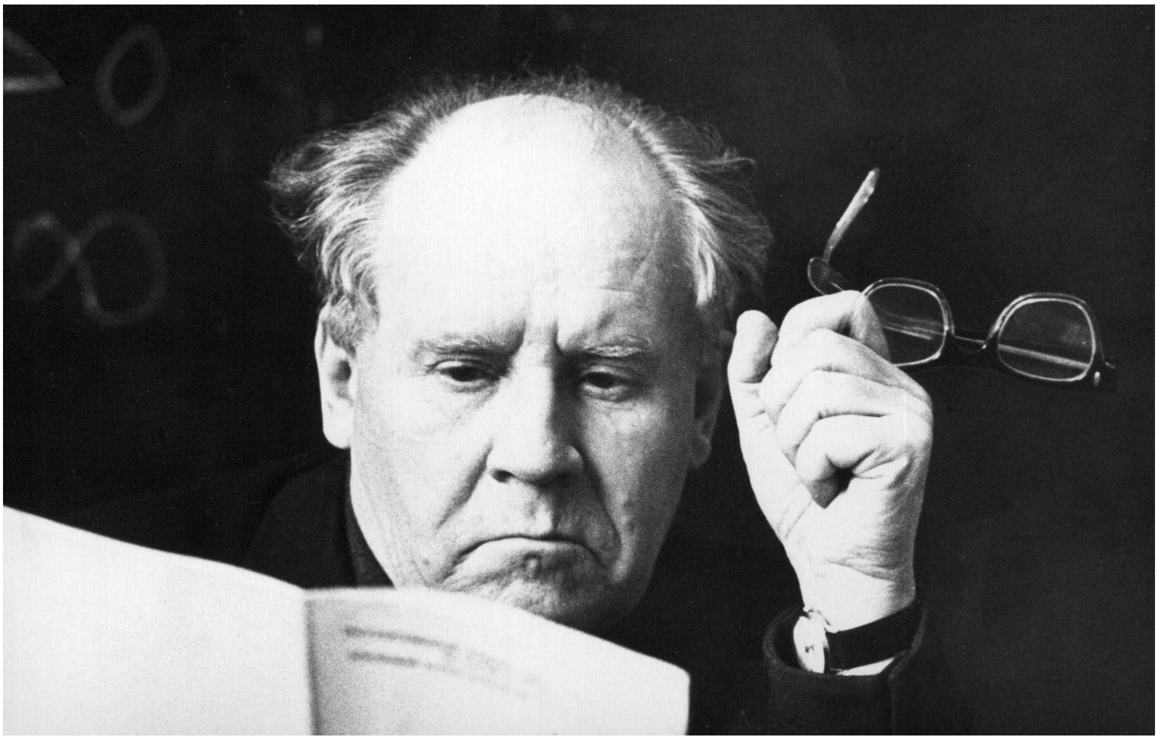
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПОЛОЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

XVI Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям

(ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2014)



Тезисы докладов

Часть 2

Уравнения в частных производных
Интегро-дифференциальные операторы и уравнения
Дифференциальные уравнения и их приложения
Методика преподавания математических дисциплин в высшей школе

МИНСК 2014

УДК 517.9
ББК 22.161.6я43
Ш51

Р е д а к т о р ы:
А. К. Деменчук, С. Г. Красовский, Е. К. Макаров

Конференция проводится при финансовой поддержке
Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований

Ш51 **XVI Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2014):** тез. докладов Международной научной конференции. Новополоцк, 20 – 22 мая 2014 г. — Часть 2. — Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2014. — 120 с.

ISBN 987-985-6499-84-8 (Часть 2)
ISBN 978-985-6499-82-4

Сборник содержит тезисы докладов, представленных на XVI Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения–2014) по вопросам уравнений в частных производных, интегро-дифференциальных операторов и уравнений, дифференциальных уравнений их приложений, методики преподавания математических дисциплин в высшей школе.

ISBN 987-985-6499-84-8 (Часть 2)
ISBN 978-985-6499-82-4

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПОТЕНЦИАЛОМ ДИРАКА

С.Н. Барановская, Н.И. Юрчук

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

Bramka@rambler.ru, Yurchuk@bsu.by

Рассмотрим задачу Коши

$$L_\gamma(u) \equiv \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \triangle_x u(x,t) + \gamma\delta(x_0,t_0)u = f(x,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x = (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

где $\delta(x_0,t_0)$ — δ-функция Дирака, сосредоточенная в точке (x_0,t_0), $\delta(x_0,t_0)u = u(x_0,t_0)$ и $\triangle_x$ — оператор Лапласа по пространственным переменным x_i, $i = \overline{1,n}$.

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть функции f и φ непрерывны и удовлетворяют условиям*

$$|f(x,t)| \leqslant c\exp\{h\|x\|^2\}, \quad |\varphi(x)| \leqslant c\exp\{h\|x\|^2\}, \quad c > 0,$$

$$|f(x,t) - f(x',t)| \leqslant B\|x - x'\|^\alpha, \quad \alpha > 0,$$

где $h < 1/(4T)$, а $\gamma \neq -1/t_0$. Тогда для каждых таких f и φ задача Коши (1), (2) *имеет единственное классическое решение, которое представимо формулой*

$$u(x,t) = v(x,t) - \gamma\frac{v(x_0,t_0)}{1+\gamma t_0}t.$$

Здесь функция

$$v(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(z)e^{-r^2/(4t)}dz + \int\limits_0^t\frac{d\tau}{(2\sqrt{\pi(t-\tau)})^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}f(z,\tau)e^{-r^2/(4t-4\tau)}dz,$$

где $r = \|x - z\| = \sqrt{|x_1 - z_1|^2 + \dots + |x_n - z_n|^2}$, $z = (z_1, \dots z_n)$, является решением задачи Коши (1), (2) *при $\gamma = 0$.*

МАКСИМАЛЬНЫЙ АТТРАКТОР ОДНОГО НЕАВТОНОМНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

С.М. Бородич

Витебский госуниверситет, Витебск, Беларусь

sirius722@rambler.ru

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$ рассматривается неавтономное гиперболическое уравнение

$$\partial_t^2 u + \varepsilon\partial_t u = \Delta u - f(t,u) - g(x), \quad u|_{x\in\partial\Omega} = 0, \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$, $f(t,u) \in \mathrm{C}^{0,1}([0,+\infty)\times\mathbb{R})$, $g(x) \in L_2(\Omega)$. Предполагается, что выполнены условия:

$$\lim_{t\to+\infty} f(t,u) = \tilde f(u), \quad \tilde f(u) \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}),$$

$$f(t,u)u \geqslant -C, \quad f'_u(t,u) \geqslant -C,$$

$$|f'_u(t,u)| \leqslant C(u^2+1), \quad |\tilde f'(u)| \leqslant C(|u|^\alpha + 1) \quad (0 \leqslant \alpha < 2),$$

$$|f(t,u) - \tilde f(u)| \leqslant k(t)(|u|^3+1),$$

где $C > 0$, $k(t) \in \mathrm{C}([0;+\infty))$, $k(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Уравнение (1) порождает в пространстве $E = H_0^1(\Omega)\times L_2(\Omega)$ семейство эволюционных операторов $\{S_{t,\tau},\ t \geqslant \tau \geqslant 0\}$:

$$S_{t,\tau} : y_0 \to y(t),$$

где $y_0 = (u_0,p_0) \in E$, $y(t) = (u(t), \partial_t u(t))$, $u(t)$ — решение уравнения (1) с начальными условиями $u|_{t=\tau} = u_0$, $\partial_t u|_{t=\tau} = p_0$.

Максимальным аттрактором семейства $\{S_{t,\tau}\}$ назовем компактное в E множество $\mathfrak{M}$, притягивающее при $t \to +\infty$ траекторию $S_{t,0}B$ любого ограниченного в E множества B и содержащееся в любом другом компактном множестве, обладающем таким же свойством притяжения.

Автономное уравнение

$$\partial_t^2 v + \epsilon\partial_t v = \Delta v - \tilde f(v) - g(x), \quad v|_{x\in\partial\Omega} = 0,$$

порождает в E полугруппу операторов $\{S_t,\ t \geqslant 0\}$ (см.[1]). Предположим,что $\{S_t\}$ имеет конечное число стационарных точек; пусть $y_i = (z_i, 0)$ — какая-либо из них. Обозначим через $M^H(y_i)$ совокупность всех точек $y \in E$, через которые проходят траектории $S_t y_0$, продолжаемые для всех $t \leqslant 0$ и удовлетворяющие условию: $S_t y_0 \to$ $\to y_i$ в E при $t \to -\infty$. Пусть $M = \bigcup_i M^H(y_i)$.

Теорема. *Семейство эволюционных операторов* $\{S_{t,\tau}\}$, *отвечающее уравнению* (1), *имеет максимальный аттрактор* $\mathfrak{M}$, *причем* $\mathfrak{M} \subset \bigcup_i M^H(z_i)$ *и* $S_t\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$ $\forall t \geqslant 0$.

Литература

1. Бабин А. В., Вишик М. И. *Аттракторы эволюционных уравнений.* М.: Наука, 1989. 294 с.

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ВТОРОГО РОДА

И.Б. Гарипов, Р.М. Мавлявиев

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия

ilnur_garipov@mail.ru, mavly72@mail.ru

В настоящее время активно изучаются задачи с интегральными условиями. Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения была рассмотрена в работе [1]. Гиперболическое уравнение с оператором Бесселя и с нелокальным интегральным условием первого рода изучено в работах [2, 3], а параболическое уравнение с оператором Бесселя в работе [4].

Пусть $G_T = \{(x,t):\ 0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T\}$ — прямоугольная область в координатной плоскости Oxt. В области G_T рассмотрим параболическое уравнение

$$L_B u \equiv u_t - B_x u = 0,$$

где

$$B_x = x^{-k}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^k\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{k}{x}\frac{\partial}{\partial x}$$

— оператор Бесселя, $k > 0$.

Рассматривается задача о нахождении функции $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x,t) \in C^{1,0}_{x,t}(\overline{G}_T) \cap C^{2,1}_{x,t}(G_T), \tag{1}$$

$$L_B u = 0, \quad (x,t) \in G_T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3}$$

$$u(0,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$

$$u_x(l,t) + \int\limits_0^l u(x,t)x^k dx = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5}$$

где $\varphi(x)$ — заданная функция, обеспечивающая выполнимость условий (1)–(5).

Теорема. *Задача* (1)–(5) *не может иметь более одного решения.*

Литература

1. Пулькина Л. С. *Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения* // Матем. заметки. 2003. Т. 74, № 3. С. 435–445.

2. Бейлин С. А. *Об одной нелокальной задаче с интегральным условием* // Матем. заметки ЯГУ. 2004. Т. 11, № 2. С. 22—29.

3. Зайцева Н. В. *Смешанная задача для одного B-гиперболического уравнения с интегральным условием первого рода* // Изв. ТулГУ. Сер. Естеств. науки. 2012. Вып. 2. С. 39–50.

4. Гарипов И. Б., Мавлявиев Р. М. *Краевая задача для одного параболического уравнения с оператором Бесселя с интегральным условием первого рода* // Изв. ТулГУ. Естеств. науки. 2013. Вып. 1. С. 5–12.

ОБ ОТСУТСТВИИ ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПОГЛОЩЕНИЕМ И НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

А.Л. Гладков

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

gladkoval@mail.ru

Рассматривается следующая начально-краевая задача:

$$\begin{array}{ll} u_t = \Delta u - c(x,t)u^p & \text{для } x \in \Omega,\ \ t > 0, \\ u(x,t) = \int_\Omega k(x,y,t)u^l(y,t)\,dy & \text{для } x \in \partial\Omega,\ \ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{для } x \in \Omega, \end{array}$$

где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, $\min(p,l)>1$, $c(x,t)$ — неотрицательная непрерывная функция, определенная при $x \in \overline{\Omega}$ и $t \geqslant 0$, $k(x,y,t)$ — неотрицательная непрерывная функция, определенная при $x \in \partial\Omega$, $y \in \overline{\Omega}$ и $t \geqslant 0$ и $u_0(x)$ — нетривиальная неотрицательная непрерывная функция, определенная при $x \in \overline{\Omega}$ и удовлетворяющая граничному условию при $t = 0$.

Найдены условия, гарантирующие отсутствие глобальных нетривиальных решений начально-краевой задачи. Пусть λ_1 — первое собственное значение задачи

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0 \text{ в } \Omega, \quad \varphi|_{\partial\Omega} = 0.$$

Предположим, что выполняются следующие условия:

$$\int\limits_{\Omega} k(x,y,t)\,dy \leqslant A\exp(\sigma t), \quad A > 0, \quad \sigma < \lambda_1(l-1), \tag{1}$$

для $x \in \partial\Omega$ и $t > 0$, или

$$c(x,t) \leqslant C(t)\exp[\lambda_1(l-1)t], \quad \lim_{t\to\infty} C(t) = 0, \tag{2}$$

для $x \in \Omega$, $t > 0$, и

$$k(x,y,t) \geqslant B\exp[\lambda_1(l-1)t], \quad B > 0, \tag{3}$$

для $x \in \partial\Omega$, $y \in \Omega$ и достаточно больших значений t.

Теорема. *Если* (1) *выполняется, то существуют глобальные решения задачи с достаточно малыми начальными значениями. Если* $(p+1)/2 < l < p$ *и выполняются условия* (2) *и* (3), *то любое нетривиальное решение задачи разрушается за конечное время.*

Условия отсутствия глобальных решений при $l \geqslant p$ получены в [1]. При $l < (p+1)/2$ и произвольном поведении коэффициентов $c(x,t)$ и $k(x,y,t)$ на бесконечности все решения задачи существуют глобально.

Литература

1. Gladkov A., Guedda M. *Blow-up problem for semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition* // Nonlinear Analysis. 2011. Vol. 74. P. 4573–4580.

О КРИТЕРИИ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА — ПУАССОНА — ДАРБУ

А.В. Глушак, О.А. Покручин

Белгородский госуниверситет, Белгород, Россия

Glushak@bsu.edu.ru, pokru4in.oleg@yandex.ru

Пусть A — замкнутый оператор в банаховом пространстве E с плотной в E областью определения $D(A)$. Рассмотрим задачу Коши для уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = Au(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = 0. \tag{2}$$

Задача (1), (2) при $k = 0$ равномерно корректна только тогда, когда оператор A является генератором косинус-оператор-функции (КОФ). По поводу терминологии см. [1] и обзорные работы [2, 3]. В этих же работах приводятся необходимые и достаточные условия того, что оператор A является генератором КОФ, которые формулируются в терминах оценки нормы резольвенты $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ оператора A и ее производных.

Задача (1), (2) при $k > 0$ исследовалась ранее в работе [4], в которой необходимое и достаточное условия разрешимости сформулированы в терминах оценки нормы резольвенты $R(\lambda)$ и ее весовых производных. В настоящей работе получено необходимое и достаточное условие на резольвенту оператора A, которое, в отличие от [4], формулируется в терминах дробной степени резольвенты и ее, как и в случае $k = 0$, невесовых производных.

Теорема. *Пусть оператор A является генератором аналитической C_0-полугруппы $T(t)$. Для того чтобы задача (1), (2) была равномерно корректной, необходимо и достаточно, чтобы при некоторых постоянных $M \geqslant 1$, $\omega \geqslant 0$ число λ^2 с $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ принадлежало резольвентному множеству оператора A и для дробной степени резольвенты оператора A были выполнены оценки:*

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n}(\lambda R^{1+k/2}(\lambda^2)) \right\| \leqslant \frac{M\ \Gamma(k+n+1)}{(Re\lambda - \omega)^{k+n+1}}, \quad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots,$$

где дробная степень $\alpha > 0$ резольвенты оператора A определена равенством

$$R^{\alpha}(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^{\infty} t^{\alpha-1} \exp(-\lambda t) T(t)\, dt,$$

а $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 13-01-00378 А-2013.

Литература

1. Голдстейн Дж. *Полугруппы линейных операторов и их приложения.* Киев: Выща школа, 1989.

2. Васильев В. В., Крейн С. Г., Пискарев С. И. *Полугруппы операторов, косинус-оператор функции и линейные дифференциальные уравнения* // Итоги науки и техники. Сер. Матем.анализ. ВИНИТИ. 1990. Т. 28. С. 87–202.

3. Васильев В. В., Пискарев С. И. *Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве II. Теория косинус оператор-функций* // http://www.srcc.msu.su/nivc/english/about/home_pages/piskarev/obz2ru.pdf

4. Глушак А. В. *Операторная функция Бесселя* // Докл. АН. 1997. Т. 352, № 5. С. 587–589.

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТИПА ДИРИХЛЕ ДЛЯ СОСТАВНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В.В. Дайняк

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
dainyak@bsu.by

В работе рассматривается задача типа Дирихле для уравнения третьего порядка с постоянными коэффициентами в главной части. Обозначим через Ω произвольную ограниченную область $n+1$-мерного пространства переменных $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть $\tau = (\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n)$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности $\partial\Omega$.

В ограниченной области $\partial\Omega$ зададим дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $u(x)$ вида

$$\mathfrak{L}u \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)u + \mathfrak{L}_1(x, D)u = f(x), \tag{1}$$

где

$$\mathfrak{L}_1(x, D)u = p_0(x)\frac{\partial u}{\partial x_0} + \sum_{k=1}^{n} p_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k} - \lambda(x)u.$$

Здесь a_i, b_i $i = 1, \ldots, n$ – постоянные, коэффициенты полинома $\mathfrak{L}_1(x, D)u$, производные $\partial p_i(x)/\partial x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ измеримы и ограничены.

Обозначим через $\mathfrak{L}_0(\tau) = (\tau_0 + b_1\tau_1 + \ldots + b_n\tau_n)(\tau_0^2 + a_1^2\tau_1^2 + \ldots + a_n^2\tau_n^2)$. В области Ω рассмотрим уравнение (1) относительно функции $u(x)$, которая удовлетворяет однородным граничным условиям

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \tau}\Big|_{\partial\Omega^-} = 0, \tag{2}$$

где $\partial\Omega^-$ — часть границы $\partial\Omega$, в точках которой $\mathfrak{L}_0(\tau) < 0$.

Наряду с задачей (1), (2) рассматривается и соответствующая ей сопряженная. При некоторых дополнительных условиях на коэффициенты оператора $\mathfrak{L}$, которые являются достаточными, методами функционального анализа доказывается в обобщенной постановке однозначная разрешимость уравнения (1) в произвольной области при наличии простейших граничных условий (условий типа Дирихле). Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Если выполняются условия:*

1) $a_i \neq 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$;

2) $\dfrac{\partial p_0(x)}{\partial x_0} + \dfrac{\partial p_1(x)}{\partial x_1} + \ldots + \dfrac{\partial p_n(x)}{\partial x_n} + 2\lambda(x) > 0$,

то *для любых u и v из $H_0^1(\Omega)$ справедливы неравенства*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant c\|Lu\|_{H_0^{-1}(\Omega)}, \quad \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant c^*\|L^*v\|_{H_0^{-1}(\Omega)},$$

где постоянные $c > 0$ и $c^* > 0$ не зависят от функций u и v.

О ПОСТРОЕНИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ $(2+1)$-МЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛОМ БОМА И СТЕПЕННЫМ ЗАКОНОМ НЕЛИНЕЙНОСТИ

С.В. Жестков, В.С. Новашинская

Могилевский государственный университет им. А.А. Кулешова, Могилев, Беларусь

zhestkov_s@rambler.ru, vichka-2468397@yandex.ru

Известно [1], что киральное уравнение Шредингера с потенциалом Бома является неинтегрируемым уравнением. Поэтому для его исследования в [1] использовались вариационный метод Хи и численные вычисления. Возникает вопрос о существовании математических моделей уравнения Шредингера с потенциалом Бома, допускающих точные солитонные решения, в частности, в виде топологических солитонов.

В настоящей работе рассматривается $(2+1)$-мерное НУШ вида

$$iu_t + a_1(u_{xx} + u_{yy}) + a_2|u|^{2m}u = i\left[a_3u + a_4|u|^{2m}u + a_5u\frac{|u|_{xx}}{|u|} + a_6u\frac{|u|_{yy}}{|u|}\right], \qquad (1)$$

где a_j, $j = \overline{1,6}$ — произвольные действительные числа, $m > 0$. Солитонное решение уравнения (1) строится в виде

$$u(t,x,y) = I(t,x,y)\exp\{i\xi\}, \quad \xi = k_1x + k_2y + \omega t + \varphi, \qquad (2)$$

где $I(t,x,y)$ — неотрицательная волновая функция, k_1, k_2, ω, φ — параметры солитона. Поставляя (2) в (1), найдем систему определяющих уравнений относительно неизвестной волновой функции $I(t,x,y)$. Решение полученной системы строится в виде

$$I(t,x,y) = f(\eta), \quad \eta = \alpha_1x + \alpha_2y - vt + \psi, \qquad (3)$$

где $f(\eta)$ — неизвестная волновая функция, α_1, α_2, v, ψ — параметры солитона. Подставляя (3) в систему определяющих уравнений, найдем два дифференциальных уравнения относительно неизвестной функции $f(\eta)$, которые при выполнении соотношения

$$v = 2a_1(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2) \qquad (4)$$

совпадают по форме. Поэтому в качестве искомой функции $f(\eta)$ можно взять анзац вида [2]

$$f(\eta) = A\tanh^{\mu}\eta, \quad \eta > 0, \qquad (5)$$

где A — амплитуда солитона, $\mu > 0$ — неизвестный параметр. Подставляя (5) в полученные дифференциальные уравнения относительно $f(\eta)$, найдем законы распространения топологического солитона (2), (3), (5)

$$\mu = \frac{1}{m} = 1, \quad \omega = -a_1(2\alpha^2 + k^2), \quad A^2 = -2\alpha^2\frac{a_1}{a_2}, \quad A^2 = -\frac{2\Gamma}{a_4}, \quad a_3 - 2\Gamma = 0, \qquad (6)$$

где $\alpha^2 \equiv \alpha_1^2 + \alpha_2^2$, $k^2 \equiv k_1^2 + k_2^2$, $\Gamma \equiv a_5\alpha_1^2 + a_6\alpha_2^2$, если коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условию

$$a_1 < 0 \wedge a_2 > 0 \wedge a_4\Gamma < 0. \qquad (7)$$

Теорема. *Для того, чтобы уравнение* (1) *при* $m = 1$ *имело решение в виде топологического солитона* (2), (3), (5) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения* (4), (6), *где коэффициенты* a_j, $j = \overline{1,6}$, *удовлетворяют условию* (7).

Литература

1. Biswas A., Milovic D. *Chiral solitons with Bohm potential by He‘s variational principle* // Physics of Atomic Nuclei. 2011. Vol. 74, no. 5. P. 755–757.

2. Жестков С. В., Новашинская В. С. *К теории распространения светлых и темных солитонов* (2+1) *-мерных уравнений Шредингера со степенными законами нелинейности и затухания* // Весн. Магілеўскага дзярж. ун-та імя А.А. Куляшова. Сер. В. 2013. № 2(42). С. 32–44.

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ ОПЕРЕЖАЮЩЕ-ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С НЕГЛАДКОЙ ЛИНИЕЙ ВЫРОЖДЕНИЯ

А.Н. Зарубин

Орловский государственный университет, Орел, Россия
aleks_zarubin@mail.ru

Рассмотрим уравнение смешанного эллиптико-гиперболического опережающе-запаздывающего типа с параллельными линиями вырождения

$$U_{xx}(x,y)+\operatorname{sgn} y(2h-y)U_{yy}(x,y)=$$
$$=[R_x^{\tau}H(x)+R_x^{-\tau}H(2\tau-x)][H((2h-y)(y-h))U(x,y-h)+$$
$$+H(y(h-y))U(x,y+h)+H(y(y-2h))U(x,2h-y)],$$

$0<\tau,\;\; h\equiv\text{const},\;\; H(\xi)$ — функция Хевисайда; R_x^{Θ} — оператор сдвига по x : $R_x^{\Theta}q(x)=q(x-\Theta)$; в области $D=D^+\cup D^-\cup I_0\cup I_1$, где $D^+=\{(x,y):\;0<x<2\tau,\;\;0<y<2h\}=\bigcup_{k,n=0}^{1}D_{kn}^{+}\cup J_0\cup J_1$ и $D^-=\bigcup_{k,n=0}^{1}D_{kn}^{-}$ — эллиптическая и гиперболическая части области D, причем

$$D_{kn}^{+}=\{(x,y):k\tau<x<(k+1)\tau,\;\;nh<y<(n+1)h\}\quad(k,n=0,1),$$
$$D_{kn}^{-}=\{(x,y):(-1)^n(2nh-y)+k\tau<x<(-1)^n(y-2nh)+(k+1)\tau,$$
$$-2nh-\tau/2<(-1)^n y<-2nh\}\quad(k,n=0,1),$$

а $J_0=\{(x,y):x=\tau,\;\;0<y<2h\}$, $J_1=\{(x,y):0<x<2\tau,\;\;y=h\}$, $I_n=\bigcup_{k=0}^{1}I_{kn}$, где $I_{kn}=\{(x,y):k\tau<x<(k+1)\tau,\;\;y=2nh\}\;\;(n=0,1)$.

Пусть $D_{kn}=D_{kn}^{+}\cup D_{kn}^{-}\cup I_{kn}(k,n=0,1)$ и $D_k=\bigcup_{n=0}^{1}D_{kn}\;\;(k=0,1)$.

Задача T. Найти в области D функцию $U(x,y)\in C(\bar D)\cap C^1(D\setminus J_0)\cap C^2(D\setminus(J_0\cup\cup J_1\cup I_0\cup I_1))$, удовлетворяющую уравнению (1), краевым условиям $U(0,y)=U(2\tau,y)==0,\;\;0\leqslant y\leqslant 2h,\;\;U(x,2nh-(-1)^n(x-k\tau))=\psi_{kn}(x),\;\;k\tau\leqslant x\leqslant(2k+1)\tau/2\;\;(k,n==0,1)$, условиям сопряжения $U(x,2nh+)=U(x,2nh-)=\omega_n(x),\;\;0\leqslant x\leqslant 2\tau\;\;(n==0,1)$, $U_y(x,2nh+)=U_y(x,2nh-)=\nu_n(x),\;\;0<x<2\tau,\;\;x\neq\tau\;\;(n=0,1)$, условиям согласования $\psi_{0n}(0)=0\;\;(n=0,1)$, где $\psi_{kn}(x)$ — заданные непрерывные достаточно гладкие функции.

Теорема. *Если функции* $\psi_{kn}(x)\in C[k\tau,(2k+1)\tau/2]\cap C^2(k\tau,(2k+1)\tau/2)\;\;(k,n==0,1)$, *абсолютно интегрируемы на* $[k\tau,(2k+1)\tau/2]\;\;(k=0,1)$, $\psi_{kn}'(x)$ *при* $x\to\to k\tau\;\;(k=0,1)$ *допускает интегрируемую особенность,* $\psi_{0n}(0)=0$, *то существует единственное при* $h\leqslant 1/2$, $\tau\leqslant 1/\sqrt{2}$ *решение* $U(x,y)$ *задачи* T.

Единственность решения задачи T следует из полученных в D^- и D^+ на $y=2kh$, $0<x<2\tau\;\;k=0,1)$ неравенств соответственно $\beta_k=(-1)^k\int_0^{2\tau}\omega_k(x)\nu_k(x)\,dx\geqslant 0\;\;(k==0,1)$ и $\beta_0+\beta_1\leqslant 0$, $\beta_0+\beta_1+\iint_{D^+}[(1-2\tau^2H(x-\tau))U_x^2(x,y)+(1-4h^2H(\tau-x)\times\times H(y-h))U_y^2(x,y)+U^2(x,y)]\,dxdy\leqslant 0$.

Вопрос существования решения задачи T в области $D_{00}=D^+{}_{00}\cup D^-{}_{00}\cup I_{00}$ редуцируется к разрешимости разностного уравнения

$$(1+iR_x^{2ih})\left(\nu(x)+\int\limits_0^x\nu(t)\frac{\partial}{\partial x}I_0(i\sqrt{t(x-t)})\,dt\right)=q(x),$$

где $q(x)\in C^1(0,\tau)$.

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Р.Т. Зуннунов

Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан
zunnunov@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sign} y|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (-1 < m < 0) \tag{1}$$

в неограниченной смешанной области, $\Omega = \Omega_1 \cup AB \cup \Omega_2$, где $\Omega_1 = \{(x,y) : 0 < x < 1,$ $y > 0\}$, $AB = \{(x,y) : 0 < x < 1, \ y = 0\}$, а Ω_2 — область нижней полуплоскости, ограниченная отрезком $\overline{AB}$ и характеристиками уравнения (1):

$$AC : x - [2/(m+2)](-y)^{(m+2)/2} = 0, \quad BC : x + [2/(m+2)](-y)^{(m+2)/2} = 1.$$

Задача $\boldsymbol{T^\infty}$. Требуется найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\bar{\Omega})$;

2) $u(x,y)$ дважды непрерывно дифференцируема в Ω_1 и удовлетворяет уравнению (1), а в Ω_2 является обобщенным решением из класса R_2 [1] уравнения (1);

3) на линии AB выполняется условие склеивания

$$\frac{\partial u(x,+0)}{\partial y} = -\frac{\partial u(x,-0)}{\partial y} = \nu(x);$$

4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad u(1,y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leqslant y < +\infty,$$

$$\lim_{y \to +\infty} u(x,y) = 0, \quad \text{равномерно по } 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad u|_{\cdot AC} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2,$$

где $\varphi_i(y)$ $(i = 1,2)$, $\psi(x)$ — заданные функции, причем $\varphi_i(y) \in C[0,+\infty)$, $\psi(x) \in$ $\in C^2[0,1/2]$ а для достаточно больших y удовлетворяет неравенству $|\varphi_i(y)| < M_i \times$ $\times y^{-1+m/2+\varepsilon_i}$, ε_i — достаточно малые положительные числа; $M_i = \text{const} > 0$. Без ограничения общности можно считать $\varphi_1(0) = \psi(0)$.

Единственность решения поставленной задачи доказывается с помощью принципа экстремума, а существование решения методом интегральных уравнений.

Литература

1. Смирнов М.М. *Уравнения смешанного типа.* М.: Наука, 1970.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГО УРАВНЕНИЯ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА

Б.Ю. Иргашев

Наманганский инженерно-педагогический институт, Наманган, Узбекистан
bahrom irgashev@inbox.ru

В области $\Omega = \{(x,y) : 0 < x, \ y < 1\}$ рассмотрим для уравнения

$$L[u] \equiv (-1)^n D_x^{2n+1} u(x,y) + (-1)^k y^m D_y^{2k} u(x,y) = 0, \tag{1}$$

где $k, n \in \mathbb{N}$, следующую задачу.

Задача A. Найти регулярное решение уравнения (1) из класса

$$u(x,y) \in C_{x,y}^{(2n+1),(2k)}(\Omega) \cap C_{x,y}^{(2n),(2k-1)}(\overline{\Omega}),$$

удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$D_y^s u(x,0) = D_y^s u(x,1) = 0, \quad s = \overline{0,k-1},$$

$$D_x^j u(0,y) = \varphi_j(y), \quad j = \overline{0,n},$$

$$D_x^i r(1,y) = \varphi_{n+1+r}(y), \quad r = \overline{0,n-1}.$$

Теорема. *Если граничные функции* $\varphi_i(y)$ $i = \overline{0,2n}$, *удовлетворяют условиям:*
1) $\varphi_i^{(s)}(0) = 0$, $s = \overline{0,k-1}$;
2) $y^{-m/2}\varphi_i(y) \in C[0,1]$;
3) $y^{m/2}\varphi_i^{(2k)}(y) \in L_2[0,1]$;
4) $\varphi_i(y) \in C^{4k}(0,1]$;
5) $\varphi_i^{(j)}(1) = 0$, $j = \overline{0,3k-1}$;
6) $\varphi_i^{(j)}(y) = O(y^{\alpha-j})$, $j = \overline{2k,4k}$, $\alpha > 4k - \frac{3m+1}{2}$,

то задача A *разрешима единственным образом.*

РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМИ НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ ДАННЫМИ

Т.В. Кавитова

Витебский государственный университет, Витебск, Беларусь
kavitovatv@tut.by

Рассматривается начально-краевая задача

$$\begin{gathered} u_t = \Delta u + c(x,t)u, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{x\in\partial\Omega} = \int\limits_{\Omega} k(x,y,t)u^l(y,t)\,dy, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \end{gathered} \tag{1}$$

где Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, $l > 1$, ν — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Относительно данных задачи (1) делаются следующие предположения:

$$c(x,t) \in C_{loc}^{\alpha}(\overline{\Omega} \times [0,+\infty)), \quad 0 < \alpha < 1, \quad c(x,t) \geqslant 0;$$

$$k(x,y,t) \in C(\partial\Omega \times \overline{\Omega} \times [0,+\infty)), \quad k(x,y,t) \geqslant 0;$$

$$u_0(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \quad u_0(x) \geqslant 0, \quad \frac{\partial u_0(x)}{\partial \nu}\Big|_{x\in\partial\Omega} = \int\limits_{\Omega} k(x,y,0)u_0^l(y)\,dy.$$

Для данной задачи исследованы вопросы глобальной разрешимости. Положим $c_0(t) = \inf\limits_{\Omega} c(x,t)$, $k_0(t) = \inf\limits_{\partial\Omega\times\Omega} k(x,y,t)$.

Теорема 1. *Задача* (1) *не имеет нетривиальных глобальных решений, если*

$$\int\limits_0^\infty k_0(t)\exp\left[(l-1)\int\limits_0^t c_0(s)\,ds\right]dt=+\infty.$$

Положим $c_1(t)=\sup\limits_{\Omega} c(x,t)$, $k_1(t)=\sup\limits_{\partial\Omega\times\Omega} k(x,y,t)$.

Теорема 2. *Пусть*

$$\int\limits_0^\infty k_1(t)\exp\left[(l-1)\int\limits_0^t c_1(\tau)\,d\tau\right]dt<+\infty$$

и существуют такие положительные константы t_0 *и* K, *что при некотором* $p>$ >2 *выполнено неравенство*

$$\int\limits_{t-t_0}^t k_1^p(\tau)\exp\left[p(l-1)\int\limits_0^\tau c_1(s)\,ds\right]d\tau\leqslant K \text{ для любого } t\geqslant t_0.$$

Тогда задача (1) *глобально разрешима для достаточно малых начальных данных.*

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА НА ПОЛУПОЛОСЕ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С КОСЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

В.И. Корзюк[1], **А.А. Карпечина**[2]

[1] Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
Korzyuk@bsu.by
[2] Институт подготовки научных кадров НАН Беларуси, Минск, Беларусь
karpechina@tut.by

В замыкании $\overline{Q}=[0,\infty)\times[0,l]$ области $Q=(0,\infty)\times(0,l)$ двух независимых переменных $(t,x)\in\overline{Q}\subset\mathbb{R}^2$ рассматривается одномерное волновое уравнение

$$(\partial_{tt}-a^2\partial_{xx})u(t,x)=f(t,x),\quad (t,x)\in\overline{Q}, \tag{1}$$

где a^2,l — положительные действительные числа, $\partial_{tt}=\partial^2/\partial t^2$, $\partial_{xx}=\partial^2/\partial x^2$ — частные производные второго порядка по t и x, f — заданная на $\overline{Q}$ функция. К уравнению (1) на нижнем основании $\Omega^{(0)}=\{(t,x)\in\overline{Q}\mid t=0\}$ присоединяются условия Коши

$$u(0,x)=\varphi(x),\quad \partial_t u(0,x)=\psi(x),\quad x\in[0,l], \tag{2}$$

граничные условия с косыми производными на боковых границах полуполосы Q вида

$$(\alpha^{(i)}(t)\partial_t u+\beta^{(i)}(t)\partial_x u+\gamma^{(i)}(t)u)((i-1)l,t)=\mu^{(i)}(t),\quad i=1,2, \tag{3}$$

где $\alpha^{(i)}$, $\beta^{(i)}$, $\gamma^{(i)}$, $\mu^{(i)}$ — заданные на $[0,\infty)$ функции.

Теорема. *Если выполнены условия:*

1) $\alpha^{(1)}(t)a-\beta^{(1)}(t)=0$ *или* $\alpha^{(2)}(t)a-\beta^{(2)}(t)=0$, $\gamma^{(j)}(t)\neq 0$, *функции* $f\in C^1(\overline{\Omega})$, $\varphi\in C^3(\overline{\Omega})$, $\psi\in C^2(\overline{\Omega})$, $\mu^{(j)}\in C^2[0,\infty)$, $j=1,2$,
или

2) $\alpha^{(i)}(t)a-\beta^{(i)}(t)\neq 0$, $i=1,2$, *функции* $f\in C^1(\overline{\Omega})$, $\varphi\in C^2(\overline{\Omega})$, $\psi\in C^1(\overline{\Omega})$, $\mu^{(j)}\in C^1[0,\infty)$, $j=1,2$,
а также выполняются некоторые условия согласования, тогда в классе функций $C^2(\overline{Q})$ *существует единственное классическое решение* $u(t,x)$ *задачи* (1)–(3).

ЗАДАЧА КОШИ НА ПОЛУПЛОСКОСТИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В.И. Корзюк [1], И.С. Козловская [2], А.И. Козлов [2]

[1] Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь korzyuk@bsu.by
[2] Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
kozlovskaja@bsu.by

На полуплоскости $\overline{Q}=[0,\infty)\times\mathbb{R}$ плоскости $\mathbb{R}^2$ двух независимых переменных t и x рассматривается относительно искомой функции $u:\mathbb{R}^2\supset\overline{Q}\ni(t,x)\to u(t,x)\in\mathbb{R}$ дифференциальное уравнение порядка $m\in\mathbb{N}$:

$$\mathfrak{L}^{(m)}u(t,x)=\prod_{k=1}^{m}(\partial_t-a^{(k)}\partial_x-b^{(k)})u(t,x)=f(t,x),\quad (t,x)\in\overline{Q},\tag{1}$$

где $a^{(k)}$, $b^{(k)}$ — заданные из $\mathbb{R}$ действительные числа, $f:\mathbb{R}^2\supset\overline{Q}\ni(t,x)\to f(t,x)\in$ $\in\mathbb{R}$ — заданная на $\overline{Q}$ функция. $\overline{Q}$ — замыкание области $Q=(0,\infty)\times\mathbb{R}$. На границе $\partial Q=\{(t,x)\in\overline{Q}|t=0\}$ области Q задаются условия Коши

$$\partial_t^j u|_{t=0}=\varphi^{(j)}(x),\quad x\in\mathbb{R},\quad j=\overline{0,m-1},\tag{2}$$

где $\partial_t^j=\partial^j/\partial t^j$.

Уравнение (1) может быть как строго гиперболическим так и нестрого гиперболическим. Задача Коши (1), (2) рассмотрена в [1, 2] в случае, когда оператор $\mathfrak{L}^{(m)}$ является строго гиперболическим. Решение u построено в аналитическом виде при некоторых условиях гладкости на функции $f,\varphi^{(j)}(j=\overline{1,m-1})$ и доказана его единственность. Здесь же выписано в виде формулы общее решение для любого уравнения вида (1). В [3] рассмотрена задача (1), (2) в случае, когда уравнение (1) является нестрого гиперболическим и когда все характеристики совпадают. В [4] представлены решения задачи Коши (1), (2) в аналитическом виде для всех случаев нестрого гиперболического уравнения третьего порядка вида (1).

В настоящее время доказаны существование и единственность классического решения общего вида уравнения (1). Указаны методики построения и доказательства единственности такого решения.

Литература

1. Корзюк В. И., Козловская И. С. *Решение задачи Коши для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами в случае двух независимых переменных* // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 5. С. 700–709.

2. Корзюк В. И., Козловская И. С. *Решение задачи Коши гиперболического уравнения для однородного дифференциального оператора в случае двух независимых переменных* // Докл. НАН Беларуси. 2011. Т. 55, № 5. С. 9–13.

3. Корзюк В. И., Козловская И. С. *Задача Коши для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами в случае двух независимых переменных* // Тр. Третьей междунар. науч. конф. «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения», Брест, 2012. С. 171–176.

4. Korzyuk V. I., Kozlouskaya I. S., Kozlov A. I. *Caushy Problem in Half-Plane for Hyperbolic Equation with Constant Coefficients* // Analitic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE 2012. Cambridge Scientific Publishers. 2013. P. 45–71.

