имеет точку перегиба.
Колебательное устойчивое	$T_2^2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t), (T_1 < 2T_2)$ или $T_2^2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\xi T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$	$\frac{k}{(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)}$ или $\frac{k}{(T_2^2 p^2 + 2\xi T_2 p + 1)}$		$k$ – коэффициент усиления звена; $T_1, T_2$ – постоянные времени звена; Величина, обратная постоянной времени $T_2$ называется <b>частотой среза</b> звена $\omega_c$ . Величина $2\xi = T_1 / T_2$ называется <b>коэффициентом затухания</b> , $2\xi < 1$ . Амплитуда колебаний переходной характеристики затухает по экспоненте.
Колебательное неустойчивое	$T_2^2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} - T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$ или $T_2^2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} - 2\xi T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$	$\frac{k}{(T_2^2 p^2 - T_1 p + 1)}$ или $\frac{k}{(T_2^2 p^2 - 2\xi T_2 p + 1)}$		$k$ – коэффициент усиления звена; $T_1, T_2$ – постоянные времени звена; Величина, обратная постоянной времени $T_2$ называется <b>частотой среза</b> звена $\omega_c$ .

Колебательное гармоническое	$T_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t) = kx(t)$	$\frac{k}{(T_2 p^2 + 1)}$		<p><math>k</math> – коэффициент усиления звена;  <math>T_2</math> – постоянная времени звена;          Величина, обратная постоянной времени <math>T_2</math> называется <b>частотой среза</b> звена <math>\omega_c</math>.</p>
Идеальное дифференцирующее	$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$	$p$		<p>При подаче на вход звена единичного скачка согласно уравнению звена <math>y=0</math> как при <math>x=0</math>, так и при <math>x=1</math>, то есть только в момент изменения входного воздействия с 0 на 1 <math>dx/dt \neq 0</math>. Переходная характеристика звена имеет мгновенного импульса теоретически с бесконечной амплитудой и бесконечно малой шириной.</p>
Идеальное интегрирующее	$y(t) = k \int x(t) dt$ или $\frac{dy(t)}{dt} = kx(t)$	$\frac{k}{p}$		<p><math>k</math> – коэффициент усиления звена;          Переходная характеристика имеет вид наклонной прямой, так как интеграл геометрически представляет собой площадь, ограничиваемую <math>x(t)</math>, которая возрастает пропорционально времени <math>t</math>.</p>
Дифференцирующее первого порядка	$y(t) = T \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$	$T \cdot p + 1$		<p><math>k</math> – коэффициент усиления звена;  <math>T</math> – постоянная времени звена;          Величина, обратная постоянной времени называется <b>частотой среза</b> звена <math>\omega_c</math>.</p>
Дифференцирующее второго порядка	$y(t) = T_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$ или $y(t) = T^2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$	$T_2^2 p^2 + T_1 p + 1$ или $T^2 p^2 + 2\xi T p + 1$		<p><math>k</math> – коэффициент усиления звена;  <math>T_1, T_2</math> – постоянные времени звена;          Величина, обратная постоянной времени <math>T_2</math> называется <b>частотой среза</b> звена <math>\omega_c</math>.</p>
Безинерционное звено с чистым запаздыванием	$y(t) = kx(t-\tau)$	$k \cdot e^{-p\tau}$		<p><math>k</math> – коэффициент усиления звена;          При подаче на вход ступенчатого воздействия соответствующее значение выходной величины устанавливается с некоторым постоянным запаздыванием <math>\tau</math>.</p>

**Пример оформления титульного листа  
контрольной работы студента заочной формы обучения**

**Учреждение образования  
«Полоцкий государственный университет»**

Факультет \_\_\_\_\_  
(укажите свой факультет)

**КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА**  
по дисциплине

\_\_\_\_\_  
(укажите точное название дисциплины в соответствии с учебным планом)

**студента заочного отделения**

\_\_\_\_\_  
(укажите свою фамилию, имя и отчество полностью)

группа: \_\_\_\_\_  
(укажите № своей группы)

зачетная книжка № \_\_\_\_\_  
(укажите № своей зачетной книжки)

телефон для связи: \_\_\_\_\_  
(укажите № моб. телефона полностью: +375(код оператора)7 цифр номера)

e-mail для связи: \_\_\_\_\_  
(укажите адрес электронной почты, если есть)

Рецензент: к.т.н., доцент Шестопалова Ольга Евгеньевна

Работу выполнил: \_\_\_\_\_  
(подпись студента)

Поступила на рецензию: \_\_\_\_\_

Возвращена на доработку: \_\_\_\_\_

Поступила повторно: \_\_\_\_\_

Возвращена на доработку: \_\_\_\_\_

Поступила повторно: \_\_\_\_\_

Возвращена на доработку: \_\_\_\_\_

Отметка о зачёте: \_\_\_\_\_

Подпись рецензента: \_\_\_\_\_ Дата: \_\_\_\_\_

Новополоцк, 20\_\_г.

Пример оформления индивидуального задания  
контрольной работы студента заочной формы обучения

**ЗАДАНИЕ**

на контрольную работу по дисциплине:

(укажите точное название дисциплины в соответствии с учебным планом)  
**для студента заочной формы обучения**

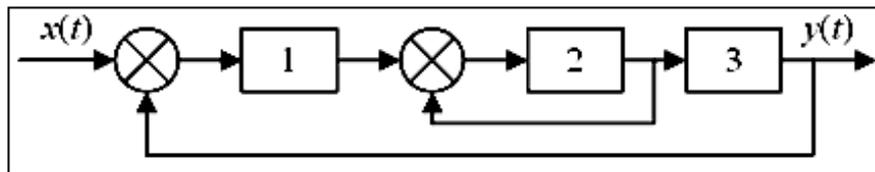
ФИО, группа: \_\_\_\_\_

(укажите Фамилию, И.О. и № группы)

Вариант: \_\_\_\_\_

(укажите шифр своего варианта)

Схема:



(приведите схему своего варианта)

Уравнения элементов схемы:

$$1) 0.5 \frac{dy(t)}{dt} - 1.8 \frac{dx(t)}{dt} + y(t) = 0;$$

$$2) 0.1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2x(t);$$

$$3) 0.5 \frac{dy(t)}{dt} + x(t) = 2 \frac{d^2y(t)}{dt^2}.$$

(приведите уравнения элементов своего варианта)

