5. Каменные и армокаменные конструкции: СНиП II-22-81. – Введ. 31.11.81. – М.: Стройиздат, 1983. – 40 с.
6. Еврокод 6. Проектирование каменных конструкций. Ч. 1-1: Общие правила для армированных и неармированных конструкций: СТБ EN 1996-1-2008. – Введ. 01.07.2009. – Минск: Госстандарт, 2009. – 127 с.
7. Орлович, Р.Б. Зарубежный опыт армирования каменных конструкций / Р.Б. Орлович, В.Н. Деркач // Жилищное строительство. – 2011. – № 11. – С. 35 – 39.

УДК 624.04

Турищев Л.С., канд. техн. наук, доц.;
Полонец О.И.; Прокоп А.А.
(ПГУ, г. Новополоцк)

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ ФЕРМ

Важным критерием проектирования несущих конструкций является их материалоемкость. В инженерной практике решение задачи о минимизации расхода конструкционного материала, как правило, осуществляется численно методами математического программирования и возможно только для каждой конструкции в отдельности.

Численное решение задач оптимального проектирования для различных конструкций частного вида рассматривалось рядом авторов. Обзор работ, посвященных решению таких задач, приведен в [1; 2].

Рассматривается аналитическое решение задачи отыскания минимального веса произвольной пространственной статически определимой фермы, которая считается линейно-деформируемой системой. Ферма включает в себя s прямолинейных стержней, соединяющих n узлов, в том числе m внутренних узлов и n-m опорных узлов. Число опорных стержней удовлетворяет соотношениям:

- для плоской фермы

$$s_0 = 2n - s;$$

- для пространственной фермы

$$s_0 = 3n - s.$$

Внешняя нагрузка, действующая на ферму, представляет собой систему сосредоточенных сил, приложенных к внутренним узлам, и описывается вектором:

$$\overline{P} = \begin{pmatrix} \overline{P}_1 \\ \vdots \\ \overline{P}_i \\ \vdots \\ \overline{P}_m \end{pmatrix},$$

где $\overline{P}_i$ - вектор нагрузки в произвольном узле i $(i=1,...,m)$, который имеет вид:

- для плоской фермы

$$\overline{P}_i = \begin{pmatrix} P_{xi} \\ P_{yi} \end{pmatrix};$$

- для пространственной фермы

$$\overline{P}_i = \begin{pmatrix} P_{xi} \\ P_{yi} \\ P_{zi} \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что все стержни выполнены из одного конструкционного материала. Пусть длина j-го стержня равна l_j, а площадь его поперечного сечения – A_j. Тогда за целевую функцию может быть принят вес фермы:

$$Q = \gamma \sum_j l_j A_j \,, \qquad (1)$$

где γ – объемный вес конструкционного материала. Переменными целевой функции (1) являются площади поперечных сечений A_j $(j = 1,\ldots,s)$.

Ограничения для переменных целевой функции (1) вытекают из двух предельных состояний, которым должны удовлетворять параметры напряженно-деформированного состояния проектируемой фермы – внутренние усилия и перемещения.

Согласно первому предельному состоянию должна быть обеспечена несущая способность конструкции.

Отсюда следует, что продольное усилие в произвольном растянутом стержне фермы должно удовлетворять условию вида

$$\frac{N_j}{A_j} \le R_t, \tag{2}$$

а в произвольном сжатом стержне – условию вида

$$\frac{N_j}{\varphi_j A_j} \le R_c. \tag{3}$$

Здесь R_t – расчетное сопротивление материала при растяжении; R_c – расчетное сопротивление материала при сжатии; φ_j – коэффициент продольного изгиба j-го сжатого стержня.

Учитывая шарнирное соединение стержней в узлах, положим коэффициент продольного изгиба для всех сжатых стержней равным 1.

Согласно второму предельному состоянию должна быть обеспечена нормальная эксплуатация конструкции, что, прежде всего, связано с недопущением возникновения в конструкции чрезмерных перемещений.

Условие соблюдения такого предельного состояния имеет вид:

$$\Delta \le [\Delta], \tag{4}$$

где Δ – величина наибольшего перемещения, возникающего в конструкции от внешних воздействий; $[\Delta]$ – предельная величина перемещения, установленная нормами и гарантирующая нормальную эксплуатацию конструкции.