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В.И. Корзюк [1], А.А. Мандрик [2]

[1] Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
korzyuk@bsu.by
[2] Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
mndkaa@gmail.com

Изучение смешанных задач для гиперболических уравнений третьего порядка продиктовано не только развитием теории дифференциальных уравнений с частными производными. Они возникают при описании конкретных физических явлений. Например, гиперболические уравнения третьего порядка появляются при математическом моделировании распространения линейных аккустических волн в среде с дисперсией.

Исследование или отыскание классических решений задач всегда было актуальным для теории дифференциальных уравнений с частными производными. Это важно и для численных методов решения граничных задач, так как они во многих случаях основаны на классических решениях. Заметим, что классические решения определяются не только правильным выбором вида граничных условий для дифференциальных уравнений с частными производными, но и условиями согласования для функций, входящих в условия и уравнения.

Рассматривается область $Q=(0;+\infty)\times(0;l)$ двух независимых переменных $(t,x)\in$ $\in Q\subset\mathbb{R}^2$. В этой области рассмотрим линейное дифференциальное уравнение 3-го порядка гиперболического типа

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+d\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x)=0,\ \ (t,x)\in Q, \tag{1}$$

где $a,\ d,\ l$ — положительные (для определенности) действительные числа, $a\neq d$. К уравнению (1) присоединим начальные условия:

$$u(0,x)=\varphi_0(x),\quad \frac{\partial u(0,x)}{\partial t}=\varphi_1(x),\quad \frac{\partial^2 u(0,x)}{\partial t^2}=\varphi_2(x),\quad x\in[0;l]. \tag{2}$$

Кроме начальных условий (2) задаются граничные условия:

$$u(t,0)=\psi_0(t),\quad \frac{\partial u(t,0)}{\partial x}=\psi_1(t),\quad u(t,l)=\mu_0(t),\quad t\in[0;+\infty). \tag{3}$$

Исходя из общего решения уравнения (1) определяется решение задачи (1)–(3) при некоторых дополнительных условиях. Результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема. *Если функции* $\varphi_i \in C^{3-i}([0;l])$, $i=\overline{0,2}$ *и* $\psi_i \in C^{3-i}([0;+\infty))$, $i=\overline{0,1}$, $\mu_0 \in C^3([0;+\infty))$, *и выполняются условия согласования*

$$\varphi_0(0)=\psi_0(0), \quad \varphi_0'(0)=\psi_1(0), \quad \varphi_1(0)=\psi_0'(0),$$
$$\varphi_1'(0)=\psi_1'(0), \quad \varphi_2(0)=\psi_0''(0), \quad \varphi_2'(0)=\psi_1''(0),$$
$$a^2d\varphi_0'''(0)+a^2\varphi_1''(0)-d\varphi_2'(0)=\psi_0'''(0),$$
$$\varphi_0(l)=\mu_0(0), \quad \varphi_1(l)=\mu_0'(0), \quad \varphi_2(l)=\mu_0''(0),$$
$$a^2d\varphi_0'''(l)+a^2\varphi_1''(l)-d\varphi_2'(l)=\mu_0'''(0),$$

тогда в классе $C^3(\overline{Q})$ *существует единственное классическое решение задачи* (1)–(3).

Заметим, что эта же смешанная задача при $d<0$ будет является корректной, если на левой границе области Q, при $x=0$ задается одно граничное условие, а на правой границе, при $x=l$ — два.

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА — ГОДОНА — ФОКА В КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОЛУПОЛОСЕ

В.И. Корзюк [1], **А.А. Столярчук** [2]

[1] Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
korzyuk@bsu.by
[2] Институт подготовки научных кадров НАН Беларуси, Минск, Беларусь
ivan.telkontar@gmail.com

Уравнение Клейна — Гордона — Фока представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных, относящееся к классу гиперболических уравнений второго порядка. Оно описывает динамику релятивистской квантовой системы.

В одномерном случае для уравнения Клейна — Гордона — Фока в полуполосе рассматривается классическое решение первой смешанной задачи. Показывается при определенных условиях гладкости и условиях согласования заданных функций существование и единственность классического решения. Для численного решения поставленной задачи необходимо решать несложные интегральные уравнения Вольтерра второго рода.

Задача рассматривается в области Q, ограниченной нижним основанием $t=s(x)$, $x^{(0)} \leqslant x \leqslant x^{(-1)}$, боковыми линиями $x=\gamma^{(j)}(t)$, $j=0,1$, где $\gamma(0)(t)<\gamma(-1)(t)$ для всех $t\in[t*,\infty]$. Здесь $t*=\max(t^{(0)}=s(x^{(0)}),\ t^{(-1)}=s(x^{(-1)}))$. В данной области задается уравнение

$$\partial_{tt}u-a^2\partial_{xx}u-\lambda(t,x)u=f(t,x), \tag{1}$$

где $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел, λ и f — функции, заданные на множестве $\overline{Q}$.

К уравнению (1) присоединяются начальные условия

$$u(s(x),x)=\varphi(x), \quad \partial_t u(s(x),x)=\psi(x), \quad x\in[0;l],$$

где $l\in\mathbb{R}$, $l<+\infty$, и граничные условия

$$u(t,\gamma^{(0)}(t))=\mu_0(t), \quad u(t,\gamma^{(-1)}(t))=\mu_l(t), \quad t\in[t^{(j)};\infty).$$

Теорема. *Пусть* $\lambda(t,x)$ *является непрерывно дифференцируемой функцией, существует единственное решение уравнений* $z = x - as_k(x)$, $z = x + as_k(x)$, $z = \gamma^0(t) - at$, $z = \gamma^{-1}(t) + at$ *для всех* $k = \overline{0,\infty}$, *которые также являются дважды непрерывно-дифференцируемыми функциями. Функции, задающие границу принадлежат классу* C^2 *на множестве своего задания. Если выполняются условия согласования на начальные и граничные условия в точках* $(t^{(0)}, x^{(0)})$ *и* $(t^{(-1)}, x^{(-1)})$ *и функция* $f(t,x) \in C^2(\overline{Q})$ *и удовлетворяет условию* $f(t,\gamma^{(0)}(t)) = f(t,\gamma^{(0)}(t)) = 0$, *тогда существует единственное решение первой смешанной задачи для неоднородного уравнения Клейна — Гордона — Фока, которое принадлежит классу* $C^2(\overline{Q})$.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ФАКТОРИЗОВАННОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ ПРИ ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ВРЕМЕНИ ПЕРВОЙ КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

Ф.Е. Ломовцев, Ю.Ф. Новик

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

lomovcev@bsu.by, overon@tut.by

Во множестве классических решений изучена корректность по Адамару краевой задачи

$$(\partial_t - a_2\partial_x + b_2)(\partial_t + a_1\partial_x + b_1)u(x,t) = f(x,t),$$

$$\{x,t\} \in G = [0,\infty[\times[0,\infty[, \quad a_1 > 0, \quad a_2 \geqslant 0, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x < \infty, \tag{2}$$

$$(\alpha(t)u_t + \beta(t)u_x + \gamma(t)u)|_{x=0} = \mu(t), \quad 0 \leqslant t < \infty, \tag{3}$$

где $f, \varphi, \psi, \mu, \alpha, \beta, \gamma$ — заданные функции указанных выше независимых переменных x и t.

Методом характеристик в явном виде получена формула классических решений $u \in C^{(2)}(G)$ начально-краевой задачи (1)–(3), а также выведены необходимые и достаточные условия гладкости (4), (5) на правую часть f, начальные данные φ, ψ, граничное данное μ и условия согласования (6), (7) исходных данных, которые обеспечивают существование единственных классических решений этой краевой задачи. Доказана

Теорема. *Пусть коэффициенты граничного условия* $\alpha, \beta, \gamma \in C^{(1)}[0,\infty[$ *и* $\beta(t) \neq a\alpha(t)$, $t \in [0,\infty[$. *Для существования единственных классических решений* $u \in C^{(2)}(G)$ *начально-краевой задачи* (1)–(3) *необходимо и достаточно выполнения следующих условий:*

$$f \in C(G), \quad \varphi \in C^{(2)}[0,\infty[, \quad \psi \in C^{(1)}[0,\infty[, \quad \mu \in C^{(1)}[0,\infty[, \tag{4}$$

$$\int\limits_0^t f^{(1,0)}(x + (-1)^i a_i(t-\tau), \tau)\, d\tau \in C(G), \quad i = 1,\, 2, \tag{5}$$

$$\alpha(0)\psi(0) + \beta(0)\varphi'(0) + \gamma(0)\varphi(0) = \mu(0), \tag{6}$$

$$\alpha(0)[f(0,0) + (a_2 - a_1)\psi'(0) + a_1a_2\varphi''(0) - (b_1 + b_2)\psi(0) - (a_1b_2 - a_2b_1)\varphi'(0) - b_1b_2\varphi(0)] +$$
$$+ (\alpha'(0) + \gamma(0))\psi(0) + \beta(0)\psi'(0) + \beta'(0)\varphi'(0) + \gamma'(0)\varphi(0) = \mu'(0), \tag{7}$$

Здесь $C^{(i)}(\Omega)$ — множество i раз непрерывно дифференцируемых функций на множестве Ω, $i = 1, 2$, $C(\Omega)$ — множество непрерывных функций на множестве Ω, одним и двумя штрихами над функциями обозначены соответственно первая и вторая производные этих функций и индексом $(1, 0)$ над функцией $f(y, s)$ обозначена ее первая частная производная по переменной y.

Явные формулы классических решений начально-краевой задачи для неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны, а также необходимые и достаточные условия на правую часть f, начальные данные φ, ψ и граничное данное μ были впервые получены в случае зависящей от времени первой косой производной в граничном условии в [1]. В случае однородного уравнения колебаний полуограниченной струны явные формулы классических решений при зависящей от времени первой косой производной в граничном условии, а также достаточные условия на φ, ψ и μ были установлены С.Н. Барановской, Н.И. Юрчуком в [2].

Литература

1. Ломовцев Ф. Е., Новиков Е. Н. *Метод Дюамеля решения неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны с косой производной в нестационарном граничном условии* // Вестн. БГУ. 2012. Сер. 1. № 1. С. 83–86.

2. Барановская С.Н., Юрчук Н. И. *Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косой производной в краевом условии* // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 8. С. 1188–1191.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ФАКТОРИЗОВАННОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ ПРИ ПОЛУНЕСТАЦИОНАРНОЙ ВТОРОЙ ФАКТОРИЗОВАННОЙ КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

lomovcev@bsu.by, novikovevgenij@gmail.by

Методом характеристик получена явная формула классических решений задачи

$$(\partial_t - a_2\partial_x + b_2)(\partial_t + a_1\partial_x + b_1)u(x,t) = f(x,t), \quad t \geqslant 0, \quad x \geqslant 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 \geqslant 0, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \geqslant 0, \tag{2}$$

$$[(\alpha_2(t)\partial_t + \beta_2(t)\partial_x + \gamma_2(t))(\alpha_1\partial_t + \beta_1\partial_x + \gamma_1)u]|_{x=0} = \mu(t), \quad t \geqslant 0, \tag{3}$$

где правая часть f, начальные данные φ, ψ, граничное данное μ, коэффициенты α_2, β_2, γ_2 — заданные функции независимых переменных x, t и α_1, β_1, γ_1 — вещественные постоянные.

Для существования единственных классических решений этой смешанной задачи нами установлены необходимые и достаточные условия гладкости (4), (5) на правую часть f, начальные данные φ, ψ и граничное данное μ, а также условие их согласования (6).

Теорема. *Пусть коэффициенты* $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in C[0, \infty[$ *и* $a_1\alpha_i \neq \beta_i$, $t \in [0, \infty[$, $i = 1, 2$. *Единственные классические решения* $u \in C^{(2)}(G)$, $G = [0, \infty[\times[0, \infty[$, *смешанной задачи* (1)–(3) *существуют тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

$$f \in C(G), \quad \varphi \in C^{(2)}[0, \infty[, \quad \psi \in C^{(1)}[0, \infty[, \quad \mu \in C[0, \infty[, \tag{4}$$

$$\int_0^t f^{(1,0)}(x + (-1)^i a_i(t - \tau), \tau)\, d\tau \in C(G), \quad i = 1, 2, \tag{5}$$

$$\alpha_2(0)\{\alpha_1[f(0,0) + (a_2 - a_1)\psi'(0) + a_1a_2\varphi''(0) - (b_1 + b_2)\psi(0) - (a_1b_2 - a_2b_1)\varphi'(0) - b_1b_2\varphi(0)] + \\ + \beta_1\psi'(0) + \gamma_1\psi(0)\} + \beta_2(0)[\alpha_1\psi'(0) + \beta_1\varphi''(0) + \gamma_1\varphi'(0)] + \\ + \gamma_2(0)[\alpha_1\psi(0) + \beta_1\varphi'(0) + \gamma_1\varphi(0)] = \mu(0). \tag{6}$$

Здесь одним и двумя штрихами над функциями обозначены соответственно первая и вторая производные этих функций, $C^{(i)}(\Omega)$ — множество i раз непрерывно дифференцируемых функций в Ω, $i = 1, 2$, $C(\Omega)$ — множество непрерывных функций в Ω и индекс $(1, 0)$ над функцией $f(y, s)$ обозначает первую частную производную от f по переменной y.

Впервые явные формулы классических решений смешанной задачи для неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны (т. е. уравнения (1) при $a_1 = a_2 = a$ и $b_1 = b_2 = 0$), а также необходимые и достаточные условия на правую часть f, начальные данные φ, ψ и граничное данное μ были получены в случае нестационарной первой косой производной в граничном условии (т. е. условия (3) при $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 1$) в работе [1]. Для однородного уравнения колебаний полуограниченной струны (т. е. уравнения (1) при $a_1 = a_2 = a$, $b_1 = b_2 = 0$ и $f = 0$) явные формулы классических решений при нестационарной первой косой производной в граничном условии, а также достаточные условия на начальные данные φ, ψ и граничное данное μ были найдены С.Н. Барановской и Н.И. Юрчуком в [2].

Литература

1. Ломовцев Ф. Е., Новиков Е. Н. *Метод Дюамеля решения неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны с косой производной в нестационарном граничном условии* // Вестн. БГУ. 2012. Сер. 1, № 1. С. 83–86.

2. Барановская С.Н., Юрчук Н. И. *Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косой производной в краевом условии* // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 8. С. 1188–1191.

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Ф.Е. Ломовцев, В.И. Яшкин

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

lomovcev@bsu.by, yashkin@bsu.by

Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $|\cdot|$. Используя понятие слабой производной по параметру t линейных неограниченных операторов $A(t) : H \supset D(A(t)) \to H$ с зависящими от t областями определения $D(A(t))$ и формулу этой производной из [1], доказано существование и единственность слабых решений задачи Коши:

$$u_{tt}(t) + A(t)u(t) = f(t), \quad t \in]0, T[, \quad u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1. \tag{1}$$

Определение слабых решений $u \in \mathcal{H} = L_2(]0, T[, H)$ задачи Коши (1) приведено в [2].

С помощью проекционной теоремы Ж.-Л. Лионса установлена теорема 1 существования.

Теорема 1. *Пусть при всех* $t \in [0,T]$ *самосопряженные положительные операторы* $A(t)$ *в* H *имеют ограниченные обратные операторы* $A^{-1}(t) \in \mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(H))$, *которые в* H *сильно непрерывны по* t *и имеют по* t *ограниченную сильную производную* $dA^{-1}(t)/dt \in \mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(H))$, *удовлетворяющую неравенству* $((dA^{-1}(t)/dt)g,g) \leqslant \leqslant c_1(A^{-1}(t)g,g)$, $g \in H$, $c_1 \geqslant 0$. *Тогда для любых* $f \in \mathcal{H}^-$, $u_0 \in H$, $u_1 \in H_0^-$ *существуют слабые решения* $u \in \mathcal{H}$ *задачи* (1).

Здесь символом $\mathcal{H}^- = L_2([0,T[,H_t^-)$ обозначено банахово пространство, где H_t^- — антидвойственные банаховы пространства с негативными нормами $[\cdot]_{(-t)}$ к гильбертовым пространствам H_t^+, полученным наделением областей определения $D(A^{1/2}(t))$ квадратного корня $A^{1/2}(t)$ из операторов $A(t)$ позитивными эрмитовыми нормами $[\cdot]_{(t)} = |A^{1/2}(t)\cdot|$, $t \in [0,T]$.

С помощью рассуждений от противного установлена теорема 2 единственности.

Теорема 2. *Пусть выполняются предположения теоремы* 1 *и при почти всех* $t \in]0,T[$ *в* H *существует вторая ограниченная сильная производная* $d^2A^{-1}(t)/dt^2 \in \in L_\infty(]0,T[,\mathcal{L}(H))$, *удовлетворяющая неравенству* $|((d^2A^{-1}(t)/dt^2)g,v)| \leqslant c_2|g| \times \times \sqrt{(A^{-1}(t)v,v)}$, $g,v \in H$, $c_2 \geqslant 0$. *Тогда для всех* $f \in \mathcal{H}^-$, $u_0 \in H$, $u_1 \in H_0^-$ *слабые решения* $u \in \mathcal{H}$ *задачи* (1) *единственны.*

В отличие от работы [2] мы не используем абстрактные сглаживающие операторы $A_\varepsilon^{-1}(t) = (I+\varepsilon A(t))^{-1}$, $\varepsilon > 0$, со множествами значений $D(A(t))$ в H при доказательстве теоремы 1 и интегральные сглаживающие операторы $J_\delta^{-1}(t) = (I - \delta(d/dt))^{-1}$, $\delta > 0$, со множеством значений $D(J) = \{w \in \mathcal{H} : dw/dt \in \mathcal{H}, w(T) = 0\}$ в $\mathcal{H}$ при доказательстве теоремы 2.

На основании теорем 1 и 2 из проекционной теоремы Ж.-Л. Лионса выводится априорная оценка для слабых решений $u \in \mathcal{H}$ задачи Коши (1):

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt \leqslant c_3\left(\int_0^T [f(t)]^2_{(-t)}dt + |u_0|^2 + [u_1]^2_{(-0)}\right), \quad c_3 = 4\max\{1, \sup_{0<t<T} \|A^{-1/2}(t)\|^2_{\mathcal{L}(H)}\},$$

из которой вытекает непрерывная зависимость слабых решений $u \in \mathcal{H}$ от правой части $f \in \mathcal{H}^-$ и начальных данных $u_0 \in H$, $u_1 \in H_0^-$.

Литература

1. Ломовцев Ф. Е. *Дифференцирование по параметру линейных операторов с зависящей от параметра областью определения* // Докл. Академии наук. 2012. Т. 445, № 6. С. 628–630.

2. Ляхов Д. А., Ломовцев Ф. Е. *О слабых решениях задачи Коши для гиперболического дифференциально-операторного уравнения второго порядка с переменной областью определения* // Докл. НАН Беларуси. 2010. Т. 54, № 1. С. 44–49.

ОБ ОДНОЙ РАБОТЕ Ц. БУРСТИНА И В. МАЙЕРА ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

К.Д. Лукин, Г.Ф. Кобяк

Минский Филиал МЭСИ, Минск, Беларусь {klukin,gkobjak}@mesi.ru

В [1] рассматривались две статьи Ц. Бурстина и В. Майера. При этом основное внимание было уделено первой статье. Здесь мы рассматриваем подробнее результаты второй статьи [2], в которой исследуется система двух уравнений в частных производных второго порядка:

$$r = f(x,y,z,p,q,s), \quad t = \varphi(x,y,z,p,q,s). \tag{1}$$

Из соотношений

$$\frac{ds}{dx}=\frac{dr}{dy}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q+\frac{\partial f}{\partial p}s+\frac{\partial f}{\partial q}\phi+\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}, \quad \frac{ds}{dy}=\frac{dt}{dx}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p+\frac{\partial \varphi}{\partial p}f+\frac{\partial \varphi}{\partial q}s+\frac{\partial \varphi}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}$$

следует, что если $\Delta = 1-\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial \varphi}{\partial s}\neq 0$, то их можно разрешить относительно $\frac{\partial s}{\partial x}$ и $\frac{\partial s}{\partial y}$.

Тогда решение исходной системы (1) сводится к интегрированию системы Пфаффа

$$dz = pdx + qdy, \quad dp = fdx + sdy, \quad dq = sdx + \varphi dy, \quad ds = \frac{\partial s}{\partial x}dx + \frac{\partial s}{\partial y}. \tag{2}$$

Далее, с применением процесса исключения и использованием условия интегрируемости системы (2), определяются четыре различные результата исключения (Eliminftionsresultate). Эти случаи различаются по виду (типу) системы исключения, а именно: система исключения имеет вид: $a)$ $s = s(x, y, z, p, q)$, $b)$ $q = q(x, y, z, p)$, $c)$ $p = p(x, y, z)$, $d)$ $z = z(x, y)$. Затем исследуется каждый тип. Например, уравнения типа $a)$ сводятся к исследованию системы Пфаффа (2) без последнего уравнения.

Для примера, приведенного в конце работы [1], результат исключения приводится к виду:

$$s=\frac{2zq}{px^2}+\frac{q}{x^2}, \quad s=\frac{6zq}{px^2}\frac{q}{x^2}.$$

Продолжая процесс, получим следующий результат исключения: $s = 2q/x$, $z = px/2$. Подставляя s и z в исходную систему, получаем систему, которая легко интегрируется.

Литература

1. Лукин К.Д. , Поликарпова О.К. *Об одной работе Ц. Бурстина и В. Майера* // IX Белорусская математическая конференция. Гродно, 3–6 ноября 2004 г. Тез. докл. ГрГУ, 2004. Ч. 2. С. 87–88.

2. Burstin C., Mayer W. *Beitrag zur Integration der Systemen von partiellen Differentialgleichungen mit zwei unabhangigen und einer abhangigen Variablen* // Матэматычныя працы Бурстына і Майера. Мн., 1933.

ИНТЕГРАЛЫ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ЛАППО-ДАНИЛЕВСКОГО В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

А.Ф. Проневич, П.Ф. Проневич

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
pronevich@tut.by, pavelpronevich@gmail.com

Рассматривается задача о построении интегрального базиса для полной нормальной линейной однородной системы уравнений в частных производных

$$\partial_{x_j}y+\sum_{\xi=1}^{s_j}\alpha_{j\xi}(\widehat{x})A_{j\xi}\widetilde{x}\partial_{\widetilde{x}}y=0, \quad s_j\in\mathbb{N}, \quad j=1,\ldots,m, \tag{1}$$

где $y\in\mathbb{R}$, векторы $\widehat{x}=(x_1,\ldots,x_m)\in\mathbb{R}^m$, $\widetilde{x}=(x_{m+1},\ldots,x_{m+n})\in\mathbb{R}^n$, функции $\alpha_{j\xi}:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$, $\xi=1,\ldots,s_j$, являются линейно независимыми на области $\mathcal{X}\subset\mathbb{R}^m$ при каждом $j=1,\ldots,m$, а постоянные вещественные матрицы n-го порядка $A_{j\xi}$ попарно перестановочны.

Полную нормальную систему уравнений в частных производных (1) будем называть системой Лаппо-Данилевского, так как она принадлежит классу многомерных дифференциальных систем Лаппо-Данилевского [1, с. 63–64], т. е. удовлетворяет требованию перестановочности матрицы коэффициентов со своим интегралом [2].

На основании частных интегралов с учетом их кратности и условных частных интегралов [3, с. 187–238] разработан спектральный метод [4, 5] построения первых интегралов якобиевых линейных однородных систем уравнений в частных производных. С использованием данных подходов для системы Лаппо-Данилевского (1) построен интегральный базис. Первые интегралы строятся в зависимости от кратности собственных чисел по собственным и присоединенным векторам матриц $B_{j\xi}$, транспонированных к матрицам $A_{j\xi}$, соответственно.

В случае простых элементарных делителей при построении используется

Теорема. *Пусть* $\nu \in \mathbb{C}^n$ *есть общий существенно комплексный собственный вектор матриц* $B_{j\xi}$, *которому соответствуют собственные числа* $\lambda_{j\xi}$, $\xi = 1, \ldots, s_j$, $j = 1, \ldots, m$. *Тогда первыми интегралами системы Лаппо-Данилевского* (1) *будут функции*

$$F_1 : x \to ((\operatorname{Re}\nu \cdot \widetilde{x})^2 + (\operatorname{Im}\nu \cdot \widetilde{x})^2) \exp\left(-2\int \sum_{j=1}^{m} \sum_{\xi=1}^{s_j} \operatorname{Re}\lambda_{j\xi}\alpha_{j\xi}(\widehat{x})\, dx_j \right)$$

и

$$F_2 : x \to \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}\nu \cdot \widetilde{x}}{\operatorname{Re}\nu \cdot \widetilde{x}} - \int \sum_{j=1}^{m} \sum_{\xi=1}^{s_j} \operatorname{Im}\lambda_{j\xi}\alpha_{j\xi}(\widehat{x})\, dx_j \quad \forall x = (\widehat{x}, \widetilde{x}) \in \widetilde{\mathfrak{X}} \subset \mathbb{R}^{m+n}.$$

Литература

1. Гайшун И. В. *Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения.* М.: Едиториал УРСС, 2004.
2. Лаппо-Данилевский И. А. *Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Гостехиздат, 1957.
3. Горбузов В. Н. *Интегралы дифференциальных систем.* Гродно: ГрГУ, 2006.
4. Горбузов В. Н., Проневич А. Ф. *Спектральный метод построения интегрального базиса якобиевой системы в частных производных* // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2001. №3. С. 17–45.
5. Проневич А. Ф. *Интегралы якобиевых систем уравнений в частных производных.* Saarbruchen: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Р.Р. Сафиуллова

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Стерлитамак, Россия

regina-saf@yandex.ru

Для уравнений гиперболического типа второго порядка исследуется разрешимость некоторой обратной задачи с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени, рассматривается вопрос нахождения вместе с решением $u(x,t)$ дополнительной неизвестной функции $q(t)$.

Пусть D — интервал $(0,1)$, Q — прямоугольник $D\times(0,T)$ конечной высоты T, x, x_0 — точки области D, t — точка интервала $(0,T)$, $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\mu(t)$ — заданные при $x\in[0,1]$, $t\in[0,T]$ функции.

Рассматривается следующая обратная задача: найти функции $u(x,t)$, $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением

$$u_{tt}(x,t)-u_{xx}(x,t)+q(t)u(x,t)=f(x,t)$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x),\quad u(x_0,t)=\mu(t),\quad u_x(0,t)=\varphi(t),\quad u_x(1,t)=\psi(t).$$

Для поставленной обратной задачи доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений.

Задачами в близкой постановке занимались И.Р. Валитов [1, 2], С.С. Павлов [3], С.Я. Якубов [4].

В работе [3] рассматривались многомерные обратные задачи с неизвестным коэффициентом $q(t)$, однако условия переопределения были другие, а именно, задавалось интегральное условие переопределения $\int_\Omega K(x)u(x,t)\,dx=\mu(t)$.

При доказательстве результата используется техника, основанная на переходе от исходной задачи к некоторой вспомогательной задаче, доказательстве разрешимости этой задачи и далее построении с помощью решения вспомогательной задачи решения исходной задачи. При решении вспомогательной задачи используются методы регуляризации, срезки и метод продолжения по параметру.

Литература

1. Валитов И. Р., Кожанов А. И. *Обратные задачи для гиперболических уравнений: случай неизвестных коэффициентов, зависящих от времени* // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2006. Т. 6, №1. С. 3–18.

2. Валитов И. Р. *О разрешимости двух обратных задач для гиперболических уравнений* // Тр. Стерлитамакского филиала Академии наук республики Башкортостан. Сер. Физ.-мат. и техн. науки. 2006. №3. С. 64–73.

3. Павлов С. С. *Нелинейные обратные задачи для многомерных гиперболических уравнений с интегральным переопределением* // Матем. заметки ЯГУ. 2011. Т. 19, №2. С. 128–154.

4. Якубов С. Я. *Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения.* Баку: Элм, 1985.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ТРЕХСЛОЙНЫХ ТЕЛ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

И.Б.Сороговец, М.В. Макаренко

Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Беларусь

Рассматривается пластина больших размеров, толщина которой значительно меньше других ее размеров (неограниченная пластина). Предполагается, что пластина составлена из трех слоев с различными теплофизическими характеристиками. Между слоями установлен идеальный тепловой контакт. Ось Ox проходит перпендикулярно плоскостям, ограничивающим пластину. Начало оси помещено на одной из ограничивающих поверхностей, а положительное направление выбрано внутрь пластины. Границам слоев соответствуют следующие значения $x:$ $b_0=0$, b_1, b_2, b_3. Толщина

i-го слоя равна $b_i - b_{i-1}$ $(i = 1, 2, 3)$, а теплофизическими характеристиками слоев являются коэффициенты теплопроводности λ_i и коэффициенты температуропроводности a_i.

Пусть $T_i(x;t)$ $(x \in [b_{i-1}; b_i])$ — температура i-го слоя в зависимости от координаты x и времени t. Тогда математическая модель задачи определения температуры трехслойного тела включает в себя: уравнение теплопроводности, записанное для каждого слоя; условия сопряжения температур на внутренних гранях слоев; начальное условие; граничное условие.

Отметим, что граничные условия можно охарактеризовать парой чисел (I, J), $I, J = 1, 2, 3$. Смысл I: на граничной поверхности $x = 0$ задано граничное условие I-го рода; смысл J: на граничной поверхности $x = b_3$ задано граничное условие J-го рода. Возможны 6 различных типов граничных условий: (1,1), (1,2), (2,2), (1,3), (2,3), (3,3). В данной работе рассматриваются первые три из них.

Выпишем математическую модель с граничным условием (1,1):

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = a_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2}, \quad (i = 1, 2, 3); \quad T_i(b_i, t) = T_{i+1}(b_i, t),$$

$$\Big(\frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}} \frac{\partial T_i}{\partial x} = \frac{\partial T_{i+1}}{\partial x}\Big)\Big|_{x=b_i} \quad (i = 1, 2); \quad T_i(x, 0) = f_i(x) \quad (i = 1, 2, 3);$$

$$T_1(0, t) = \varphi_1(t), \quad T_3(b_3, t) = \varphi_3(t).$$

Анализируя литературные источники, можно сделать заключение, что основным методом решения краевых задач для многослойных тел является метод интегральных преобразований. Одним из недостатком этого метода является тот факт, что от изображений не всегда удается удобным образом перейти к оригиналам.

В данной работе для решения указанных задач применен метод разделения переменных, т. е. каждое из уравнений теплопроводности решено методом разделения переменных. С учетом условий сопряжения получена система решений однородных краевых задач (когда $\varphi_1(t) = 0$, $\varphi_3(t) = 0$). Выпишем эти решения для задачи (1,1):

$$T_{1,n}(x, t) = C_n e^{-\mu_n^2 t} B_1(\mu_n) \sin \frac{\mu_n x}{\sqrt{a_1}},$$

$$T_{2,n}(x, t) = C_n e^{-\mu_n^2 t} \left(A_2(\mu_n) \cos \frac{\mu_n x}{\sqrt{a_2}} + \sin \frac{\mu_n x}{\sqrt{a_2}} \right),$$

$$T_{3,n}(x, t) = C_n e^{-\mu_n^2 t} \left(A_3(\mu_n) \cos \frac{\mu_n x}{\sqrt{a_3}} + B_3(\mu_n) \sin \frac{\mu_n x}{\sqrt{a_3}} \right), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где коэффициенты B_1, A_2, A_3, B_3 удовлетворяют определенной системе 4-х линейных уравнений с четырьмя неизвестными. Числа μ_n являются решениями характеристического уравнения

$$A_3(\mu) \cos \frac{\mu b_3}{\sqrt{a_3}} + B_3(\mu) \sin \frac{\mu b_3}{\sqrt{a_3}} = 0.$$

Решения неоднородной задачи с учетом начального условия получены в виде рядов Фурье по указанным выше системам функций.

НЕКЛАССИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Р.Н. Тураев

Институт Математики при Национальным Университете Узбекистана
rasul.turaev@mail.ru

Неклассические краевые задачи часто возникают при построении математических моделей различных явлений физики, биологии и экологии. Неклассические задачи с нелокальными граничными условиями используются для математического моделирования процессов загрязнения в реках, морях, обусловленного сточными водами [1, 2]. Задачи с интегральным граничным условием встречаются в процессах распространения тепла в тонком нагретом стержне, если задан закон изменения общего количества тепла стержня [3]. Для параболических уравнений задачи с интегральным условием рассмотрены в работах [4, 5], а задачи со свободной границей — в работах [6, 7].

В настоящей работе рассматривается задача со свободной границей типа Флорина с интегральным условием. Требуется найти пару функций $u(x,t)$, $s(t)$, таких, что $s(t)$ определена и непрерывно дифференцируема в промежутке $0 \leqslant t \leqslant T$, а функция $u(x,t)$ в области $D = \{(x,t) : 0 < x < s(t),\ 0 < t \leqslant T\}$ удовлетворяет уравнению

$$u_t = u_{xx}, \quad (x,t) \in D, \tag{1}$$

начальным и граничным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant s(0) = s_0 > 0, \tag{2}$$

$$u_x(0,t) = f(u(0,t),t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

$$\int\limits_{x_0}^{s(t)} u(x,t)dx = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$

$$u(s(t),t) = p, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5}$$

где $\varphi(x)$ — заданная функция, $f(t,\xi)$ определена и непрерывна при $t \geqslant 0$, $|\xi| < \infty$, она ограничена вместе с производными в замкнутом множестве своих аргументов, также постоянные x_0, p удовлетворяют неравенствам $0 < x_0 < s_0$, $p > 0$.

Исследование проводится по следующей схеме. Сначала задача (1)–(5) сводится к задаче типа Стефана с нелокальным граничным условием. Затем получаются некоторые априорные оценки для решений $s(t)$, $u(x,t)$ и их производных. Далее на основе полученных оценок исследуется поведение свободной границы в рассматриваемом промежутке времени, доказываются единственность решения и глобальная разрешимость задачи.

Литература

1. Самарский А. А., Михайлов А. П. *Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры.* М.: Наука. Физматлит, 1997. 320 с.

2. Нахушев А. М. *Уравнения математической биологии.* М.: Высшая школа, 1995. 301 с.

3. Cannon J. R. *The solution of the heat equation subject to the specification of energy* // Quart. Appl. Math. 1963. Vol. XXI, no. 2. P. 155–160.

4. Ионкин Н. И. *Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием* // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.

5. Юрчук Н. И. *Смешанная задача с интегральным условием для некоторых параболических уравнений* // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 12. С. 2117–2126.
6. Cannon J. R. *The one phase Stefan problem subject to the specification of energy* // J. Math. Anal. Appl. 1982. Vol. 861. P. 281–291.
7. Comparini E. and Tarzia D. A. *A Stefan problem for the heat equation subject to an integral condition* // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1985. Vol. 73. P. 119–136.

ТРЕТЬЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С МЛАДШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Е.С. Чеб

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
cheb@bsu.by

В полуполосе $Q = [0,\infty) \times \Omega \subset \mathbb{R}^2$ относительно функции $u : \overline{Q} = [0,\infty) \times \overline{\Omega} \ni \ni (t,x) \to u(t,x),$ где $\overline{\Omega}$ — замыкание области $\Omega = (0,l),$ рассмотрим гиперболическое уравнение второго порядка

$$(\partial_t - a^{(1)}\partial_x + b^{(1)})(\partial_t u - a^{(2)}\partial_x u + b^{(2)}u) = f(t,x), \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(t,x)\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \partial_t u\Big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \Omega. \tag{2}$$

Будем рассматривать случай, когда коэффициенты $a^{(1)} > 0,$ $a^{(2)} < 0,$ $|a^{(1)}| < |a^{(2)}|,$ $b^{(1)}, b^{(2)} \geqslant 0.$

Общее решение уравнения (1) из класса дважды непрерывно дифференцируемых функций $C^2(\mathbb{R}^2)$ представляется в виде суммы

$$u(t,x) = e^{-b^{(1)}t}\, xg_1(x + a^{(1)}t) + e^{-b^{(2)}t} g_2(x + a^{(1)}t), \tag{3}$$

где g_1 и g_2 — любые функции из $C^2(\mathbb{R}^2).$ Требуется определить общий вид функций g_1 и g_2 в представлении (3) при условии, что будут выполняться начальные (2) и некоторые граничные условия.

Для уравнения (1) рассматриваются граничные условия вида

$$\partial_x u(t,0) + \sigma^{(1)} u(t,0) = \mu^{(1)}(t), \quad \partial_x u(t,l) + \sigma^{(2)} u(t,l) = \mu^{(2)}(t), \quad t \in (0,\infty). \tag{4}$$

Методом характеристик [1, 2] построено классическое решение задач (1), (2), (4), и получены условия согласования начальных и граничных условий. В случае, когда $b^{(1)} = b^{(2)} = 0,$ они имеют вид:

$$\varphi'(0) + \sigma^{(1)}\varphi(0) = \mu^{(1)}(0), \quad \varphi'(l) + \sigma^{(2)}\varphi(l) = \mu^{(2)}(0),$$

$$\psi'(0) + \sigma^{(1)}\psi(0) = {\mu^{(1)}}'(0), \quad \psi'(l) + \sigma^{(2)}\psi(l) = {\mu^{(2)}}'(0).$$

В общем случае они более громоздкие и здесь не приводятся.

Теорема. *Предположим, что функции* $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$, $\psi \in C^1(\overline{\Omega})$, $\mu^{(1)} \in C^1[0,\infty)$, $\mu^{(2)} \in C^1[0,\infty)$, $b^{(i)} = 0$, $i = 1, 2$, $f(t, x) = 0$ *и для них выполняются условия согласования* (4). *Тогда в классе функций* $C^2(\overline{Q})$ *существует единственное классическое решение и задачи* (1), (2), (4).

Литература

1. Корзюк В. И., Чеб Е. С., Карпечина А. А. *Классическое решение первой граничной задачи в полуполосе для линейного гиперболического уравнения второго порядка* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2012. Т. 20, № 2. С. 64–67.

2. Корзюк В. И., Чеб Е. С., Карпечина А. А. *Гиперболическое уравнение второго порядка в случае двух независимых переменных* // Весцi НАН Беларусi. 2013. № 1. С. 71–78.

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА МЕТОДАМИ F-МОНОГЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В.А. Шилинец

Белорусский государственный педагогический университет, Минск, Беларусь
shilinets@bspu.unibel.by

Для исследования дифференциальных уравнений в частных производных используются разные методы. Одним из таких методов является метод функций, моногенных в смысле В. С. Федорова (F-моногенных) [1, 2]. В частности, при помощи F-моногенных функций удается построить функционально-инвариантные решения системы Максвелла для электромагнитного поля в пустоте и функционально-инвариантные вектор-аналитические функции. Кроме этого, при помощи указанных функций удается для отдельных видов дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений строить решения в замкнутой форме.

Предметом нашего исследования является система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка следующего вида:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,\\
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0,\\
\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0,
\end{gathered} \tag{1}$$

где u, v, w — искомые комплекснозначные функции трех действительных переменных x, y, z класса $C^2(D)$, D — некоторая односвязная область евклидова пространства (x, y, z) . Рассматривается задача нахождения общего решения системы дифференциальных уравнений (1).

Теорема 1. *Система дифференциальных уравнений в частных производных* (1) *эквивалентна уравнению в формальных производных*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \tag{2}$$

где

$$f = u + \lambda v + \lambda^2 w, \quad t = z\lambda^2 \quad (\lambda^3 = -1), \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda^2\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right).$$

Теорема 2. *Общее решение уравнения* (2) *имеет вид*

$$f = V_1 + V_2 \exp(-t), \tag{3}$$

где $V_1 = V_1[p,q,D]$, $V_2 = V_2[p,q,D]$ *— произвольные функции, F-моногенные по функциям* p *и* q *в области* D $(p = x + 2y\lambda + z\lambda^2,\ q = y\lambda + z\lambda^2,\ t = z\lambda^2)$.

Изучив структуру произвольной функции $V_1 = V_1[p,q,D]$, F-моногенной по функциям $p = x + 2y\lambda + z\lambda^2$ и $q = y\lambda + z\lambda^2$ в области D, и выделив компоненты при базисных единицах $1, \lambda, \lambda^2$ общего решения (3) дифференциального уравнения в формальных производных (2), было найдено общее решение u, v, w системы дифференциальных уравнений в частных производных (1).