**Задание на контрольную работу:**

1. По заданным дифференциальным уравнениям элементов САУ определить передаточные функции элементов. Определить типы элементарных звеньев, входящих в состав элементов.
2. Определить передаточную функцию **разомкнутой** и **замкнутой** САУ, при необходимости использовать правила переноса узлов. Преобразовать **разомкнутую** систему к последовательному соединению типовых элементарных звеньев. Определить типы элементарных звеньев, входящих в состав преобразованной **разомкнутой** САУ.
3. Построить амплитудно-фазовую характеристику (АФХ) **разомкнутой** системы. Рассчитать и построить логарифмические амплитудно-частотную (ЛАЧХ) и фазочастотную (ЛФЧХ) характеристики **разомкнутой** САУ, приведенной к последовательному соединению типовых элементарных звеньев.
4. Рассчитать и построить асимптотическую ЛАЧХ **разомкнутой** САУ.
5. Оценить устойчивость **замкнутой** САУ по теореме Ляпунова.
6. Оценить устойчивость **замкнутой** САУ заданному критерию устойчивости.
7. Подтвердить результат оценки устойчивости построением переходного процесса **замкнутой** САУ в программе моделирования систем автоматического управления tau.exe.
8. С использованием метода D-разбиения оценить влияние на устойчивость **замкнутой** САУ коэффициента статического преобразования **разомкнутой** САУ. Подтвердить результат анализа с использованием теоремы Ляпунова для значений коэффициента, выбранного внутри и вне пределов области устойчивости, построенной в результате D-разбиения.

Задание получил: \_\_\_\_\_

(подпись студента)

Преподаватель: \_\_\_\_\_ к.т.н., доцент Шестопалова О.Е.

**ПРИЛОЖЕНИЕ 4**

**Бланк проверки и защиты контрольной работы  
студента заочной формы обучения**

<b>№ задачи</b>	<b>Баллы</b>	<b>Замечания, ошибки</b>
№ 1		
№ 2		
№ 3		
№ 4		
№ 5		
№ 6		
№ 7		
№ 8		

**Итого:**

**Вопросы защиты:**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## КРАТКАЯ ИНСТРУКЦИЯ ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ MATHCAD

### Интерфейс окна программы

Mathcad является программным обеспечением математического анализа, позволяющим проводить разнообразные научные и инженерные расчеты, начиная с элементарной арифметики и заканчивая сложными реализациями численных математических методов.

При первом запуске программы по умолчанию обычно открыты следующие панели (*Toolbars*):

- *Formatting* (*Форматирование*), отвечающая за редактирование текста;
- *Standard* (*Стандартные*), содержащая ссылки на общие команды (копирование, вставка, проверка орфографии и пр.) и некоторые специфические для Mathcad;
- *Math* (*Математические*), содержащая ссылки на панели со специфическими для Mathcad элементами;
- *Resources* (*Ресурсы*), содержащая список ссылок на примеры, подсказки и справочные данные.

Чтобы открыть ту или иную панель инструментов, необходимо воспользоваться подменю *Toolbars* (*Панели инструментов*) меню *View* (*Вид*).

### Математические панели

Панели семейства математические обычно открываются нажатием левой кнопки мыши на соответствующей пиктограмме (кнопке) панели *Math* (*Математические*), показанной на рис. 117.

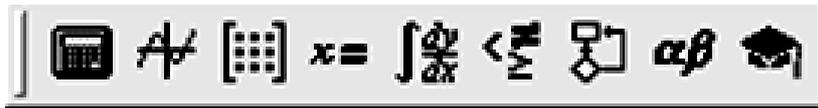
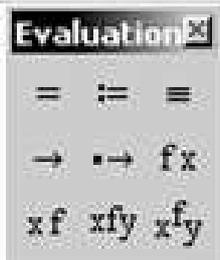
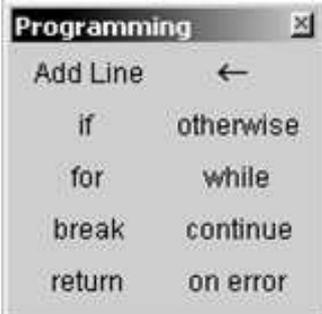


Рис. 117

Краткая характеристика панелей семейства *Math* (*Математические*) приведена в табл. 3.

Название панели	Описание
 <p>Calculator (Калькулятор)</p> 	<p>На данной панели расположены арифметические операторы, цифры от 0 до 9, некоторые наиболее распространенные функции и геометрические константы, а также оператор численного вывода и знак присваивания.</p>
 <p>Graph (Графические)</p> 	<p>При помощи этой панели можно вызвать заготовки для построения разнообразных графиков и поверхностей. Кроме того, здесь расположены ссылки на инструменты для анализа зависимостей.</p>
 <p>Matrix (Матрица или Матричные)</p> 	<p>На этой панели расположены операторы создания, обращения, транспонирования матриц, операторы матричных индексов и столбцов, а также операторы для работы с векторами.</p>
 <p>Evaluation (Оценка или Выражение)</p> 	<p>Здесь расположены все операторы ввода и вывода Mathcad, а также заготовки для создания пользовательских операторов.</p>

Название панели	Описание
<p> Calculus (Вычислительные или Матанализ)</p> 	<p>На этой панели содержатся используемые при решении задач математического анализа операторы: определенного и неопределенного интегралов, производных, пределов, сумм и произведений. Отсюда можно задать символ бесконечности.</p>
<p> Boolean (Логические или Булевы)</p> 	<p>Эта панель предназначена для задания логических операторов, а также знака логического равенства.</p>
<p> Programming (Программирование)</p> 	<p>Панель содержит операторы языка программирования Mathcad.</p>
<p> Greek (Греческие)</p> 	<p>На данной панели расположены строчные и прописные буквы греческого алфавита.</p>

Название панели	Описание
 Symbolic (Символика или Символьные) 	Панель содержит специальные операторы (команды) выполнения аналитических преобразований.

### Вычисления и типы данных

В Mathcad все математические операции осуществляются либо при помощи операторов, либо при помощи функций. **Оператор** – это символ или последовательность символов, обозначающих то или иное математическое действие. Любой оператор можно ввести *двумя способами*:

- при помощи специальной клавиши или сочетания «горячих» клавиш;
- используя соответствующую кнопку нужной панели семейства *Math* (*Математические*).

Способы ввода наиболее часто используемых операторов Mathcad и математических констант приведены в табл. 4.