Согласно формуле Максвелла – Мора перемещения, возникающие в ферме при узловой схеме нагружения, описываются следующим выражением:

$$\Delta = \sum_{k=1}^{s} \frac{n_k N_k l_k}{E A_k}. \tag{5}$$

Тогда искомые площади поперечных сечений A_k ($k = 1,\ldots,s$) должны удовлетворять ограничению второго вида

$$\sum_{k=1}^{s} c_k l_k \frac{1}{A_k} \le [\Delta], \tag{6}$$

где $c_k = \dfrac{n_k N_k}{E}$ – некоторая константа, характеризующая произвольный k–тый стержень.

Задача отыскания минимума целевой функции (1) с учетом ограничений (2) – (6) является задачей нелинейного программирования, так как указанные ограничения зависят от обратных величин переменных целевой функции. При ее решении возможны два случая.

В первом случае минимум целевой функции (1) достигается при значениях переменных, при которых впервые выполняются ограничения (2), (3)

$$A_j = \frac{N_j}{R_t};\ A_j = \frac{N_j}{R_c} \tag{7}$$

и одновременно выполняются ограничения (6).

Во втором случае при значениях переменных (7) ограничения (6) не выполняются и, следовательно, минимум целевой функции не достигается. Минимум целевой функции в этом случае обычно отыскивается численно одним из методов математического программирования, например, методом динамического программирования. Алгоритм численного решения задачи этим методом изложен [3].

Для аналитического решения задачи во втором случае введем новые переменные целевой функции:

$$a_j = \frac{1}{A_j}. \tag{8}$$

Тогда задача отыскания минимального веса фермы может быть сформулирована следующим образом.

Требуется минимизировать целевую функцию

$$Q(a_1,...,a_s) = \gamma\sum_j l_j a_j^{-1} \tag{9}$$

при соблюдении условия

$$\sum_{k=1}^{s} c_k l_k a_k = [\Delta] \tag{10}$$

и

$$a_j < \frac{R_t}{N_j};\ a_j < \frac{R_c}{N_j}. \tag{11}$$

Условие (10) получены из ограничения (6) и соответствует значениям переменных целевой функции (9), при которых ограничение (6) выполняется впервые.

Для отыскания минимума функции (9) применим метод множителей Лагранжа. Для этого запишем условие (10) в виде

$$\sum_{k=1}^{s} c_k l_k a_k - [\Delta] = 0,$$

и преобразуем целевую функцию (9) к эквивалентному расширенному виду

$$F(a_1,...,a_s,\lambda)=\sum_{j=1}^{S} l_j a_j^{-1}+\lambda(\sum_{k=1}^{s} c_k l_k a_k \ -[\Delta]), \qquad (12)$$

где λ – множитель Лагранжа.

Запишем условия существования экстремума для функции (12)

$$\frac{\partial F}{\partial a_j}=-l_j\frac{1}{a_j^2}+\lambda c_j l_j=0; \qquad (13)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=\sum_{k=1}^{s} c_k l_k a_k \ -[\Delta]=0. \qquad (14)$$

Найдем из (13)

$$a_j=\frac{1}{\sqrt{\lambda}\sqrt{c_j}}, \qquad (15)$$

а из (14) с учетом (15) получим

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=\frac{[\Delta]}{\sum_{k=1}^{s} l_k\sqrt{c_k}}.$$

Тогда формула для определения площадей поперечных сечений A_k ($k = 1,\ldots,s$) стержней фермы, при которых целевая функция (9) принимает минимальное значение, имеет вид

$$A_j=\frac{\sqrt{c_j}}{[\Delta]}\sum_{k=1}^{s} l_k\sqrt{c_k}. \qquad (16)$$

Подставляя (16) в (1), получим формулу для вычисления минимального веса произвольной статически определимой фермы при соблюдении ограничений (10), (11)

$$Q_{\min}=\frac{\gamma}{[\Delta]}\sum_{j=1}^{s} l_j\sqrt{c_j}\sum_{k=1}^{s} l_k\sqrt{c_k}. \qquad (17)$$

Литература

1. Сергеев, И.Д. Проблемы оптимального проектирования конструкций / И.Д. Сергеев, А.И. Богатырев. – Л. Стройиздат, 1971. – 135 с.
2. Мажид, К.И. Оптимальное проектирование конструкций / К.И. Мажид. – М.: Высш. шк., 1979. – 237 с.
3. Почтман, Ю.М. Динамическое программирование в задачах строительной механики / Ю.М. Почтман, В.А. Бараненко. – М. Стройиздат, 1975. – 110 с.