Литература

1. Федоров В. С. *Основные свойства обобщенных моногенных функций* // Изв. вузов. Математика. 1958. №6. С. 257–265.

2. Стельмашук Н. Т., Шилинец В. А. *О преобразовании к каноническому виду системы линейных уравнений в частных производных с помощью двойных дифференциальных операторов* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2008. №2. С. 61–65.

ДИСКРЕТНЫЕ АНАЛОГИ ТЕОРЕМ СРАВНЕНИЯ

Д.А. Щадинский

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
denisfpmi@gmail.com

В работе доказываются разностные аналоги теорем сравнения для решения задачи Коши для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти теоремы используются при анализе возникновения неустойчивых решений в задачах Неймана для уравнения теплопроводности и их аппроксимациях [1].

Предположим, что существует классическое решение $u(t) \in C^1(0,T] \cap C[0,T]$ задачи

$$\frac{du}{dt} = f(t,u), \quad 0 < t \leqslant T, \quad u(0) = u_0.$$

В дальнейшем ограничимся случаем, когда функция $f(t,v)$, удовлетворяет неравенствам

$$f_2(t)g_2(v) \leqslant f(t,v) \leqslant f_1(t)g_1(v),$$

где $f_k(t), g_k(v)$, $k = 1,2$ — непрерывные положительные и монотонно возрастающие функции при всех $t \in [0,T]$, $v \in D_\varepsilon(u)$. В соответствии с [2], решение $u(t)$ в этом случае является нижним и верхним решением следующих дифференциальных задач:

$$\frac{dv_1}{dt} = f_1(t)g_1(v_1), \quad \frac{dv_2}{dt} = f_2(t)g_2(v_2), \quad v_k(0) = u_0, \quad k = 1,2, \tag{1}$$

т. е. $v_1(t) \leqslant u(t) \leqslant v_2(t)$.

На отрезке $[0,T]$ введем неравномерную сетку $\bar\omega_\tau = \omega_\tau \cup \{0\}$, $\omega_\tau = \{t_{n+1} = t_n + \tau_n$, $\tau_n > 0$, $n = 0,1,\ldots,N_0 - 1$, $t_0 = 0$, $t_{N_0} = T\}$, на которой рассмотрим следующие разностные схемы:

$$\frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\tau_n} = \varphi_k(t_{n+1})q_k(v_k^{n+1}), \quad v_k^0 = u_0, \quad k = 1,2,$$

$$\frac{\alpha_\tau^{n+1}-\alpha_\tau^n}{\tau_n} \leqslant f_1(t_n)g_1(\alpha_\tau^n), \quad \alpha_\tau^0 = u_0, \quad \frac{\beta_\tau^{n+1}-\beta_\tau^n}{\tau_n} \geqslant f_2(t_{n+1})g_2(\beta_\tau^{n+1}), \quad \beta_\tau^0 = u_0, \quad (2)$$

где шаблонные функционалы

$$\varphi_k(t_{n+1}) = \frac{1}{\tau_n}\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} f_k(t)dt, \quad q_k(v_k^{n+1}) = \left[\frac{1}{v_k^{n+1}-v_k^n}\int\limits_{v_k^n}^{v_k^{n+1}} \frac{dv}{g_k(v)}\right]^{-1}.$$

Теорема. *Пусть существуют классические решения задач Коши* (1) *при* $k=1,2$ *и выполнены неравенства* (2) *с* $\alpha_\tau^n, \beta_\tau^n \in D_\varepsilon(u)$, $n=0,1,\ldots,N_0$. *Тогда*

$$\alpha_\tau^m \leqslant v_1^m \leqslant u(t_n), \quad \beta_\tau^m \geqslant v_2^m \geqslant u(t_n), \quad m=0,1,\ldots,N_0.$$

Литература

1. Матус П. П., Парадинска А., Щадинский Д. А. *Дискретные аналоги теорем сравнения и их применение* // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 4.
2. Hartman P. *Ordinary differential equations* // Classics in Applied Mathematics. 1964. Vol. 38.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Ш.Ш. Юсубов

Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан
ramin84@rambler.ru

В области $G = \{(t,x) : t_0 < t < t_1, \ x_0 < x < x_1\}$ рассмотрим гиперболическое уравнение высокого порядка общего вида с доминирующей смешанной производной

$$(l_{nm}u)(t,x) \equiv D_t^n D_x^m u + \sum_{\substack{i+j<n+m \\ i=\overline{0,n};\ j=\overline{0,m}}} a_{ij}(t,x) D_t^i D_x^j u = \varphi_{nm}(t,x). \quad (1)$$

Рассмотрим уравнение (1) с условиями

$$(l_{00}u)(x) \equiv \int\limits_{t_0}^{t_1} u(t,x)dt = \varphi_{00}(x), \quad x \in (x_0,x_1),$$

$$(l_{i0}u)(x) \equiv D_t^{i-1}u(t_1,x) - D_t^{i-1}u(t_0,x) = \varphi_{i0}(x), \quad x \in (x_0,x_1), \quad i=\overline{1,n-1} \quad (2)$$

и

$$(l_{n0}u)(t) \equiv \int\limits_{x_0}^{x_1} D_t^n u(t,x)dx = \varphi_{n0}(t), \quad t \in (t_0,t_1),$$

$$(l_{nj}u)(t) \equiv D_t^n D_x^{j-1}u(t,x_1) - D_t^n D_x^{j-1}u(t,x_0) = \varphi_{nj}(t), \quad t \in (t_0,t_1), \quad j=\overline{1,m-1}. \quad (3)$$

Здесь $u(t,x)$ — искомая функция, $D_s^k = \partial^k/\partial s^k$ — оператор обобщенного дифференцирования в смысле С.Л. Соболева, n,m — натуральные числа, $a_{ij}(t,x)$, $i=\overline{0,n}$,

$j = \overline{0,m}$, $i + j < n + m$, — заданные измеримые на G функции, удовлетворяющие условиям: $a_{ij}(t,x) \in L_p(G)$, $i = \overline{0,n-1}$, $j = \overline{0,m-1}$, и существуют функции $a^0_{nj}(x) \in L_p(x_0,x_1)$ и $a^0_{im}(t) \in L_p(t_0,t_1)$ такие, что выполняются условия

$$|a_{nj}(t,x)| \leqslant a^0_{nj}(x), \quad j = \overline{0,m-1} \quad \text{и} \quad |a_{im}(t,x)| \leqslant a^0_{im}(t), \quad i = \overline{0,n-1}$$

почти всюду на G, $\varphi_{i0}(x) \in W_p^{(m)}(x_0,x_1)$, $\varphi_{ni}(t) \in L_p(t_0,t_1)$ — заданные функции, где $W_p^{(m)}(x_0,x_1)$ — пространство функций $\varphi(x)$, имеющих обобщенные производные $D^i\varphi(x) \in L_p(x_0,x_1)$, $i = \overline{0,m}$. Решение задачи (1)–(3) будем искать в пространстве С.Л. Соболева

$$W_p^{(n,m)}(G) = \{u \in L_p(G)/D_t^iD_x^ju \in L_p(G), \quad i = \overline{0,n}, \quad j = \overline{0,m}\}$$

с доминирующей смешанной производной $D_t^iD_x^ju$. Норму в $W_p^{(n,m)}(G)$ определим равенством

$$\|u\|_{W_p^{(n,m)}(G)} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \|D_t^iD_x^ju\|_{L_p(G)}.$$

Поставленная задача сводится к интегральному уравнению, строится соответствующее сопряженное интегральное уравнение, вводится понятие фундаментального решения и с его помощью получается представление решения рассматриваемой задачи.

A ONE-DIMENSIONAL DISCRETE VELOCITY MODEL OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE BBGKY HIERARCHY OF EQUATIONS FOR MANY-KIND PARTICLE SYSTEMS

H.M. Hubal

Lutsk national technical university, Lutsk, Ukraine

galinagbl@yandex.ru

There are two different methods of the construction of the Cauchy problem for the BBGKY hierarchy solutions as the iteration or the functional series.

A solution of the Cauchy problem for the BBGKY hierarchy of equations can be represented in the form of an expansion over particle groups whose evolution is governed by the cumulants (semi-invariants) of the evolution operator of the corresponding particle group [1–3].

Consider a one-dimensional discrete velocity model of mixture of gases, i. e. many-kind system of particles interacting as hard rods of lengthes $2\sigma_i > 0$ and masses $m_i > 0$.

In the Banach space L^1 of infinite sequences of summable functions we examine a one-dimensional discrete velocity model of the Cauchy problem for the BBGKY hierarchy of equations with initial data possessing the factorization property (the chaos property).

In the space $L_1(V^s \times \mathbb{R}^s)$ of summable functions we prove that there exists a unique solution of the Cauchy problem for the BBGKY hierarchy of equations represented as the expansion over particle groups whose evolution is governed by the cumulants of the evolution operator of the corresponding particle group:

$$F_{|Y|}(t,Y) = S_s(-t,Y)\chi_s(Q^s)\prod_{i=-s_2}^{s_1} F_1(0,x_i) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n_1+n_2=n}\frac{1}{v^n}\times$$

$$\times \sum_{v_{-(s_2+n_2)},\dots,v_{-(s_2+1)},v_{s_1+1},\dots,v_{s_1+n_1}\in V^n} \int_{\mathbb{R}^n} d(Q^{s+n}\setminus Q^s) \sum_{\substack{Z\subset X\setminus Y\\ Z\neq\varnothing}} (-1)^{|X\setminus(Y\cup Z)|}\times$$

$$\times\mathfrak{A}_2(t,Y,Z)\chi_{s+n}(Q^{s+n}) \prod_{i=-(n_2+s_2)}^{n_1+s_1} F_1(0,x_i), \quad |X\setminus Y|\geqslant 1,$$

where $1/\upsilon$ is the density,

$$Q^s=(q_{-s_2},\dots,q_{s_1}), \quad Q^{s+n}=(q_{-(n_2+s_2)},\dots,q_{s_1+n_1}),$$

$$Y=(x_{-s_2},\dots,x_{s_1}), \quad X\setminus Y=(x_{-(n_2+s_2)},\dots,x_{-(s_2+1)},x_{s_1+1},\dots,x_{s_1+n_1}).$$

Here $\sum_{\substack{Z\subset X\setminus Y\\ Z\neq\varnothing}}$ is the sum over all nonempty ordered subsets Z of the partially ordered set $X\setminus Y$, $Z\subset X\setminus Y$, and the group of $|Z|$ particles evolves as one element, $\mathfrak{A}_2(t,Y,Z)$ is the cumulant of the 2-nd kind, $\chi_s(Q^s)$ is the charasteristic function of the set $\mathbb{R}^s\setminus\{W_s\cup\partial W_s^\varepsilon\}$, the set ∂W_s^ε, given $\varepsilon>0$, is an ε-neighbourhood of the forbidden configurations set W_s.

References

1. Hubal H. M. *On existence of the weak local in time solution in the form of an expansion over cumulants for the BBGKY hierarchy of equations of one-dimensional symmetric particle system* // Sovrem. Mat. Fundam. Napravl. 2011. Vol. 42. P. 82–94 (Russian).

2. Gerasimenko V. I., Ryabukha T. V., and Stashenko M. O. *On the structure of expansions for the BBGKY hierarchy solutions* // J. Phys. A: Math. and General. 2004. Vol. 37, no. 42. P. 9861–9872.

3. Hubal H. M. *The generalized kinetic equation for symmetric particle systems* // Mathematica Scandinavica. 2012. Vol. 110. Fasc. 1. P. 140–160.

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И УРАВНЕНИЯ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АССОЦИИРОВАННЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ЧЕРЕЗ ФУНКЦИИ КОШИ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ

Т.С. Автушко

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
AutushkaTS@tut.by

Исследуется задача Коши для линейного дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)}(t) + a'_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a'_1(t)y'(t) + a'_0(t)y(t) + f'(t) = 0,$$
$$y(0) = c_0, \quad y'(0) = c_1, \quad y''(0) = c_2, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(0) = c_{n-1}, \qquad (1)$$

где $t \in \mathbf{T} = [0, b]$, $b, c_i \in \mathbb{R}$, $a_i : \mathbf{T} \to \mathbb{R}$, $i = \overline{0, n-1}$ — непрерывные справа функции ограниченной вариации, $a_i^{'}$, $i = \overline{0, n-1}$ — их обобщенные производные.

Данная задача является некорректной, поскольку может содержать произведение обобщенных функций. Поставленная задача исследуется в алгебре мнемофункций. При такой трактовке задача (1) становится корректной и под ее решениями понимаются решения следующих систем:

$$X^k(t) = X^k(0) + \int\limits_0^t dL^c(s)X^k(s) + \sum_{\mu_l \leqslant t} \Delta L^k(\mu_l)X^k(\mu_l-) + F(t) - F(0), \quad t \in \mathbf{T}, \quad k = \overline{1, 2^n}, \qquad (2)$$

где μ_l, $l \in \mathbb{N}$, — точки разрыва матрицы L,

$$X(t) = (X_1(t), \ldots, X_n(t))^T, \quad F(t) = (0, \ldots, 0, -f(t))^T, \quad L^c(t) = [L^c_{ij}(t)]^n_{i,j=1},$$

$$L^c_{ij}(t) = \begin{cases} 0, & i \neq j-1, \\ t, & i = j-1, \end{cases} \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{2, n},$$

$L^c_{nj}(t) = -a^c_{j-1}(t)$, $j = \overline{1, n}$, $\Delta L^k(t) = [\Delta L^k_{ij}(t)]^n_{i,j=1}$, $\Delta L^k_{ij} = 0$, $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{1, n}$, а элементы ΔL^k_{nj}, $j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, 2^n}$, $i = \overline{1, n}$, имеют вид:

$$\Delta L^k_{nj}(t) = -\Delta a_{j-1}(t), \quad \text{или} \quad \Delta L^k_{nj}(t) = -\Delta a_{j-1}(t)(1 - \Delta a_{n-1}(t)),$$

$$\text{или} \quad \Delta L^k_{nj}(t) = \frac{\Delta a_{j-1}(t)}{\Delta a_{n-1}(t)}(e^{-\Delta a_{n-1}(t)} - 1), \quad \text{или} \quad \Delta L^k_{nj}(t) = e^{-\Delta a_{n-1}(t)} - 1.$$

Для любого фиксированного k решение этой системы существует и единственно (см. [1]).

В докладе предполагается обсудить представление ассоциируемых решений задачи (1) и систем через введенные ассоциированные фундаментальные матрицы, функции Коши. Данная работа является продолжением исследований, проведенных в [2].

Литература

1. Миллер Б. М., Рубинович Е. Я. *Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями.* М.: Наука, 2005. С. 392–396.

2. Автушко Т. С., Лазакович Н. В. *Представление ассоциированных решений линейных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами через функции Коши* // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 4. С. 32–38.

РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ НА ГРУППАХ p-АДИЧЕСКИХ УНИТАРНЫХ КВАТЕРНИОНОВ

М.В. Алексеев, Е.М. Радыно

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
aliakseyeu.maxim@gmail.com, yauhen.radyna@gmail.com

Рассмотрим в поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ такой элемент ε, что $|-\varepsilon|_p = 1$ и $-\varepsilon \neq y^2$, $\forall y \in \mathbb{Q}_p$. Определим алгебру $\mathbb{H}_p$ над полем $\mathbb{Q}_p$ с помощью соотношений

$$\mathbb{H}_p = \langle 1, i, j, k \mid i^2 = -\varepsilon, \quad j^2 = -p, \quad ij = k \rangle.$$

Данная алгебра состоит из элементов вида $x = \alpha_1 + \alpha_2 i + \alpha_3 j + \alpha_4 k$, $\alpha_s \in \mathbb{Q}_p$, и не содержит делителей нуля, т. е. является телом.

Рассмотрим группу унитарных p-адических кватернионов

$$\mathbb{H}_{p,1}^{\times} = \{x \in \mathbb{H}_p^{\times} : N(x) = \alpha_1^2 + \varepsilon\alpha_2^2 + p\alpha_3^2 + \varepsilon p\alpha_4^2 = 1\}.$$

Это компактная группа, действительный аналог которой тесно связан с вращениями трехмерного пространства и имеет многочисленные применения в математической физике.

В докладе будет описана структура группы $\mathbb{H}_{p,1}^{\times}$. В частности, она является p-адическим многообразием и может быть покрыта классами смежности по любой открытой подгруппе.

Используя сведения о структуре группы, мы приведем конкретные базисы в пространстве квадратично интегрируемых функций на ней. Знание конкретных базисов необходимо для развития конструктивной теории функций и для исследования псевдодифференциальных операторов на группе.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

А.Б. Антоневич [1,2], Е.В. Пантелеева [1]

[1] Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
antonevich@bsu.by

[2] Университет в Белостоке, Белосток, Польша

При исследовании уравнений в первую очередь исследуются условия существования и единственности решения. Наряду с этим представляют интерес вопрос о существовании решения для любой правой части в случае, когда нет единственности решения. В работе рассматриваются функциональные уравнения вида

$$u(x) - A(x)u(\alpha(x)) = f(x) \tag{1}$$

в пространствах вектор-функций $L_2(X, \mathbb{C}^m, \mu)$. Здесь $\alpha : X \to X$ — заданное отображение, A — заданная матрично-значная функция. В работе получены условия существования решения уравнения (1) для любой правой части и получена формула, дающая одно из решений. В операторных терминах это означает, что построен правый обратный к оператору $I - B$, где $Bu(x) = A(x)u(\alpha(x))$ — оператор взвешенного сдвига.

При выполнении ряда условий на отображение α и коэффициент A (мы не приводим здесь эти условия ввиду ограниченности объема) доказано следующее утверждение.

Теорема. *Для уравнения* (1) *следующие свойства эквивалентны:*

i) *для любой функции* $f \in L_2(X, \mu)$ *существует решение* $u \in L_2(X, \mu)$;

ii) *существует ограниченная измеримая проекторно-значная матрица-функция* $p(x)$, *такая, что ряд*

$$-\sum_{k=0}^{+\infty} B^k P f + \sum_{k=-1}^{-\infty} B^k (I - P) f, \tag{2}$$

где P *— оператор умножения на* $p(x)$, *сходится для всех* $f \in L_2(X, \mathbb{C}^m, \mu)$.

Сумма ряда (2) *есть одно из решений уравнения* (1).

Уравнения вида (1) являются аналогами линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t) \tag{3}$$

в банаховых пространствах (здесь u есть функция со значениями в банаховом пространстве E, A — линейный оператор в этом пространстве). Для таких уравнений задача о разрешимости ставится следующим образом. Пусть задана пара пространств U и F, состоящих из функций на $\mathbb{R}$ со значениями в E. Требуется найти условия на оператор A, при выполнении которых для любой функции $f \in F$ существует решение u уравнения (3), принадлежащее пространству U. Эта задача детально исследована (см. [1, 2]), однако для дифференциальных уравнений формулы, задающие такие решения для любого f, не получены.

Литература

1. Массера Х., Шеффер Х. *Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства.* М.: Мир, 1970.

2. Баскаков А. Г. *Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений* УМН. 2013. Т. 68, №1. С. 77–128.

АСИМПТОТИКА ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЭРМИТА

А.В. Астафьева, А.П. Старовойтов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

{astafeva,svoitov}@gsu.by

Диагональными аппроксимациями Эрмита — Паде I типа (Latin type) и $(n-$ $-1)$-го порядка для набора экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^{k}$ называются $k+1$ многочленов $A_n^0(z), A_n^1(z), \ldots, A_n^k(z)$ степени не выше $n-1$, для которых

$$R_n(z) = \sum\nolimits_{p=0}^{k} A_n^p(z)\, e^{\lambda_p z} = O(z^{kn+n-1}), \quad z \to 0. \tag{1}$$

Используя теорему Коши о вычетах, легко показать, что функции, заданные интегралами

$$A_n^p(z) = \frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i} \int\limits_{C_p} \frac{e^{\xi z} d\xi}{[\varphi(\xi)]^n}, \tag{2}$$

где λ_j — произвольные различные действительные числа, $j = 0, 1, \ldots, k$, C_p — круг с центром в точке λ_p столь малого радиуса, что все остальные λ_j лежат во внешности этого круга, а $\varphi(\xi) = (\xi - \lambda_0)(\xi - \lambda_1)\ldots(\xi - \lambda_k)$, удовлетворяют (1) и всем другим свойствам. Интегралы (2) называются интегралами Эрмита Latin type, которые Ш. Эрмит ввел в 1883 г.

В работах К. Малера, П. Борвейна, В. Вилонского и др. авторов был обнаружен ряд замечательных свойств таких многочленов. В частности, с их помощью можно дать новое обоснование трансцендентности числа e.

Далее $k = 3$ и $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2 + \varepsilon$, $\lambda_3 = 3 + \varepsilon$, где ε — действительное число по модулю меньшее 1. В этом случае нами найдена асимптотика интегралов (2).

Теорема. *При* $n \to \infty$ *локально равномерно по* z

$$A_n^0(z) = \frac{(-1)^n}{2\gamma\sqrt{\pi n}} \left(\frac{2}{2+\varepsilon}\right)^{2n-1} e^{(3+\varepsilon-\gamma)z/2}(1 + O(1/n)),$$

$$A_n^3(z) = \frac{(-1)^{n+1}}{2\gamma\sqrt{\pi n}} \left(\frac{2}{2+\varepsilon}\right)^{2n-1} e^{(3+\varepsilon+\gamma)z/2}(1 + O(1/n)),$$

$$A_n^1(z) = \frac{1}{\gamma\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{4}{(1+\varepsilon)(3+\varepsilon)}\right)^{2n-1} e^{(1+\varepsilon)z/2}(1 + O(1/n)) -$$
$$- \frac{(-1)^n}{2\gamma\sqrt{\pi n}} \left(\frac{2}{2+\varepsilon}\right)^{2n-1} e^{(1+\varepsilon-\gamma)z/2}(1 + O(1/n)),$$

$$A_n^2(z) = \frac{(-1)^n}{2\gamma\sqrt{\pi n}} \left(\frac{2}{2+\varepsilon}\right)^{2n-1} e^{(-1-\varepsilon-\gamma)z/2}(1 + O(1/n)) -$$
$$- \frac{1}{\gamma\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{4}{(1+\varepsilon)(3+\varepsilon)}\right)^{2n-1} e^{-(1+\varepsilon)z/2}(1 + O(1/n)),$$

где $\gamma = \sqrt{5 + 4\varepsilon + \varepsilon^2}$.

Литература

1. Hermite C. *Sur la généralisation des fractions continues algébriques* // Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A. 1883. Vol. 21. P. 289–308.

СОПРЯЖЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО АЛГЕБРЫ ФУНКЦИЙ С РАЗРЫВАМИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

А.Н. Глаз

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
anna-glaz@yandex.ru

Пусть A — подалгебра алгебры ограниченных комплекснозначных функций на $[0, 1]$, содержащая:

1) функции, обладающие конечными односторонними пределами в каждой точке;

2) функции $e^{\pm i/(t-\alpha)}$, $\alpha \in [0,1]$, с разрывами экспоненциального типа.

Основным результатом является сопряженного пространства к алгебре A. Случай алгебры, содержащей только функции вида 1), был рассмотрен в [2].

В докладе будет показано, что максимальными идеалами алгебры A являются множества вида

$$M_{\{\tau-,\lambda\}} := \{x \in A : x(\tau-0,\lambda) = 0\}, \quad M_{\{\tau+,\lambda\}} := \{x \in A : x(\tau+0,\lambda) = 0\},$$

$$M_\tau := \{x \in A : x(\tau) = 0\},$$

где $x(\tau \pm 0, \lambda) := \lim_{k\to\pm\infty} x(1/(2\pi k+\lambda)+\tau)$, $\tau \in (0,1]$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Набор множеств

$$D^-_{\tau_0;\lambda_1,\lambda_2} = \{M_{\{\tau_0-,\lambda\}} : \lambda \in [\lambda_1,\lambda_2)\}, \quad D^+_{\tau_0;\lambda_1,\lambda_2} = \{M_{\{\tau_0+,\lambda\}} : \lambda \in [\lambda_1,\lambda_2)\},$$

$$D^*_{\tau_1,\tau_2} = \{M_\tau, M_{\{\tau+,\lambda\}}, M_{\{\tau-,\lambda\}} : \lambda \in [0,1), \quad \tau \in [\tau_1,\tau_2)\}$$

является кольцом на множестве максимальных идеалов $Sp(A)$ алгебры A и порождает борелевскую σ-алгебру.

Сопряженное пространство к A изоморфно подпространству $\mathbf{G}$ функций ограниченной вариации на $[0,1)\times[0,1)$:

$$\mathbf{G} := \left\{ g : g(t,s) = g_0(t) + \sum_{i\in\mathbb{N}} g_i^-(t)\cdot H_{t_i-}(s) + \sum_{i\in\mathbb{N}} g_i^+(t)\cdot H_{t_i+}(s), \quad g_i \in BV[0,1) \right\},$$

где $H_{t-}(s) = \begin{cases} 0, & s < t, \\ 1, & s \geqslant t; \end{cases}$ $\quad H_{t+}(s) = \begin{cases} 0, & s \leqslant t, \\ 1, & s > t. \end{cases}$

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект Ф13М–036).

Литература

1. Антоневич А. Б. *Линейные функциональные уравнения: операторный подход.* Мн.: Университетское, 1988.

2. Глаз А. Н. *Общий вид линейного непрерывного функционала на пространстве кусочно-непрерывных функций.* // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2012. № 2. С. 29–34.

МНОГОМЕРНЫЕ НЕАВТОНОМНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В АЛГЕБРЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

А.И. Жук

Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь

aizhuk85@mail.ru

Рассмотрим следующую систему на отрезке $T = [0,a] \subset \mathbb{R}$:

$$\dot{x}^i(t) = \sum_{j=1}^{q} f^{ij}(t, x(t))\dot{L}^j(t), \quad i = \overline{1,p}, \tag{1}$$

с начальным условием $x(0) = x_0$, где f^{ij}, $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$, — некоторые функции, $x(t) = [x^1(t), x^2(t), \ldots, x^p(t)]$, а $L^i(t)$, $i = \overline{1,q}$, — функции ограниченной вариации на отрезке T. Без ограничения общности будем считать, что функции $L^i(t)$, $i = \overline{1,q}$, непрерывны справа, $L^i(0) = L^i(0-) = 0$ и $L^i(a-) = L^i(a)$, $i = \overline{1,q}$. Аналогичное уравнение в одномерном случае было рассмотрено в [1].

Задаче (1) поставим в соответствие следующую конечно-разностную задачу с осреднением

$$x_n^i(t+h_n) - x_n^i(t) = \sum_{j=1}^{q} f_n^{ij}(t, x_n(t))[L_n^j(t+h_n) - L_n^j(t)], \quad i = \overline{1,p}, \tag{2}$$

с начальным условием $x_n(t)|_{[0,h_n)} = x_{n0}(t)$. Здесь $L_n^j(t) = (L^j * \rho_n^j)(t) = \int_0^{1/\gamma^j(n)} L^j(t+s) \times$ $\times \rho_n^j(s)\,ds$, где $\rho_n^j(t) = \gamma^j(n)\rho^j(\gamma^j(n)t)$ для $j = \overline{1,b}$ $\gamma^j(n)h_n \to \infty$, а для $j = \overline{b+1,q}$ $\gamma^j(n)h_n \to 0$, $\rho^j \geqslant 0$, $\operatorname{supp}\rho^j \subseteq [0,1]$, $\int_0^1 \rho^j(s)\,ds = 1$, а $f_n = f * \widetilde{\rho}_n$, $\widetilde{\rho}_n(x_0, x_1, \ldots, x_p) =$ $= n^{p+1}\widetilde{\rho}(nx_0, nx_1, \ldots, nx_p)$, $\widetilde{\rho} \in C^\infty(\mathbb{R}^{p+1})$, $\widetilde{\rho} \geqslant 0$, $\int_{[0;1]^{p+1}} \widetilde{\rho}(x_0, x_1, \ldots, x_p)\,dx_0 dx_1 \ldots$ $\ldots dx_p = 1$, $\operatorname{supp}\widetilde{\rho} \subset [0;1]^{p+1}$.

Для описания предельного поведения решения задачи (2) рассмотрим систему

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^{q} \int_0^t f^{ij}(s, x(s))\,dL^{jc}(s) + \sum_{\mu_r \leqslant t} S^i(\mu_r, x(\mu_r-), \Delta L(\mu_r)), \quad i = \overline{1,p}, \tag{3}$$

где $S^i(\mu, x, u) = \varphi^i(1, \mu, x, u) - \varphi^i(0, \mu, x, u)$, а $\varphi^i(t, \mu, x, u)$ находится из уравнения

$$\varphi^i(t,\mu,x,u) = x^i + \sum_{j=1}^{b} u^j \int_0^t f^{ij}(\mu, \varphi(s-,\mu,x,u))\,dH(s-1) + \sum_{j=b+1}^{q} u^j \int_0^t f^{ij}(\mu, \varphi(s,\mu,x,u))\,ds,$$

$i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$, $\mu \in T$, $x \in R^p$, $u \in R^q$.

Теорема. *Пусть f^{ij} $i = \overline{1,p}, j = \overline{1,q}$ удовлетворяют условию Липшица и ограничены. Тогда при $n \to \infty$, $h_n \to 0$ для $j = \overline{1,b}$ $\gamma^j(n)h_n \to \infty$, и для $j = \overline{b+1,q}$ $\gamma^j(n)h_n \to 0$, решение $x_n(t)$ задачи Коши (2) сходится к решению системы уравнений (3) в $L^p(T)$, если $|x_{n0}(\tau_t) - x_0| \to 0$ в пространстве $L^p(T)$.*

Литература

1. Ковальчук А. Н., Новохрост В. Г., Яблонский О. Л. *Об аппроксимации дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами конечно-разностными уравнениями с осреднением* // Изв. ВУЗов. Математика. 2005. № 3. С. 23–31.

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОДНОГО ТИПА

А.С. Кравчук, А.И. Кравчук

Белорусский государственный университет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь

ask_belarus@inbox.ru

При решении контактных задач двумерной теории упругости для цилиндра и цилиндрической полости в пластине с середины прошлого столетия широко используются сингулярные интегро-дифференциальные уравнения [1–4]:

$$\frac{t}{\pi} \int_L \frac{\sigma'(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = \gamma \cdot \sigma(t) + f(t),$$

где L — дуга окружности радиуса R, являющаяся областью контакта, $\sigma(t)$ — неизвестная вещественная функция комплексной переменной $t \in L$, γ — вещественная константа, $f(t)$ — заданная вещественная функция, определяемая механическими и геометрическими характеристиками взаимодействующих тел. К настоящему времени разработано множество алгоритмов решения данного уравнения. Однако исследование условий существования и единственности решения данного типа уравнений, а также сходимости предложенных методов их решения до сих пор не было выполнено. При поставленных выше условиях на поведение контактного напряжения в углах области интегрирования исходное интегро-дифференциальное уравнение с помощью последовательного применения интегрирования по частям и формул обращения [5] приведено к уравнению Фредгольма второго рода с логарифмическим ядром. Выполнена оценка нормы оператора в пространстве функций, интегрируемых вместе со своим квадратом. Получено условие применимости принципа сжатых отображений в зависимости от нормы ядра интегрального уравнения и абсолютной величины коэффициента, определяемого упругими характеристиками твердых тел, а, следовательно, достаточные условия того, что исходное интегро-дифференциальное уравнение имеет единственное решение [6]. Установлено, что для упругих характеристик наиболее распространенных в машиностроении материалов коэффициент сжатия настолько мал, что при удачном выборе нулевого приближения позволяет ограничиться одной итерацией при построении приближенного аналитического решения методом последовательных приближений.

Литература

1. Шереметьев М. П. *Пластинки с подкрепленным краем.* Львов: Изд-во Львовского ун-та, 1960.

2. Панасюк В. В., Тепый М. И. *Розподіл напружань в циліндричних тілах при їх внутрішньому контакті* // ДАН УРСР. Сер. А. 1971. №6. С. 549–553.

3. Андрейкив А. Е., Чернец М. В. *Оценка контактного взаимодействия трущихся деталей машин.* Киев: Навукова думка, 1991.

4. Кравчук А. С., Чигарев А. В. *Механика контактного взаимодействия тел с круговыми границами.* Мн.: Технопринт, 2000.

5. Гахов Ф. Д. *Краевые задачи.* М.: Наука, 1977.

6. Антоневич А. Б., Радыно Я. В. *Функциональный анализ и интегральные уравнения.* Мн.: «Университетское», 1984.

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СТАНДАРТНЫМ И ДРОБНЫМ БРОУНОВСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ

А.А. Леваков, М.М. Васьковский

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

levakov@tut.by, vaskovskii@bsu.by

Пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)$, случайная величина $\xi : \Omega \to R^d$, r-мерное стандартное броуновское движение $W(t,\omega)$, m-мерное дробное броуновское движение $B^H(t,\omega)$ с показателем Херста $H \in (1/2, 1)$, функции $f : R_+ \times R^d \times \Omega \to R^d$, $g : R_+ \times R^d \times \Omega \to R^{d\times r}$, $\sigma : R_+ \times R^d \times \Omega \to R^{d\times m}$, такие, что выполняются следующие условия: стандартное броуновское движение $W(t,\omega)$ является $\mathcal{F}_t$-согласованным, дробное броуновское движение $B^H(t,\omega)$ и случайная величина $\xi(\omega)$ являются $\mathcal{F}_0$-измеримыми; процессы $W(t,\omega)$, $B^H(t,\omega)$ и случайная величина $\xi(\omega)$ являются независимыми; при каждом фиксированном $X \in R^d$ процессы $f(t,X,\omega)$, $g(t,X,\omega)$, $\sigma(t,X,\omega)$ являются измеримыми и $\mathcal{F}_t$-согласованными.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX(t,\omega) = f(t, X(t,\omega),\omega)dt + g(t, X(t,\omega),\omega)dW(t,\omega) + \sigma(t, X(t,\omega),\omega)dB^H(t,\omega), \quad (1)$$

с начальным условием

$$X(0,\omega) = \xi(\omega). \quad (2)$$

Определение 1. Отображение $h : R_+ \times R^d \times \Omega \to R^{d\times l}$ имеет *линейный порядок роста*, если для любого $T \in R_+$ существует $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина $M_T(\omega)$ такая, что для почти всех $\omega \in \Omega$ для любых $(t, X) \in [0,T] \times R^d$ выполняется неравенство $|h(t, X, \omega)| \leqslant M_T(\omega)(1 + |X|)$.

Определение 2. Пусть $\alpha,\ \beta \in (0, 1]$. Отображение $h : R_+ \times R^d \times \Omega \to R^{d\times l}$ удовлетворяет (α, β)-*условию Гельдера*, если для любого $T \in R_+$ существует $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина $K_T(\omega)$ такая, что для почти всех $\omega \in \Omega$ для любых $t,\ s \in [0,T],\ X, Y \in R^d$ справедливо неравенство $|h(t, X, \omega) - h(s, Y, \omega)| \leqslant K_T(\omega)(|t - s|^\alpha + |X - Y|^\beta)$.

Определение 3. Отображение $h : R_+ \times R^d \times \Omega \to R^{d\times l}$ удовлетворяет *локальному условию Липшица*, если для любых $a,\ T \in R_+$ существует $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина $L_{a,T}(\omega)$ такая, что для почти всех $\omega \in \Omega$ для любых $t \in [0,T],\ X,\ Y \in R^d$, $|X| \leqslant a,\ |Y| \leqslant a$, выполняется неравенство $|h(t, X, \omega) - h(t, Y, \omega)| \leqslant L_{a,T}(\omega)|X - Y|$.

Определение 4. Будем говорить, что выполняется условие A, если отображения $f,\ g$ удовлетворяют локальному условию Липшица и имеют линейный порядок роста, отображение σ удовлетворяет $(\delta, 1)$-условию Гельдера, где $\delta > 1 - H$.

Определение 5. *Решением* уравнения (1) с начальным условием (2) будем называть $\mathcal{F}_t$-согласованный процесс $X(t,\omega),\ t \in R_+,\ \omega \in \Omega$, имеющий почти наверное непрерывные по Гельдеру траектории любого порядка $\alpha \in (1-H, \min\{\delta, 1/2\})$, такой, что для каждого $t \in R_+$ почти наверное выполняется равенство $X(t,\omega) = \xi(\omega) + \int_0^t f(s, X(s,\omega),\omega)\,ds + \int_0^t g(s, X(s,\omega),\omega)\,dW(s,\omega) + \int_0^t \sigma(s, X(s,\omega),\omega)\,dB^H(s,\omega)$.

Определение 6. Решение $X(t,\omega)$ уравнения (1) с начальным условием (2) является *единственным*, если для любого решения $Y(t,\omega)$ уравнения (1) с начальным условием (2) выполняется $P(X(t,\omega) = Y(t,\omega)\ \forall t \in R_+) = 1$.

Теорема. *Если выполняется условие* A, *то уравнение* (1) *с начальным условием* (2) *имеет единственное решение.*

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА С ВЫРОЖДЕНИЕМ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

С.С. Орлов

Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия

orlov_sergey@inbox.ru

Представляемая работа посвящена исследованию вопросов существования и единственности обобщенного и классического решений интегрального уравнения

$$Bu(t) - \int_0^t g(t-s)Au(s)ds = f(t),$$

и задачи Коши $Bu^{(N)}(t) - \int_0^t g(t-s)Au(s)\,ds = f(t)$, $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$, ..., $u^{(N-1)}(0) = u_{N-1}$. Здесь $u(t)$ и $f(t)$ — неизвестная и заданная функции аргумента $t \geqslant 0$ со значениями в банаховых пространствах E_1 и E_2 соответственно, B и A — замкнутые линейные операторы с плотными в E_1 областями определения и $D(B) \subseteq D(A)$. Оператор B предполагается фредгольмовым, т.е. $\overline{R(B)} = R(B)$ и $\dim N(B) = \dim N(B^*) = n < +\infty$, а $g(t)$ — числовой функцией, имеющей нуль порядка r в точке $t = 0$.

Для исследования поставленных абстрактных задач используется теория распределений со значениями в банаховых пространствах [1], центральное место в которой занимает конструкция фундаментальной оператор-функции интегро-дифференциального оператора [2]. В предположении полноты A-жорданова набора фредгольмова оператора B восстановлен явный вид фундаментальной оператор-функции рассматриваемых интегрального и интегро-дифференциального операторов. На этой основе доказана однозначная разрешимость соответствующих задач в классе распределений с ограниченным слева носителем, а также получены условия, при которых построенные обобщенные решения совпадут с классическими. Абстрактные результаты проиллюстрированы на примерах содержательных начально-краевых задач, возникающих в математической теории упругости и физике плазмы.

Наличие нуля у ядра $g(t)$ в точке $t = 0$ приводит к возникновению нового эффекта. Показано, что порядок сингулярности обобщенных решений помимо известной зависимости от жордановой структуры растет с увеличением r. Естественным образом увеличивается и количество ограничений на входные данные задач в теоремах существования и единственности их классических решений. Этим свойством рассматриваемые классы уравнений принципиально отличаются от изученных автором ранее в [3, 4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 14-01-31175 мол_а.

Литература

1. *Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications* / N. Sidorov [et al.]. Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002.

2. Фалалеев М.В. *Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов* // Сиб. матем. журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 1167–1182.

3. Фалалеев М.В., Орлов С.С. *Обобщенные решения вырожденных интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах и их приложения* // Труды ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 286–297.

4. Орлов С.С. *Обобщенные решения интегро-дифференциальных уравнений высоких порядков в банаховых пространствах.* Дисс... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. ИГУ. Иркутск, 2013.

ОПЕРАТОР ВЛАДИМИРОВА И ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА НА ПОЛЕ p-АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

Е.М. Радыно

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
yauhen.radyna@gmail.com

Рассмотрим стандартное определение пространств Соболева на действительной прямой:

$$W^{k,2}(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f^{(k)} \in L^2(\mathbb{R})\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Непосредственным обобщением данных пространств будут пространства

$$W^{\alpha,2}(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \mathcal{F}^{-1}|\xi|^\alpha \mathcal{F} f \in L^2(\mathbb{R})\}, \quad \alpha \in [0,+\infty),$$

где $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{x\to\xi}$ — преобразование Фурье. Это определение дословно переносится на случай локально компактных полей, на которых всегда имеется нормирование. Так, в случае поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ полагаем

$$W^{\alpha,2}(\mathbb{Q}_p) = \{f \in L^2(\mathbb{Q}_p) : F^{-1}|\xi|_p^\alpha F f \in L^2(\mathbb{Q}_p)\}, \quad \alpha \in [0,+\infty).$$

Оператор $\mathcal{F}^{-1}|\xi|_p^\alpha \mathcal{F}$ известен как псевдодифференциальный оператор Владимирова.