Таблица 4

Название	Внешний вид	Клавиша или сочетание «горячих» клавиш	Панель инструментов
<b>Основные операторы</b>			
Оператор численного вывода	=	=	Evaluation (Выражение); Calculator (Калькулятор);

Название	Внешний вид	Клавиша или сочетание «горячих» клавиш	Панель инструментов
Оператор присваивания	$:=$	<i>Shift+:</i>	<i>Evaluation (Выражение); Calculator (Калькулятор)</i>
Оператор символьного вывода	$\rightarrow$	<i>Ctrl+.</i>	<i>Evaluation (Выражение); Symbolic (Символика или Символьные)</i>
Оператор ранжирования	$\dots$	<i>;</i>	<i>Matrix (Матричные)</i>
Оператор логического равенства	$=$	<i>Ctrl+=</i>	<i>Boolean (Булевы/Логические)</i>
<b>Математические константы</b>			
Число «Пи»	$\pi$	<i>Ctrl+Shift+p</i>	<i>Calculator (Калькулятор); Greek (Греческие)</i>
Основание натурального логарифма	$e$	$e$	<i>Calculator (Калькулятор)</i>
Мнимая единица	$i$ или $j$	$1i$ или $1j$	<i>Calculator (Калькулятор)</i>
Символ бесконечности	$\infty$	<i>Ctrl+Shift+z</i>	<i>Calculus (Матанализ)</i>

## Функции

Функции в Mathcad делятся на две группы:

- функции пользователя (функции произвольного вида);
- встроенные функции (функции, заданные в Mathcad изначально).

### Задание функций пользователя:

1. Введите имя функции.
2. После имени введите пару круглых скобок и через запятую введите все переменные, от которых зависит функция.
3. Введите оператор присваивания  $:=$ .
4. На месте черного маркера справа от введенного оператора присваивания задайте вид вашей функции.

### Задание встроенных функций:

*1-й способ.*

Наиболее распространенные функции (синус, косинус, тангенс, натуральный и десятичный логарифм, экспонента) можно ввести с панели инструментов *Calculator (Калькулятор)*.

2-й способ.

Названия функций можно ввести с помощью встроенного мастера функций *Insert Function (Вставить функцию)* (рис. 118), который открывается или нажатием на панели инструментов *Standard (Стандартная)* на одноименную кнопку с изображением стилизованного знака функции , или с помощью пункта меню *Insert (Вставка) → Function (Функция)*, или нажатием сочетания «горячих» клавиш *Ctrl+Shift+f*.

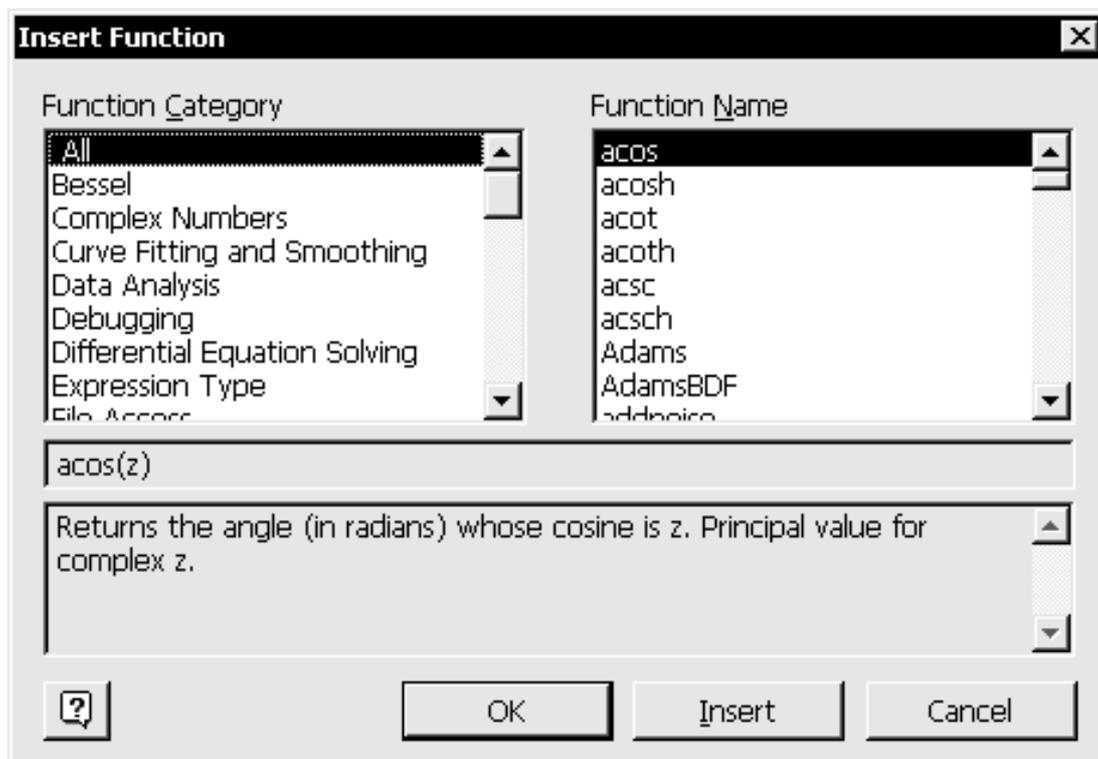


Рис. 118

3-й способ.

Ввести название функции с клавиатуры.

**Важно!** Mathcad различает строчные и прописные буквы. Если функцию, образованную строчными буквами, вы введете с большой буквы, она распознана не будет, и наоборот.

### Проведение расчетов численными методами

При проведении расчетов численно подсчет значения функции или выражения производится численными методами с использованием специальных численных алгоритмов. В качестве численного оператора вывода выступает обычное «равно» =. Ввести его можно как с клавиатуры, так и с двух математических панелей: *Calculator (Калькулятор)* и *Evaluation (Вы-*

ражение). Называется этот оператор *Evaluate Numerically* (Подсчитать численно). Точность численного расчета в Mathcad ограничена 17 знаками после запятой: если в ходе расчета будет получено число меньше  $10^{-17}$ , оно будет округлено до нуля.

### Формат вывода численного результата

При стандартных настройках численный ответ отображается только до третьего знака после запятой.

Чтобы изменить количество знаков после запятой в результате конкретной формулы, необходимо сделать двойной щелчок левой кнопкой мыши по тексту ответа. При этом откроется диалоговое окно *Result format* (Формат результата) с активной закладкой *Number format* (Формат номеров). В окне параметра *Number of decimal places* (Количество десятичных позиций) установите точность отображения результата, задав количество знаков после запятой (рис. 119). По умолчанию незначащие нули в численных результатах не отображаются. Чтобы сделать их видимыми, необходимо установить флажок в поле *Show trailing zeros* (Показывать незначащие нули).

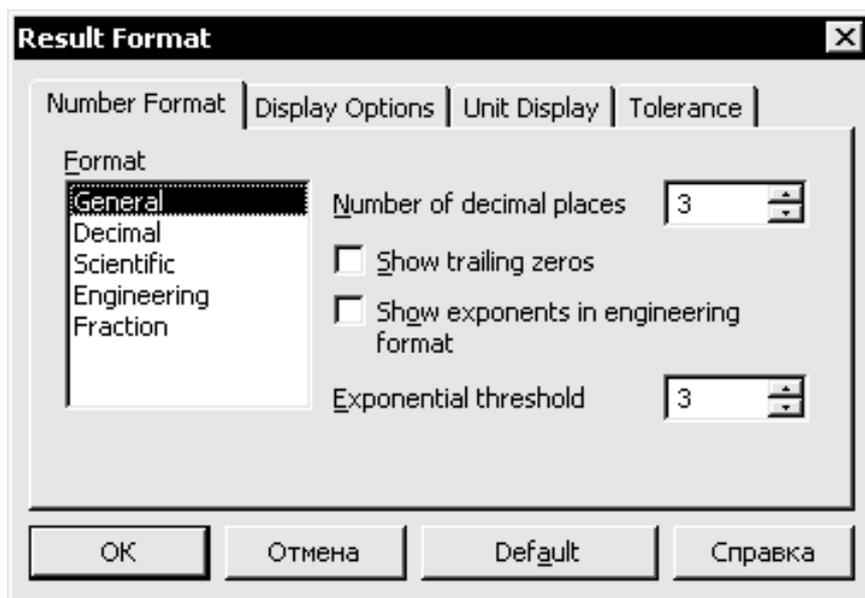


Рис. 119

Чтобы изменить количество знаков после запятой в результатах всего документа, необходимо открыть диалоговое окно *Result format* (Формат результата) с помощью соответствующей команды пункта меню *Format* (Формат).

Если необходимо отобразить результат в виде числа с порядком, установите флажок в окошке *Show exponents in engineering format* (Показывать экспоненту в инженерном формате).

*Типы представления численного результата:*

*General (Основной/Главный)* – формат, выбранный по умолчанию. Позволяет произвольным образом определять количество отображаемых десятичных знаков (*Number of decimal places*), порядковый порог (*Exponential threshold*), визуализацию незначащих нулей (*Show trailing zeros*).

*Decimal (Десятичный)*. Результат отображается только в виде десятичной дроби. Десятичная часть контролируется параметром *Number of decimal places (Число десятичных позиций)*. Если результат имеет целую часть длиннее 17 знаков (в более ранних версиях программы – 15), то все числа, лежащие в нем после 17 позиции, будут заменены нулями.

*Scientific (Научный)*. Число отображается только со степенью таким образом, чтобы целая часть мантиссы состояла из одного символа. Количество десятичных знаков и отображение незначащих нулей результата определяется пользователем. Кроме того, существует возможность представления числа в техническом формате (параметр *Show exponents as E±000 (Показывать показатель степени как E±000)*).

*Engineering (Инженерный)*. Особенность этого формата заключается в том, что показатель степени всегда отображается числом, кратным 3.

*Fraction (Дробный)*. Представляет результат в виде простой дроби. Точность результатов регулируется при помощи параметра *Level of Accuracy (Уровень точности)*. По умолчанию числа, имеющие целую часть, представляются неправильными дробями. Для того чтобы целая часть была выделена и в дробном формате, следует задействовать опцию *Use Mixed Numbers (Использовать смешанные числа)*.

### **Работа с размерностями**

При выделении подсчитанного численно выражения правее результата появляется черный маркер, который является маркером размерности. Чтобы вставить в ответ размерность, необходимо открыть диалоговое окно *Insert Unit (Вставить размерность)*. Сделать это можно:

- сочетанием «горячих» клавиш *Ctrl+U*;
- нажатием на панели инструментов *Standard* кнопки ;
- применив команду *Unit (Единица)* пункта меню *Insert (Вставка)*;
- двойным щелчком левой кнопкой мыши по маркеру размерности.

В Mathcad имеется более 100 встроенных единиц размерности, разбитых на тематические группы, ссылки на которые расположены в списке *Dimension (Измерение)*. При выборе категории в окошке *Unit (Единица)*

появится соответствующий список единиц измерения (рис. 120). По умолчанию программа открывает весь список размерностей *All (Все)*.

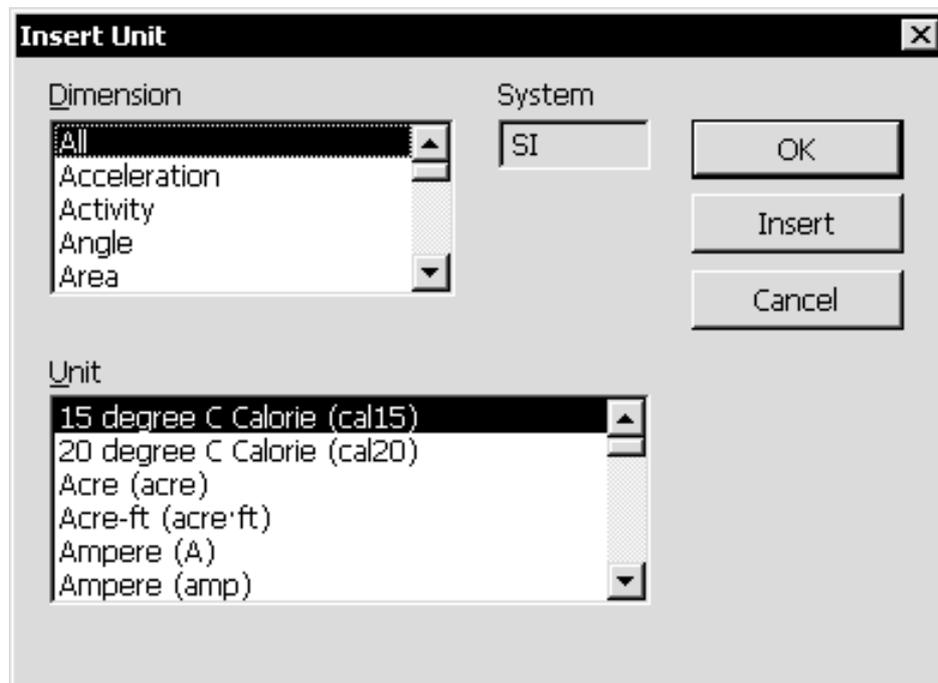


Рис. 120

### Проведение расчетов символьно

Символьный расчет обеспечивает получение результата аналитическими методами. Символьный оператор вывода имеет вид стрелки  $\rightarrow$ . Ввести его можно с двух математических панелей: *Symbolic (Символьные)* и *Evaluation (Выражение)* или сочетанием «горячих» клавиш  $\text{Ctrl}+$ . (точка). Называется этот оператор *Evaluate Symbolically (Подсчитать символьно)*.