В докладе будут рассмотрены следующие вопросы:

1) определение в случае степени $q \neq 2$;

2) совпадение с пространствами функций, введенными Хайлашем и Коскелой на метрических пространствах с мерой в случае показателя $\alpha \in (0,1]$;

3) совпадение с пространствами, введенными с помощью максимальных функций в [1];

4) теоремы вложения Соболева.

Литература

1. Иванишко И. А. *Обобщенные классы Соболева на метрических пространствах с мерой* // Матем. заметки. 2005. Т. 77, № 6. С. 937–940.

О ФУНКЦИОНАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ КОШИ

Я.В. Радыно

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

radyno@bsu.by

Пусть $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ — полное нормированное поле и $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ — отображение. Рассматривается функциональное уравнение

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{K},$$

называемое уравнением Коши.

В докладе делается обзор исследований в случае, когда $\mathbb{K}$ — поле $\mathbb{R}$ действительных чисел с модулем $|\cdot|$ в качестве нормирования. Также приведены некоторые новые результаты для других, неархимедово нормированных, полей.

ОБ ОДНОЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННО-РАЦИОНАЛЬНОГО ТИПА

Е.А. Ровба, Е.В. Дирвук

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

{rovba.ea,dirvuk}@gmail.com

Пусть числа a_k, $k = 0, \ldots, n-1$, являются действительными и $a_k \in (-1;1)$ либо попарно комплексно сопряженными, $a_0 = 0$. Обозначим через $U_n(x)$ рациональную функцию Чебышева — Маркова второго рода $U_n(x) = (1-x^2)^{-1/2}\sin\mu_n(x)$, $\mu_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\arccos[(x+a_k)/(1+a_k x)$. Функция $U_n(x)$ является рациональной порядка $n-1$ (см., например, [1]) и имеет $n-1$ нулей на интервале $(-1;1) : -1 < x_{n-1} < \ldots < x_1 < 1$, $\mu_n(x_k) = k\pi$, $k = 1, \ldots, n-1$.

Пусть $x_0 = 1$, $x_n = -1$. Тогда для всякой функции f, непрерывной на отрезке $[-1, 1]$, можно построить следующую квадратуную формулу типа Лобатто:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \approx A_0 f(1) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k f(x_k) + A_n f(-1), \tag{1}$$

где

$$A_k = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1-x^2}{1-{x_k}^2} {l_k}^2(x)\,dx, \quad k = 1, \ldots, n-1,$$

$$A_0 = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1+x}{2} \frac{{U_n}^2(x)}{{U_n}^2(1)}\,dx, \quad A_n = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1-x}{2} \frac{{U_n}^2(x)}{{U_n}^2(-1)}\,dx.$$

Такие квадратурные формулы типа Лобатто в полиноминальном случае рассматриваются, например, в [2]. Г. Мин [3] построил квадратурные формулы вида (1) на основании квази-интерполирования рациональными функциями типа Эрмита — Фейера. Им же исследована точность квадратурных формул и сходимость этой формулы для соответствуещего квадратурного процесса для непрерывных функций. Следует заметить, что Г. Мин построил квадратурную формулу (1) несколько иначе, не используя в явном виде рациональные функции Чебышева — Маркова.

В настоящей работе найдены явные выражения для коэффициентов квадратурной формулы (1) $A_0, A_1, \ldots, A_n$ и получена оценка скорости приближения рассматриваемого квадратурного процесса.

Теорема. *Для квадратурной формулы* (1) *коэффициенты задаются выражениями*

$$A_0 = \frac{\pi}{2\lambda_n(1)}; \quad A_k = \frac{\pi}{\lambda_n(x_k)}, \quad k = 1, \ldots, n-1; \quad A_n = \frac{\pi}{2\lambda_n(-1)}, \quad \lambda_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{1-a_k^2}}{1+a_k x}.$$

Также в работе сравниваются скорости приближения различных видов квадратурных процессов с узлами Чебышева — Маркова, результаты проиллюстрированы конкретными примерами.

Литература

1. Ровба Е. А. *Квадратурные формулы интерполяционно-рационального типа* // Докл. АН Беларуси. 1996. Т. 40. № 3. С. 42—46.

2. Ермолаева Л. Б. *Об одной квадратурной формуле* // Изв. вузов. Матем. 2000. № 3. С. 25-–28.

3. Min G. *Lobbatto-type quadrature formula in rational space* // J. of Computation and Applied Mathematics. 1998. No. 94. P. 1–12.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА В АЛГЕБРЕ ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

А.Ю. Русецкий, Н.В. Лазакович

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

artyom.ruseckiy@gmail.com.com

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – полное вероятностное пространство. Рассмотрим задачу Коши для системы двух линейных стохастических дифференциальных уравнений:

$$X'(t,\omega) = L'(t,\omega)X(t,\omega), \quad X(t,\omega) = X_0, \tag{1}$$

где $X(t,\omega)=(X_1(t,\omega),X_2(t,\omega))^T$, $X_0=(X_1(0,\omega),X_2(0,\omega))^T$, $X_1(0,\omega)=c_1$, $X_2(0,\omega)=c_2$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, $t\in T=[0,b]$,

$$L'(t,\omega)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\Pi_1'(t,\omega) & -\Pi_2'(t,\omega)\end{pmatrix},\quad L(t,\omega)=\begin{pmatrix}0 & t\\ -\Pi_1(t,\omega) & -\Pi_2(t,\omega)\end{pmatrix}.$$

Здесь $\Pi_1,\Pi_2:T\times\Omega\to\mathbb{R}$ — случайные процессы Пуассона, Π_1',Π_2' — их обобщенные производные.

Полученной задаче Коши ставится в соответствие задача Коши в прямом произведении алгебр обобщенных случайных процессов. Исследуется предельное поведение ассоциированных решений. При определенной связи между параметрами конечно-разностной задачи с осреднением, решение этой задачи сходится в $L_2(T\times\Omega)$ к решению систем (см. [1]):

$$X(t,\omega)=X_0+\int_0^t dL(s,\omega)X(s,\omega), \tag{2}$$

где интеграл может пониматься как стохастический интеграл Ито, так и Стратоновича, в зависимости от этой связи.

В работе дается определение понятию ассоциированного решения задачи Коши (1), а также рассматриваются некоторые свойства этих решений [2, 3].

Литература

1. Лазакович Н. В., Сташуленок С. П., Стемковская Т. В. *Ассоциированные решения уравнений в дифференциалах в прямом произведении алгебр обобщенных случайных процессов* // Теория вероятностей и ее применения. 1998. Т. 43. № 2. С. 272–293.

2. Автушко Т. С., Лазакович Н. В., Русецкий А. Ю. *Задача Коши для линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемофункций* // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2013. № 3. С. 83–92.

3. Лазакович Н. В., Русецкий А. Ю. *Задача Коши для линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемофункций* // XV междунар. науч. конф. «Еругинские чтения–2013». Тез. докл. Гродно, 2013. Ч. 2. С. 38.

РЕШЕНИЕ МНОГОМЕРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ФУНКЦИЕЙ БЕССЕЛЯ — КЛИФФОРДА ПО ПИРАМИДАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

О.В. Скоромник

Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Беларусь

skoromnik@gmail.com

Рассматривается интегральное уравнение

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}(A\cdot(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma))^{\alpha-1}\bar{J}_{(\alpha-1)/2}(A\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma))f(\mathbf{t})d\mathbf{t}=g(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}). \tag{1}$$

Здесь $A=\|a_{jk}\|$ $(a_{jk}\in\mathbf{R}^1)$ — матрица порядка $n\times n$ $(n\in\mathbf{N})$ с определителем $|A|\neq 0$, вектор-строки которой обозначим $\mathbf{a}_j=(a_{j1},\ldots,a_{jn})$ $(j=1,\ldots,n)$; $\mathbf{x}=$ $=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n$, $\mathbf{t}=(t_1,\ldots,t_n)\in\mathbf{R}^n$; $\mathbf{x}\cdot\mathbf{t}=\sum_{k=1}^n x_k t_k$; $(\mathbf{x})^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$,

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}_+^n$; $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_n)$; $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathbf{R}^n$; $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = (\mathbf{a_1}\cdot\mathbf{x}, \ldots$ $\ldots, \mathbf{a_n}\cdot\mathbf{x})$, $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{x})^{\alpha} = (\mathbf{a_1}\cdot\mathbf{x})^{\alpha_1}\cdots(\mathbf{a_n}\cdot\mathbf{x})^{\alpha_\mathbf{n}}$. $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}) = \{\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n : A\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{t}) \geqslant 0$, $\mathbf{c}\cdot\mathbf{t} + r \geqslant 0\}$ — n-мерная ограниченная в $\mathbf{R}^n$ пирамида с вершиной в точке $\mathbf{b}$, с основанием на гиперплоскости $\mathbf{c}\cdot\mathbf{t} + r = 0$ и с боковыми гранями, лежащими на гиперплоскостях $a_j\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{c}) = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$; $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{t}$ означает $x_1 \geqslant t_1, \ldots, x_n \geqslant t_n$, $r \in \mathbf{R}^1$. Для $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ $\bar{J}_\alpha(\mathbf{x})$ — функция вида

$$\bar{J}_\alpha(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{n} \bar{J}_{\alpha_j}(x_j),$$

представляющая собой произведение функций Бесселя — Клиффорда $\bar{J}_{\alpha_j}(x_j)$ $(j = 1, \ldots, n)$ [1].

Следуя методике Я. Тамаркина, в работе [2] были установлены необходимые и достаточные условия разрешимости одного класса многомерных интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса по пирамидальной области в пространстве интегрируемых функций. В [3–5] получены решения в замкнутой форме более общих интегральных уравнений по пирамидальным областям и исследована картина их разрешимости в пространстве суммируемых функций.

Настоящая работа продолжает эти исследования. Мы даем решение в замкнутой форме уравнения (1) и устанавливаем необходимые и достаточные условия его разрешимости в пространстве $\mathbf{L}_1(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}))$ [2] суммируемых функций на пирамиде $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})$ $(\mathbf{b} \in \mathbf{R^n})$.

Литература

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Мн.: Наука и техника, 1987.

2. Килбас А. А., Райна Р. К., Сайго М., Сривастава Г. М. *Решение многомерных гипергеометрических уравнений типа Абеля.* // Докл. НАН Беларуси. 1995. Т. 43, № 2. С. 23–26.

3. Килбас А. А., Скоромник О. В.*Решение многомерных интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах по пирамидальной области* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2009. Т. 17, № 1. С. 71–78.

4. Килбас А. А., Скоромник О. В. *Решение многомерного интегрального уравнения первого рода с функцией Лежандра в ядре по пирамидальной области* // Докл. академии наук (Российская академия наук). 2009. Т. 429, № 4. С. 442–446.

5. Скоромник О. В., Шлапаков С. А.*Решение многомерного интегрального уравнения первого рода с функцией Куммера в ядре по пирамидальной области* // Весн. Віцебскага дзярж. ўн-та. 2014. № 1. С. 12–18.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

П.В. Смолич, Е.М. Радыно

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

pavel.smolich@gmail.com, yauhen.radyna@gmail.com

Рассмотрим преобразование Вейля комплекснозначной квадратично интегрируемой функции $\varphi \in L^2(\mathbb{K})$, где $\mathbb{K}$ — локально компактное поле:

$$(W\varphi)(x,\xi) = \int\limits_{\mathbb{K}} \varphi\left(x + \frac{u}{2}\right)\overline{\varphi\left(x - \frac{u}{2}\right)}\chi(\xi u)\,du.$$

Здесь интегрирование ведется по мере Хаара du; $\chi(\xi u)$ обозначает характер и традиционно полагается $\exp(-2\pi i\xi u)$ в действительном случае, и $\exp(+2\pi i\{\xi u\}_p)$ в p-адическом. Данное преобразование детально изучалось в действительном случае в связи с квантовым гармоническим осциллятором и дробным преобразованием Фурье.

Связь преобразования Вейля с преобразованием Фурье $\mathcal{F}$ такова:

$$(W\mathcal{F}\varphi)\left(\begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}\right) = (W\varphi)\left(A^{-1}\begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}\right), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица A ответственна за «поворот на 90° на фазовой плоскости».

В докладе будут показано, что в качестве A можно рассматривать произвольную матрицу с определителем 1, т. е. $A \in SL_2(\mathbb{K})$. При этом оператор $\mathcal{F}$ следует заменить на унитарный оператор в $L^2(\mathbb{K})$. Для этого оператора будет приведена интегральная форма. В частном случае поля p-адических чисел $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_p$ будет установлена связь с p-адическим квантовым гармоническим осциллятором [1].

Литература

1. Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И., *p-Адический анализ и математическая физика.* М.: Физматлит, 1994. 352с.

ВЛОЖЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НА ИДЕЛЯХ В ПРОСТРАНСТВО РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НА АДЕЛЯХ

А.В. Солодухин, Е.М. Радыно

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
andrew.solodukhin@gmail.com, yauhen.radyna@gmail.com

Рассмотрим кольцо аделей $\mathbb{A}$, соответствующее полю рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Данное кольцо содержит в качестве подколец пополнения $\mathbb{Q}$ по всем возможным нормированиям, а именно, поле $\mathbb{R}$ и всевозможные поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$. Элементы мультипликативной группы $\mathbb{A}^\times$ называются иделями, $\mathbb{Q}^\times \subset \mathbb{A}^\times$, см. [1].

В работе [2] рассматривалась задача вложения локально интегрируемых функций умеренного роста на группе $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times$ в пространство распределений на $\mathbb{A}$. Фактически элементам $(L_1^{\mathrm{loc}} \cap S')(\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times)$ ставились в соответствие элементы $S'(\mathbb{A})$, что позволяло использовать преобразование Фурье $\mathcal{F} : S'(\mathbb{A}) \to S'(\mathbb{A})$.

Мы покажем, что данное вложение осуществимо даже для нерегулярных распределений, т. е. элементов $S'(\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times)$. Конструкция опирается на формулу суммирования Пуассона

$$\sum_{q\in\mathbb{Q}} \varphi(q\lambda) = \frac{1}{|\lambda|}\sum_{q\in\mathbb{Q}} (\mathcal{F}\varphi)\left(\frac{q}{\lambda}\right)$$

и специальное разбиение единицы на $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times$ гладкими функциями.

Литература

1. Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятецкий-Шапиро И. И. *Обобщенные функции. Т. 6: Теория представлений и обобщенные функции.* М.: Наука, 1966. 512 С.

2. Радыно Е.М. *Локальные и адельные распределения. Преобразование Фурье* //Докл. НАН Беларуси. 2004. №3. С. 14–18.

ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА ПРИ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. СЛУЧАЙ ИТО

С.А. Спасков, Н.В. Лазакович

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
sergey.spaskov@gmail.com

Следующая задача Коши на отрезке $t \in T = [0; a]$:

$$X'(t) = f(X(t))L'(t), \quad X(0) = 0,$$

где $L(t)$ — функция ограниченной вариации, представляется в виде:

$$X_n(t + h_n) - X_n(t) = f_n(X_n(t))(L_n(t + h_n) - L_n(t)), \quad X_n(t)|_{[0,h_n)} = 0,$$

где

$$L_n(t) = (L * \rho_n)(t) = \int\limits_0^{1/n} L(t + s)\rho_n(s)\, ds, \quad f_n(t) = (f * \rho_n)(t), \quad \rho_n(s) = n\rho(ns),$$

$$\rho(t) \geqslant 0, \quad \operatorname{supp}(\rho) \subset [0, 1], \quad \int\limits_0^1 \rho(s)\, ds = 1.$$

Ранее (см. [1]) был рассмотрен случай, который в теории стохастических дифференциальных уравнений был назван случаем Стратановича. Сейчас будет рассмотрен случай Ито.

Теорема. *Пусть $f \in C^1_B(\mathbb{R})$; функция $L(t)$ — ограниченной вариации, непрерывна справа, $L(0) = 0, L(-a) = L(a)$, $L^c(t)$ — липшицева с константой c_1, $1/n < h_n$. Тогда справедливо неравенство:*

$$\|X_n(t) - X(t)\|_{L_1[T]} \leqslant |T|e^{M_1 V_T L(t)}\Bigg(\sup_{t\in[0;h_n]} |X_{n0}(t) - x_0| + Mc_1(1 + 2M_1 V_T L(t))h_n+$$

$$+\frac{1}{n}(M_1 V_T L(t)+2MM_1c_1V_T L(t)+2Mc_1)+(MM_1V_T L(t)+2M)\operatorname*{var}_{t\in T} L^{d,\geqslant l}(t)+\frac{1}{nh_n}MV_T L(t)\Bigg),$$

где l удовлетворяет неравенству $h_n < \min\limits_{1\leqslant i\leqslant l-1} |\mu_{i+1} - \mu_i|/2$, μ_i — точки разрыва функции $L(t)$, $V_T L(t) = \operatorname*{var}\limits_{t\in T} L(t)$, $M = \max\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$, $M_1 = \max\limits_{t\in\mathbb{R}} |f'(t)|$, $L^c(t)$ и $L^d(t)$ — непрерывная и дискретная составляющие функции $L(t)$, $X(t)$ — решение уравнения

$$X(t) = x_0 + \int\limits_0^{t+} f(X(s-))\, dL(s).$$

Литература

1. Лазакович Н. В., Спасков С. А. *Аппроксимация решений дифференциальных уравнений решениями конечно-разностных уравнений с осреднением. Оценка скорости сходимости* // XV Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения–2013». Тез. докл. Гродно, 2013. Ч. 2. С. 38–39.

2. Ковальчук А. Н., Новохрост В. Г., Яблонский О. Л. *Об аппроксимации дифференциальных уравнений с обобщенными коэфициентами конечно-разностными уравнениями с осреднением* // Изв. вузов. 2005. № 3(514). С. 23–31.

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ВТОРОЙ КРАТНОСТИ

И.В. Трифонова

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
irinat@grsu.by

Будем рассматривать полиномиальные эволюционные операторы второй кратности степени m вида:

$$Ax = \sum_{n=1}^{m} \sum_{|i+j|=n} S_{|i|,|j|}(a_{i,j} * x_1^{\otimes i} \otimes x_2^{\otimes j}),$$

где суммирование ведется по всем мультииндексам $i+j$, таким, что длина индекса $|i+j| = n$, удовлетворяет неравенствам $1 \leqslant n \leqslant m$.

Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Тензорное произведение двух билинейных эволюционных операторов второй кратности*

$$A_2(x,y) \otimes B_2(x,y) = \begin{pmatrix} A_2^1(x,y) \otimes B_2^1(x,y) \\ A_2^2(x,y) \otimes B_2^1(x,y) \end{pmatrix} =$$

$$= S_2 \left(\begin{pmatrix} (\, a_{0,2}^{(1)} \;\; a_{1,1}^{(1)} \;\; a_{1,1}^{(1)} \;\; a_{2,0}^{(1)}\,) \otimes (\, b_{0,2}^{(1)} \;\; b_{1,1}^{(1)} \;\; a_{1,1}^{(1)} \;\; a_{2,0}^{(1)}\,) \\ (\, a_{0,2}^{(2)} \;\; a_{1,1}^{(2)} \;\; a_{1,1}^{(2)} \;\; a_{2,0}^{(2)}\,) \otimes (\, b_{0,2}^{(2)} \;\; b_{1,1}^{(2)} \;\; a_{1,1}^{(2)} \;\; a_{2,0}^{(2)}\,) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \otimes y_1 \\ x_1 \otimes y_2 \\ x_2 \otimes y_1 \\ x_2 \otimes y_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \otimes y_1 \\ x_1 \otimes y_2 \\ x_2 \otimes y_1 \\ x_2 \otimes y_2 \end{pmatrix} \right).$$

Теорема 2. *Тензорный квадрат квадратичного эволюционного оператора второй кратности задается формулой:*

$$A_2(x,y) \otimes A_2(x,y) = A^2(x,y) = S_2 \left(\begin{pmatrix} (\, a_{0,2}^{(1)} \;\; a_{1,1}^{(1)} \;\; a_{1,1}^{(1)} \;\; a_{2,1}^{(1)}\,)^{\otimes 2} \\ (\, a_{0,2}^{(2)} \;\; a_{1,1}^{(2)} \;\; a_{1,1}^{(2)} \;\; a_{2,1}^{(2)}\,)^{\otimes 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \otimes x_1 \\ x_1 \otimes x_2 \\ x_2 \otimes x_1 \\ x_2 \otimes x_2 \end{pmatrix}^{\otimes 2} \right).$$

Теорема 3. *Тензорное произведение n билинейных эволюционных операторов второй кратности определяется формулой:*

$$\underbrace{A_2(x,y) \otimes B_2(x,y) \otimes \ldots \otimes Q_2(x,y)}_{n} =$$

$$= S_2 \left(\begin{pmatrix} ((\, a_{0,2}^{(1)} \;\; a_{1,1}^{(1)} \;\; a_{1,1}^{(1)} \;\; a_{2,0}^{(1)}\,) \otimes (\, b_{0,2}^{(1)} \;\; b_{1,1}^{(1)} \;\; b_{1,1}^{(1)} \;\; b_{2,0}^{(1)}\,) \otimes \ldots \otimes (\, q_{0,2}^{(1)} \;\; q_{1,1}^{(1)} \;\; q_{1,1}^{(1)} \;\; q_{2,0}^{(1)}\,)) \\ ((\, a_{0,2}^{(2)} \;\; a_{1,1}^{(2)} \;\; a_{1,1}^{(2)} \;\; a_{2,0}^{(2)}\,) \otimes (\, b_{0,2}^{(2)} \;\; b_{1,1}^{(2)} \;\; b_{1,1}^{(2)} \;\; b_{2,0}^{(2)}\,) \otimes \ldots \otimes (\, q_{0,2}^{(2)} \;\; q_{1,1}^{(2)} \;\; q_{1,1}^{(2)} \;\; q_{2,0}^{(2)}\,)) \end{pmatrix} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left(\begin{pmatrix} x_1 \otimes y_1 \\ x_1 \otimes y_2 \\ x_2 \otimes y_1 \\ x_2 \otimes y_2 \end{pmatrix} \otimes \ldots \otimes \begin{pmatrix} x_1 \otimes y_1 \\ x_1 \otimes y_2 \\ x_2 \otimes y_1 \\ x_2 \otimes y_2 \end{pmatrix} \right) \right).$$

Построено тензорное произведение произвольного конечного числа полиномиальных операторов второй кратности степеней $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ В РАМКАХ МНЕМОФУНКЦИОНАЛЬНОГО ПОДХОДА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

А.Х. Уазиз

Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка, Минск, Беларусь
aminminsk@gmail.com

В докладе будет рассматриваться некорректная многомерная задача Коши

$$\dot{X}(t) = f(X(t))\dot{L}(t), \quad X(0) = X_0, \quad t \in T. \tag{1}$$

Здесь $X : T \to \mathrm{R}^p$ неизвестная вектор-функция, $t \in T = [0; a]$, f — матрично-значная функция , $f(X(t)) = (f^{ij}((X(t))),\ i = \overline{1,p},\ j = \overline{1,p}$, где f^{ij} — ограниченного роста и удовлетворяют условию Липшица по всем переменным, а $L(t)$ — вектор-функция столбец, где $L^i(t)$ — непрерывные справа функции ограниченной вариации, причем $L^i(0) = 0$ и $L^i(a-0) = L(a)$, $\dot{L}(t)$ — ее обобщенная производная, вычисляемая покоординатно.

Следуя подходу с позиций алгебр мнемофункций (см., напр., [1]), задаче Коши (1) поставим в соответствие уравнение в дифференциалах в алгебре мнемофункций, которое на уровне представителей имеет вид многомерной конечно-разностной задачи:

$$X_n^i(t + h_n) - X_n^i(t) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{ij}(X_n(t))[L_n^j(t + h_n) - L_n^j(t)],$$

$$X_n^i(t)|_{[0,h_n)} = X_{n0}^i(t), \quad i = \overline{1,p}, \tag{2}$$

где в качестве представителей f_n и L_n будут использоваться соответствующие полиномы Бернштейна.

Пусть t — произвольная фиксированная точка из отрезка T. Тогда t представляется в виде $t = \tau_t + m_t h_n$, где $\tau_t \in [0, h_n)$, $m_t \in \mathrm{N} \cup \{0\}$. Решение системы (2) можно переписать следующим образом:

$$X_n^i(t+h_n) = X_{n0}^i(\tau_t) + \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{ij}(X_n(\tau_t+kh_n))[L_n^j(\tau_t+(k+1)h_n) - L_n^j(\tau_t+kh_n)]], \quad i = \overline{1,p}.$$

Следующая теорема определяет условия сходимости задачи (2) и описывает вид ассоциированных решений задачи (1).

Теорема. *Решение $X_n(t)$ задачи (2) сходится в $L^1(T)$ при $n \to \infty$, $h_n \to 0$ так, что $1/n = o(h_n^2)$ к решению двумерного интегрального уравнения $X(t) = x_0 + \int_0^{t+} f(X(s-0))\,dL(s)$, если выполняется $\int_T |X_{n0}(\tau_t) - x_0|\,dt \to 0$.*

Отметим, что ранее подобная задача изучалась другими авторами в рамках мнемофункционального подхода с использованием в качестве представителей исключительно сверток. При этом в теоремах об ассоциированном решении (1) фигурировало другое условие на характер связи $1/n$ и h_n, что связано с аппроксимационными свойствами выбираемых представителей мнемофункций. Также напомним, что аналогичная задача Коши в одномерном случае в алгебре мнемофункций с использованием полиномов Бернштейна была рассмотрена в [1].

Литература

1. Уазиз А. Х., Яблонский О. Л. *Дифференциальные уравнения с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемофункций в случае применения полиномиальной аппроксимации* // Докл. НАН Беларуси. 2012. Т. 56, № 2. С. 22–26.

ОЦЕНКА СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПРЯМОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ АЛГЕБР МНЕМОФУНКЦИЙ

Е.В. Шлыков

Международный университет «МИТСО», Минск, Беларусь

eugene.shlykov@gmail.com

Как известно, при решении дифференциальных уравнений и систем, содержащих произведение обобщенных функций, сталкиваются с необходимостью корректного определения данного произведения, поскольку в общем случае это произведение не определено. Отметим, что получаемое решение существенно зависит от способа определения произведения обобщенных функций. Существуют различные методы исследования подобного рода задач, одним из которых является их рассмотрение в рамках теории мнемофункций.

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений (1), где функции f^i удовлетворяют условию Липшица, а L^i — непрерывные справа функции ограниченной вариации:

$$\dot{X}^i(t) = f^i(X^1(t), X^2(t))\dot{L}^i(t), \quad X^i(0) = x_0^i, \quad t \in T = [0, a] \in \mathbf{R}, \quad i = 1, 2. \tag{1}$$

На уровне представителей в прямом произведении алгебр мнемофункций исходной задаче Коши мы можем поставить в соответствие конечно-разностную задачу с осреднением которая имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} X_n^i(t + h_n) - X_n^i(t) = f^i(X_n^1(t), X_n^2(t))[L_n^i(t + h_n) - L_n^i(t)], \\ X_n^i|_{t \in [0, h_n)} = X_{n0}^i(t), \quad t \in T, \quad i = 1, 2. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь в качестве представителей рассматриваются свертки функций f^i и L^i со стандартными шапочками [1]. В работе [1] отмечалось, что в случае использования стандартных шапочек вид ассоциированного решения задачи (2) зависит от связи между $1/n$ и h_n, $1/\gamma(n)$ и h_n, где $\gamma(n)$ — некоторая монотонная функция, $\gamma(n) \to \infty$ при $n \to \infty$ и приводилась полная классификация ассоциированных решений задачи Коши (2).

Однако при построении решений с использованием вычислительной техники имеет значение не только факт существования решения, но и скорость сходимости решения конечно-разностной задачи с осреднением к решению соответствующей системы интегральных уравнений.

В докладе рассматривается вопрос об оценке скорости сходимости в $L_1(T)$ решения задачи (2) в случае, когда $1/n = o(h_n)$ и $1/\gamma(n) = o(h_n)$.

Литература

1. Лазакович Н. В., Шлыков Е. В. *Системы дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в прямом произведении алгебр мнемофункций* // Докл. НАН Беларуси. 2007. Т. 51. № 6. С. 17–21.

СВЯЗЬ МЕЖДУ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ФУРЬЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ГИЛЬБЕРТА ФУНКЦИЙ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ЯДЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А.Г. Яблонская

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
sidorag@bsu.by

Преобразование Фурье и сингулярные интегралы, в частности преобразование Гильберта, являются одними из основных инструментов теории дифференциальных уравнений. Пусть X — банахово пространство. Преобразование Гильберта функций $f : \mathbf{Q}_p \to X$ на пространстве квадратично интегрируемых по Бохнеру функций $L_2(\mathbf{Q}_p, X)$ задается как сингулярный интеграл

$$Hf(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\Gamma_p(0,\theta)} \int\limits_{\mathbf{Q}_p\setminus B[0,p^{-k}]} \frac{\theta(t)f(x-t)}{|t|_p}\, d\mu(t),$$

где μ — мера Хаара, θ — мультипликативный не тривиальный характер на единичной сфере $S(0,1) = \{t \in \mathbf{Q}_p : |t|_p = 1\} \subset \mathbf{Q}_p^*$. Скалярный множитель $\Gamma_p(0,\theta)$ называется *локальной гамма-функцией* и вычисляется по формуле

$$\Gamma_p(0,\theta) = \int\limits_{\mathbf{Z}_p^*} \theta(t) e^{2\pi i\{p^{-k}t\}_p}\, dt,$$

где k — ранг локального характера θ.

Связь между преобразованием Фурье и преобразованием Гильберта на языке операторов можно задать следующим образом:

$$H = F^{-1} M_{\overline{\theta}} F,$$

где F — преобразование Фурье, $M_{\overline{\theta}}$ — оператор умножения на мультипликативный комплексно-сопряженный характер $\overline{\theta}$ $(\theta \neq 1)$.

Теорема 1. *Если банахово пространство X изоморфно гильбертову пространству, то преобразование Гильберта $H : L_2(\boldsymbol{Z}_p, X) \to L_2(\boldsymbol{Z}_p, X)$ является ограниченным оператором.*

Поскольку полное ядерное пространство может быть представлено в виде проективного предела некоторого семейства гильбертовых пространств, то справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если локально выпуклое пространство E является полным ядерным, то преобразование Гильберта $H : L_2(\boldsymbol{Z}_p, X) \to L_2(\boldsymbol{Z}_p, X)$ является непрерывным оператором.*

Литература

1. Радыно Е. М., Радыно Я. В., Сидорик А. Г. *Характеристика гильбертовых пространств с использованием преобразования Фурье на поле p-адических чисел* // Докл. НАН Беларуси. 1993. Т. 48, № 5. С. 17–22.

2. Сидорик А. Г. *Преобразование Фурье функций со значениями в локально выпуклом векторном пространстве* // Весн. Гродзенскага дзярж. ун-та ім. Я. Купалы. Сер. 2. Математика. Физика. Информатика, вычислительная техника и управление. 2011. № 1(107). С. 30–35.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ ПРОЦЕССЫ ЛЕВИ В АЛГЕБРЕ МНЕМОПРОЦЕССОВ

О.Л. Яблонский

Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
yablonski@bsu.by

В докладе будет рассмотрено стохастическое дифференциальное уравнения

$$\mathrm{d}X(t) = f(X(t))\,\mathrm{d}L(t), \quad t \in T, \tag{1}$$

с начальным условием $X(0) = x^0$, где L — квадратично интегрируемый процесс Леви.

В алгебре мнемопроцессов уравнению (1) соответствует задача Коши (см., напр., [1])

$$\mathrm{d}_{\widetilde{h}}\widetilde{X}(\widetilde{t}) = \widetilde{f}(\widetilde{X}(\widetilde{t}))\mathrm{d}_{\widetilde{h}}\widetilde{L}(\widetilde{t}), \quad \widetilde{X}(\widetilde{t})|_{[\widetilde{0},\widetilde{h})} = \widetilde{X}^0(\widetilde{t}). \tag{2}$$

Запишем задачу (2) при помощи представителей обобщенных процессов. Тогда получим следующую конечно-разностную задачу

$$X_n(t+h_n) - X_n(t) = f_n(X_n(t))(L_n(t+h_n) - L_n(t)), \quad X_n|_{t\in[0,h_n)} = X_n^0. \tag{3}$$

Здесь

$$L_n(t) = (L * \rho_n)(t) = \int\limits_0^{1/n} L(t+s)\rho_n(s)\,\mathrm{d}s, f_n(x) = (f * \overline{\rho}_n)(x),$$

где $\rho_n \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\rho_n \geqslant 0$, $\mathrm{supp}\rho_n \subseteq [0; 1/n]$, $\int_0^{1/n} \rho_n(s)\mathrm{d}s = 1$.

В докладе найдены условия, при которых мнемопроцесс $\widetilde{X}$ ассоциирует обычный случайный процесс, т. е. исследовано предельное поведение последовательности решений задачи (3) при помощи стохастического исчисления вариаций развитого в работе [2].

Обозначим через $(\mathcal{F})_{t\in T}$ фильтрацию, порожденную процессом L, а через $\mathbb{D}^{1,p}$ класс случайных величин имеющих производную Маллявэна интегрируемую в степени $p \geqslant 1$ (см. [2]). Положим

$$F_n(x) = \int\limits_x^{1/n} \rho_n(s)\mathrm{d}s, \qquad F_n^{-1}(u) = \sup\{x : F_n(x) \geqslant u\}.$$

Теорема. *Пусть функция $f \in C_B^2(\mathbb{R})$ и L — квадратично интегрируемый процесс Леви на отрезке $T = [0,a]$. Начальные условия $X_n^0(t)$ задачи* (3) *являются $\mathcal{F}_{t+1/n}$-измеримыми и лежат в $\mathbb{D}^{1,p}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 1$ и $t \in [0,h_n)$. Предположим, что неубывающая функция $\sigma : [0,1] \to [0,1]$ такая, что для всех ее точек непрерывности $u \in [0,1]$ и всех $\delta \in (0,1)$ $F_n(F_n^{-1}(u) - \delta h_n) \to \sigma(u)$ при $n \to \infty$, $h_n \to 0$. Тогда X_n сходится в $L^2(T\times\Omega)$ если $\sup_{t\in[0;h_n)} \mathsf{E}\,|\mathsf{X}_n^0(\mathsf{t}) - \mathsf{x}^0|^2 \to 0$ и*

$$\frac{1}{n^2h_n^2}\Bigg(\int\limits_T (F_n(s-h_n) - F_n(s))^2\,ds\Bigg)^{1/2} \to 0.$$

Литература

1. Лазакович Н. В. *Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов* // Докл. АН Беларуси. 1994. Т. 38, № 5. С. 17–22.

2. Yablonski A. L. *The calculus of variations for processes with independent increments* // Rocky Mountain J. of Mathematics. 2008. Vol. 38, № 2. P. 669–701.

A MANY-KIND PARTICLE SYSTEMS IN THE BOLTZMANN — GRAD LIMIT

H.M. Hubal

Lutsk national technical university, Lutsk, Ukraine
galinagbl@yandex.ru

The evolution of states of many-particle systems is determined by an infinite system of integral and differential equations known as the BBGKY hierarchy of equations [1].

States of many-particle systems are described by an infinite sequence of particle distribution functions that satisfy the Cauchy problem for the BBGKY hierarchy of equations. A solution of the Cauchy problem for the BBGKY hierarchy of equations can be represented in the form of the iteration or the functional series, or the non-equilibrium cluster expansion [2, 3].

We consider an one-dimensional many-kind system of particles of lengthes $2\sigma_i > 0$ and masses $m_i > 0$ interacting as hard rods via a pair short range potential Φ.

In the paper, we present the probability approach to describe the state of the particle system in the Boltzmann — Grad limit. We take Maxwell velocity distribution function as the initial one. A solution of the problem on description of the state is a solution of the Cauchy problem for the diffusion equation.

Refrences

1. Bogolyubov N. N. *Problems of a dynamical theory in statistical physics* // Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit. 1946 (Russian).

2. Hubal H. M. *The generalized kinetic equation for symmetric particle systems* // Mathematica Scandinavica. 2012. Vol. 110. Fasc. 1. P. 140–160.

3. Gubal' G. N., Stashenko M. A. *Improvement of an estimate of the global existence theorem for solutions of the Bogolyubov equations* // Theoretical and Mathematical Physics. 2005. Vol. 145, no. 3. P. 1736–1740.

FEJER KERNELS OF p-ADIC SOLENOID

A.Ya. Radyna [1]

Belarusian State University, Minsk, Belarus ales.radyna@gmail.com

Let p be a prime number. Consider a ring of p-adic integers $\mathbb{Z}_p$ as a set of series

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k p^k, \quad u_k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$$

with summation and multiplication in p-adic number system. It is a locally compact group and hence it has a Haar measure $d_p u$. The factor group $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_p / \{(n, n) \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$ is called a p-adic solenoid and denoted by Σ_p (see [1]). As a set with a measure $\Sigma_p \cong [0,1) \times \mathbb{Z}_p$. It is a compact group and has a natural measure $dx \cdot d_p u$. Pontryagin's dual group of the p-adic solenoid is $\widehat{\Sigma_p} = \mathbb{Q}^{(p)} = \bigcup_{n=0}^{\infty} p^{-n}\mathbb{Z}$. That means any $f \in L_2(\Sigma_p)$ can be expanded into a Fourier series

$$f(x,u) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}^{(p)}} \widehat{f}(\alpha)\chi_\alpha(x,u),$$

where $\chi_\alpha(x,u) = \exp(2\pi i\alpha\, x)\exp(-2\pi i\{\alpha\, u\}_p)$ are characters of Σ_p, $\{\cdot\}_p$ is a fractional part of a p-adic number $\{\cdot\}_p$ and

$$\widehat{f}(\alpha) = \int_0^1 \int_{\mathbb{Z}_p} f(x,u)\overline{\chi_\alpha(x,u)}\, dx d_p u$$

are Fourier coefficients. Hence Dirichlet kernels for Σ_p are

$$D_{m,n}(x,u) = \sum_{\alpha \in (-m,\ m) \cap p^{-n}\mathbb{Z}} \chi_\alpha(x,u), \quad m,n \in \mathbb{N}_0.$$

We proved in [2] that the Lebesgue constants have the asymptotics

$$L_{m,n} := \|D_{m,n}\|_{L_1(\Sigma_p)} = \int_0^1 \int_{\mathbb{Z}_p} |D_{m,n}(x,u)| dx d_p u \sim \frac{2}{\pi^2}\ln(m^2 p^n),$$

when $m \to +\infty$, $n \to +\infty$. Consequently the Fourier series is divergent in $L_1(\Sigma_p)$ and it is reasonable to consider Fejer kernels

$$F_{m,n}(x,u) = \sum_{\alpha \in (-m,\ m) \cap p^{-n}\mathbb{Z}} \left(1 - \frac{|\alpha|}{m}\right)\chi_\alpha(x,u), \quad m,n \in \mathbb{N}_0$$

that will be discussed in our talk and I will prove

Theorem 1. *For all nonnegative integers* n,m $\|F_{m,n}\|_{L_1(\Sigma_p)} = 1$.

Refrences

1. Hewitt E., Ross K. A. *Abstract harmonic analysis.* Vol. 2. Berlin, Springer, 1970.
2. Radyna A. Ya., Karpovich N. I. *The Lebesgue constants of p-adic solenoid* // Vesnik Bielaruskaha Dziaržaŭnaha Universiteta. Ser. 1. Math. 2012. No. 3. P. 87–90 (in Russian).

SOLVING MATRIX DISCRETE THE FIRST ORDER EQUATIONS BY MEANS OF ALGEBRAIC MATRICIANT

I.L. Vasiliev, D.A. Navichkova

Belarusian State University, Minsk, Belarus

navdasha@tut.by

Let $K_0^{m\times m}$ be an algebra of matrix sequences with multiplication in the form of Laplace convolution. For matrix $X = [x^{ij}]_{i,j=1}^m$ denote $\widetilde{m}_n(X) = \max\limits_{1\leqslant i,j \leqslant m} \left|x_n^{ij}\right|$.