#### Способы проведения символьных преобразований

- при помощи команд специального меню *Symbolic (Символика)*, расположенного в главном меню программы;
- при помощи операторов панели *Symbolic (Символика)* или *Символьные* семейства *Math (Математические)*.

При проведении символьных преобразований с помощью команд меню *Symbolic (Символика)* последовательность действий следующая:

1. Введите выражение. Если это уравнение, то в качестве знака равенства следует использовать *оператор логического равенства (Ctrl+=)*.
2. В зависимости от того, какой тип символьных операций должен быть применен к введенному выражению, необходимо выделить либо пе-

ременную (если надо использовать, например, команду решения уравнений или разложения в ряд), либо все выражение целиком (для команд символьной алгебры).

3. Выберите необходимую команду из пункта меню *Symbolic* (*Символика*). В зависимости от действующих настроек, над, под или на месте исходного выражения появится ответ. Нужно учитывать, что символьные преобразования при помощи команд меню осуществляются Mathcad без учета определений, присваиваний, сделанных в документе выше.

Последовательность действий при проведении символьных преобразований с помощью *операторов панели Symbolic* (*Символика* или *Символьные*):

*1-й способ:*

1. Введите выражение. Если это уравнение, то в качестве знака равенства следует использовать *оператор логического равенства* (*Ctrl+=*).

2. Выберите необходимый оператор на панели инструментов *Symbolic* (*Символика*). Справа появится маркер (один или два) и оператор символьного вывода.

3. Заполните маркеры справа от оператора и нажмите *Enter*. Справа от оператора символьного вывода отобразится результат.

*2-й способ:*

1. Выберите необходимый оператор на панели инструментов *Symbolic* (*Символика*). На экране появится оператор, образованный ключевым словом, одним или несколькими маркерами и оператором символьного вывода.

2. Заполните маркеры: на место левого маркера введите уравнение, на место правого – переменную (переменные), по которой оно должно быть решено, и нажмите *Enter*.

### **Совместное использование нескольких символьных операторов**

1. Выберите необходимый оператор на панели инструментов *Symbolic* (*Символика*).

2. Поставьте курсор в крайний правый маркер, нажмите кнопку ввода следующего оператора. Слева появится вертикальная линия блока. За линией блока будет расположен левый маркер, в который нужно ввести уравнение, преобразуемое выражение или имя функции (если оно было определено ранее).

3. Чтобы добавить еще один оператор, поставьте курсор в крайний правый маркер, нажмите кнопку ввода следующего оператора.

4. Заполните правые маркеры и нажмите *Enter*.

## Основные символьные операторы

*Float* (*Пересчитать в десятичную дробь*). Позволяет получить приближительное значение некоторого выражения с определенной точностью в формате числа с плавающей точкой. Он содержит два маркера: в левый вносится выражение или функция, в правый – число значимых цифр, которые должен содержать ответ. Точность результата может быть задана числом от 1 до 250.

*Expand* (*Разложить или Раскрыть скобки*). В левый маркер оператора вносится упрощаемое выражение, в правый – переменная (или выражение), относительно которой проводится упрощение (разложение).

*Factor* (*Разложить на множители и привести к общему знаменателю*). С помощью оператора Factor можно:

- произвести разложение целых чисел на простые множители;
- преобразовать конечные десятичные дроби в простые дроби;
- привести к общему знаменателю выражение с несколькими дробями.

*Collect* (*Вынесение общего множителя за скобки*). Оператор имеет два маркера: в левый маркер необходимо ввести выражение или функцию, в правый – имя переменной или функцию, относительно которой нужно производить данное преобразование. Вынесение общего множителя может осуществляться только по одной переменной.

*Parfrac* (*Разложение на элементарные дроби*) – это одна из основных операций, использующихся при упрощении выражений. В левый маркер вводится выражение, которое необходимо преобразовать, в правый – переменная или функция, исходя из которой должно проводиться преобразование.

*Substitute* (*Подстановка и замена переменных*) используется в ситуациях, когда необходимо заменить переменную в выражении на другую переменную или некоторое выражение. Последовательность действий такова:

1. С панели *Symbolic* (*Символьные*) введите оператор *Substitute* (*Заместить*).

2. В левый маркер оператора введите выражение.

3. В правом маркере сделайте запись вида  $a = b$ , где  $a$  – замещаемая переменная,  $b$  – подставляемое значение. Если заместить необходимо две переменные, то через запятую делается еще одно аналогичное присваивание. В качестве знака равенства следует использовать логическое равенство ( $Ctrl+=$ ).

*Simplify* (*Комплексное упрощение выражений*). Данный оператор выполняет функции нескольких операторов: подобно оператору *Expand*, про-

водит разложение выражений; аналогично оператору *Factor*, осуществляет приведение двух дробей к общему знаменателю; так же, как и *Collect*, выносит общий множитель за скобки. Оператор *Simplify* совмещает все эти операции так, чтобы упрощение было максимальным.

### Комплексные числа

Ввести комплексное число в Mathcad можно двумя способами:

– использовать соответствующую кнопку на панели инструментов *Calculator* (*Калькулятор*);

– с клавиатуры ввести цифру 1, а затем *i* или *j* (но не *1·i* или *1\*j*).

Для анализа комплексных величин в Mathcad используются функции, приведенные в табл. 5.

Таблица 5

Функция	Описание
$\arg(z)$	возвращает аргумент (фазу) комплексного числа $z$ в радианах
$ z $	возвращает модуль комплексного числа $z$
$\operatorname{Re}(z)$	возвращает значение действительной части комплексного числа $z$
$\operatorname{Im}(z)$	возвращает значение мнимой части комплексного числа $z$

### Матричные вычисления

Создать матрицу можно с помощью специальной панели *Insert Matrix* (*Вставить матрицу*). Открыть эту панель можно или с помощью одноименной кнопки на панели *Matrix* (*Матричные*) семейства *Math* (*Математические*), или соответствующей командой пункта меню *Insert* (*Вставка*), или сочетанием «горячих» клавиш *Ctrl+M*. Параметры создаваемой матрицы определяются в полях *Rows* (*Строки*) и *Columns* (*Колонки*). После определения размера матрицы в поле документа будет вставлена заготовка с черными маркерами вместо элементов. В маркеры элементов можно ввести числа, переменные, выражения.

Для вычисления *определителя матрицы* необходимо ввести одноименный оператор *Determinant* с панели инструментов *Matrix* (*Матричные*) или сочетанием «горячих» клавиш *Ctrl+|*.

**Важно!** Не путайте определитель со знаком модуля на панели инструментов *Calculator* (*Калькулятор*).

## Решение уравнений

### Аналитическое решение уравнений

Для аналитического решения уравнений в системе Mathcad существует специальный оператор *Solve* (*Решить*). Последовательность действий:

1. С панели *Symbolic* (*Символьные*) введите оператор *Solve* (*Решить*).
2. В левом маркере задайте вид решаемого уравнения или имя функции. В качестве знака равенства следует использовать *логическое равенство* (*Bold Equal* – вводится сочетанием клавиш *Ctrl+=* или с панели инструментов *Boolean* (*Булевы*)). Если уравнение приведено к стандартному виду, то достаточно будет определить лишь его левую часть. При этом выражение будет приравнено к нулю автоматически. Также в левый маркер можно ввести имя функции (если она была определена выше) – в этом случае будут найдены выражения, определяющие ее нули.
3. В правый маркер введите имя переменной, относительно которой должно быть решено уравнение, и нажмите *Enter*.

Если уравнение имеет несколько корней, ответ будет представлен в виде вектора.

### Решение уравнений с помощью вычислительного блока *Given-Find*

С помощью вычислительного блока *Given-Find* уравнение можно решить как численно, так и символьно. При символьном решении используется оператор символьного вывода  $\rightarrow$ , при численном методе – знак обычного равенства. Кроме этого, при использовании численного метода потребуется определить начальные приближения переменной.

Если окажется, что система не может найти решений при заданных приближениях, необходимо сменить их на другие, предварительно проанализировав область существования решения. Чтобы найти мнимые корни, приближения тоже должны быть мнимыми.

Пошаговая технология выполнения обоих способов решения уравнений приведена в табл. 6.

Таблица 6

Аналитическое (символьное) решение уравнений	Численное решение уравнений
<ol style="list-style-type: none"><li>1. Ввести вводное слово <i>Given</i>.</li><li>2. Под вводным словом ввести уравнение. В качестве знака равенства используется знак логического равенства (<i>Ctrl+=</i>).</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Задать начальные приближения переменной.</li><li>2. Ввести вводное слово <i>Given</i>.</li></ol>

<p>3. С клавиатуры или из списка <i>Insert Function</i> (<i>Вставить функцию</i>) ввести функцию решения уравнений <i>Find(имя переменной)</i>.</p> <p>4. В качестве оператора вывода использовать оператор символьного вывода <math>\rightarrow</math>(<i>Ctrl+.</i>).</p>	<p>3. Под вводным словом ввести уравнение. В качестве знака равенства используется знак логического равенства (<i>Ctrl+=</i>)</p> <p>4. С клавиатуры или из списка <i>Insert Function</i> (<i>Вставить функцию</i>) ввести функцию решения уравнений <i>Find(имя переменной)</i>.</p> <p>5. В качестве оператора вывода использовать знак равенства =.</p>
---	--

### Построение двумерных графиков

Ввести графическую область можно или с панели инструментов *Graph* (*Графические*) семейства *Math* (*Математические*), нажав на кнопку  *X-Y Plot* (*График кривой в двумерной декартовой системе координат*), или выбрав одноименную команду из пункта меню *Insert* (*Вставка*), или нажав комбинацию «горячих» клавиш *Shift+2*.

Графическая область представляет собой две вложенные рамки. Во внутренней рамке отображаются непосредственно кривые зависимостей. Пространство между ними служит для визуализации разного рода служебной информации. Графическую область можно увеличивать и уменьшать при помощи специальных маркеров, расположенных на внешней рамке. Перемещать по документу и удалять графические области можно точно так же, как и простые формулы.

#### Быстрый метод построения графиков

1. Введите графическую область.
2. В специальном маркере, расположенном под внутренней рамкой графической области, задайте имя переменной.
3. В маркер, расположенный слева от внутренней рамки, введите функцию или имя функции (если она была определена выше).

*Недостаток метода:* область изменения переменной для всех функций определяется одна и та же: от  $-10$  до  $10$ . В некоторых случаях такие пределы неприемлемы. Для того чтобы изменить значения переменной  $x$ , просто удалите старые величины и введите новые. Изменение пределов по оси  $X$  вызывает автоматический пересчет значения по  $Y$ .

### **Построение двумерных графиков с использованием ранжирования переменной**

1. Введите имя переменной вместе с оператором присваивания  $:=$ .
2. Задайте левую границу интервала построения  $x_{нач}$  и поставьте запятую.
3. Введите оператор ранжирования переменной, нажав либо на панели инструментов *Matrix* (*Матричные*) кнопку , либо на клавиатуре клавишу ; (точка с запятой).
4. В левом маркере введенного оператора ранжирования задайте вторую точку на промежутке ( $x_{нач} + шаг$ ).
5. В правый маркер оператора ранжированной переменной введите значение правой границы на интервале  $x_{кон}$ .