Definition 1. The sequence $\widetilde{m}(X) = \{\widetilde{m}_0(X), \widetilde{m}_1(X), \dots, \widetilde{m}_n(X), \dots\}$ is called a majorizing sequence for matrix $X \in K_0^{m\times m}$.

Definition 2. $X \in \ell_p^{m\times m}$, when $\forall i,j=\overline{1,m}\ \ x^{ij}\in \ell_p$.

We define a norm of a matrix from $\ell_p^{m\times m}$ by the following way $\|X\|_{\ell_p^{m\times m}} = \|\widetilde{m}(X)\|_{\ell_p}$. $\ell_p^{m\times m}$ is the Banach module under the Banach algebra $\ell_1^{m\times m}$.

Consider matrix algebraic homogeneous differential equation

$$DX = GX, \tag{1}$$

where D is the algebraic derivative operator (see [1]), $G \in \ell_1^{m\times m}$. A solution of the equation (1) is found in $\ell_1^{m\times m}$ with initial condition $X_0 = E$. We use the method of successive approximations for building a solution of (1). The successive approximations are found from recursion relations

$$DX^{(n+1)} = GX^{(n)} \tag{2}$$

with initial approximation $X^{(0)} = X_0 = E$. Integrating (2) obtain successively

$$X^{(0)}=E,\quad X^{(1)}=E+\int G,\quad \ldots,\quad X^{(k)}=E+\int G+\int G\int G+\cdots+\underbrace{\int G\int G\cdots\int G}_{k},\quad \ldots$$

Definition 3. The limit

$$\Omega^G = \lim_{k\to\infty} X^{(k)} = E + \int G + \int G\int G + \cdots + \int G\int G\cdots\int G + \ldots,$$

when it exists, is called an algebraic matriciant of the equation (1).

Consider difference matrix homogeneous the first order equation

$$(n+1)X_{n+1} + (n\gamma+\delta)X_n = 0, \tag{3}$$

where $\gamma,\delta \in \mathbb{C}^{m\times m}$. A solution of the equation (3) is found in $\ell_1^{m\times m}$ with arbitrary initial condition X_0. The equation (3) is transformed to algebraic differential equation (1), where $G=(E-\gamma h)^{-1}(-\delta)$, $h=\{0,1,0,\ldots,0,\ldots\}$. We obtain conditions for matrix γ under which $\forall X_0$ there is a unique solution $X=\Omega^G X_0$ of the equation (3), where Ω^G is an algebraic matriciant of the equation (1). Corresponding to (3) inhomogeneous equation with arbitrary initial condition is investigated in a similar manner in the Banach module $\ell_p^{m\times m}$. Evaluations for solutions norms are obtained.

Refrences

1. Васільеў І. Л., Навічкова Д. А. *Матрычнае аднароднае рознаснае раўнанне першага парадку са зменнымі каэфіцыентамі ў камутатыўным выпадку* // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2014. № 1. С. 83–87.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

И. Е. Андрушкевич, А. А. Вакульчик

Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Беларусь

В порядке улучшения алгебраического метода разделения переменных [1] доказан ряд теорем, позволивших сопоставить системе уравнений Максвелла в нестационарных неоднородных сферически-симметричных средах с электродинамическими параметрами $\varepsilon = \varepsilon_r(r)\varepsilon_t(t)$, $\mu = \mu_r(r)\mu_t(t)$, $\sigma = 0$, $\rho = 0$ эквивалентную ей систему обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющую вид:

$$(\phi_2(\varphi))' = \phi_4(\varphi)\lambda_{\varphi,2}, \quad (\phi_4(\varphi))' = \phi_2(\varphi)\lambda_{\varphi,4}, \quad \lambda_{\varphi,2} = -\lambda_{\varphi,4} = n, \quad n = 0, \pm 1, \ldots; \tag{1}$$

$$(\varepsilon_t(t)\tau_2(t))' = \tau_5(t)\lambda_{t,2}, \quad (\mu_t(t)\tau_5(t))' = \tau_2(t)\lambda_{t,5}; \tag{2}$$

$$x = \cos\theta;$$

$$\left.\begin{array}{c} (\varsigma_1(\theta))' = \lambda_{\theta,5}\varsigma_2(\theta); \quad -n\varsigma_3(\theta) + (x\varsigma_2(\theta))' = (-\lambda_{1,7}n + \lambda_{\theta,6})x\varsigma_1(\theta); \\ -n\varsigma_2(\theta) + (x\varsigma_3(\theta))' = (-\lambda_{1,6}n + \lambda_{\theta,7})x\varsigma_4(\theta); \quad n\varsigma_1(\theta) = \lambda_{1,5}nx\varsigma_3(\theta); \\ n\varsigma_4(\theta) = \lambda_{1,4}nx\varsigma_2(\theta); \quad n\varsigma_3(\theta) + (x\varsigma_2(\theta))' = (\lambda_{1,3}n + \lambda_{\theta,2})x\varsigma_1(\theta); \\ n\varsigma_2(\theta) + (x\varsigma_3(\theta))' = (\lambda_{1,2}n + \lambda_{\theta,3})x\varsigma_4(\theta); \quad (\varsigma_4(\theta))' = \lambda_{\theta,4}\varsigma_3(\theta); \end{array}\right\} \Rightarrow \tag{3}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} n = 0; \quad \lambda_{\theta,6} = \lambda_{\theta,2}, \quad \lambda_{\theta,7} = \lambda_{\theta,3}; \\ (\varsigma_1)' = \lambda_{\theta,5}\varsigma_2; \quad (x\varsigma_2)' = \lambda_{\theta,2}x\varsigma_1; \quad (\varsigma_4)' = \lambda_{\theta,4}\varsigma_3; \quad (x\varsigma_3)' = \lambda_{\theta,3}x\varsigma_4; \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{c} \kappa_7\lambda_{\theta,5}f_5(r) + \kappa_7(rf_6(r))' - \kappa_2\lambda_{t,2}r\varepsilon_r f_2(r) = 0; \\ \lambda_{\theta,2}r\mu_r f_6(r) - (r^2\mu_r f_5(r))' = 0; \quad \lambda_{\theta,3}r\varepsilon_r f_3(r) - (r^2\varepsilon_r f_4(r))' = 0; \\ \kappa_7\lambda_{\theta,3}rf_7(r) + \kappa_2\lambda_{t,2}r^2\varepsilon_r f_4(r) = 0; \quad \kappa_7(rf_7(r))' + \kappa_2\lambda_{t,2}r\varepsilon_r f_3(r) = 0; \\ \kappa_2(rf_2(r))' - \kappa_7\lambda_{t,5}r\mu_r f_6(r) = 0; \quad \kappa_2\lambda_{\theta,2}rf_2(r) - \kappa_7\lambda_{t,5}r^2\mu_r f_5(r) = 0; \\ \kappa_2\lambda_{\theta,4}f_4(r) + \kappa_2(rf_3(r))' + \kappa_7\lambda_{t,5}r\mu_r f_7(r) = 0. \end{array} \tag{4}$$

В случае, когда электродинамические параметры удовлетворяют условию:

$$(\varepsilon_t\mu_t'' + \varepsilon_t'\mu_t' + \lambda^2\varepsilon_t\mu_t - 2\lambda\varepsilon_t\mu_t' - \lambda\varepsilon_t'\mu_t - \delta_t)e^{2\lambda t} + (\varepsilon_t\mu_t'' + \varepsilon_t'\mu_t' + \lambda^2\varepsilon_t\mu_t +$$

$$+ 2\lambda\varepsilon_t\mu_t' + \lambda\varepsilon_t'\mu_t - \delta_t)e^{-2\lambda t} - 6\lambda^2\varepsilon_t\mu_t + 2\varepsilon_t\mu_t'' + 2\varepsilon_t'\mu_t' - 2\delta_t = 0, \tag{5}$$

частным решением системы (2) будут функции $\tau_2 = (\mu_t' - \mu_t \operatorname{th}\lambda t)(\lambda_{t,5}\operatorname{ch}\lambda t)^{-1}$, $\tau_5 = (\operatorname{ch}\lambda t)^{-1}$, и для компонент электромагнитного поля получаем:

$$E_\varphi = \frac{\kappa_7}{\lambda_{\theta,2}}\frac{\mu_t' - \mu_t\operatorname{th}\lambda t}{\operatorname{ch}\lambda t}\varsigma_2 r\mu_r f_5, \quad H_\varphi = \kappa_2\frac{\lambda_{t,2}}{\lambda_{\theta,3}}\frac{1}{\operatorname{ch}\lambda t}\varsigma_3 r\varepsilon_r f_4, \quad H_\theta = \frac{\kappa_7}{\operatorname{ch}\lambda t}\varsigma_2 f_6,$$

$$E_\theta = \frac{\kappa_2}{\lambda_{t,5}}\frac{\mu_t' - \mu_t th\lambda t}{\operatorname{ch}\lambda t}\varsigma_3 f_3, \quad E_r = \varsigma_4 f_4\frac{-\kappa_2}{\lambda_{t,5}}\frac{\mu_t' - \mu_t\operatorname{th}\lambda t}{\operatorname{ch}\lambda t}, \quad H_r = \frac{-\kappa_7}{\operatorname{ch}\,\lambda t}\varsigma_1 f_5.$$

Литература

1. Андрушкевич И. Е. *Методы разделения переменных в волновых уравнениях.* Новополоцк: ПГУ, 2010. 240 с.

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ: ПРИЛОЖЕНИЯ В АЭРОГИДРОУПРУГОСТИ

А.В. Анкилов, П.А. Вельмисов

Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск, Россия

ankil@ulstu.ru, velmisov@ulstu.ru

При проектировании различных конструкций, устройств, приборов, аппаратов, систем и т. д., находящихся во взаимодействии с газожидкостной средой (обтекаемых потоком жидкости или газа), необходимо решать задачи, связанные с исследованием устойчивости упругих элементов, требуемой для их функционирования и надежности эксплуатации.

С одной стороны, воздействие потока может приводить к отрицательным эффектам, являющимся причиной нарушения необходимых функциональных свойств элементов, вплоть до их разрушения (например, приводить к состоянию неустойчивости вследствие увеличения амплитуды или частоты колебаний до критически допустимых значений). Такая проблема, когда неустойчивость является негативным явлением, возникает, например, при проектировании составных частей летательных и подводных аппаратов.

В то же время для функционирования некоторых технических устройств явление возбуждения колебаний упругих элементов при аэрогидродинамическом воздействии, указанное выше в качестве негативного, является необходимым. Примерами подобных устройств, относящихся к вибрационной технике, используемых для интенсификации технологических процессов, являются устройства для приготовления однородных смесей и эмульсий (например, гидродинамические излучатели), в частности, устройства для подготовки и подачи смазочно-охлаждающей жидкости в зону обработки. На деформации упругих элементов основано также действие некоторых приборов, например, датчиков для измерения давления рабочей среды.

В работе принято определение устойчивости упругого тела, соответствующее концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Поведение упругого материала описывается несколькими линейными и нелинейными моделями. В некоторых моделях учитываются тепловое воздействие и (или) эффекты запаздывания внешних воздействий. Изучается устойчивость элементов при различных способах их закрепления при дозвуковом или сверхзвуковом режимах обтекания. Исследуется устойчивость движения в задачах о динамике летательных аппаратов, трубопроводных систем, датчиков измерения параметров газожидкостных сред.

Исследование устойчивости основано:

1) на построении смешанных функционалов для связанных систем дифференциальных уравнений с частными производными для двух неизвестных функций — деформации элемента и потенциала скорости возмущенного потока жидкости (газа);

2) на построении функционалов для дифференциальных уравнений с частными производными только для функций деформаций элементов после исключения потенциала скорости жидкости (газа);

3) на проведении численного эксперимента с применением метода Галеркина.

В докладе приведены примеры постановок некоторых задач аэрогидроупругости и примеры исследования динамической устойчивости движения упругих элементов конструкций в этих задачах. На основе метода Галеркина проведены численные эксперименты, показавшие удовлетворительное согласование необходимых и достаточных условий, полученных численно, с достаточными условиями, полученными аналитически на основе исследования функционалов.

Работа выполнена в рамках государственного задания №2014/232 Минобрнауки России.

ПСЕВДОСПЕКТРАЛЬНЫЙ КОНСЕРВАТИВНЫЙ МЕТОД ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ВСТРЕЧНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОТИЧЕСКИХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

Ю.В. Буяльская, В.М. Волков

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

julie-comtesse@mail.ru, v.volkov@tut.by

Рассматривается класс нелинейных двухточечных краевых задач, возникающих при математическом моделировании волоконно-оптических усилителей [1]:

$$M\frac{dE}{dz} = [\gamma - G(E)]E, \quad -1 < z < 1, \quad R_m E(-L) = g_m, \quad R_p E(L) = g_p. \tag{1}$$

Здесь $E = (E_1, E_2, \dots E_n)^T$, E_k — комплексные огибающие аплидуды световых волн, M — диагональная матрица, $\{M_{kk}\} = \pm 1$, определяющая направления распространения волн, $G(E)$ — матрица, элементы которой $\{G_{mk}\} = g_{mk}E_k^* E_m$ определяют взаимодействие компонент E_k и E_m, причем $g_{mk} = -g_{km}$, R_m, R_p — матрицы, определяющие краевые условия на левой и правой границах соответственно, γ — постоянная поглощения.

Дискретизация дифференциальной задачи (1) на сетке узлов $z_j = \cos[j\pi/(N-1)]$, $j = \overline{0, N-1}$, с использованием матрицы спектрального дифференцирования Чебышева [2] приводит к системе $N\dot{n}$ нелинейных алгебраических уравнений:

$$(D - F(U))U = \Psi. \tag{2}$$

Здесь $U = (U_1, U_2, \dots, U_n)^T$, $U_m = (u_m^1, u_m^2, \dots u_m^N)^T$, D — блочно-диагональная матрица, компоненты которой $\{D_{mm}\} = M_{mm}C_m + \gamma I_m$, C_m, $I_m \in R^{N\times N}$ — матрица спектрального дифференцирования Чебышева, и единичная матрица соотвественно, первая или последняя строки которых модифицированы с учетом краевых условий для соотвествующей компоненты E_m, $F(U)$ — блочная матрица, с блоками $F_{mk} = \operatorname{diag}\{g_{mk}U_k^* U_m\} \in C^{N\times N}$. Вектор Ψ определяется краевыми условиями задачи.

Для реализации псевдоспектральной модели (2) предлагается итерационный метод вида

$$(D - F(U^{(s)}))U^{(s+1)} = \Psi, \quad s = 0, 1, \dots, \quad U^{(0)} = 0, \tag{3}$$

для которого имеет место

Лемма. *На каждом шаге итерационного метода* (3) *для задачи при* $\gamma \equiv 0$ *выполняется соотношение*

$$\sum_{m=1}^{n} \left|U_m^{(s)}\right|^2 = \text{const}, \quad s = 1, 2, \dots \tag{4}$$

Соотношение (4) является дискретным аналогом закона сохранения мощности излучения и одновременно гарантирует ограниченность приближенного решения на каждой итерации. Последнее обстоятельство положительно сказывается на вычислительных качествах консервативного итерационного метода (3). Численные эсперименты показывают, что скорость сходимости итерационного метода (3) сопоставима с традиционно используемым методом Ньютона (см. [3]), но в отличие последнего для достижения сходимости (3) не требуется специального выбора начального приближения.

Литература

1. Headley C., Agrawal G. P. *Raman Amplification in Fiber Optical Communication Systems.* Academic Press. San Diego, CA, 2005.

2. Trefethen L. N. *Spectral Methods in MATLAB.* 2000. SIAM, Philadelphia.

3. Tarman H. I., Berberoglu H. *A spectral collocation algorithm for two-point boundary value problem in fiber Raman amplifier equations* // Optics Communications. 2009. Vol. 282, № 8. P. 1551–1556.

БИФУРКАЦИОННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ТИПА ЛОРЕНЦА

Т.А. Гурина

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

gurina-mai@mail.ru

Рассматриваются модели, описываемые многопараметрическими системами трех дифференциальных уравнений типа Лоренца (модель гиростата и экономическая модель средней фирмы):

$$\dot{x} = -\sigma x + \delta y, \quad \dot{y} = \mu x + \nu y - \beta xz, \quad \dot{z} = -\gamma z + \alpha xy.$$

В качестве бифуркационных параметров рассматриваются μ, ν и γ, а параметры α, β, δ, σ фиксируются. Для особых точек систем построено разбиение пространства бифуркационных параметров на области по типу грубой особой точки линеаризованной системы. При пересечении границы области седло-фокуса с положительными действительными частями пары комплексно-сопряженных корней происходит бифуркация Андронова-Хопфа рождения устойчивого предельного цикла с последующим каскадом бифуркаций удвоения периода цикла и субгармоническим каскадом Шарковского, заканчивающегося рождением цикла периода три.

При дальнейшем изменении параметров в системе появляются циклы гомоклинического каскада бифуркаций, приводящего к образованию странного аттрактора. С помощью преобразований системы и доказательных вычислений показано существование гомоклинической траектории седло — фокуса, разрушение которой является главной бифуркацией гомоклинического каскада, и определена область параметров, в которой она существует.

Получены бифуркационные диаграммы, графики показателей Ляпунова, графики седлового числа, фрактальные размерности странного аттрактора.

Задачи стабилизации неустойчивых особых точек данных систем решаются методом расширенной управляющей системы. Получены параметры управляющих систем, обеспечивающие стабилизацию особой точки в интервале основного бифуркационного параметра, покрывающем область хаоса. Работа выполнена с применением системы Maple–13.

Литература

1. Магницкий Н. А. *Новые методы хаотической динамики.* М.: Едиториал УРСС, 2004.
2. Гурина Т. А. *Качественные методы дифференциальных уравнений в теории управления летательными аппаратами.* М.: Изд-во МАИ, 2014.
3. Гурина Т. А., Дорофеев И. А. *Гомоклинический каскад бифуркаций в системе типа Лоренца* // Журнал СВМО. 2010. Т. 12. № 2. С. 46–55.
4. Гурина Т. А. *Гомоклинический каскад бифуркаций в экологической системе* // Сб. тезисов междунар. конф. «Динамика, бифуркации и странные аттракторы». Нижний Новгород, 2013. С. 130–131.

ДИНАМИКА ЧЕТЫРЕХЪЯРУСНОГО ВЫМОКАЮЩЕГО ЛЕСА

А.К. Гуц, Л.А. Володченкова

Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского, Омск, Россия

aguts@mail.ru, Volodchenkova2007@yandex.ru

Равновесные состояния леса — это состояния, к которым стремится лесная экосистема в своем развитии, будучи подвергнутой начальным возмущениям.

Предположим, что в момент $t = 0$ лес имеет продуктивность $x = x_0$. Как будет меняться продуктивность x со временем, и будет ли состояние леса стремиться к стационарному равновесию? Есть ли шанс у леса, находящемуся в состоянии вымокания вернуться к какому-нибудь доброкачественному равновесию или его ожидает неизбежная полная деградация?

Динамика 4-ярусного леса описывается дифференциальным уравнением с четырьмя внешними управляющими факторами [1]:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x},$$

где

$$V(x) \equiv \frac{\alpha}{6}(x - x_{\text{гр}})^6 - c_k(CI - CI_{\text{гр}})(x - x_{\text{гр}})^4 + c_m\left(\frac{s^2}{\mu} - 1\right)(x - x_{\text{гр}})^3 -$$

$$-c_a(\text{УАН} - \text{УАН}_{\text{гр}})(x - x_{\text{гр}})^2 + c_w(W - W_{\text{гр}})(x - x_{\text{гр}}) \qquad (1)$$

— потенциал леса, x — продуктивность фитоценоза, $\alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ — коэффициент ярусности, а CI (индекс внутривидовой конкуреции), УАН (уровень антропогенной нагрузки на район), s^2/μ (коэффициент дисперсии, степень мозаичности леса), W (влажность почвы) — внешние управляющие факторы.

Здесь $CI_{\text{гр}}$, $(s^2/\mu)_{\text{гр}}$, $\text{УАН}_{\text{гр}}$, $W_{\text{гр}}$ — критические значения факторов, обозначающие границы экологической устойчивости фитоценоза; $x_{\text{гр}}$ – характерная наблюдаемая (измеряемая) для изучаемого типа леса продукция фитомассы.

Для вымокающих называевских березовых лесов Омской области Западной Сибири следует принять: $x_{\text{гр}} = 5$ т/га за год (лес вымокает), $CI_{\text{гр}} = 0,5$ (слабое давление), $\alpha = 90 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 2 = 1260$, $CI = 6,5$ (береза), $s^2/\mu = 1$ (случайное распределение), $\text{УАН} = \text{УАН}_{\text{гр}} - 0,02$, $\text{УАН}_{\text{гр}} = 21$, $W_{\text{гр}} = 35\%$ и $c_k = 472,5$, $c_a = 1$, $c_w = 2 \cdot 10^3$.

Потенциал примет вид

$$V(x) = 210(x-5)^6 - 2835(x-5)^4 + 0.02(x-5)^2 + 2 \cdot 10^3(W - W_{\text{гр}})(x-5).$$

Это означает, что рассматривается наступление 4-й стадии вымокания леса. При $W = W_{\text{гр}}$ имеются три равновесия с $x < 5$, $x = 5$ и $x > 5$, два из них устойчивые: с $x < 5$ и $x > 5$. Следовательно, есть шанс к улучшению ситуации. Но при росте влажности до $W = W_{\text{гр}} + 60\%$ (лес стоит в воде) фитоценоз с данным потенциалом имеет только одно деградированное равновесие $x = 1,5$ т/га за год, к которому независимо от начального значения продуктивности x_0 лес постепенно, но неизбежно приходит. Это гибель леса.

Равновесия в данной модели с потенциалом (1) описываются катастрофой бабочка. В случае 5-ярусного леса используется модель катастрофы вигвам. Но и она для вымокающего березового леса не оставляет оптимистического будущего [2].

Литература

1. Гуц А. К., Володченкова Л. А. *Кибернетика катастроф лесных экосистем.* Омск: Изд-во КАН, 2012.

2. Гуц А. К., Володченкова Л. А. *Динамика вымокающего лесного фитоценоза* // Вестн. Омского ун-та. 2013. №4. С. 19–22.

ОБ ОДНОМ БЕЗУСЛОВНО-УСТОЙЧИВОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕННОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ МАТРИЧНОЙ ЭКСПОНЕНТЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Д.Ю. Дедков

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
daniel.dedkov@gmail.com

Для начально-краевой задачи для нестационарного уравнения Шредингера

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in (-L, L), \quad u(x,0) = u_0(x), \quad u(-L,t) = u(L,t) = 0 \tag{1}$$

рассматривается метод, основанный на комбинации нескольких вычислительных техник, таких как конечно-разностная аппроксимация дифференциального оператора и Сузуки расщепление матричной экспоненты.

При переходе от (1) к задаче Коши (см. [1])

$$\frac{dU}{dt} = iAU, \quad U = (u_1, u_2, \ldots, u_{N-1})^T, \quad u_k = u(x_k, t), \quad A \in C^{(N-1)\times(N-1)} \tag{2}$$

с трехдиагональной матрицей $A = A_e + A_o$, соответствующей стандартной аппроксимации второй производной по пространственной переменной, решение (2) выражается через матричную экспоненту, допускающую приближенную факторизацию согласно формулы:

$$U(T) = \exp(in\tau A)U(0) = \exp(i\tau A_e)\exp(i\tau A_o)U(0) + O(\tau) = X^n(A_e, A_o)U(0) + O(\tau). \tag{3}$$

Для исследования вопроса спектральной согласованности дискретной модели (3) с соответствующими характеристиками дифференциальной задачи (1) рассматривается функция передачи [2]: $H(\omega) = F[X(A_e, A_o) \cdot \delta_m(x)]/F[\delta_m(x)]$, где F — преобразование Фурье, $X(A_e, A_o)$ — оператор, аппроксимирующий матричную экспоненту, а δ_m — пробная δ-функция, для которой $F[\delta_m(x)] = 1$.

Так, для рассматриваемого метода функция передачи имеет вид при $\nu = \tau/h^2$:

$$H_h(\omega) = \frac{1}{2}\exp(-ih\omega + 2i\nu)\times$$

$$\times(2\exp(ih\omega)\cos^2(\nu) - 2\exp(3ih\omega)\sin^2(\nu) - i(1+\exp(2ih\omega))\sin(2\nu)).$$

Предложены модификации алгоритмов приближенной факторизации на основе аддитивного усреднения схемы расщепления $\overline{X}(A_o, A_e) = (X(A_e, A_o) + X(A_o, A_e))/2$, использования дробно-рациональной Паде-аппроксимации функции экспоненты $e^x \approx \approx (1+0.5x)/(1-0.5x)$, а также их комбинации. Соответствующие функции передачи выглядят следующим образом:

$$\overline{H}_h(\omega) = \exp(2i\nu)(\cos(2\nu)\cos_2(h\omega) + \sin_2(h\omega) - i\sin(2\nu)\cos(h\omega)),$$

$$\widetilde{H}_h(\omega) = \frac{-1 + i\nu\exp(-hi\omega) + i\nu\exp(ih\omega) + \nu^2\exp(2ih\omega)}{(i+\nu)^2},$$

$$\widetilde{\widetilde{H}}_h(\omega) = \frac{-1 + 2i\nu\cos(h\omega) + \nu^2\exp(2h\omega)}{(i+\nu)^2}.$$

Литература

1. De Raedt H. *Product formula algorithms for solving the time dependent Schrodinger equation* // Computer Physics reports. 1987. Vol. 7. P. 1–72.

2. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. *Теория волн.* М., 1990.

ФОКУСИРОВКА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ДИПОЛЬНЫХ ИСТОЧНИКОВ ДВУХСЛОЙНЫМ ЭКРАНОМ ИЗ КИРАЛЬНЫХ МЕТАМАТЕРИАЛОВ

В.Т. Ерофеенко

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

bsu-erofeenko@tut.by

Рассмотрим двухслойный экран $D(0 < z < \Delta) = \Omega_1(0 < z < \Delta_1) \cup \Omega_2(\Delta_1 < < z < \Delta)$, слои которого заполнены биизотропным материалом с материальными параметрами $\varepsilon_j^c = \varepsilon_j\varepsilon_0$, $\mu_j^c = \mu_j\mu_0$, $G_j = Z_j = ik_j/c$, $j = 1, 2$. Полупространства $D_1(z < 0)$, $D_2(z > \Delta)$ характеризуются постоянными ε_0, μ_0. В области D_1 в точке $O_1(0, 0, -h)$, $h > 0$, расположен точечный источник из электрических и магнитных диполей с полем $\vec{E}_0$, $\vec{H}_0$ [1], воздействующим на экран D. В область D_2 проникает поле $\vec{E}_2$, $\vec{H}_2$, в областях Ω_j поля $\vec{E}_j^c$, $\vec{H}_j^c$ удовлетворяют уравнениям Максвелла для биизотропной среды

$$\operatorname{rot}\vec{E}_j^c = i\omega(\mu_j^c\vec{H}_j^c + Z_j\vec{E}_j^c), \quad \operatorname{rot}\vec{H}_j^c = -i\omega(\varepsilon_j^c\vec{E}_j^c + G_j\vec{H}_j^c) \text{ в } \Omega_j. \qquad (1)$$

В работе аналитически решена краевая задача дифракции поля $\vec{E}_0$, $\vec{H}_0$ на экране D для уравнений (1).

Показано, что для фокусировки поля диполей за экраном [1] необходимо выполнение условий $\varepsilon_1\mu_2 + \varepsilon_2\mu_1 = 2(1 - k_1k_2)$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \mu_1 + \mu_2 = -4$, $k_1^2 + \varepsilon_1\mu_1 = 1$, $k_2^2 + \varepsilon_2\mu_2 = 1$, $k_2(\varepsilon_1 - \mu_1) = k_1(\varepsilon_2 - \mu_2)$.

Разрешая систему нелинейных уравнений, определим материальные параметры слоев Ω_j, которые образуют двухпараметрическое многообразие M :

$$\varepsilon_1 = \tau_1, \quad \varepsilon_2 = \tau_2, \quad a(\tau_1\tau_2)k_1^4 - 2b(\tau_1\tau_2)k_1^2 + c(\tau_1,\tau_2) = 0, \quad k_1 = k_1(\tau_1,\tau_2), \quad k_2 = k_1(\tau_2,\tau_1),$$

$$\mu_1 = \mu_1(\tau_1,\tau_2) = (\tau_1(\tau_1+\tau_2+4) + 2(1-k_1k_2))/(\tau_2-\tau_1), \quad \mu_2 = \mu_1(\tau_2,\tau_1), \quad a = \tau_1+\tau_2,$$

$$b = \tau_2 + \tau_1(\tau_1^2 + \tau_1\tau_2 + 2\tau_1 - 1), \quad c = \tau_2 - \tau_1(3 + 2\tau_1\tau_2 + 4\tau_1 - \tau_1^2(4\tau_1 + \tau_1\tau_2 + \tau_1^2 + 2)),$$

где τ_1, τ_2 — произвольные комплексные числа.

При приближении материальных параметров слоев Ω_j к многообразию M поле $\vec{E}_2$, $\vec{H}_2$ за экраном преобразуется в поле диполей, сосредоточенных в точке $O_f(0,0,2\Delta-h)$, $0 < h < \Delta$. В работе [2] используется лучевая теория для анализа фокусирующих свойств двухслойной линзы.

Литература

1. Ерофеенко В. Т., Бондаренко В. Ф. *Численное исследование взаимодействия электромагнитных полей электрического и магнитного диполей с композитным экраном* // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-техн. наук. 2013. №4. С. 113–120.

2. Шевченко В. В. *Геометрическая теория плоской линзы из кирального метаматериала* // Радиотехника и электроника. 2009. Т. 54. №6. С. 696–700.

МЕТОДИКИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН С ПЛОСКИМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ, ЗАПОЛНЕННЫМ СФЕРИЧЕСКИМИ ЧАСТИЦАМИ

В.Т. Ерофеенко, С.В. Малый, В.Ф. Бондаренко

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

erofeenko@bsu.by

В пространстве R^3 рассмотрим слой $D(0 < z < \Delta)$, заполненный средой с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε_m, μ_m, которая называется матрицей. В матрице распределены частицы Ω_s из материала, характеризуемого параметрами ε_r, μ_r.

Объемный коэффициент заполнения частиц в матрице — $\tau(0 < \tau < 0,5)$. Полупространства $D_1(\tau < 0), D_2(\tau > \Delta)$ — вакуум с электрической и магнитной постоянными ε_0, μ_0.

Из области D_1 на слой падает первичная плоская электромагнитная волна $\vec{E}_0$, $\vec{H}_0$ с круговой частотой ω.

Обозначим: $D_m = D\setminus\bigcup_S \bar{\Omega}_s$ — область между частицами; γ_s — поверхность частицы Ω_s; $\Gamma_1(z=0)$, $\Gamma_2(z=\Delta)$ — границы слоя D; $\vec{E}_1'$, $\vec{H}_1'$ — отраженное поле в D_1; $\vec{E}_2$, $\vec{H}_2$ — поле в области D_2; $\vec{E}_1 = \vec{E}_0 + \vec{E}_1'$, $\vec{H}_1 = \vec{H}_0 + \vec{H}_1'$ — суммарное поле в D_1; $\vec{E}_m$, $\vec{H}_m$ — поле в матрице D_m; $\vec{E}_s^r$, $\vec{H}_s^r$ — поля в частицах Ω_s.

Краевая задача. Для заданного поля $\vec{E}_0$, $\vec{H}_0$ требуется определить поля $\vec{E}_1'$, $\vec{H}_1'$, $\vec{E}_2$, $\vec{H}_2$, для которых выполнены условия:

$$\operatorname{rot}\vec{E}_j = i\omega\mu_0\vec{H}_j, \quad \operatorname{rot}\vec{H}_j = -i\omega\varepsilon_0\vec{E}_j, \quad D_j, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}_m = i\omega\mu_m\vec{H}_m, \quad \operatorname{rot}\vec{H}_m = -i\omega\varepsilon_m\vec{E}_m, \quad D_m, \tag{2}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}_s^r = i\omega\mu_r\vec{H}_s^r, \quad \operatorname{rot}\vec{H}_s^r = -i\omega\varepsilon_r\vec{E}_s^r, \quad \Omega_s, \tag{3}$$

$$(\vec{E}_{m\tau} - \vec{E}_{s\tau}^r)|_{\gamma_s} = 0, \quad (\vec{H}_{m\tau} - \vec{H}_{s\tau}^r)|_{\gamma_s} = 0, \tag{4}$$

$$(\vec{E}_{j\tau} - \vec{E}_{m\tau}^r)|_{\gamma_s} = 0, \quad (\vec{H}_{j\tau} - \vec{H}_{m\tau}^r)|_{\gamma_s} = 0. \tag{5}$$

Также выполнены условия излучения на бесконечности.

Для численного решения задачи (1)–(5) применены две методики.

1. Методом усреднения вычисляются эффективные материальные параметры ε_{eff}, μ_{eff} композиционного слоя D. Неоднородный слой D заменяется на однородный с параметрами ε_{eff}, μ_{eff} и для него решается методом [1] задача, эквивалентная задаче (1)–(5).

2. Численно решается прямая задача (1)–(5) методом минимальных автономных блоков, предусматривающим декомпозицию слоя с частицами на систему блоков, имеющих форму прямоугольных параллелепипедов [2].

Проведен сравнительный анализ результатов, полученных с использованием указанных выше методик.

Литература

1. Ерофеенко В. Т., Малый С. В. *Дифракция плоской электромагнитной волны на плоском слое из биизотропного материала* // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2010. № 2. С. 11–16.

2. Никольский В. В., Никольская Т. И. *Декомпозиционный подход к задачам электродинамики.* М., 1983. 304 с.

О РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОЖИДАЕМОГО ДОХОДА ЗАМКНУТОЙ СЕТИ С ПЕРЕМЕННЫМ ЧИСЛОМ ЗАЯВОК

О.М. Китурко, М.А. Маталыцкий

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

sytaya_om@mail.ru

В работе [1] описано, как замкнутые структуры массового обслуживания (МО) могут быть использованы в качестве стохастических моделей прогнозирования ожидаемых доходов в логистических транспортных системах (ЛТС). В докладе рассматривается замкнутая экспоненциальная сеть МО с доходами, состоящая из $n+1$ систем обслуживания (СМО) $S_0, S_1, \ldots, S_n$, однотипными заявками и зависимыми от времени параметрами, такими как, интенсивности обслуживания заявок в СМО, вероятности переходов заявок между СМО, число линий обслуживания в СМО. Число заявок в сети является кусочно-постоянной функцией времени. Состояние сети описывается вектором $k(t) = (k,t) = (k_0, k_1, \ldots, k_n, t)$, где $k_i(t)$ — число заявок в системе S_i в момент времени t, $i = \overline{0,n}$.

Используя метод диффузионной аппроксимации, доказано, что плотность распределения дохода $p_v(k,t)$ удовлетворяет уравнению в частных производных второго порядка, коэффициенты которого выражаются через параметры сети. С помощью него получено линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка, для ожидаемого дохода сети с коэффициентами, зависящими от времени. Решив его, найдены выражения для ожидаемого дохода на различных интервалах времени.

Результаты применены при прогнозировании доходов ЛТС в случае, когда изменение ее параметров носит сезонный характер.

Литература

1. Matalytski M., Kiturko O. *Finding of the expected income of the closed queueing structure and its application in transport logistic* // Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics. 2013. Vol. 12, no. 1. P. 85–92.

ДИФРАКЦИЯ ПОЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ НА ТОНКОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ И ШАРЕ

А.И. Куц, Г.Ч. Шушкевич

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

g – shu@rambler.ru

Пусть пространство R^3 разделено сферой $S(r_1 = a_1)$ с центром в точке O_1 на две области $D_0(r_1 > a_1)$, $D_1(0 \leqslant r_1 < a_1)$. В области D_0 находится идеально проводящая и бесконечно тонкая незамкнутая сферическая оболочка Γ_1, расположенная на сфере Γ радиуса a с центром в точке O. Область пространства, ограниченную сферой Γ, обозначим через $D_0^{(0)}(0 \leqslant r < a)$ и $D_0^{(1)} = D_0 \backslash (D_0^{(0)} \cup \Gamma)$. Расстояние между точками O и O_1 обозначим через h. В точке O расположен электрический диполь Герца, колеблющийся с круговой частотой ω. Области D_j, $j = 0, 1$, заполнены средой с диэлектрической проницаемостью ε_j и магнитной проницаемостью μ_j.

Для решения задачи свяжем с точками O и O_1 сферические координаты. Будем полагать, что на поверхности S отсутствуют поверхностные токи и заряды, а электрический диполь ориентирован вдоль оси Oz.

Обозначим через $\vec{E}_e, \vec{H}_e$ вектора напряженности электрического и магнитного поля диполя соответственно. В результате взаимодействия электромагнитного поля $\vec{E}_e, \vec{H}_e$ диполя с проницаемым шаром и незамкнутой сферической оболочкой Γ_1 образуются вторичные поля.

Пусть $\vec{E}_0^0, \vec{H}_0^0$ — вторичное поле, отраженное от границы Γ_1 в области $D_0^{(0)}$, $\vec{E}_1^0$, $\vec{H}_1^0$ — вторичное поле в области D_1, $\vec{E}_0 = \vec{E}_0^1 + \vec{E}_1^1$, $\vec{H}_0 = \vec{H}_0^1 + \vec{H}_1^1$ — суммарное вторичное поле в области $D_0^{(1)}$, $\vec{E}_0^1, \vec{H}_0^1$ — вторичное поле, отраженное от границы Γ_1 в области $D_0^{(1)}$, $\vec{E}_1^1, \vec{H}_1^1$ — вторичное поле, отраженное от границы S в области $D_0^{(1)}$.

Постановка задачи. Требуется найти вторичные электромагнитные поля $\vec{E}_j^k, \vec{H}_j^k$, $j=0,1$, $k=0,1$, которые удовлетворяют уравнениям Максвелла [1], граничному условию на поверхности идеально проводящей незамкнутой сферической оболочки Γ_1 :

$$[\vec{n}, \vec{E}_0]|_{\Gamma_1} = [\vec{n}, \vec{E}_e + \vec{E}_0^0]|_{\Gamma_1} = 0,$$

где $\vec{n}$ — единичная нормаль к поверхности Γ_1, граничным условиям на поверхности S :

$$[\vec{n}, \vec{E}_0]|_S = [\vec{n}, \vec{E}_1^0]|_S, \quad [\vec{n}, \vec{H}_0]|_S = [\vec{n}, \vec{H}_1^0]|_S,$$

где $\vec{n}$ — единичная нормаль к поверхности S, и условию излучения на бесконечности [1].

Первичное поле электрического диполя Герца, ориентированного вдоль оси Oz, представим через векторные сферические волновые функции [1]:

$$\vec{E}_e = E_0 \tilde{\vec{n}}_{01}(r, \theta, k_0), \quad \vec{H}_e = H_0 \tilde{\vec{m}}_{01}(r, \theta, k_0),$$

где $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ — волновое число.

Вторичные поля представим в виде суперпозиции векторных сферических волновых функций, учитывая условие излучения на бесконечности.

Используя соответствующие теоремы сложения, решение поставленной краевой задачи сведено к решению бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода с вполне непрерывным оператором. Для некоторых параметров задачи построена диаграмма направленности.

Литература

1. Ерофеенко В. Т., Козловская И. С. *Аналитическое моделирование в электродинамике.* Мн.: БГУ, 2010.