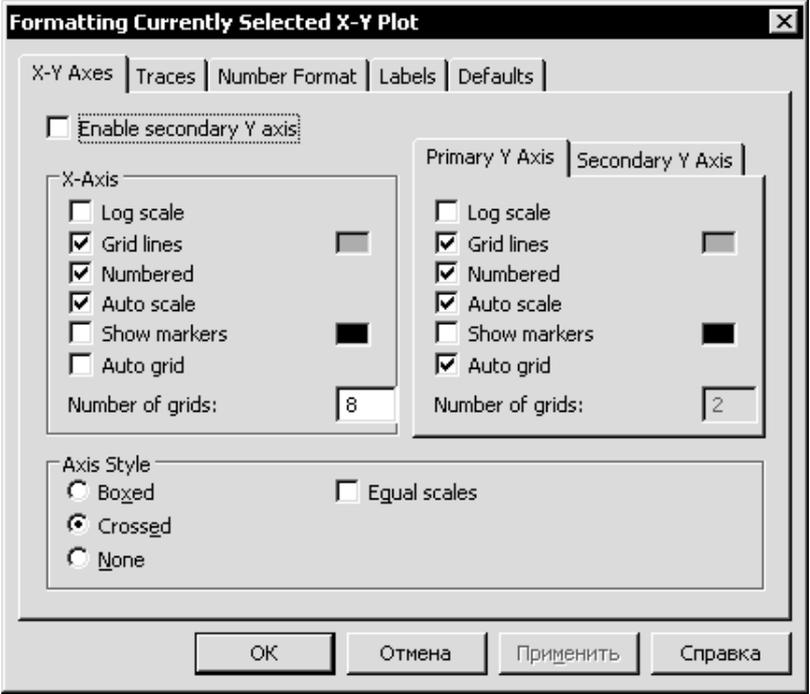
### **Построение нескольких графиков**

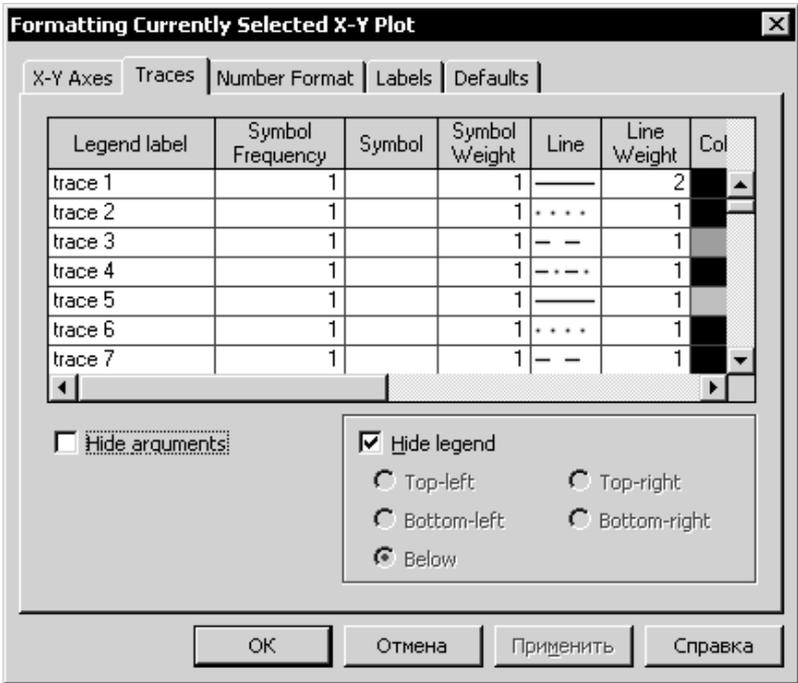
В Mathcad в одну графическую область можно поместить до шестнадцати кривых. Чтобы добавить к уже имеющемуся графику еще один, выполните следующую последовательность действий:

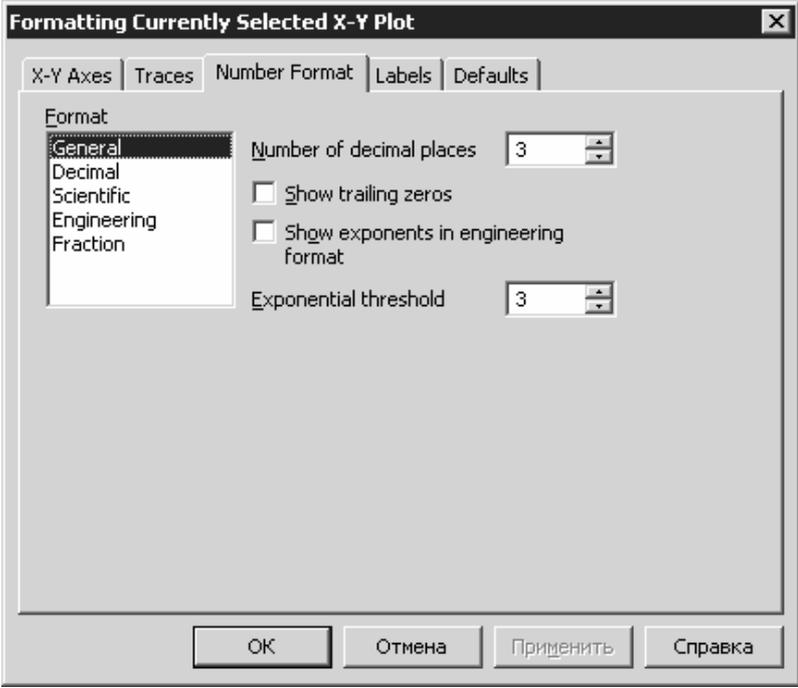
1. Поставьте курсор справа от выражения, определяющего координаты последнего ряда данных по оси  $Y$ .
2. С клавиатуры введите запятую, при этом курсор опустится на строчку ниже и появится еще один маркер.
3. В появившийся маркер введите выражение для новой функции или имя функции.

### **Форматирование графиков**

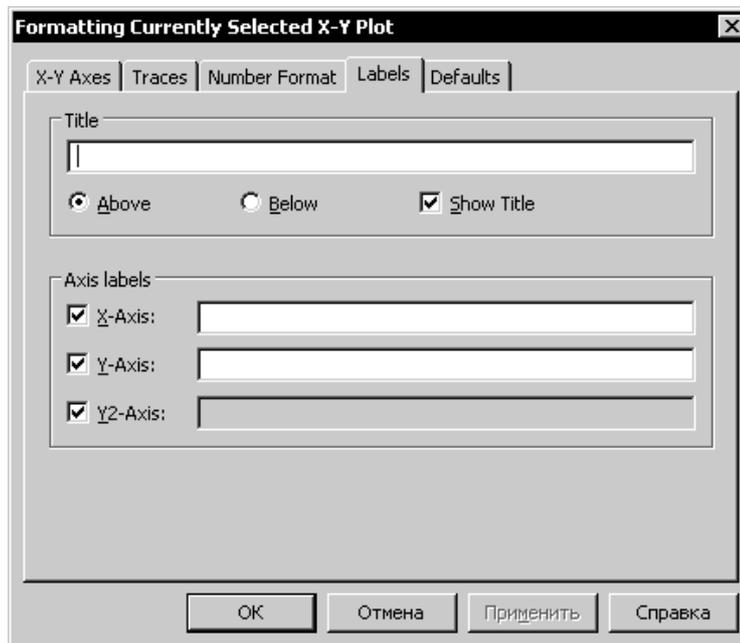
Чтобы отформатировать график, необходимо открыть диалоговое окно *Formatting Currently Selected X-Y Plot* (*Форматирование выделенной декартовой плоскости*) одним из *трех* способов: или сделать двойной щелчок левой кнопкой мыши по области графика, или открыть пункт меню *Format*  $\rightarrow$  *Graph*  $\rightarrow$  *X-Y Plot* (*Формат*  $\rightarrow$  *График*  $\rightarrow$  *X-Y зависимость*), или выбрать из контекстного меню графика команду *Format*. Основные инструменты форматирования графиков приведены в табл. 7 [4, 7, 8].