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О ДИНАМИЧЕСКОМ ЛАМИНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ В АВТОМОДЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ

В.Н. Лаптинский, А.А. Романенко

Институт технологии металлов НАН Беларуси, Могилев, Беларусь

lavani@tut.by, romanenko@gmail.com

Рассматривается краевая задача (см., например, [1, с. 160])

$$f''' + \frac{m+1}{2} f f'' + m(1 - f'^2) = 0, \tag{1}$$

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1, \tag{2}$$

представляющая собой задачу о динамическом пограничном слое для течения жидкости вдоль плоской пластины. Аналитическое решение этой задачи получено только в случае пластины, обтекаемой в продольном направлении $(m = 0)$ — безградиентное обтекание. В данной работе предлагается модификация методики [2, 3], позволяющей получать приемлемые по точности приближенные аналитические решения этой задачи в случае обтекания с градиентом давления. Решение задачи (1), (2) получено в виде

$$f(\eta) = \lambda \int\limits_0^\eta (\eta - \xi) \exp\left(-h\left(\frac{m}{\lambda}\xi + \frac{m+1}{12}\lambda\xi^3 \right) \right) d\xi, \tag{3}$$

где $0 \leqslant m \leqslant 1$, h — вспомогательный параметр, подходящие значения которого вычисляются по предлагаемой методике, $\lambda > 0$ — корень уравнения

$$\lambda \int\limits_0^\infty \exp\left(-h\left(\frac{m}{\lambda}\tau + \frac{m+1}{12}\lambda\tau^3 \right) \right) d\tau - 1 = 0.$$

В частности установлено, что при $h = 1$ данное приближение для функции $f(\eta)$ и ее первой производной обеспечивает погрешность не более 3% в промежутке $0 \leqslant \leqslant \eta \leqslant 10$, а для второй производной — в основном не более 6% в том же промежутке, причем эта производная достаточно быстро убывает.

Решение (3) может быть использовано для получения инженерных формул, связанных с соответствующими прикладными задачами теплофизики и аэродинамики. При этом величина $f''(0) = \lambda$ используется при вычислении касательного напряжения на обтекаемой поверхности, $f'(\eta)$ (вместе с $f''(0)$) — при расчете толщины динамического пограничного слоя, $f(\eta)$ (вместе с $f'(\eta)$) — при вычислении безразмерной температуры в тепловом пограничном слое, а также при вычислении локального коэффициента теплоотдачи (см., например, [4, с. 178]).

Литература

1. Шлихтинг Г. *Теория пограничного слоя.* М.: Наука, 1974.

2. Лаптинский В. Н. *Конструктивный метод анализа задачи о ламинарном пограничном слое и его применение к расчету охлаждающей способности кристаллизаторов при непрерывном литье. Часть II* (Препринт / Нац. акад. наук Беларуси. Ин-т технол. металлов; № 18). Могилев: БРУ, 2010.

3. Лаптинский В. Н. *Об одном аналитическом методе решения задачи о динамическом ламинарном пограничном слое в автомодельном случае* // Ученые записки ЦАГИ. 2013. Т. XLIV, № 5. С. 72–93.

4. *Теория тепломассообмена. Учебник для вузов* / Под ред. А. И. Леонтьева. М.: Высшая школа, 1979.

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО ПО СКОРОСТИ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ — СТОКСА В СЛУЧАЕ ОБТЕКАНИЯ РАВНОМЕРНО НАГРЕТОЙ СФЕРЫ

Н.В. Малай [1], А.В. Лиманская [2], Е.Р. Щукин [3]

[1] Белгородский государственный университет, Белгород, Россия
malay@bsu.edu.ru
[2] БГТУ им. В. Г. Шухова, Белгород, Россия
limanskayaanna@mail.ru
[3] ОИВТ РАН, Москва, Россия
www.oivtran.ru

Теория течений деформируемой вязкой газообразной среды — обширная и быстро развивающая часть гидро- и газовой динамики. Первый длительный этап был связан с изучением так называемых потенциальных течений идеальной несжимаемой среды. Набор таких течений оказался достаточно обширным, а математические возможности их исследования (теория функций комплексного переменного) — почти совершенным, например, [1, гл. I–X]. Однако знаменитый парадокс Эйлера — Даламбера, а также ряд других парадоксов, в рамках теории идеальной среды указывали на необходимость создание новой математической модели более реально отражающей действительность. В результате была создана математическая модель вязкой среды с ее основными уравнениями Навье — Стокса, например, [2, гл. 4].

Уравнения Навье — Стокса — основные уравнения движения вязкой среды, представляющие математическое выражение законов сохранения импульса и массы. В векторном виде их можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \big(\mathbf{V}\cdot\nabla\big)\mathbf{V} = \nu\triangle\mathbf{V} - \frac{1}{\rho}\nabla P - \mathbf{f}, \quad \nabla\cdot\mathbf{V} = 0.$$

Здесь $\mathbf{V} = (V^1, V^2, \ldots, V^n)$ — векторное поле скоростей, t — время, ∇ — оператор набла, $\triangle$ — оператор Лапласа, ρ — плотность, P — давление, ν — коэффициент кинематической вязкости, $\mathbf{f}$ — векторное поле массовых сил. Неизвестные P и $\mathbf{V}$ являются функциями времени t и координаты $x \in \Omega$, где $\Omega \in R^n$, $n = 2, 3$, — двух или трехмерная область, в которой движется газ.

В работе, на примере задачи обтекания равномерно нагретой неподвижной частицы сферической формы плоскопараллельным потоком газа со скоростью $\mathbf{U}_\infty$, получено решение линеаризованного по скорости уравнения Навье — Стокса в сферической системе координат с учетом степенного вида зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры. Доказана теорема единственности полученного решения.

Работа первого и второго авторов выполнена в рамках Федеральной целевой программы научно-образовательного центра «Управляемые электромагнитные процессы в конденсированных средах» НИУ «БелГУ»

Литература

1. Г. Ламб *Гидродинамика.* М.: ИТТЛ, 1947.
2. Хаппель Дж. *Гидродинамика при малых числах Рейнольдса.* М.: Мир, 1960.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СОВМЕСТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ И КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Н.А. Микулик

Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь
mathematics1@bntu.by

Часто встречаются многомассовые динамические системы, в которых отдельные массы совершают одновременно угловые и линейные перемещения, т. е. имеют место крутильные и линейные колебания.

Рассмотрим четырехмассовую динамическую систему с реактивным звеном, в которой массы m_1, m_1, m_3 связаны последовательно соединениями с жесткостями c_{12}, c_{23} а m_4 имеет ответвление от соединения c_{23} и опирается на пружину с жесткостью c_4. Массы m_1, m_2 и m_3 совершают угловые перемещения φ_i вокруг оси соединений c_{12}, c_{23}, а m_4 — угловые перемещения φ_4 вокруг оси соединения c_4 и линейные вдоль оси x.

На первую массу воздействует внешнее возмущение $Q(t)$. Вынужденные колебания рассматриваемой системы описываются системой дифференциальных уравнений [1]:

$$I_1\ddot{\varphi}_1 + c_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) - k_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) = Q(t),$$

$$I_2\ddot{\varphi}_2 - c_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + c_{23}(\varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4) + k_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) = (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3),$$

$$I_3\ddot{\varphi}_3 - c_{23}(\varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4) = -k_2(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3),$$

$$I_4\ddot{\varphi}_4 - c_{23}(\varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4) + c_4(\varphi_4 - x/2) = k_2(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3),$$

$$m_4\ddot{x} - c_4(\varphi_4 r - x) + c_4 x = 0. \tag{1}$$

Три последних уравнения (1) показывают связь между линейными и угловыми перемещениями масс m_3 и m_4. В (1) I_i — моменты инерций m_i $(i = 1, 2, 3)$, r — радиус перехода от линейного перемещения к угловому и наоборот, k_1 и k_2 — коэффициенты трения.

Собственные колебания описываются системой ДУ, полученной из (1) при $k_1 = k_2 = 0$ и $Q(t) = 0$.

Решения системы (1) при заданных значениях параметров I и c и начальных условиях $\varphi_i = \varphi_0$, $\dot{\varphi}_i = \dot{\varphi}_0$, $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ и заданном возмущении $Q(t)$ можно получить, используя пакеты MathCAD, Mathematica, Mathlab и др. или операционным методом.

Литература

1. Микулик Н. А. *Основы теории динамических систем.* Мн.: БНТУ, 2007. 217 с.

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СЕТИ С НЕТЕРПЕЛИВЫМИ ЗАЯВКАМИ И НЕНАДЕЖНЫМИ СИСТЕМАМИ И ЕЕ РЕШЕНИЕ

В.Д. Монько, М.А. Маталыцкий

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
vasilii.manko@gmail.com, m.matalytski@gmail.com

Рассматривается открытая экспоненциальная сеть массового обслуживания, состоящая из n систем обслуживания (СМО) $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Пусть m_i — число линий обслуживания в i-й СМО, $i = \overline{1,n}$, $P = \|p_{ij}\|_{n\times(n+1)}$, $Q = q_{ij n\times(n+1)}$ — матрицы вероятностей переходов заявок между СМО сети соответсвенно после окончания обслуживания в них и досрочно перед обслуживанием. Под состоянием сети будем понимать $2n$-вектор $(d,k,t) = (d_1, d_2, \ldots, d_n, k_1, k_2, \ldots, k_n, t)$, где d_i — количество исправных линий обслуживания, $0 \leqslant d_i \leqslant m_i$, k_i — число заявок в СМО S_i в момент времени t, $i = \overline{1,n}$. Ранее было показано, что система разностно-дифференциальных уравнений для вероятностей состояний сети имеет вид $P(d,k,t)/dt = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}(\lambda(t), \mu_i(t), \beta_i(t), \theta_i(t), \gamma_i(t), P(d,k,t), P(d,k+I_i-I_j,t), P(d+I_i,k,t), P(d-I_j,k,t))$, где $\lambda(t)$, $\mu_i(t)$, $\theta_i(t)$, $\gamma_i(t)$ — сответственно параметры входящего потока заявок, обслуживания, времени исправной работы линий и их восстановления, а также времени пребывания заявок в очереди i-й СМО, I_i — n-вектор с нулевыми компонентами, за исключением компоненты с номером i, которая равна 1, $i = \overline{1,n}$.

Для ее решения предлагается использовать методику, основанную на аппарате многомерных, а именно, $2n$-мерных преобразований.

Результаты применены для нахождения вероятностно-временных характеристик систем документооборота.

О РЕШЕНИИ СИСТЕМ БЕСКОНЕЧНОГО ЧИСЛА РАЗНОСТНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОЖИДАЕМЫХ ДОХОДОВ НМ-СЕТЕЙ

В.В. Науменко, М.А. Маталыцкий

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
victornn86@gmail.com

В докладе рассматриваются открытые сети массового обслуживания с доходами (НМ-сети), положительными и отрицательными заявками. Такие сети используются при моделировании поведения вирусов в информационно-телекоммуникационных системах и сетях [1]. Под состоянием сети понимается вектор числа заявок в системах сети, число состояний в открытой сети бесконечно. Получена система бесконечного числа разностно-дифференциальных уравнений (РДУ) для ожидаемых доходов систем сети.

В случае, когда доходы от переходов между состояниями сети являются детерминированными функциями, не зависящими от состояний сети и времени, для решения системы РДУ применена методика, основанная на использовании аппарата многомерных z-преобразований. Получены соотношения для многомерных z-преобразований ожидаемых доходов, на основании которых предложен алгоритм их нахождения.

Когда доходы от переходов между состояниями сети зависят от ее состояний, для решения системы РДУ применен метод последовательных приближений, совмещенный с методом рядов. Доказаны утверждения, которые показывают, что последовательные приближения для ожидаемых доходов сходятся с течением времени к стационарному решению системы уравнений, а сама последовательность приближений сходится к единственному ее решению. Доказано также, что любое приближение дохода представимо в виде сходящегося степенного ряда, коэффициенты которого удовлетворяют рекуррентным соотношениям, что позволяет находить их за приемлемое процессорное время.

Литература

1. Matalytski M., Naumenko V. *Nonstationary analysis of queueing network with positive and negative messages* // Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics. 2013. Vol. 2, no. 12. P. 61–71.

НЕКОТОРЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СУБДИФУЗИИ РАДОНА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ГОРНОЙ ВЫРАБОТКИ

Р.И. Паровик

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Камчатский край, с. Паратунка, Россия
Камчатский государственный университет им. В. Беринга, Петропавловск-Камчатский, Россия
romanparovik@gmail.com

Эманационный метод заключается в изучении распределений эманаций — радиоактивных веществ (например, радона) в пористом грунте или приземном слое атмосферы с помощью математических моделей стационарной или нестационарной диффузии — адвекции. Математические модели таких процессов записываются в виде дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими начальными и граничными условиями. Вид дифференциальных уравнений может быть различен в зависимости от конкретной задачи или области, в которой ищется ее решение. В теории эманационного метода эти области представляют собой искусственные выемки (выработки) пористого грунта, которые могут быть различной геометрической формы: цилиндрической, сферической или горизонтальные слои. В настоящей работе нас будет интересовать распределение радона в цилиндрическом слое пористого грунта с учетом краевых условий.

В отличие от классических математических моделей А. Г. Граммакова и Ю. П. Булашевича [1, 2], мы будем рассматривать пористый грунт, как фрактальную структуру [3]. Одно из основных свойств фрактальных сред — это наличие эффектов памяти по времени (субдиффузия) и пространственной координате (супердиффузия). Субдиффузия обусловлена «порами-ловушками» в грунте, которые можно считать квазиизолированными от других пор. Супердиффузия характеризуется каналами между порами, по которым эманации свободно и беспрепятственно переносятся к земной поверхности под действием диффузии, адвекции или эффузии [4]. Описание этих режимов в работе проведено с помощью дробного исчисления.

Доля квазиизолированных пор и проводных каналов связана с фрактальной размерностью грунта, которая изменяется в зависимости от деформационных возмущений в земной коре. Поэтому радоновые эманации изучают еще с целью прогнозирования сильных землетрясений [5].

Работа выполнена в рамках проекта №12-I-ОФН-16 «Фундаментальные проблемы воздействия мощными радиоволнами на атмосферу и плазмосферу Земли» и при поддержке Министерства образования и науки РФ по программе стратегического развития ФГБОУ ВПО «Камчатский государственный университет им. В. Беринга» на 2012–2016 гг.

Литература

1. Граммаков А. Г., Никонов А. И., Тафеев Г. П. *Радиометрические методы поисков и разведки урановых руд.* М.: Госгеотехиздат. 1957. 610 с.

2. Булашевич Ю. П., Хайритдинов Р. К. *Диффузия эманации в пористых средах* // Изв. АН ССР. Сер. геофиз. 1959. №12. С. 1787–1792.

3. Смирнов С. Н., Герасимов Д. Н. *Радиационная экология. Физика ионизирующих излучений.* М.: МЭИ. 2006. 326 с.

4. Новиков Г. Ф. *Радиометрическая разведка.* Л.: Недра. 1989. 407 с.

5. Фирстов П. П., Рудаков В. П. *Результаты регистрации подпочвенного радона в 1997–2000 гг. на Петропавловске-Камчатском геодинамическом полигоне* // Вулканология и сейсмология. 2002. №6. С. 1–16.

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МОДЕЛИ ЧИСЛЕННОСТИ ПОПУЛЯЦИИ С ПОРОГОВЫМ ЭФФЕКТОМ ОЛЛИ

А.Ю. Переварюха

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН, Санкт-Петербург, Россия

{madelf}@pisem.net

В докладе представляется вычислительная модель в виде системы ОДУ для описания воспроизводства популяций рыб в рамках теории формирования пополнения Рикера — Нива [1]. Новая модель запас-пополнение анализируется в инструментальной среде как дискретно-непрерывная бистабильная динамическая система, имеюшая неустойчивое «критическое равновесие».

Концепция зависимости между запасом и пополнением рассматривает ранние стадии развития до определенного момента жизненного цикла. Модель Рикера позволяет описывать наблюдаемое снижение численности пополнения при увеличении численности запаса, в этом случае повышенная плотность популяции становится негативным фактором, увеличивающим смертность. Предполагается, что смертность определяет начальная численность поколения. Формулу $R = aSe^{-bS}$ можно получить из решения уравнения с приведением коэфициентов:

$$\frac{dN}{dt} = -(\alpha N(0) + \beta)N(t), \quad t \in [0, \tau].$$

Константы заданного на промежутке времени ОДУ соотносятся с константами формулы Рикера: $a = \lambda \exp(-\beta\tau)$, $b = \alpha\tau$, λ — средняя плодовитость особей популяции, определяющая начальные условия $N(0) = \lambda S.$ Создание новых моделей предпринято после изучения данных об искусственном и естественном воспроизводстве осетровых Каспия для задачи выяснения диапазона устойчивости популяции к интенсивному промыслу. Разработана модель для учета резкого снижения воспроизводства при деградации и низкой плотности на нерестилищах (эффект Олли) и влияние роста особей на темп убыли численности поколения:

$$\frac{dN}{dt} = -(\alpha w(t)N(t) + \theta(S)\beta)\,N(t), \quad \frac{dw}{dt} = \frac{g}{N^k + \zeta}, \quad \theta(S) = \frac{1}{1 - \exp(-cS)},$$

где S — величина нерестового запаса; $w(t)$ — уровень размерного развития поколения; g — параметр, учитывающий ограниченность количества доступных кормовых объектов; убывающая функция $\theta(S) \to 1$ при $S \to \infty$, и введена для учета эффекта резкого снижения эффективности воспроизводства при деградации нерестового стада; ζ — параметр, учитывающий ограничение темпов развития, не зависящие от численности; $k \in [1/2, 1)$; $c < 1$ — степень выраженности эффекта Олли; α — мгновенный коэффициент компенсационной смертности; β — мгновенный коэффициент декомпенсационной смертности; $t \in [0, T]$ — специфичный интервал уязвимости.

Совершенствование модели с точки зрения теории этапности развития организмов требует создания непрерывно-событийных моделей в виде систем с динамически переопределяемой правой частью.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 14-07-00066.

Литература

1. Ricker W. *Stock and recruitment* // J. of the Fisheries research board of Canada. 1954. Vol. 11, no. 5. P. 559–623.

ОБ ОПИСАНИИ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ТЕРМИНАХ БИКВАТЕРНИОНОВ

Н.Я. Радыно

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

mir@bsu.by

Предлагается подход, в терминах которого задачи классической механики могут быть описаны в терминах функций со значениями в гиперкомплексных числах [1, 2]. Оказывается, в рамках предлагаемого подхода можно построить бикватернионную модель движения тела вблизи поверхности земли и сформулировать задачу Кеплера на языке дифференциальных уравнений для функций со значениями в кватернионах.

Кроме того, задача о движении твердого тела может быть описана в терминах функций со значениями в бикватернионах.

Теорема. *Движение твердого тела можно представить как решение дифференциального уравнения следующего вида:*

$$\frac{dw}{d\Phi} = \boldsymbol{n}w,$$

где n *— бикватернион,* Φ *— дуальная переменная,* w *— функция дуальной переменной со значениями в бикватернионах.*

Укажем, что дуальные числа представляют собой множество

$$\{a + \varepsilon b : a, b \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon^2 = 0\},$$

где a, b — вещественные числа, а ε — мнимая единица, свойство которой определяет умножение дуальных чисел. Бикватернионами (обобщением кватернионов) называют элементы множества

$$\{\alpha + \beta \boldsymbol{i} + \gamma \boldsymbol{j} + \delta \boldsymbol{k}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ — дуальные числа}\}.$$

Правило умножения бикватернионов задается правилом умножения мнимых единиц: $\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1$, $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{ji} = -\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{ik} = -\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{ki} = \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{kj} = -\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{jk} = \boldsymbol{i}$.

Литература

1. Радыно Н. Я. *О функциях гиперкомплексного переменного и их применении к описанию движения* // Тр. XII Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения–2007», Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2007. С. 133–140.

2. Радыно Н. Я. *О функциях гиперкомплексного переменного и их применении к интегрированию систем дифференциальных уравнений в замкнутом виде* // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2008. №1. С. 83–88.

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ, ПРИМЕНЯЕМЫХ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Т.В. Русилко

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
rusilko@grsu.by

Объектом исследования является сеть массового обслуживания с однотипными заявками двух классов — приоритетными и неприоритетными. Предполагается, что параметры обслуживания в каждой из систем сети, а также вероятности перехода заявок между системами зависят от времени. Маршрут передвижения заявок каждого класса задается произвольной стохастической матрицей вероятностей переходов. Время обслуживания заявок каждой из линий систем распределено по показательному закону. Заявки выбираются на обслуживания в соответствии с дисциплиной FIFO. Введен в рассмотрение случайный вектор, определяющий состояние рассматриваемой сети в произвольный момент времени и образующий марковский случайный процесс:

$$k(t) = (k_{11}(t), k_{12}(t), k_{21}(t), k_{22}(t), \ldots, k_{n1}(t), k_{n2}(t)),$$

где $k_{ic}(t)$ — число заявок класса c в системе S_i в момент времени t, $t \in [0, T]$, $i = \overline{1, n}$, $c = 1, 2$. Целью исследования является асимптотический анализ марковского процесса $k(t)$, описывающего состояние сети массового обслуживания, при большом числе заявок и нахождение среднего относительного числа заявок в системах сети в произвольный момент времени [1].

Прежде всего была получена система разностно-дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний исследуемого марковского процесса с непрерывным временем и конечным числом состояний. Далее рассмотрен случай большого числа обслуживаемых заявок K и осуществлен переход к вектору $k(t)/K$, имеющему непрерывное распределение. Выведено дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, являющееся уравнением Фоккера — Планка — Колмогорова для плотности распределения вероятностей исследуемого процесса:

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_{ic}}(A_{ic}(x,t)p(x,t)) + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial x_{ic}\partial x_{js}}(B_{icjs}(x,t)p(x,t)),$$

где $A_{ic}(x,t)$, и $B_{icjs}(x,t)$ — коэффициенты сноса и диффузии, вид которых в исследуемом случае установлен. Используя коэффициенты сноса, получена система обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка для средних значений компонент вектора $k(t)/K$. Решение данной системы позволяет прогнозировать среднее относительное число заявок в каждой из систем массового обслуживания в интересующий момент времени.

Полученные результаты могут быть применены при математическом моделировании различных экономических, технических и других систем с помощью замкнутых сетей массового обслуживания определенной структуры. В частности, описанная сеть может быть использована в качестве математической модели процесса обработки заявок клиентов в страховых или логистических компаниях.

Литература

1. Маталыцкий М.А., Русилко Т.В. *Математический анализ стохастических моделей обработки исков в страховых компаниях.* Гродно: ГрГУ, 2007.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ В КОСМОСЕ

А.П. Рябушко [1], И.Т. Неманова [2], Т.А. Жур [2], И.П. Бояринова [2], О.Л. Зубко [1]

[1] Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь
olgazubko@tut.by
[2] Белорусский аграрный технический университет, Минск, Беларусь

Белорусской школой по проблеме движения тел *впервые* выведены и проинтегрированы уравнения движения (УД) в постньютоновском приближении(ПНП) специальной теории относительности (СТО) и общей теории относительности (ОТО) в задаче двух тел, одно из которых является звездой массой M, а второе — пробное тело массой покоя m_0 (планета, астероид и т. д.). При этом учитывались: гравитационные поля звезды и разреженной среды плотностью ρ; световое давление, приводящее к появлению продольного и поперечного эффектов Доплера, аберрации света, редукции массы звезды; лоренцево сокращение миделевого сечения пробного тела и увеличение массы тела (эффекты СТО); кривизна пространства — времени (эффекты ОТО). Уравнения движения следующие:

$$d^2x/dt^2 + \gamma Mx/r^3 = F_0^1 + F_1^1 + F_2^1 + F_\rho^1, \quad d^2y/dt^2 + \gamma My/r^3 = F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + F_\rho^2, \quad (1)$$

где

$$F_0^1 = \gamma Ax/r^3, \quad F_0^2 = \gamma Ay/r^3, \quad (2)$$

$$F_1^1 = \gamma Av(-2x\cos\alpha + y\sin\alpha)/cr^3, \quad F_1^2 = \gamma Av(-2y\cos\alpha - x\sin\alpha)/cr^3, \quad (3)$$

$$F_2^1 = \frac{\gamma A}{2r^3}\frac{v^2}{c^2}[(3-4\sin^2\alpha)x - 1.5y\sin 2\alpha] + \frac{\gamma M_1}{c^2}\left\{\left[\frac{4\gamma M_1}{r} - v^2\right]\frac{x}{r^3} + \frac{4}{r^2}\frac{dr}{dt}\frac{dx}{dt}\right\}, \quad (4)$$

$$F_2^2 = \frac{\gamma A}{2c^2}\frac{v^2}{r^3}[(3-4\sin^2\alpha)y + 1.5x\sin 2\alpha] + \frac{\gamma M_1}{c^2}\left\{\left[\frac{4\gamma M_1}{r} - v^2\right]\frac{y}{r^3} + \frac{4}{r^2}\frac{dr}{dt}\frac{dy}{dt}\right\}, \qquad (5)$$

$$F_\rho^1 = -\frac{4}{3}\pi\gamma\rho x + \frac{4\pi\rho\gamma}{3c^2}\left[4\frac{dx}{dt}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) - xv^2 - \frac{11\gamma M_1 x}{2r} + \frac{3\gamma M_1 x}{R} + \frac{3\gamma M_1 R^2 x}{r^3}\right], \quad (6)$$

$$F_\rho^2 = -\frac{4}{3}\pi\gamma\rho y + \frac{4\pi\rho\gamma}{3c^2}\left[4\frac{dy}{dt}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) - yv^2 - \frac{11\gamma M_1 y}{2r} + \frac{3\gamma M_1 y}{R} + \frac{3\gamma M_1 R^2 y}{r^3}\right], \quad (7)$$

где $x,\ y$ — координаты центра масс пробного тела; t — время; γ — ньютоновская постоянная тяготения; $M_1 = M - A,\ A$ — редуцирующая масса звезды; c, v — скорости света и пробного тела; ρ — плотность среды; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Интегрирование нелинейной системы ДУ (1) методами Пуанкаре — Эйнштейна — Изенфельда с использованием (2)–(7) приводит к следующему уравнению орбиты пробного тела, которое в полярных координатах $\rho,\ \varphi$ можно записать в виде:

$$1/\tilde{r} = (1 + \tilde{e}\cos\Phi)/\tilde{p}, \qquad (8)$$

где

$$1/\tilde{p} = [1 + 2A\gamma\varphi/c\sqrt{\gamma M p} + 3A^2\gamma\varphi^2/(c^2 M p)]/p_1, \qquad (9)$$

$$\tilde{e} = e_1[1 - A\gamma\varphi/(2c\sqrt{\gamma M p}) - A^2\gamma\varphi^2/(8c^2 M p) + e(1 + 3\pi\gamma\rho p^2/c^2\varphi^2)/e_1]\cdot(\tilde{p}/p_1), \quad (10)$$

$$\Phi = [1 + 2\pi\rho p^3/M_1 - 3\gamma M_1/(c^2 p) + 21\pi\gamma\rho p^2/c^2 - 6\pi\gamma\rho p^3/(c^2 R)]\varphi. \qquad (11)$$

Рассмотрение решения (8)–(11) показывает, что орбитой пробного тела является деформирующийся уменьшающийся в размерах элипс, для которого выполняются предельные равенства:

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0}\tilde{p} = p_1/6, \quad \lim_{\varphi\to\varphi_0}\tilde{e} = e_1/16, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0 = c\sqrt{\gamma M p}/(\gamma A). \qquad (12)$$

При достижении предельных значений (12) эллиптическая орбита перестает существовать и пробное тело начинает падать с нарастающей скоростью по радиусу на звезду. В промежутке (12) одновременно с уменьшением размера эллипса происходит смещение периастра, определяемая формулой (11). При разных реальных значениях параметров, входящих в (11), смещение может быть прямым, обратным и нулевым.

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКИХ ДВИЖЕНИЙ В НЕОДНОРОДНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЯХ

В.Н. Старков, Н.А. Степенко

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
vlad.stark@yandex.ru, nick_st@mail.ru

На основе уравнений Ньютона исследуются плоские движения в неоднородных гравитационных полях, образованных группой притягивающих тел. Рассчитаны различные варианты как стационарного расположения притягивающих тел, так и их передвижения. Построены соответствующие траектории пробного тела.

Дифференциальные уравнения, описывающие задачу нескольких тел, имеют вид [1, 2]:

$$\ddot{\vec{r}} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i(\vec{a}_i - \vec{r})}{|\vec{a}_i - \vec{r}|^3},$$

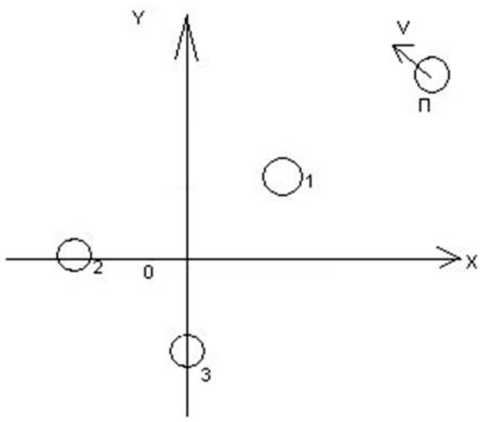
где μ_i — гравитационные параметры притягивающих тел, $\vec{a}_i$ — радиус-вектор i-го притягивающего тела. При $n = 1$ имеем задачу двух тел. Любое добавленное тело вызывает возмущение ньютоновского потенциала и искажает эллиптические траектории. Требуется задать начальные условия для координат и скоростей.

Приведем пример расчета плоского случая, когда три притягивающих тела, различных масс находятся в заданных точках плоскости (x, y) и притягивают пробное тело:

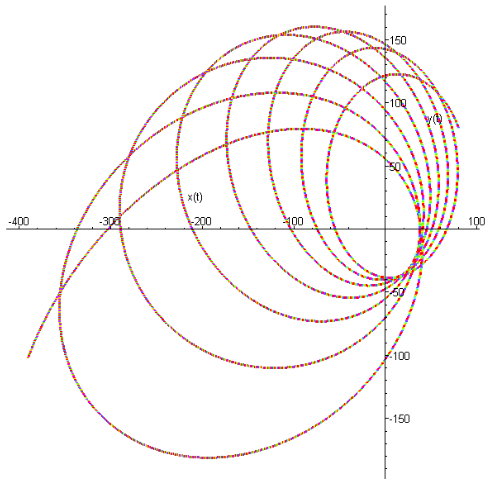
$$\ddot{x}=-\frac{\mu_1}{r_1^3}(x-x_1)-\frac{\mu_2}{r_2^3}(x-x_2)-\frac{\mu_3}{r_3^3}(x-x_3), \quad y=-\frac{\mu_1}{r_1^3}(y-y_1)-\frac{\mu_2}{r_2^3}(y-y_2)-\frac{\mu_3}{r_3^3}(y-y_3),$$

$$r_i = \sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2},$$

где r_i — расстояния между пробным и притягивающими телами соответственно, а x_i, y_i — координаты притягивающих тел, $i = 1, 2, 3$. В частном случае эти координаты изменяются во времени по заданному закону (см. рис. 1, 2).



Р и с. 1. Расположение притягивающих тел



Р и с. 2. Траектория тела вокруг трех подвижных центров, обращающихся вокруг начала координат с одинаковой частотой и имеющие разные массы

Литература

1. Антонов В. А. *Представление гравитационного поля планеты потенциалом системы точечных масс* // Тр. Астрон. обсерватории ЛГУ. 1978. Т. 34. С. 145–155.

2. Аразов Г. Т. *Решение плоской задачи n неподвижных центров* // Ce1est. Mech. 1977. Vol. 16, no. 1. P. 42.

О РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ РАЗНОСТНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОЖИДАЕМЫХ ДОХОДОВ НМ-СЕТИ С РАЗЛИЧНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

С.Э. Статкевич

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Беларусь

sstat@grsu.by

Сеть массового обслуживания (МО) представляет собой совокупность систем массового обслуживания (СМО), между которыми циркулируют заявки, переходя из одной СМО в другую. НМ-сети с доходами являются в определенном смысле расширением понятия сетей МО и позволяют находить ожидаемые доходы СМО сети. Такие сети могут применяться в качестве моделей прогнозирования доходов автоматизированных информационных систем, различных объектов в экономике, страховании, транспортной логистике. Важной задачей является исследование НМ-сети одновременно с ненадежными многолинейными системами обслуживания, в которой линии обслуживания подвергаются случайным поломкам, и ограниченным временем пребывания заявок в очереди на обслуживание.

Для нахождения ожидаемого дохода СМО S_i, $i=\overline{1,n}$, такой сети, в которой обслуживаются однотипные заявки, получена система разностно-дифференциальных уравнений:

$$\frac{dv_i(d,k,t)}{dt}=-\sum_{j=1}^{n}[\mu_j\min(d_j,k_j)+\theta_j(k_j-d_j)u(k_j-d_j)+\beta_j d_j+\gamma_j(m_j-d_j)]v_i(d,k,t)+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}[\beta_j d_j v_i(d-I_j,k,t)+\gamma_j(m_j-d_j)v_i(d+I_j,k,t)]+\sum_{\substack{c,s=1\\ c,s\neq i}}^{n}[\mu_s\min(k_s,d_s)p_{sc}+$$
$$+\theta_s(k_s-d_s)u(k_s-d_s)q_{sc}]v_i(d,k+I_c-I_s,t)+\sum_{j=1}^{n}[\gamma_j(m_j-d_j)f_i(d+I_j,k,t)-\beta_j d_j g_i(d-I_j,k,t)]-$$
$$-\sum_{\substack{c,s=1\\ c,s\neq i}}^{n}[\mu_s\min(k_s,d_s)p_{sc}R_{isc}(d,k+I_c-I_s,t)+\theta_s(k_s-d_s)u(k_s-d_s)q_{sc}H_{isc}(d,k+I_c-I_s,t)]+r_i(d,k),$$

где $(d,k,t)=(d_1,\ldots d_n,k_1,\ldots k_n,t)$ — вектор состояний сети; d_i, k_i — соответственно количество исправных линий обслуживания и число заявок в СМО S_i в момент времени t; m_i — количество линий обслуживания в системе S_i, $i=\overline{1,n}$; μ_i^{-1}, θ_i^{-1}, β_i^{-1}, γ_i^{-1} — соответственно среднее время обслуживания заявок, среднее время ожидания заявок в очереди на обслуживание, среднее время исправной работы линий обслуживания и среднее время восстановления неисправных линий обслуживания в системе S_i; $v_i(d,k,t)$ — полный ожидаемый доход, получаемый системой S_i за время t, если в начальный момент времени сеть находится в состоянии $(d,k,0)$; I_i — n-вектор с нулевыми компонентами, за исключением компоненты с номером i, которая равна 1.

В докладе рассматривается применение прямого метода, использующего матричную экспоненту и метода преобразований Лапласа для решения данной системы уравнений.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ БИНАРНОЙ ЦИКЛИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ

Фам Минь Туан, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет, Белгород, Россия

virch@bsu.edu.ru

Изучается стохастическая математическая модель бинарной каталитической химической реакции [1]. Эта модель основана на базовых уравнениях химической кинетики, в которую вводится стохастическое возмущение ее параметров. В результате, исследование сводится к анализу решений $p(x,t)$ уравнения Колмогорова

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}=-\frac{\partial\,[f(x)p(x,t)]}{\partial x}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2\,[g^2(x)p(x,t)]}{\partial x^2},$$
$$f(x)=\alpha-x+\lambda x(1-x)+\sigma^2 x(1-x)(1-2x)/2,\quad g(x)=x(1-x)$$

для соответствующего марковского диффузионного процесса, который описывает случайное изменение со временем относительной концентрации x_t реагентов химической реакции, $x_t \in [0,1]$, где $p(x,t)$ — плотность распределения случайных значений x_t, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in [0,1]$ — параметры, модели. Интерес представляют решения, которые удовлетворяют граничному условию отсутствия потока через границу

$$f(x)p(x,t) - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial[g^2(x)p(x,t)]}{\partial x} = 0.$$

Оказывается, что финальная плотность $p(x)$, которая является пределом при $t \to \to \infty$ решений $p(x,t)$, испывает бифуркационную перестройку при изменении параметров системы. В отличие от работы [1], эта перестройка исследована для любых допустимых значений параметров. Бифуркационная перестройка выражается в том, что плотность $p(x)$ превращается из унимодальной в бимодальную при переходе через критическую поверхность в пространстве параметров $\langle \lambda, \sigma^2, \alpha \rangle$. Уравнение этой поверхности получается из условия одновременного обращения в нуль производных $p'(x) = p''(x) = 0$ и имеет вид:

$$\lambda^4 + \lambda^2(1-5\sigma^2-\sigma^4/2) - \lambda(9\sigma^4+18\sigma^2-4\lambda^2)(\alpha-1/2) - 4\sigma^2(1-\sigma^2/4)^3 - 27\sigma^4(\alpha-1/2)^2 = 0.$$

При этом нужно выделить только такие решения, для которых выполняется условие

$$\left|\frac{2\lambda(1+2\sigma^2)+(18\alpha-9)\sigma^2}{12\sigma^2-3\sigma^4-4\lambda^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Изучена геометрия «фазовой диаграммы» бифуркационной перестройки посредством двумерных сечений — семейства кривых четвертого порядка при фиксированном значении α. Показано, что каждая кривая имеет особую точку типа «касп», расположенную на некотором «критическом» эллипсе в полуплоскости $\langle \lambda, \sigma^2 \rangle$.

Литература

1. Хорстхемке В., Лефевр Р. *Индуцированные шумом переходы: Теория и применение в физике, химии и биологии.* М.: Мир, 1987.

МНОГООБРАЗИЕ СЛУЧАЕВ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ В ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА В НЕКОНСЕРВАТИВНОМ ПОЛЕ СИЛ

М.В. Шамолин

Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

Работа представляет собой обзор по полученным ранее, а также новым случаям интегрируемости в динамике двумерного, трехмерного и четырехмерного твердого тела, находящегося в неконсервативном поле сил. Исследуемые задачи описываются динамическими системами с так называемой переменной диссипацией с нулевым средним [1, 2].

Задача поиска полного набора трансцендентных первых интегралов систем с диссипацией также является достаточно актуальной, и ей было ранее посвящено множество работ. Введен в рассмотрение класс динамических систем, имеющих периодическую координату. Благодаря наличию в таких системах нетривиальных групп симметрий, показано, что рассматриваемые системы обладают переменной диссипацией с нулевым средним, означающей, что в среднем за период по имеющейся периодической координате диссипация в системе равна нулю, хотя в разных областях фазового пространства в системе может присутствовать как подкачка энергии, так и ее рассеяние. На базе полученного материала проанализированы динамические системы, возникающие в динамике твердого тела. В результате обнаружен ряд случаев полной интегрируемости уравнений движения в трансцендентных функциях и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Получены некоторые обобщения на условия интегрируемости более общих классов неконсервативных динамических систем (динамика четырехмерного твердого тела).

Изучаются некоторые общие условия интегрируемости в элементарных функциях для систем на двумерной плоскости и касательных расслоениях одномерной сферы (двумерный цилиндр) и двумерной сферы (четырехмерное многообразие). При этом приводится интересный пример трехмерного фазового портрета системы маятникового типа, которая описывает движение сферического маятника, помещенного в поток набегающей среды (см. также [3–5]).

Приводятся достаточные условия существования первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций, для многопараметрических систем третьего порядка. В работе мы имеем дело с тремя, на первый взгляд, независимыми свойствами: (i) выделенный класс систем с симметриями; (ii) обладание этим классом систем переменной диссипацией с нулевым средним (по имеющейся периодической переменной), что позволяет их рассматривать как «почти» консервативные системы; (iii) в некоторых случаях обладание ими полным набором трансцендентных первых интегралов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 12-01-00020-а).

Литература

1. Шамолин М. В. *Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела.* М.: «Экзамен», 2007.

2. Шамолин М. В. *Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования* // Докл. РАН. 2011. Т. 440. № 2. С. 187–190.

3. Шамолин М. В. *Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования* // Докл. РАН. 2012. Т. 444. № 5. С. 506–509.

4. Шамолин М. В. *Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования* // Докл. РАН. 2013. Т. 449. № 4. С. 416–419.

5. Шамолин М. В. *Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле* // Докл. РАН. 2013. Т. 453. № 1. С. 46–49.

ПРОНИКНОВЕНИЕ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ ЧЕРЕЗ СФЕРИЧЕСКУЮ УПРУГУЮ ОБОЛОЧКУ

Г.Ч. Шушкевич, Н.Н. Киселева

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

g-shu@rambler.ru

Пусть пространство R^3 разделено концентрическими сферами $S_1(r_1 = a_1)$ и $S_2(r_1 = a_2)$ с центром в точке O_1 на три области $D_0(r_1 > a_1)$, $D_1(a_2 < r_1 < a_1)$,

$D_2(0 \leqslant r_1 < a_2)$. В области D_0 находится идеально тонкая незамкнутая сферическая оболочка Γ_1 с углом раствора θ_0, расположенная на сфере Γ радиуса a с центром в точке O. Область пространства, ограниченную сферой Γ, обозначим через $D_0^{(0)}(0 \leqslant r < a)$ и $D_0^{(1)} = D_0 \backslash (D_0^{(0)} \cup \Gamma)$. Расстояние между точками O и O_1 обозначим через h.

В точке O расположен точечный излучатель звуковых волн, колеблющихся с круговой частотой ω. Области D_j, $j = 0, 2$, заполнены материалом, в котором не распространяются сдвиговые волны. Плотность среды и скорость звука в области D_j обозначим соответственно через $\tilde{\rho}_j$, c_j, $j = 0, 2$. Область D_1 — сферический упругий слой. Под воздействием звукового поля упругий слой совершает колебания, его деформация определяется вектором смещения $\vec{u}$, который удовлетворяет уравнению Ламе [1]:

$$\tilde{\mu}\Delta\vec{u} + (\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u} + \omega^2\tilde{\rho}\vec{u} = 0,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа, $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$ — коэффициенты Ламе, $\tilde{\rho}$ — плотность материала упругой среды.

Для решения задачи свяжем с точками O и O_1 сферические координаты. Обозначим через p_c давление звукового поля источника, $p_0^{(0)}$ — давление рассеянного звукового поля в области $D_0^{(0)}$, $p_0 = p_0^{(1)} + p_0^{(2)}$ — давление рассеянного звукового поля в области $D_0^{(1)}$, p_2 — давление рассеянного звукового поля в области D_2.

Решение дифракционной задачи сводится к нахождению вектора смещения $\vec{u}$, давлений звукового поля $p_0^{(j)}$, $j = 0, 1, 2$, p_2, которые удовлетворяют:

1) граничному условию на поверхности сферической акустически жесткой оболочки Γ_1 :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(p_c + p_0^{(0)}\right)\bigg|_{\Gamma_1} = 0;$$

2) граничным условиям взаимодействия звукового поля с упругим слоем на оболочках S_j, $j = 1, 2$:

$$u_r|_{S_j} = \begin{cases} \omega^{-2}\tilde{\rho}_0^{-1}\dfrac{\partial p_0}{\partial r_1}\bigg|_{S_1}, & j = 1, \\ \omega^{-2}\tilde{\rho}_2^{-1}\dfrac{\partial p_2}{\partial r_1}\bigg|_{S_2}, & j = 2, \end{cases} \qquad \frac{1}{r_1}\frac{\partial u_r}{\partial \theta_1} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r_1} - \frac{1}{r_1}u_\theta\bigg|_{s_j} = 0,$$

$$(2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})\frac{\partial u_r}{\partial r_1} + \frac{2\tilde{\lambda}}{r_1}u_r + \frac{\tilde{\lambda}}{r_1}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta_1} + \frac{\tilde{\lambda}}{r_1}\,\mathrm{ctg}\,\theta_1 u_\theta\bigg|_{s_j} = \begin{cases} -p_0|_{s_1}, & j = 1, \\ -p_2|_{s_2}, & j = 2, \end{cases}$$

и условию на бесконечности [1].

Используя соответствующие теоремы сложения, решение поставленной краевой задачи сведено к решению бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода с вполне непрерывным оператором. Численно исследовано влияние некоторых параметров задачи на значение коэффициента ослабления (экранирования) звукового поля в D_2.

Литература

1. Новацкий В. *Теория упругости.* М.: Мир, 1970.

О СИНГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ ВЯЗКОЙ СРЕДЫ

Д.П. Ющенко [1], **Ю.А. Ермоленко** [2]

[1] Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель,Беларусь
yuschenko@gsu.by
[2] ООО «Интервэйл-Гомель», Гомель, Беларусь
jlabych@yandex.ru

Обобщенная однородная система Навье — Стокса, описывающая колебательное состояние вязких микрополярных несжимающихся жидкостей, имеет вид [1]:

$$(\mu-\gamma)\Delta v - 2\gamma \operatorname{rot}\omega - \operatorname{grad} p + \rho\sigma^2 v = 0,$$

$$\theta\Delta\omega + (\eta+\tau)\operatorname{grad}\operatorname{div}\omega - \gamma\operatorname{rot} v + 2\gamma\omega + \rho\sigma^2\omega = 0, \quad \operatorname{div} v = 0, \tag{1}$$

где $v=(v_1,\,v_2,\,v_3)$ — линейная скорость течения жидкости, $\omega=(\omega_1,\,\omega_2,\,\omega_3)$ — угловая скорость, p — давление, μ — коэффициент сдвиговой вязкости, η, τ, θ — коэффициенты вращательной вязкости, γ — мера сцепления жидкой частицы со своим окружением, ρ — плотность жидкости, σ — частота колебаний.

Для системы (1) построена матрица фундаментальных решений $\Phi(x,\,y)$, имеющая точечную особенность в точке $x=y$, причем сингулярная часть матрицы $\Phi(x,\,y)$ имеет вид:

$$\Phi_0(x,y) = \|a_{i,j}\|,$$

где

$$a_{ij} = \frac{1}{8\pi(\mu-\gamma)}\left[\frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{(x_i-y_i)(x_j-x_j)}{r^3}\right],$$

$$a_{i+3,j+3} = \frac{1}{16\pi\theta(\eta+\tau+\theta)}\left[(\eta+\tau+2\theta)\frac{\delta_{ij}}{r} + (\eta+\tau)\frac{(x_i-y_i)(x_j-x_j)}{r^3}\right],$$

$$a_{i+3,j} = a_{i,j+3} = 0, \quad a_{i7} = a_{7i} = \frac{1}{4\pi}\frac{x_i-y_i}{r^3}, \quad a_{7\,7} = (\mu-\gamma)\delta(x-y), \quad i,j=1,2,3,$$

$\delta(x-y)$ — дельта-функция Дирака, r — евклидово расстояние от точки $x=(x_1,x_2,x_3)$ до точки $y=(y_1,y_2,y_3)$.

Наличие в матрице $\Phi(x,\,y)$ особенностей разных порядков (первого, второго, дельта-функции) обусловлено разными порядками старших производных в обобщенной системе Навье — Стокса.

Установлено, что в окрестности бесконечности матрица $\Phi(x,\,y)$ ведет себя как матрица $B=\|b_{i\,j}\|$, где

$$b_{ij} = \frac{1}{r}, \quad b_{i+3,j+3} = \frac{1}{r^3}, \quad b_{i+3,j} = b_{j,i+3} = \frac{1}{r^2},$$

$$b_{i7} = b_{7i} = \frac{1}{r^2}, \quad b_{77} = b_{i+3,7} = b_{7,i+3} = 0, \quad i,j=1,2,3.$$

Для областей, ограниченных достаточно гладкими поверхностями, получены формулы Грина и интегральные представления решений системы (1). Установлено также, что любое решение внутри таких областей имеет производные любого порядка.

Литература

1. Аэро Э. Л., Булыгин А. Н., Кувшинский Е. В. *Асимметрическая гидромеханика* // ПММ. 1964. Т. 29. С. 297–308.

ANALYTICAL MODEL OF THE PERIODONTAL LIGAMENT BASED ON NONLINEAR THEORY OF THE SQUEEZE SHELLS

S.M. Bosiakov

Belarusian State University, Minsk, Belarus
bosiakov@bsu.by

Teeth are surrounded by the periodontal ligament, which is a thin membrane. It consists of the collagen fibers that provide attachment of the tooth to the alveolar bone. The contact between the tooth root and the alveolar bone is absent under normal conditions. Action of load on the tooth crown is transmitted to the alveolar bone by the strains of the periodontal ligament.

In most cases the analytical modeling of the periodontal membrane is performed with the assumption that the geometric shape of the tooth root is described by the elliptical (circular) paraboloid or hyperboloid [1, 2]. Such an approximation of the real shape of the tooth root gives sufficient accuracy in calculating the single-root teeth movements [3]. The internal surface of the shell periodontal coincides with the outer surface of the tooth root. It is assumed that the root of the tooth is a solid. The outer surface of the periodontal ligament is obtained by displacement its inner surface normal to the surface of the tooth root or in the vertical direction. The displacement of the inner surface points of the periodontium coincides with the displacement of the tooth root. The translational displacement and rotation angles of the tooth root are determined on the base of the root equilibrium equations with taking into account the different simplifying assumptions. A mathematical model for calculating the stress-strain state of the periodontal membrane without idealizing assumptions isn't developed. The purpose of this study is to develop a mathematical model of the periodontal ligament in the form of a circular paraboloid based on the nonlinear theory of thin shells with taking into account its squeezing [4].

The resulting system contains nine differential equations in partial derivatives (three equations of equilibrium and six equations of state of the shell). Unknowns are the components of the stress tensor and the components of the displacement vector of the shell. The boundary conditions correspond to the translational motion of the tooth root in the horizontal plane (the plane is perpendicular to the axis of the paraboloid). Displacements of the shell internal surface coincide with the displacements of the tooth root (the root of the tooth is modeled by solid). Displacements of the external surface of the shell are equal to zero (the shell is rigidly fixed in the alveolar bone). The periodontal tissue is modeled by the isotropic linear elastic material. The solution of the system of equations for the periodontal shell with the above boundary conditions is carried out based on the base of the asymptotic method.

Aknowledgement. The work is supported by State Program of Scientific Researches «Konvergencia» (Instruction 1.8.01).

Refrences

1. Provatidis C. G. *An analytical model for stress analysis of a tooth in translation* // Int. J. Eng. Sci. 2001. Vol. 39. P. 1361–1381.

2. Van Schepdael A., Geris L. , and Van der Sloten J. *Analytical determination of stress patterns in the periodontal ligament during orthodontic tooth movement* // Med. Eng. Phys. 2013. Vol. 35. P. 403–410.

3. Bourauel C., Vollmer D., and J́ager A. *Application of bone remodeling theories in the simulation of orthodontic tooth movements* // J. Orofac. Orthop. 2000. Vol. 61, no. 4. P. 266—279.

4. Aghalovyan L. A. and Gevorgyan R. S. *Nonclassical boundary-value problems of anisotropic layered beams, plates and shells.* Yerevan: Publishing House of the National Academy of Sciences of Armenia, 2005.

BOUNDARY CONTROL IN DISTRIBUTED TRANSPORTATION NETWORKS

S.M. Dymkou [1], M.P. Dymkov [2]

[1] Aeronautical Sciences Division, National University of Singapore, Singapore
tslsmd@nus.edu.sg
[2] Belarus State Economic University, Minsk, Belarus
dymkov_m@bseu.by

In the paper the gas transportation model describing by the system of linear partial differential equations complicated by initial and boundary conditions is considered. The fundamental solution representation for the considered problem is based on exploiting the so-called canonical system formed by the collection of the eigenfunctions for the underlying operator and its adjoint that involve the initial and boundary data. This canonical system is the base of the multifunctional integral transformation for spatial variables which is the core of the developed operational calculus for PDE's. This approach was successfully applied in [1]. The state space parameters are gas pressure p and mass flow Q at the points of the pipe. All other physical parameters of the pipe and gas used here are constant at the moment of calculation. It is known that some important dynamic characteristics of the processes can be evaluated from the linearized model of the processes. The most accurate linear model can be realized in some neighborhood of the known basic regime $(\overline{Q}, \overline{p})$ of the considered process [2]. In particular, the following system of linear differential equations can be used for description of the disturbed state space parameters for the turbulent, isothermal gas flow in the unit pipeline

$$\frac{\partial Q(t,x)}{\partial t} = -s\frac{\partial p(t,x)}{\partial x} - \rho Q(t,x) - \beta p(t,x),$$
$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = \alpha\frac{\partial Q(t,x)}{\partial x}, \quad x \in [0,1], \quad t > 0.$$

where x denotes the space variable, t the time variable, s the cross sectional area, d the pipeline diameter, c the isothermal speed of sound and λ the friction factor, $\alpha, \beta, \gamma, \rho$ are some constants. The given equations can be rewritten in operator form as

$$D_t y(t,x) = Ly(t,x),$$

where

$$y(t,x) = \begin{bmatrix} y_1(t,x) \\ y_2(t,x) \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} Q(t,x) \\ p(t,x) \end{bmatrix}, \quad L = A + BD_x = \begin{bmatrix} -\rho & -sD_x - \beta \\ \alpha D_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Here D_t and D_x describe the partial derivatives with respect to the time and space variables, respectively. The initial and boundary conditions are given as

$$y(0,x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial y_1(t,0)}{\partial x} = 0, \quad y_2(t,0) - y_2(t,1) = 0.$$

The initial control functions image the arisen disturbances $u(x), v(x)$ at $t = 0$ for the preassigned pumping regime $\overline{Q}(t,x), \overline{p}(t,x)$ in the pipeline, and the boundary data images the conservation of the gas pipeline pressure and pipeline storage in the inlet of pipe. Also, some other approximation can be introduced by exploiting the so-called $2D$ and repetitive models [3, 4].

Refrences

1. Dymkou V., Pothérat A. *Spectral methods for wall bounded MHD* // Journal of Theoretical and Computational Fluid Dynamics. 2009. Vol. 23, no. 6. P. 535–555.
2. Dymkou S. *Graph and 2-D Optimization Theory and their application for discrete simulation of gas transportation networks and industrial processes with repetitive operations.* PhD Thesis, RWTH, Aachen, Germany, 2006.
3. Dymkov M., Dymkou S. *Repetitive Models in Gas Transportation Networks* // Proc. of 17-th Int. Conf.: Methods and Models in Automation and Robotics, August, 27-30, Miedzyzdroe, Poland, 2012. P. 433–438. (CFP12MMA-CDR, ISBN: 9787-1-4673-2123-5, 2012 IEEE).
4. Dymkov M., Rogers E., Dymkou S., and Galkowski K. (2008). *Constrained Optimal Control Theory for Differential Linear Repetitive Processes* // SIAM Journal on Control and Optimization. 2008. Vol. 47, no. 1. P. 396–420.

INVESTIGATION OF THE MOISTURE INFLUENCE ON SOIL MASS STABILITY ON THE SLOPE

T.V. Kutya, P.M. Martyniuk

National University of Water Management and Nature Recourses Use, Rivne, Ukraine grotan_nuwmnru@ukr.net, martinjuk@ukr.net

To determine the effect of moisture on the stability of the soil mass, we divide the problem into two parts: 1) determination the saturation change in soil due to pipeline damage, and 2) optimization problem of searching the minimum stability factor and the critical slip surface.

First we considered two-dimensional problem of soil slope saturation (domain Ω) as a result of the pipeline damage (point D, $D \in \partial\Omega$, where $\partial\Omega$ is a border of Ω). Therefore it is obtained two subdomains of complete and incomplete saturated soil. Our task is to determine the dynamics of saturation region with time.

For this purpose Richards' equation was used [1] with regard to saturation function $s(x,z,t) = (\theta - \theta_{\min})/(\theta_{\max} - \theta_{\min})$, where $\theta_{\min}$ is the residual liquid content in the porous medium; $\theta_{\max}$ is the saturated liquid content in a porous medium; $0 \leqslant \theta_{\min} \leqslant \theta \leqslant \theta_{\max} = \sigma$, σ is a porosity and θ is the volumetric liquid content in the unit volume of a soil.

Then the mathematical model of the investigated process can be written by the following boundary-value problem:

$$\frac{\partial s(x,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(s)\frac{\partial s(x,z,t)}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D(s)\frac{\partial s(x,z,t)}{\partial z}\right) - \frac{1}{\theta_{\max} - \theta_{\min}} \cdot \frac{\partial K(s)}{\partial z},$$

$$(x,z) \in \Omega, \quad t \in (0;T];$$

$$s(x,z,0) = s_0(x,z), \quad (x,z) \in \overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma;$$

$$s(x,z,t)|_{\Gamma_1} = s_1(x,z,t), \quad (x,z) \in \Gamma_1; \quad \left(-D(s)\frac{\partial s(x,z,t)}{\partial z}\right)\bigg|_{\Gamma_2} = 0, \quad (x,z) \in \Gamma_2, \quad t > 0;$$

$$\frac{\partial s(x,z,t)}{\partial x}\bigg|_{\Gamma_3 \setminus \{D\}} = 0, \quad (x,z) \in \Gamma_3 \setminus \{D\}; \quad s(x,z,t)|_D = 1, \quad (x,z) \in D, \quad t > 0,$$

where $D(s)$ is the soil liquid diffusivity that can be treated as a nonlinear diffusion coefficient; $K(s)$ is a hydraulic conductivity of an unsaturated porous medium; $s_1(x,z,t)$

is a given function. Functions $D(s)$ and $K(s)$ were determined according to the following two models: 1) Brooks-and-Corey model; 2) Mualem-Van Genuchten model [1].

The numerical solution of above boundary-value problem was founded by meshfree radial basis function method [2].

Using the solutions of the above problem at the second part we found the minimum slope stability factor and possible slip surface using engineering methods such as Mozhevitinova, Fedorovsky — Kurylo, circular cylindrical sliding surfaces method, etc. [3], and optimization techniques for minimizing the objective function of many variables, such as coordinate descent method and golden section search.

As a result of these two steps it can be predicted what amount of moisture in the slope soil will lead to stability loss and dangerous geological processes such as landslides, avalanches, mudflows and so on.

Refrences

1. Caputo J. G., Stepanyants Y. A. *Front Solutions of Richards' Equation* // Transport in Porous Media. 2008. Vol. 74, no. 1. P. 1–20.

2. Kansa E. J. *Multiquadrics — a Scattered Data Approximation Scheme With Applications to Computational Fluid-Dynamics. II. Solutions to Parabolic, Hyperbolic and Elliptic Partial Differential Equations* // Comput. Math. Appl. 1990. Vol. 19, no. 8/9. P. 147–161.

3. Федоровский В. Г., Курило С. В. *Метод расчета устойчивости откосов и склонов* // Геоэкология, 1997. №. 6. С. 95–106.

ON SOME APPLICATIONS FOR EQUATIONS OF ELLIPTIC TYPE WITH SPECTRAL PARAMETER AND DISCONTINUOUS NONLINEARITY

D.K. Potapov

Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia

potapov@apmath.spbu.ru

Models with discontinuous nonlinearities are used as idealization of continuous processes such that nonlinear parameters rapidly vary on small intervals in the range of phase variables. For many problems of hydrodynamics, thermophysics, electrophysics, control theory, mathematical biology, and other fields of modern natural science the mathematical models often include differential equations with discontinuous nonlinearities. As an examples, we can mention the Gol'dshtik's and the Lavrent'ev's problems for separated flows of incompressible fluid [1, 2]. Also, we can remember the Kuiper's problem on heating of conductor when voltage and temperature are constant on its surface, and electroconductivity of material changes jumpwise as a function of the temperature [3].

We consider the Gol'dshtik model for separated flows in incompressible fluid. Besides, a model problem approximately describing the flow of viscous incompressible fluid in a square cavern is solved. A solution of this two-dimensional problem of mathematical physics for a finite domain is found numerically using the Partial Differential Equation Toolbox of the MATLAB system by the finite element method. Estimations of differential operator for the problem are calculated. The existence of semiregular solutions of the Gol'dshtik problem is proved. Such solutions are of great interest in applied problems. The result on the number of solutions to the Gol'dshtik problem is gained by a variational method.

We study the Lavrent'ev mathematical model for separated flows with an external perturbation. This model consists of a differential equation with discontinuous nonlinearity and the boundary condition. The coercive case is considered and the external perturbation is given in a concrete form. We consider the model of the external perturbation in the special analytical form that has not been studied for the Lavrent'ev problem. The existence of a semiregular solution is proved by the variational method. In addition, if variational functional has no more countable number of points of a global minimum, then there is the regular solution of the problem, i.e. the semiregular solution with the property of correctness. The regular solutions of the Lavrent'ev problem have not been investigated.

The problem on conductor heating is considered under constant voltage and constant temperature on the conductor surface when electroconductivity of material changes with a jump upon transition through certain temperatures. The results obtained earlier for problems with a spectral parameter for equations of elliptic type with discontinuous nonlinearities are applied to this problem of electrophysics. Restrictions on the gap points of nonlinearity are weaken (nonlinearity is electroductivity of the conductor). The theorem on both the existence of the nonzero semiregular solution and the estimates for the differential operator of the problem under consideration is established.

We summarize the results of [1–3] for applications to equations of elliptic type with a spectral parameter and nonlinearity discontinuous with respect to the phase variable.

Refrences

1. Potapov D. K. *On solutions to the Goldshtik problem* // Num. Anal. and Appl. 2012. Vol. 5, no. 4. P. 342–347.

2. Potapov D. K., Yevstafyeva V. V. *Lavrent'ev problem for separated flows with an external perturbation* // Electron. J. Differ. Eq. 2013. No. 255. P. 1–6.

3. Potapov D. K. *On one problem of electrophysics with discontinuous nonlinearity* // Differ. Equ. 2014. Vol. 50, no. 3.

FINITE-DIFFERENCE ITERATIVE SOLVER WITH SPECTRALLY EQUIVALENT PRECONDITIONER FOR ANISOTROPIC ELECTRICAL IMPEDANCE TOMOGRAPHY PROBLEMS

V.M. Volkov [1], A.V. Prakonina [1], S.I. Turovets [2], A.D. Malony [3]

[1] Belarusian State University, Minsk, Belarus
v.volkov@tut.by
[2] Electrical Geodesics, Inc., Eugene, USA
sergei@cs.uoregon.edu
[3] University of Oregon, Eugene, USA

The electrical impedance tomortaphy (EIT) problems in anisotropic inhomogeneous media like head tissues belongs to the class of the three-dimensional boundary value problems for elliptic equations with mixed derivatives. The efficiency of the most discussed and usable in practice numerical methods in context of modeling EIT problems is reviewed in [1,2], where it is shown that the best performance is demonstrated by the algebraic multi-grid (AMG) methods.

We present a novel type of the anisotropic bi-conjugate gradient iterative solver for 3D elliptic equations with mixed derivatives. The proposed numerical scheme is based on the finite-difference approximation of the problem in an arbitrary three-dimensional computational domain, augmented to a cuboid with non-conducting claddings and the Dirichlet type boundary conditions defined at the facets of the cuboid. The rectangular uniform finite difference grid is assumed to have high enough resolution across the characteristic layers of inhomogeneity. The nonconductive claddings imitate the Neumann boundary condition on the arbitrarily shaped surface of the embedded object. The discrete problem is reduced to solving a system of linear algebraic equations with a 19-diagonal sparse matrix.

Iterative methods from the BiCG family is most effective with the adequate choice of preconditioners. As a preconditioner, we employed combined spectrally-optimal preconditioning Fourier-Jacobi (FJ). The key advantages of the proposed technique is to eliminate the dependence of the convergence rate on the spatial grid resolution and the heterogeneity ratio of the discrete model. As a result, the number of iterations to achieve the desired accuracy is almost independent of the grid resolution, which puts the proposed technique in line with the popular multigrid iterative methods. The proposed numerical algorithm includes the standard arithmetic operations with sparse matrices and vectors, as well as FFT, making it easy to implement and readily eligible for the effective parallel implementation.

The proposed algorithm has been validated against analytics in a spherical model and tested on the anatomically accurate MRI based human head geometry [3]. Simulation results show high efficiency of the developed approach. It is capable to solve 128x128x128 voxels anisotropic problems with the extreme conductivity tensor eigenvalues ratio of 10:1 and the heterogeneity ratio of the piecewise constant coefficients up to 10^{16} (including explicitly titanium clips and air pockets modeling) within a minute runtime in the Matlab implementation.

Refrences

1. Mohr M., Vanrumste B. *Comparing iterative solvers for linear systems associated with the finite difference discretization of the forward problem in electro-encephalographic source analysis* // Medical and Biological Engineering and Computing. 2003. Vol. 41, no. 1. P. 75–84.

2. Barnes D. N., George J. S., Ng K. T. *Finite difference iterative solvers for electroencephalography: serial and parallel performance analysis* // Medical and biological engineering and computing. 2008. Vol. 46, no. 9. P. 901–910.

3. Turovets S., Volkov V., Zherdetsky A., Prakonina A., Malony A. D. *A 3D Finite-Difference BiCG Iterative Solver with the Fourier-Jacobi Preconditioner for the Anisotropic EIT/EEG Forward Problem* // Computational and Mathematical Methods in Medicine. 2014. P. 1–12.

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ

О МОДЕЛИРОВАНИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В АЛГЕБРЕ МНЕМОФУНКЦИЙ

Т.С. Автушко, Н.В. Лазакович

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
AutushkaTS@tut.by

В докладе предполагается обсудить вопросы моделирования решений задачи Коши линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с обобщенными коэффициентами

$$Y''(t) + a'(t)Y'(t) + \sigma'(t)Y(t) + f'(t) = 0, \tag{1}$$

где $t \in \mathbf{T} = [0, b]$, $\sigma, a, f : \mathbf{T} \to \mathbb{R}$ — непрерывные справа функции ограниченной вариации, σ', a', f' — их обобщенные производные.

Уравнения вида (1) рассматриваются в курсах «Высшая математика», «Дифференциальные уравнения», «Уравнения математической физики». В частности, они возникают при решении уравнений в частных производных продольных колебаний стержня с вкрапленными точечными массами (бусинками) методом разделения переменных. При этом $\sigma(t)$ — масса стержня на $[0, t)$, $\sigma'(t)$ — плотность стержня в точке t, $a(t)$ — модуль Юнга (характеризует сопротивление материала растяжению (сжатию) при упругой деформации).

В алгебре мнемофункций исходное уравнение на уровне представителей записывается как конечно-разностное уравнение с осреднением с шагом h, где под осреднением a и σ мы будем понимать свертки их со стандартными шапочками:

$$a_n(t) = (a * \rho_n^1)(t), \quad \sigma_n(t) = (\sigma * \rho_n^2)(t), \quad \rho_n^1(t) = n\rho(nt), \quad \rho_n^2(t) = \gamma(n)\rho(\gamma(n)t),$$

$$\rho \geqslant 0, \quad \rho \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \operatorname{supp} \rho \subseteq [0, 1], \quad \int\limits_0^1 \rho(s)\, ds = 1.$$

Такое осреднение естественно, поскольку «...реально нельзя измерить значение физической величины в точке, а можно измерить лишь ее средние значения в достаточно малых окрестностях этой точки и объявить предел последовательности этих значений значением рассматриваемой физической величины в данной точке» ([1]).

В результате такого подхода исходная задача Коши имеет четыре решения, вид которых представлен в сообщении [2] и зависит от связи между h, n и $\gamma(n)$. Таким образом, при моделировании реальных явлений уравнениями вида (1), необходимо, на наш взгляд, учитывать такие связи.

Литература

1. Владимиров В. С. *Обобщенные функции в математической физике.* М.: Наука, 1979.

2. Автушко Т. С., Лазакович Н. В. *Представление ассоциированных решений линейных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами через функции Коши* // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57, №4. С. 32–38.

ДИСТАНЦИОННЫЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ

Е.А. Аршава

Харьковский национальный университет строительства и архитектуры, Харьков, Украина elarshava@mail.ru

Стратегическая цель дистанционного образования в мире состоит в предоставлении возможности для каждого обучающегося в любом месте изучить программу любого колледжа или университета. Выполнение этой цели потребует перехода от обмена идеями и знаниями к обмену образовательными ресурсами [1]. Образование становится инструментом взаимопроникновения не только знаний и технологий, но и капитала, инструментом борьбы за рынок. Примерный набор материалов, который используется перед началом дистанционного образования, выглядит следующим образом:

- текст с изложением теоретического материала,
- видеозаписи лекций,
- вопросы для самоконтроля с подробными ответами на них,
- задачи для самоконтроля с подробными решениями,
- контрольные вопросы для проверки знаний,
- методические указания по лабораторному практикуму,
- задания для типовых расчетов (курсовых работ, проектов) и методические указания по выполнению этих работ,
- справочные материалы, необходимые для работы над курсом.

При регулярной работе над курсом к концу его изучения у преподавателя накапливается достаточно большой материал, позволяющий судить об уровне знаний каждого студента и приобретенных навыках. Заключительный экзамен по курсу должен быть письменно–устным и очным, чтобы объективно оценить, насколько самостоятельно выполнялась студентом работа в семестре.

Такой подход к дистанционному образованию открывает большие перспективы и в деле послевузовского образования и при переподготовке кадров. Работа над внедрением дистанционного образования соответствует логике развития системы образования в обществе, где приоритетной становится потребность каждого отдельного человека, и по мере накопления опыта будут совершенствоваться как технические средства, так и учебно–методические приемы этой новой технологии обучения.

Литература

1. Тихомиров В. П. *Дистанционное образование: ожидания и реальность* // Развитие образования и науки на пороге XXI века. М.: МАН ВШ. 1996. № 2. С. 29–42.

О СТРУКТУРЕ И МЕТОДИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЯХ УЧЕБНОГО ПОСОБИЯ «ПРАКТИКУМ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ»

Н.С. Березкина, И.П. Мартынов, В.М. Пецевич, В.А. Пронько

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

Подготовлена рукопись учебного пособия, предназначенного для студентов заочного отделения и написанного в соответствии с типовой программой по курсу «Математика» для высших учебных заведений по направлениям образования: 38 Приборы; 52 Прочие виды производства; 55 Интеллектуальные системы; 70 Строительство.

Содержание пособия в точности соответствует таким разделам вышеуказанной программы, как «Обыкновенные дифференциальные уравнения», «Числовые и функциональные ряды», «Операционное исчисление». Выбор разделов обоснован учебной программой (рабочий вариант) дисциплины «Математика».

Основная цель пособия – организация учебного процесса студента-заочника. Книга должна компенсировать ему отсутствие достаточного количества лекций и практический занятий.

Пособие состоит из двух частей. Первая часть «Тематические тесты» содержит тестовые задания по указанным разделам математики с предварительно изложенным кратким теоретическим материалом и примерами решения типовых задач по каждой теме из раздела. При составлении тестовых заданий предполагалось, что студенты, изучив предложенный материал, уже приобрели навыки решения определенного круга задач и для выполнения задания должны использовать совокупность этих навыков.

Проработав весь материал, содержащийся в первой части и решив предложенные тестовые задачи, студент-заочник приобретет требуемые знания и навыки в решении примеров и задач, предложенных в вариантах тестовых заданий второй части пособия.

Каждый из 30 тестов по структуре напоминает тест централизованного тестирования абитуриентов и включает задания по всем, рассмотренным в первой части разделам. Каждый, одинаковый по уровню сложности, вариант теста состоит из 30 заданий (18 заданий закрытого типа в части A и 12 заданий открытого типа в части B). Задачи части A располагаются по нарастанию уровня сложности. Так, задания первого уровня сложности были построены на простом узнавании математических объектов, например, указать вид уравнения Бернулли или характеристического уравнения для линейного дифференциального и т. п. С помощью заданий второго уровня сложности от студента требуется выполнять несложные вычисления, воспроизводить программный материал, применяя известные факты, действуя по образцу решения приведенных ранее задач, например, найти изображение функции, пользуясь таблицей и свойствами преобразования Лапласа и т. д. Задания третьего уровня сложности позволяют выявить степень осознанного воспроизведения учебного материала и применения изученных понятий и фактов, например, проинтегрировать дифференциальное уравнение первого порядка, исследовать на сходимость числовой ряд и т. д.

Выполнение заданий теста части B предусматривает высокую степень владения материалом, понимание и осмысленность действий, умение анализировать и оценивать результат, творческий подход к решению задач, например, найти множество сходимости функционального ряда или решить задачу Коши операционным методом и т. п.

Авторы надеются, что эта книга окажется удобной и полезной при изучении математики как в аудитории, так и дома, при заочной и очной формах обучения, будет способствовать повышению уровня математической подготовки специалистов, умеющих ставить и решать задачи не только сегодняшнего, но и завтрашнего дня.

О НЕКОТОРЫХ УСЛОВИЯХ РЕГУЛЯРИЗИРУЕМОСТИ ОБЩИХ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИХ ОПЕРАТОРНУЮ ЗАПИСЬ

В.И. Булатов

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь boulatov@bsu.by

Рассмотрим стационарную систему

$$D(p)x(t) = Bu(t), \tag{1}$$

с r-мерным управлением (входом) $u(t)$, n-вектор-траекторией $x(t)$ и m-мерным выходом

$$y(t) = Cx(t). \tag{2}$$

Здесь $p = d/dt$ — оператор дифференцирования; $D(\lambda)$ — $n \times n$ — матрица, элементами которой являются целые функции комплексной переменной λ; B и C — соответственно $n \times r$ и $m \times n$ — матрицы.

Система (1), (2) считается регулярной, если ее характеристическая функция $d(\lambda) = \det D(\lambda)$ является ненулевой. В случае, когда $d(\lambda) \equiv 0$ возникает задача регуляризируемости системы (1), (2) с помощью, например, обратной линейной связи по выходу (2).

Систему (1), (2) будем называть регуляризируемой с помощью обратной линейной связи по выходу (2), если найдется $r \times m$ — матрица Q такая, что замыкание системы (1), (2) управлением $u(t) = Qy(t)$ приводит к регулярной системе

$$(D(p) - BQC)x(t) = 0,$$

т. е. у которой характеристическая функция $\delta(\lambda) = \det(D(\lambda) - BQC)$ является ненулевой.

На основании [1] доказывается следующая

Теорема. *Если* $d(\lambda) \equiv 0$, *то для регуляризируемости системы* (1) *линейной обратной связью по выходу* (2) *достаточно, а в случае одного входа* $(r = 1)$ *или одного выхода* $(m = 1)$ *то и необходимо, чтобы существовало такое* λ_0, *что* $CF(\lambda_0)B \neq 0$, *где* $F(\lambda)$ *— присоединенная (союзная) матрица* [2] *к матрице* $D(\lambda)$.

Литература

1. Булатов В. И. *Условия регуляризируемости общих линейных стационарных систем управления, допускающих операторную запись* // Междунар. конф. «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация». Тез. докл. Минск, 1–5 октября 2013 г. С. 87–88.

2. Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц.* М: 1988.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ НА БАЗЕ МОДЕЛИ ЛОТКИ — ВОЛЬТЕРРА

В.С. Вакульчик [1], А.В. Капусто [2], А.А. Вакульчик [1]

[1] Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Беларусь
[2] Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь
kapusto@tut.by

Классическая модель Лотки — Вольтерра взаимодействия двух популяций, описывается системой уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = (a - by)x, \quad \frac{dy}{dt} = (-c + dx)y,$$

и широко применяется при моделировании различных ситуаций, которые можно трактовать как один из случаев модели «хищник — жертва». Авторы используют данную модель [1] как задачу прикладного содержания, приводящую к системе дифференциальных уравнений, при чтении соответствующего раздела для студентов технических специальностей.

Модель Лотки — Вольтерра имеет ряд модификаций в различных приложениях. Выделенный факт обуславливает актуальность и методическую целесообразность ее применения в учебно-познавательном процессе. Для инженерных специальностей отдельный интерес представляет построение на ее базе модели взаимодействия загрязнения с окружающей средой [2]. В процессе моделирования указанного взаимодействия роль жертвы отводится природе, а роль хищника — загрязнению. Основное предположение изучаемой модели состоит в том, что окружающая среда активно абсорбирует и перерабатывает загрязнение вплоть до некоторого предела. В докладе будут представлены три различных сценария взаимодействия системы: «окружающая среда — загрязнение»; уравнение, описывающее процесс развития загрязнения; основные положения и этапы построения системы дифференциальных уравнений, соответствующей заданной ситуации; рассмотрена модификация модели, учитывающей пороговую величину загрязнения.

Учитывая недостаток лекционного времени, отметим, что использование представленной модели в процессе изучения дифференциальных уравнений студентами технических специальностей следует ограничить только анализом взаимодействия «загрязнение — окружающая среда» и непосредственным построением системы уравнений. Кроме того, сама постановка задачи потенциально может дать направления для организации содержательной студенческой научно-исследовательской работы прикладного характера по моделированию различных видов загрязнения отдельных составляющих экосистемы.

Литература

1. Вакульчик В. С., Капусто А. В., Вакульчик А. А. *Применение модели Лотки-Вольтерра с целью формирования у студентов навыков составления математических моделей реальных процессов* // Тез. докл. XVI Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям «Еругинские чтения — 2013». Ч. 2. Гродно, 13–16 мая 2013 г. С. 88.

2. Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. *Динамические системы и модели биологии.* М.: Физматлит, 2010. 400 с.

ДИДАКТИЧЕСКАЯ ОСНОВА И СТРУКТУРА УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА «СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ. Ч. 1»

В.С. Вакульчик, Ф.Ф. Яско, В.А. Жак, Т.И. Завистовская, А.П. Мателенок

Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Беларусь

kyznetsova@tut.by

Дидактическую основу предлагаемого к обсуждению УМК составляют прикладная направленность, дифференцированный и деятельностный подходы к обучению математике, а также дидактические принципы научности, системности, целостности, доступности, развивающей деятельности. Данный учебно-методический комплекс (УМК) [1] является частью серии учебно-методических пособий, разрабатываемых кафедрой высшей математики УО «ПГУ» по курсу «Высшая математика» для студентов технических специальностей под руководством кандидата педагогических наук, доцента Вакульчик В.С. Теоретические и дидактические принципы разработки таких пособий изложены в ([2], [3]). В представляемом методическом пособии изложены теоретические основы трех разделов курса высшей математики: «Кратные интегралы», «Криволинейные интегралы», «Поверхностные интегралы»; спроектированы основные этапы практических занятий; предложено соответствующее дидактическое обеспечение: графические схемы, информационные таблицы, обучающие задачи, вопросы к экзамену, глоссарий; спроектированы возможности использования информационных технологий для организации обучения математике. Краткие теоретические сведения, список дополнительной литературы, обучающие задачи и методические указания к решению задач, наличие ответов почти ко всем задачам, а также образцов выполнения нулевых вариантов аудиторных и внеаудиторных контрольных работ позволяют организовать самостоятельную мыслительную деятельность студентов по переработке выделенной математической информации, помогают им в логической организации, структурировании, систематизации математических знаний. С помощью УМК обучающийся осознает цели и задачи своей работы, учится распределять время. Студент может сдать тему досрочно или, наоборот, наверстать изучение упущенной информации в познавательном цикле. Студент практически ставится в условия, когда обязательно необходимо овладеть выделенной математической информацией хотя бы на базовом уровне. Экспериментальные результаты исследований показывают, что, если процесс обучения математике строить с использованием научно обоснованно спроектированных УМК в сочетании с жестким, систематическим контролем, то преподаватель получает эффективные средства управления самостоятельной познавательной деятельностью студентов, организации их мыслительной деятельности по овладению и переработке математической информации.

Литература

1. Специальные главы высшей математики: учеб.-метод. комплекс для студентов техн. специальностей. В 2 ч. Ч. 1 / В. С. Вакульчик [и др.]; под общ. ред. В. С. Вакульчик, Ф. Ф. Яско. Новополоцк: ПГУ, 2013. 136 с.

2. Вакульчик В. С. *Дидактические основы проектирования УМК по курсу «Математика» для технических специальностей* // «Информатизация обучения математике и информатике: педагогические аспекты": материалы междунар. науч. конф., посвящ. 85-летию Белорус. гос. ун-та. Минск, 25–28 октября 2006 г. / редкол.; И. А. Новик (отв. ред.) [и др.]. Мн.: БГУ, 2006. С. 41–45.

3. Вакульчик В. С. *Учебно-методический комплекс как средство совершенствования организации самостоятельной работы при обучении математике студентов на нематематических специальностях* // Весн. Магілеўскага дзярж. ун-та імя А. А. Куляшова. Сер. С. Псіхолага-педагагічныя навукі. 2010. № 1(35). С. 70–82.

ПСИХОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО СЦЕНАРИЯ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИМ ДИСЦИПЛИНАМ В ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЯХ

Г.Н. Губаль

Луцкий национальный технический университет, Луцк, Украина galinagbl@yandex.ru

При разработке педагогического сценария обучения необходимо учитывать психологические закономерности усвоения знаний студентами, позволяющие повысить эффективность процесса обучения.

Проектируя сценарий программно-методических комплексов по математическим дисциплинам целесообразно в начале учебной работы создание у студентов мотивации, знакомство с общей структурой учебного материала, поэтапное формирование умственных действий. В ходе изучения материала делаются напоминания, если это необходимо, ранее изученного материала. Кроме того, в конце педагогического сценария студенту предоставляется сравнительный анализ и тесты — учебные элементы, обобщающие пройденный материал. Тесты оценивают степень усвоения материала, стимулируют к знаниям.