Параметр форматирования	Описание
<p>Закладка <b>X-Y Axes (Оси X и Y)</b>: настройка вида осей</p> 	
<p><b>Log scale</b> (Логарифмическая шкала)</p>	<p>Координаты по формируемой оси будут прологарифмированы (по десятичному логарифму). Это удобно, если значения координат точек графика отличаются на несколько порядков. Координаты кривой должны быть только положительными.</p>
<p><b>Grid lines</b> (Линии сетки)</p>	<p>При активизации этого параметра будет визуализирована сетка из вспомогательных линий, цвет которых можно выбрать, задействовав кнопку <i>Grid Color</i> (Цвет сетки).</p>
<p><b>Numbered</b> (Нумерованные)</p>	<p>Параметр отвечает за отражение нумерации шкалы.</p>
<p><b>Auto Scale</b> (Автошкала)</p>	<p>Выбор диапазона изменения оси производится автоматически.</p>
<p><b>Show Markers</b> (Показать маркеры)</p>	<p>Используя эту команду, можно выделить при помощи специальных подписанных линий по две важные точки (корни, экстремумы, разрывы), перемещаемые по осям.</p>
<p><b>Auto Grid</b> (Автоматическая сетка)</p>	<p>Параметр отвечает за автоматический выбор числа разбиений формируемой оси. Отключив его, в окошке <i>Number of Grid</i> (Число разбиений) шаг нумерации можно определить произвольным образом.</p>

Параметр форматирования	Описание
<b>Boxed</b> (Прямоугольные)	Оси пересекаются в наименьших точках диапазона. Параметр, определенный по умолчанию.
<b>Crossed</b> (Пересеченные)	Оси пересекаются в точке (0,0). Стандартный вид декартовой системы.
<b>None</b> (Нет)	График отображается без осей.
<b>Equal Scales</b> (Равные шкалы)	Разбиение осей производится в равном масштабе.
<p>Закладка <b>Traces</b> (Ряды данных): настройка вида кривой</p> 	
<b>Legend Label</b> (Легенда)	Своеобразное «имя» набора параметров, описывающих отображение зависимости на графике.
<b>Symbol Frequency, Symbol, Symbol Weight</b>	Параметры, определяющие символ, которым отображаются узловые точки графика, его тип, размер.
<b>Line, Line Weight, Color</b>	Параметры, определяющие линию, которой будет прочерчена зависимость, ее тип, размер, цвет.
<b>Hide Arguments</b> (спрятать аргументы)	Убран установленный по умолчанию флажок из окошка этого параметра, можно очистить служебную зону графической области от имени функций и переменных.

<b>Параметр форматирования</b>	<b>Описание</b>
<p>Закладка <b>Number Format</b> (Формат номеров): форматирование подписей данных</p> 	
<b>Format</b> (Формат)	Выбор формата отображения чисел.
<b>Number of decimal places</b> (Количество десятичных позиций)	Установка точности (количества знаков после запятой).
<b>Show trailing zeros</b> (Показывать незначущие нули)	Отображение незначущих нулей.
<b>(Exponential threshold)</b> (Порог экспоненты)	Отображение числа с порядком.

Закладка **Labels** (Пометки): добавление заглавий



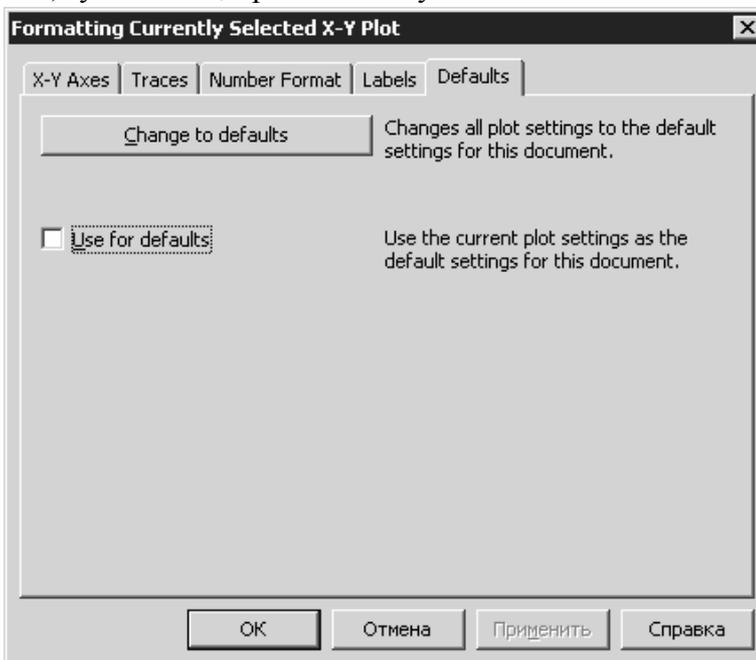
**Title** (Заглавие)

Ввод текста названия и определение его расположения относительно окна кривой.

**Axis Labels**  
(Пометки к осям)

Задание подписей к осям.

Закладка **Defaults** (По умолчанию): установки, принятые по умолчанию



**Change to Defaults** (Изменить как по умолчанию)

К графику будут применены настройки, принятые в системе по умолчанию.

**Use for Defaults** (Использовать как по умолчанию)

Настройки, принятые в системе по умолчанию, будут применены ко всему документу.

*Учебное издание*

ШЕСТОПАЛОВА Ольга Евгеньевна  
КЕЧКО Ирина Львовна

**АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ**

Учебно-методический комплекс  
для студентов специальностей  
1-36 01 01 «Технология машиностроения»,  
1-39 02 01 «Моделирование и компьютерное  
проектирование радиоэлектронных средств»

В двух частях

Часть 2

Редактор *Н. М. Важенина*

Дизайн обложки *В. А. Виноградовой*

---

Подписано в печать 09.11.10. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Ризография.  
Усл. печ. л. 9,98. Уч.-изд. л. 8,76. Тираж 160 экз. Заказ 1617.

---

Издатель и полиграфическое исполнение:  
учреждение образования «Полоцкий государственный университет».

ЛИ № 02330/0548568 от 26.06.2009      ЛП № 02330/0494256 от 27.05.2009

Ул. Блохина, 29, 211440, г. Новополоцк.