При разработке последовательности выполнения примеров сначала планируются к выполнению более абстрактные примеры, далее примеры с графиками, схемами, чертежами и другими графическими иллюстрациями.

Планирование рассмотрения каждого примера осуществлять, разбивая его на части, и подавать поэтапно. При этом имеет место закон тренировки (чем чаще повторяется определенная реакция на ситуацию, тем прочнее усвоение предоставленного материала) и закон эффекта (если связь между ситуацией и реакцией сопровождается состоянием удовлетворенности и понимания, то прочность этой связи возрастает).

Чем на меньшие объемы разбивается учебный материал (желательно до одной типовой ситуации), тем проще ситуации, и поэтому реакция на них чаще может быть верной, что является положительным подкреплением и приводит студента в состояние удовлетворенности.

Обучение студента может вестись индивидуально, со скоростью, наиболее благоприятной для его познавательных способностей.

Использование средств визуализации дает новые графические возможности, благодаря которым студенты могут, анализируя изображения, динамически управлять их содержанием, формой и размерами, добиваясь наибольшей наглядности.

Физиологически логическое мышление связано с левым полушарием человеческого мозга, а образное мышление — с правым полушарием, что имеет прямое отношение к формированию различных способностей. Поэтому использование компьютерных технологий в учебном процессе, активизируя работу правого полушария, ответственного за образно-эмоциональное восприятие информации, способствует более успешному восприятию и запоминанию учебного материала.

Освобождая студента от рутинных вычислений, компьютерные технологии дают возможность существенно экономить время, оставляя больше времени для высокоинтеллектуальной работы, что вызывает у студента чувство удовлетворения и способствует развитию мышления. Воздействие наглядности на интуитивное, образное мышление способствует познанию. Следовательно, применение компьютерных технологий для визуализации при изучении математических дисциплин развивает пространственное мышление путем динамического представления информации, дает возможность наглядно иллюстрировать теоретический и практический материалы, представлять связь между аналитическими выражениями и геометрическими образами, увеличивает скорость передачи информации студенту, повышает уровень ее понимания.

Таким образом, психологические закономерности усвоения знаний студентами, учитываемые при разработке педагогического сценария обучения, способствуют повышению эффективности процесса обучения, развивают мыслительные способности студентов, формируют глубокие знания.

МАТРИЧНАЯ ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И КЛАССИЧЕСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Е.А. Ермолаев

Институт технологии металлов НАН Беларуси, Могилев, Беларусь

Рассматриваются причины создания и методологические следствия матричной теории оператора дифференцирования d/dx, разработанной в [1–3]. Данная теория базируется на применении развитого формализма обобщенной обратной матрицы Дразина. При этом используется уточненное понимание нулевой степени A^0 вырожденной матрицы A, которое не приводит к совпадению A^0 с единичной матрицей. Это и послужило толчком к созданию рассматриваемой теории, так как поставило вопрос об уточненном значении нулевой степени оператора d/dx, у которого, как известно, одно из собственных значений является нулевым.

Не менее важным стимулом для разработки последовательной матричной теории оператора d/dx было то, что он считался определенным не вполне корректно, так как простейшему его дискретному аналогу соответствует квадратная матрица бесконечного порядка. Что же касается построенной теории, то в ней адекватной моделью оператора d/dx служит вырожденная циркулянтная матрица конечного порядка.

Разработанная теория оказалась применимой к периодическим краевым задачам для разностных и обыкновенных дифференциальных уравнений (она дает соответствующий результатам [4, гл. IV] универсальный способ редукции указанных задач к эквивалентным интегральным уравнениям). Обнаружено также, что данная теория учитывает апробированный в физике принцип наблюдаемости, который требует экспериментальной обоснованности применяемых научных понятий.

Построенная теория позволила углубленно рассмотреть некоторые вопросы математического анализа. При этом стало видно, что: а) классический (т. е. традиционный) математический анализ вовсе не дополняет дискретный подход, как многие считают, а содержится в нем как предельный частный случай (подобно тому, как классическая механика содержится в квантовой механике); б) дискретный подход в математическом анализе оказывается самодостаточным, что позволяет рассматривать бесконечность и континуум (непрерывное множество) как приближенные понятия и в итоге устранить ряд связанных с ними проблем (см. [5; 1, п. 2.1.1]).

Другими словами, разработанная матричная теория оператора дифференцирования приводит к выводу, что непрерывный подход в математическом анализе вовсе не является точным, а дискретный — приближенным, так как, если руководствоваться принципом наблюдаемости, должно быть наоборот (при соответствующем шаге дискретизации). Следовательно, перестройка математического анализа с учетом принципа наблюдаемости представляется сейчас и в ближайшем будущем актуальной задачей физико-математических наук.

Литература

1. Ермолаев Е. А. *Ассоциативные алгебры в теории классических полей.* Могилев: БРУ, 2008.

2. Ермолаев Е. А. *Матричная теория оператора дифференцирования в пространстве периодических функций. Ч. 1* (Препринт / Ин-т технологии металлов НАН Беларуси; № 23). Могилев: МГУ им. А. А. Кулешова, 2010.

3. Ермолаев Е. А. *Матричная теория оператора дифференцирования в пространстве периодических функций. Ч. 2* (Препринт / Ин-т технологии металлов НАН Беларуси; № 24). Могилев: МГУ им. А. А. Кулешова, 2011.

4. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.

5. Вяльцев А. Н. *Дискретное пространство — время.* М.: Наука, 1965.

О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ ИЗЛОЖЕНИЯ РАЗДЕЛА «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА» В БНТУ НА ФГДЭ

Е.Л. Ерошевская, В.И. Ерошевская, Л.П. Минченкова

Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь eroshevska@cosmostv.by

Курс высшей математики в университете является основной фундаментальной подготовки инженера. Инструментом приобретения базовых знаний по математике, на наш взгляд может стать учебно-методический комплекс дисциплины и модульно-рейтинговая система оценки знаний, умений и навыков студента, которая позволит обеспечить качество и оценить результаты обучения каждого студента. Особое место среди изучаемых разделов занимает математическая статистика. На современном этапе развития основными задачами математической статистики являются:

1) всестороннее исследование происходящих в обществе глубоких преобразований экономических и социальных процессов на основе научно-обоснованной системы статистических показателей;

2) обобщение и прогнозирование тенденций развития народного хозяйства;

3) своевременное обеспечение надежной статистической информацией всех производственных структур и подразделений.

На первом этапе статистическое наблюдение очень важно научить студентов правильно группировать первичную информацию, определяя по формуле Стерджесса необходимое количество интервалов. В теме «Выборочный метод» от будущего инженера требуется уделить большое внимание построению точечных и интервальных оценок случайной величины. В теме «Корреляционный и регрессионный анализ» необходимо правильно выбрать модель и определить параметры регрессионной модели, исследовать достоверность уравнения регрессии, найти среднюю ошибку аппроксимации и трендовую модель, произвести прогнозирование.

На кафедре «Высшая математика № 3» составлено учебно-методическое пособие «Математическая статистика» для студентов факультета горного дела и инженерной экологии, в котором рассмотрены все важнейшие аспекты изучаемого раздела. Авторами разработан комплекс методического обеспечения, в котором представлены дидактические материалы для проведения аудиторной и внеаудиторной самостоятельной работы по разделу «Математическая статистика». При использовании методического пособия мы реализуем несколько целей: повышение доступности изучаемого материала; сокращение времени, затрачиваемого на достижение конкретных результатов при изучении конкретной темы; глубокого усвоения рассматриваемых вопросов.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СТУДЕНЧЕСКИЕ НАУЧНЫЕ КОНФЕРЕНЦИИ КАК ЭФФЕКТИВНАЯ ФОРМА ПОДГОТОВКИ ИНЖЕНЕРОВ-ГЕОДЕЗИСТОВ

А.В. Капусто, М.А. Хотомцева

Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь

kapusto@tut.by

Преподавание математики для специальности «Геодезия» имеет ряд особенностей по сравнению с другими инженерными направлениями. Это определяется спецификой объектов и задачами будущей профессиональной деятельности — студенты-геодезисты должны уметь определять параметры земного эллипсоида и исходных геометрических дат, уметь формировать плоские системы координат и выполнять преобразования систем координат, решать геодезические задачи на поверхности земного эллипсоида и плоскости геодезической проекции.

Несмотря на достаточно большое количество часов («Математика» как дисциплина обязательного компонента и два специализированных курса) в рамках отведенного времени не удается детально изучить специальные вопросы, которые необходимы студентам при освоении «Высшей геодезии».

Как одну из форм дополнительной работы, позволяющей решить обозначенную задачу, можно предложить участие студентов в работе математической секции на общевузовской студенческой научной конференции. Прежде всего, тематика студенческих научных работ разрабатывается при участии выпускающей кафедры. К процессу подготовки работ и выступлений, как показывает опыт, удается привлечь практически всех студентов, обучающихся на данной специальности. Отметим также, что подход к постановке задач и организации деятельности студентов различен для первого и второго курсов, выступления на конференции проходят в несколько этапов.

Для первокурсников студенческая научная работа имеет реферативный характер с элементами введения в высшую геодезию и ознакомлением с возможностями применения специализированных математических программ. Темы: «Криволинейные координаты в пространстве. Коэффициенты Ламе», «Главные радиусы поверхности эллипсоида. Кривые линии на эллипсоиде», «Измерение на кривой поверхности длин дуг, углов и площадей. Первая квадратичная форма поверхности», «Кривизна линий на поверхности. Вторая квадратичная форма поверхности» и др.

В работах студентов II курса появляется элемент научных исследований. Структура работы следующая: постановка проблемы, анализ литературы, возможные варианты решения проблемы, применение в геодезических исследованиях. Несколько тем из предложенных для студенческой конференции текущего года: «Уравнение Клеро в геодезических приложениях», «Теорема Лежандра в решении сферических треугольников», «Эллиптические интегралы и их использование в высшей геодезии», «Сферические функции в геодезических вычислениях». При подготовке работ приветствуется использование литературы на иностранных языках, поиск информации в специализированных научных журналах.

Особенностью организации выступлений первокурсников является подготовка по каждой теме двух докладов: коллективом «докладчиков» и группой «оппонентов». После выступлений путем голосования всех студентов параллели определяют более наглядную и информативную работу. На выступления студентов II курса обязательно приглашаются преподаватели выпускающей кафедры и студенты-старшекурсники. Доклады проходят в форме презентаций с привлечением мультимедийных средств.

Участие в подготовке научной работы позволяет не только решить ряд актуальных задач вовлечения студентов в процесс обучения (формирование навыков постановки задач, работа с литературой, развитие логического мышления и способности к самостоятельной исследовательской деятельности), но и сделать определенный вклад в формирование будущего профессионала.

ТЕОРЕМА ФУКСА (ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ 2-ГО ПОРЯДКА) И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ПОДВИЖНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В.И. Мататов, Н.А. Гуринович, О.А.Марченко

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

gyrinyf@list.ru, olga–11@mail.ru

Рассмотрим систему вида

$$\frac{dx}{dt} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 xy, \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 x^2 + \beta_4 xy + \beta_5 y^2, \tag{2}$$

$$\frac{dz}{dt} = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + \gamma_4 x^2 + \gamma_5 xy + \gamma_6 xz + \gamma_7 y^2 + \gamma_8 yz + z^2, \tag{3}$$

где $\alpha_0, \ldots, \gamma_8$ — постоянные параметры, $t \in C$, $x, y, z \in \widehat{C} = C \cup \{\infty\}$.

От системы (1), (2) переходим к нелинейному ДУ второго порядка

$$x'' = \frac{\alpha_4 + \beta_5}{\alpha_2 + \alpha_4 * x} * (x')^2 + F_1(x) * (x') + F_2(x), \tag{4}$$

где F_1, F_2 — рациональные функции относительно x. Сравнивая ДУ (4) с уравнением $x'' = 2x^3$, получаем условие полярности подвижных особых точек для функции $x = x(t)$. Разложение в ряд Лорана для функции y получим, используя формулу $y = (x' - \alpha_0 - \alpha_1 x - \alpha_3 x^2)/(\alpha_2 + \alpha_4 * x)$ (см (1)).

С помощью замены $z = -\psi'/\psi$, уравнение (3) сводится к линейному ДУ второго порядка относительно функции ψ. Это дает возможность воспользоваться теоремой Фукса для линейных уравнений. В результате, будем иметь условия полярности подвижных особенностей системы (1)–(3).

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ «СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ»

Р.А. Мельников

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец, Россия

romanelets2011@yandex.ru

Переход высшего профессионального образования (ВПО) в России на многоуровневую систему подготовки кадров породил немало вопросов, касающихся как содержательного компонента методической системы обучения бакалавров и магистров, так и методической ее составляющей.

До перехода на ФГОС дисциплина «Специальные функции» относилась к национально-региональному (вузовскому) компоненту блока ОПД (Общепрофессиональные дисциплины) ГОС ВПО, предназначенного для подготовки специалистов по направлению 010200 — Прикладная математика и информатика со специализацией «Математическая физика». Сейчас ее включают лишь как дисциплину по выбору в учебные планы подготовки магистров, обучающихся по направлению 010400.68 — Прикладная математика и информатика (Математическое моделирование).

Но подготовка магистров подразумевает другой, более высокий уровень компетентности выпускников. В связи с этим необходим пересмотр как содержания дисциплины «Специальные функции», так и методики ее преподавания.

Изменения в содержании должны соответствовать смене вектора подготовки с направления «Математическая физика» на «Математическое моделирование», так как произошло явное расширение сферы приложений специальных функций.

Основная цель изучения дисциплины «Специальные функции» — расширение класса функций, с помощью которых можно осуществлять математическое моделирование самых разнообразных реальных процессов.

В содержании дисциплины можно выделить три основных раздела.

1. Некоторые специальные интегральные функции (интегралы Эйлера первого и второго рода; интеграл вероятностей (интеграл ошибок); интегральный синус, интегральный косинус; интегральная показательная функция, интегральная логарифмическая функция; интегралы Френеля).

2. Цилиндрические функции (функции Бесселя первого рода с целым и нецелым индексом; функции Бесселя второго рода (функции Вебера, функции Неймана); функции Бесселя третьего рода (функции Ханкеля); модифицированные цилиндрические функции).

3. Ортогональные полиномы (многочлены Лежандра, многочлены Эрмита, многочлены Лагерра, многочлены Чебышева).

При изучении первого раздела основной акцент должен быть сделан на освещение свойств представленных функций, их графиков, приложений в других разделах математики. Для большинства из них можно получить изображение по Лапласу, что позволит пополнить таблицу оригиналов и изображений.

Изучая второй раздел, следует акцентировать внимание на свойствах цилиндрических функций, их применении при решении задач о колебании круглой мембраны, на возможность операционного метода решения дифференциальных и интегральных уравнений, содержащих функции Бесселя.

Последовательность изучения ортогональных многочленов может проходить по следующей схеме: определение на основе понятия «производящая функция»; весовая функция, определение по формуле Родрига; дифференциальное уравнение, решением которого является соответствующий полином, ортогональность и нормировка, рекуррентные формулы.

При возможности (зависит от наличия достаточного числа аудиторных часов) можно включить дополнительно разделы: «Гипергеометрические функции», «Сферические функции», «Эллиптические функции».

ИЗУЧЕНИЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ КАК ФАКТОР ИННОВАЦИОННОГО МЫШЛЕНИЯ

А.В. Метельский, Н.И. Чепелев

Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь
ametelskii@gmail.com

Существо инновационных технологий образуют математические модели, позволяющие применять компьютеры для поиска оптимальных решений и для управления технологическими процессами. Поэтому совершенствование математической подготовки современных инженеров — главный фактор создания и использования инновационных технологий. Это обстоятельство делает актуальным обсуждение методических принципов преподавания математики в техническом университете, определяющих формирование инновационного мышления у будущих специалистов.

Во все времена основу инженерной подготовки составляло усвоение знаний и логики фундаментальных наук, в первую очередь — математики. Занятия математикой развивают системный подход к проблемной ситуации, аналитическое и алгоритмическое мышление, а также творческую интуицию — качества необходимые специалисту, способному эксплуатировать и генерировать наукоемкие технологии. Поэтому процесс изучения математики по своей сути является адекватным тренингом для воспитания инновационного мышления.

Широкие возможности для воспитания инновационного мышления предоставляет теория дифференциальных уравнений. Она служит примером инновационного применения методов математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии для получения принципиально новых знаний об объектах, описываемых дифференциальными уравнениями, и подтверждает прикладную направленность математических знаний в целом. Это актуально для повышения у студентов мотивации к изучению математики. Процесс изучения математики делается увлекательным через проблемное изложение учебного материала, через рассмотрение ярких запоминающихся примеров, содержащих неочевидные выводы вопреки «здравому смыслу», таких, как исследование Вышнеградского в 19 в. по регуляторам паровых машин.

Теория дифференциальных уравнений дает представление об универсальности языка математики и всеобщности ее приложений, как при разработке технологий, так и при изучении природных и социально-экономических явлений. Основные задачи теории дифференциальных уравнений дают возможность продемонстрировать все этапы научно-технического творчества: от постановки задачи и вывода уравнений, описывающих изучаемый физический процесс, до анализа его качественной сути, описания различных режимов работы и выявления скрытых эффектов на базе построенной модели.

В воспитании инновационного мышления и мотивации к изучению матемаки существенно участие выпускающих кафедр. Студенты должны убеждаться в продуктивности математики для их профессиональной деятельности при изучении специальных дисциплин, при выполнении курсовых и дипломных проектов. Поэтому важно сотрудничество с выпускающими кафедрами на основе принципа непрерывной математической подготовки. Непрерывность реализуется через чтение специальных курсов высшей математики, через привлечение математиков к курсовому и дипломному проектированию, к проведению совместных исследований и научно-технических конференций с участием студентов.

Весомый фактор воспитания инновационного мышления будущих специалистов — это личность преподавателя, его педагогическое искусство и мастерство, основанные на собственных научных исследованиях и собственной научной компетенции. Реферативная и научно-исследовательская работа студентов по тематике теории дифференциальных уравнений расширяют представление о математике, как инструменте инновационного творчества, и тем самым стимулируют к изучению математики.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Н.А. Микулик

Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь
mathematics1@bntu.by

На современном этапе развития науки, техники и инновационных технологий инженер должен обладать не только профессиональными знаниями в своей отрасли, но и творческими, исследовательскими навыками, способностями применять инновационные технологии при решении задач, выдвигаемых практикой.

Возможность получения основ таких способностей предоставляется будущему инженеру при изучении курса математики в техническом университете.

В настоящее время, благодаря наличию компьютеров и программного обеспечения к ним, в науке и технике широко используются математические и механико-математические модели исследуемых реальных объектов. Основой математических моделей являются дифференциальные уравнения (ДУ) и их системы. В связи с этим в курсе математики технического университета студентам нужно хорошо усвоить раздел «Дифференциальные уравнения». Постоянно на лекционных и практических занятиях преподавателям обращать внимание студентов на широкое применение ДУ в научных исследованиях, а также при проектировании новых машин и приборов. Приводить конкретные примеры из жизни. Показать, что различные явления часто описываются однотипными ДУ, например, рост дерева, рост населения земли, рост валового продукта и т.д.

Лектору следует обосновать необходимость знания студентами типов ДУ и аналитических методов их решений, несмотря на возможность решения их на компьютере, так как аналитические методы точные и могут быть использованы для проверки правильности их решения на компьютере. С другой стороны процесс определения студентом вида ДУ, метода его решения и само решение способствует развитию творческого мышления и вызывает чувство удовлетворения от полученного результата.

На учебных занятиях по ДУ наряду с решением известных уравнений, нужно решать задачи на составление уравнений и составление математических моделей динамических систем. Это вызывает заинтересованность студентов в освоении материала и его применении при решениии практических задач.

Преподавателям следует учитывать, что некоторые студенты считают, что производственную задачу можно без трудностей решить на компьютере, используя известные комплексы программ без знания математики. Поэтому преподаватель постоянно должен разъяснять, что для решения практической задачи необходимо ее сначала правильно сформулировать,затем составить математическую модель в виде зависимостей, входящих в нее параметров, часто эти зависимости выражаются в виде ДУ или их систем, затем определить значения параметров, начальные и граничные условия и тогда приступить к использованию компьютера.

О ВВЕДЕНИИ ПОНЯТИЯ ФУНКЦИИ В КУРСЕ «ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИКУ»

М.И. Наумик

Витебский государственный университет им. П. М. Машерова, Витебск, Беларусь

naumik@tut.by

Для студентов педагогических специальностей в университете на первом курсе в первом семестре читается курс «Введение в математику». В этом курсе рассматриваются бинарные отношения. Понятие функции (отображения), которое является основным понятием математики, вводится через бинарное отношение. Аналогично через бинарные отношения вводятся понятия: композиция функций, инъективные функции, обратимые функции, сюрьективные функции, биективные функции.

На кафедре алгебры и методики преподавания математики в нашем университете составлены упражнения на данную тему для того чтобы студенты первого курса могли усвоить эту тему. Упражнения составлены так, что студенты по данной теме получают индивидуальные задания на дом и отчитываются перед преподавателем о выполнении данного задания. По нашему мнению, это говорит о том, что студенты усваивают данную тему хорошо.

Аналогичные задания составлены по всему курсу «Введение в математику», т. е. студенты педагогических специальностей по всему курсу «Введение в математику» получают индивидуальные задания и отчитываются перед преподавателем.

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КУРСЕ «ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ»

Е.В. Никулина

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия
lena.vnik@gmail.com

Более десяти лет в Ярославском государственном университете им. П. Г. Демидова на 4 курсе математического факультета читается специальный курс «Теория массового обслуживания» (далее — ТМО). Он преследует несколько целей. Во-первых, познакомить учащихся с основными понятиями и идеями ТМО. Во-вторых, показать студентам-старшекурсникам одно из возможных практических применений полученных теоретических знаний по математике. В-третьих, спецкурс призван обобщить имеющиеся у студентов сведения из различных разделов математики. Последнее подтверждается тем, что рассматриваемая дисциплина является интеграционной и опирается на имеющиеся к 4 курсу знания у студентов по теории вероятностей, дифференциальных уравнений, математическому анализу, программированию. Более подробно остановимся на взаимосвязи ТМО и теории дифференциальных уравнений.

В первой половине спецкурса ТМО (всего курс рассчитан на 34 аудиторных часа лекционных занятий и 17 часов практических) рассматриваются системы массового обслуживания (далее — СМО), работающие не в стационарном режиме. В зависимости от характеристик исходных СМО их работа описывается различными системами дифференциальных уравнений. Неизвестными функциями в них являются вероятности $P_k(t)$ ($P_k(t)$ — вероятность того, что в момент времени t в системе находится k заявок). Выбор начальных условий объясняется тем фактом, что процесс работы СМО начинается в тот момент, когда система пуста. В курсе подробно рассматриваются следующие СМО [1]:

1) системы с потерями, без очереди (системы дифференциальных уравнений, управляющих изменением вероятностей состояний СМО во времени, конечны);

2) системы с ожиданием, без ограничений на длину очереди, время пребывания заявки в очереди и в системе (описываются бесконечными системами дифференциальных уравнений);

3) замкнутые системы (системы дифференциальных уравнений конечны).

Найденные из систем уравнений значения вероятностей $P_k(t)$ позволяют вычислить практически все характеристики, необходимые для оптимизации систем массового обслуживания: среднее число заявок в СМО, среднее число занятых приборов, среднюю длину очереди, вероятность того, что система пуста, что все приборы заняты, что занят хотя бы один прибор, что поступившая заявка получит отказ и т.п.

На занятиях спецкурса студенты выводят системы дифференциальных уравнений для общих случаев СМО и решают достаточное количество конкретных систем, проводят анализ и делают выводы на основании полученных данных. В процессе освоения теоретической части совместно с преподавателем они изучают так называемый процесс чистого размножения, когда, по существу, рассматривается лишь входной поток заявок в СМО, который описывается бесконечной системой дифференциальных уравнений и в результате приводит к играющему очень важную роль в ТМО пуассоновскому входному потоку заявок.

Литература

1. Кузнецова В. А., Никулина Е. В. *Введение в теорию массового обслуживания: Текст лекций.* Ярославль: ЯрГУ, 2005. 60 с.

УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА С УЧЕТОМ ЧЛЕНОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ ПО ВРЕМЕНИ

В.М. Овсянников

Университет машиностроения МАМИ, Москва, Россия

Формула Гаусса — Остроградского применима только к непрерывным функциям P, Q, R, обладающим непрерывными производными по координатам x, y, z. Однако в газовой динамике эти условия в точности не выполняются, в результате чего происходит потеря членов высокого порядка малости, ответственных за устойчивость и неустойчивость течения, генерацию волн давления. В 1752 г. Эйлер геометрическим путем вывел уравнение неразрывности для течения несжимаемой жидкости. Его геометрические построения для двухмерного плоского течения можно пояснить так. В качестве контрольной фигуры выбирается квадрат единичной площади, расположенный в первом квадранте, имеющий одну из вершин в начале координат. Вдоль оси X делается растяжение единичного квадрата на величину $t\,\partial u/\partial x$, где u — скорость течения жидкости вдоль оси X, t — время деформации квадрата, а затем вдоль оси Y делается сжатие или растяжение на величину $t\,\partial v/\partial y$, где v — скорость течения вдоль оси Y. При этом, вблизи угловой точки появляется малый прямоугольник, площадь которого зависит одновременно от деформаций вдоль оси X и вдоль оси Y, и пропорциональна квадрату времени t^2. Точное условие сохранения площади после деформаций требует приравнивания нулю трех площадей, получившихся от деформации вдоль оси X, вдоль оси Y и одновременной деформации вдоль обеих осей.

На порах становления гидрогазодинамики Эйлер пренебрег квадратичным членом, учитывающим двойные деформации. Возникает вопрос, в каком месте вывода уравнения неразрывности с использованием формулы Гаусса — Остроградского пренебрегают двойными деформациями. Анализ получения уравнения неразрывности вида $\operatorname{div} V = 0$ показал, что существуют две формы формулы Гаусса — Остроградского. Точная формула без направляющих косинусов (4) из раздела 651 третьего тома учебника Г. М. Фихтенгольца и формула (5) с направляющими косинусами. Формула (4) является точной, так как получена трехкратным взятием определенного интеграла. При замене функций P, Q, R на компоненты скорости и придания им смысла проникновения жидкой частицы внутрь контрольной фигуры или непроникновения оказывается, что введение направляющих косинусов при неучете синусов означает привлечение в формуле (5) дополнительной «гипотезы прилипания» жидкости, сводящейся к занулению тангенциальной к границе компоненты скорости. Таким образом, введение в формулу Гаусса — Остроградского (5) направляющих косинусов является способом пренебрежения двойными деформациями жидкости. Учебник Г.М.Фихтенгольца не делает этих замечаний и не отмечает потери точности формулы (5) по сравнению с формулой (4) в условиях гидродинамических течений. Неточность применения формулы (5) можно увидеть и в появлении разрывов в тангенциальной к границе компоненте скорости и ее продольной производной, что противоречит условиям использования формулы Гаусса — Остроградского.

ЗНАЧЕНИЕ И МЕСТО БАЗОВЫХ ЗАДАНИЙ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКОГО ВУЗА

Н.А. Подкопаева

Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь
natalia.podkopaeva@gmail.com

Курс математики для студентов младших курсов инженерных специальностей является одним из основных как по количеству часов, так и по значимости в учебном процессе. Прежде всего, знания по математике — это база для освоения специальных дисциплин. Кроме того, математика — это «гимнастика ума», играющая важную роль в развитии логического мышления и интеллекта в целом.

Существуют объективные факторы, препятствующие успешному усвоению курса математики: пробелы в базовом образовании по элементарной математике; большой объем курса, который необходимо усвоить за достаточно короткий промежуток времени; отсутствие навыков самостоятельной работы. Организация учебного процесса и его методическое обеспечение должны наилучшим образом способствовать решению указанных проблем.

Основными материалами методического обеспечения курса математики являются комплекты заданий по практической части каждого из разделов. Автор считает обязательным наличие в комплектах заданий большого количества базовых задач каждого раздела. К базовым задачам относятся задачи поясняющего характера, требующие для своего решения применения конкретной формулы или утверждения изучаемой темы. Базовые задачи иллюстрируют или теорему раздела, или свойство, или формулу. Такие задачи предназначены для выработки навыков использования математических терминов, пояснения символов. В ходе решения базовых задач выявляются теоретические моменты, которые оказались непонятными студентам при работе над лекционным курсом, а также проясняется смысл букв и символов, используемых на лекции.

Для успешного усвоения каждой темы раздела в комплекте заданий должно присутствовать достаточное количество однотипных базовых задач. Прежде, чем решать задачи, требующие творческого подхода, более глубоких математических знаний и сведений, следует убедиться, что студенты научились решать задачи «в одно действие». Индивидуальная работа преподавателя со студентами заключается в данном случае в том, чтобы каждый студент получал задания, соответствующие его уровню подготовки по данному разделу. Практические занятия должны быть построены таким образом, чтобы каждый студент получал посильные для него задания. Студенты, для которых математика является сложным для изучения предметом, не должны терять надежду справиться с трудностями обучения. Наиболее подготовленная часть аудитории не должна потерять интерес к занятиям из-за отсутствия задач соответствующего уровня сложности.

Для этого предлагается перед началом изучения каждой темы раздела обеспечивать студентов комплектами заданий, содержащими как базовые задачи, так и задачи, требующие творческого подхода. В этих комплектах должно быть четкое разделение задач по уровням сложности для того, чтобы каждый студент мог самостоятельно регулировать качество и скорость усвоения материала. Контроль каждого раздела читаемого курса в обязательном порядке содержит базовые задачи из комплектов заданий. Их решение является необходимым условием получения положительной оценки при проведении контроля по разделу.

Для практического использования автором составлены комплекты базовых заданий по всем темам разделов «Векторы», «Аналитическая геометрия», «Введение в математический анализ», «Дифференцирование функции одной переменной», «Функции нескольких переменных», «Неопределенный интеграл», «Определенный интеграл и его приложения».

ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА В СТРУКТУРЕ ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ

З.Н. Примичева, Т.А. Романчук

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь

primicheva@mail.ru, romanchuk-09@mail.ru

Современный период развития общества характеризуется сильным влиянием на него информационных технологий (ИТ), которые проникают во все сферы человеческой деятельности, обеспечивают распространение информационных потоков в обществе, образуя глобальное информационное пространство. Неотъемлемой и важной частью этих процессов является информатизация образования, которая представляет собой научно-практическую деятельность, направленную на применение компьютерных технологий сбора, хранения, обработки и распространения информации, обеспечивающую систематизацию имеющихся и формирование новых знаний в сфере образования для достижения психолого-педагогических целей обучения и воспитания.

К средствам информатизации относятся различные компьютерные средства оптимизации организационно-управленческой деятельности учреждений образования, средства методического и контрольно-измерительного предназначения, средства информационного обеспечения вне учебной и научно-исследовательской деятельности, инструментальные средства.

Можно рассмотреть следующую классификацию компьютерных программ: 1) демонстрационные программы; 2) обучающие программы; 3) программные средства тестирования и контроля уровня знаний (положительным моментом является объективизация оценки знаний, отсутствие психологического воздействия преподаватель-студент); 4) программные средства для математического моделирования; 5) тренажеры; 6) электронные учебники, информационно-справочные системы.

Преимуществами использования ИТ являются: 1) интернационализация процесса обучения, проявляющаяся в возможности использования информации независимо от географического расположения ВУЗа и его национальной принадлежности, образовании общего электронного учебного пространства; 2) гибкость формирования и предоставления учебной программы с точки зрения ее содержания; наглядность учебного материала, который может быть представлен в различных вариантах, вплоть до использования трехмерных изображений; 3) возможность немедленного доступа к информации, необходимой для конкретной работы, позволяет повысить производительность студента; 4) возникновение новых отношений, где и преподаватель, и обучаемый выступают в роли субъектов учебно-воспитательного процесса, а их взаимоотношения складываются на основе педагогики сотрудничества, что способствует гуманизации образования.

Однако существуют и некоторые трудности на пути информатизации образования: разработка научно-педагогических основ не успевает за развитием компьютерной техники и программно-аппаратных средств; обучение не связано единым замыслом в рамках технологического подхода к обучению, а направлено на достижение «узких» учебных целей: ускорение усвоения учебного материала, «натаскивание» по конкретным темам, демонстрацию трудновоспроизводимых процессов. Все это приводит к разрыву между потенциальными и реальными возможностями информатизации учебного процесса в ВУЗах.

Стоит отметить и необходимость непрерывного повышения квалификации преподавателей, развития их компьютерной грамотности, овладения иностранными языками; работы педагогических семинаров, обмена мнениями и организации широкомасштабных дискуссий по вопросам совершенствования работы в новых технологических условиях, что несомненно обеспечит реализацию тех богатейших возможностей по совершенствованию учебного процесса, которыми обладают информационные технологии.

О ПРОБЛЕМАХ И ПЕРСПЕКТИВАХ ПРЕПОДАВАНИЯ ДИСЦИПЛИН IT-СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ НА АНГЛИЙСКОМ ЯЗЫКЕ В ГРГУ

И.Б. Просвирнина

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
i.prosvirnina@grsu.by

В ГрГУ им. Я. Купалы на факультете математики и информатики на протяжении трех последних лет ведется преподавание на английском языке блока дисциплин для студентов специальностей «Программное обеспечение информационных технологий» и «Управление информационными ресурсами».

Эта образовательная услуга оказалась востребованной у русскоязычных студентов по ряду причин. Во-первых, изучение дисциплин специализации на английском языке повышает академическую мобильность студентов. В частности, студенты получают возможность проходить летнюю практику в европейских университетах и международных компьютерных компаниях. Во-вторых, IT-компании заинтересованы в специалистах, владеющих английским языком и способных работать в англоязычных командах. В-третьих, у студентов на начальном этапе специализации появляется реальная возможность следить за состоянием и развитием той или иной IT-отрасли и активно использовать передовые технологии в своих разработках. Нет языкового барьера у таких студентов и для участия в образовательных программах «Приглашенный профессор» и международных вебинарах.

Перед преподавателем, ведущим курс на английском языке, возникает ряд проблем, с которыми он не сталкивался ранее. Речь не идет о степени владения английским языком. Априори владение языком должно быть безукоризненным. Речь здесь идет об интеграции в англоязычное образовательное пространство при преподавании той или иной дисциплины. Стиль изложения IT-дисциплин, подходы к их преподаванию, требования к обязательному минимуму содержания учебных программ и компетенциям по учебным дисциплинам варьируются в РБ и в европейских университетах.

Следует изучать и применять передовые технологии преподавания IT-дисциплин, работая в общем европейском образовательном пространстве. Только в этом случае у эксперимента, о котором идет речь, будет логическое развитие, которое, возможно, проявится в экспорте образовательных услуг.

Анализируя образовательный стандарт 4-летнего срока обучения по дисциплине «Дискретная математика и математическая логика», хочу отметить соответствие содержания стандарта современному состоянию дисциплины, логическую цельность курса и его практико-ориентированную направленность. Преподавание дисциплины «Дискретная математика и математическая логика» естественно построить, иллюстрируя основные конструкции и алгоритмы многочисленными современными приложениями, что отвечает стилю преподавания этого курса в европейском образовательном пространстве. Управляемую самостоятельную работу студентов, с моей точки зрения, следует организовать по двум направлениям. Во-первых, я предлагаю студентам по каждому разделу дисциплины пакет индивидуальных заданий, выполнение которых обязательно и является необходимым условием для получения зачета по дисциплине. Во-вторых, в рамках управляемой самостоятельной работы студентов я предлагаю разработку проектов, выполнение которых знакомит студентов с современным состоянием дисциплины, ее приложениями. При защите проектов студенты имеют возможность отстаивать свою точку зрения, вступать в полемику и вести дискуссию на английском языке. Этот опыт неоценим для дальнейшей профессиональной карьеры и мотивирует в том числе и изучение английского языка.

В докладе я представляю структуру и содержание электронного учебно-методического комплекса, который мной используется при преподавании на английском дисциплины «Дискретная математика» для специальностей «Программное обеспечение информационных технологий» и «Управление информационными ресурсами».

Литература

1. Rosen K. H. *Discrete Mathematics and Its Applications.* The McGraw-Hill Companies, 2012.

О ТИПОВОЙ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ДИСЦИПЛИНЫ «ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА»

Г.П. Размыслович, А.В. Филипцов

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

razmysl@bsu.by, filiptsov@bsu.by

В соответствии с приказом Министерства образования Республики Беларусь в 2013-2014 учебном году произошел переход на дифференцированные сроки обучения. При этом срок обучения на первой ступени высшего образования по специальностям 1-31 03 03 «Прикладная математика (по направлениям)», 1-31 03 04 «Информатика», 1-31 03 05 «Актуарная математика», 1-31 03 06 «Экономическая кибернетика (по направлениям)» и 1-98 01 01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)» стал составлять 4 года. В связи с этим на факультете прикладной математики и информатики БГУ были разработаны образовательные стандарты указанных специальностей и начата разработка новых типовых программ. На кафедре высшей математики БГУ была разработана типовая учебная программа дисциплины «Геометрия и алгебра» для специальностей «Прикладная математика», «Информатика», «Актуарная математика» и направлений специальностей «Экономическая кибернетика (математические методы и компьютерное моделирование в экономике)», «Компьютерная безопасность (математические методы и программные системы)».

В соответствии с новыми типовыми учебными планами специальностей и направлений специальностей дисциплина «Геометрия и алгебра» преподается теперь в первом и втором семестрах и учебная программа предусматривает для изучения дисциплины всего 524 академических часа, в том числе 272 часа аудиторных занятий: лекции — 136 часов, лабораторные и практические занятия — 136 часов.

Поскольку предмет «Геометрия и алгебра» является базовым математическим курсом и методы, излагаемые в курсе геометрии и алгебры, используются при изучении большинства математических дисциплин, то основными целями курса являются:

— во-первых, дать глубокие знания по одному из основных разделов курса высшей математики, имеющего тесную связь с многочисленными прикладными проблемами и богатые приложения;

— во-вторых, создать фундамент, необходимый для усвоения материала дисциплин изучаемых в дальнейшем, таких как «Дифференциальные уравнения», «Вычислительные методы алгебры», «Методы оптимизации» и др.

Отметим, что новая программа включает в себя пояснительную записку, примерный тематический план, содержание учебного материала и информационно-методическую часть.

В докладе авторы предлагают более детально ознакомить участников конференции с основными положениями указанной программы и ее внедрением в учебный процесс

Литература

1. Размыслович Г. П., Ширяев В. М., Филипцов А. В. *О типовых программах курсов «Геометрия и алгебра» для высших учебных заведение для специальностей G1-3103 — Прикладная математика, G1-3104 — Информатика, G1-3105 — Актуарная математика, G1-3106 — Экономическая кибернетика* // Тез. докл. IX Междунар. матем. конф. г. Гродно. 3–7 ноября 2004 г. Ч. 3. С. 211–212.

ТЕКСТОВАЯ ЗАДАЧА КАК ОБЪЕКТ ИЗУЧЕНИЯ В КУРСЕ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Е.Л. Старовойтова, Т.А. Старовойтова

Могилевский государственный университет им. А. А. Кулешова, Могилев, Беларусь

stelle@tut.by

В математической и методической подготовке будущих учителей математики особое место занимает умение решать задачи. Оно развивается и совершенствуется в курсах элементарной математики, методики преподавания математики, а также при проведении занятий спецкурса по соответствующей тематике. В представляемом сообщении рассмотрены вопросы решения текстовых задач арифметическими средствами в курсе элементарной математики.

Текстовые задачи всегда занимали особое место в школьном обучении математике. С их помощью учащиеся получают опыт работы с величинами, постигают взаимосвязи между ними, получают опыт применения математики к решению практических и прикладных задач, способствуя развитию их логического мышления, речи и других качеств продуктивной учебной дея-тельности. Особенности текста задачи могут определить ход мыслительного процесса при ее решении, оказывая положительное влияние на умственное развитие учащихся. Поэтому важно, чтобы учитель имел глубокие представления о текстовой задаче, ее структуре и способах решения, знал и умел применять различные приемы анализа ее содержания, владел приемами поиска решения и приемами проверки решения, а также был готов реализовать другие положения теории решения текстовых задач.

При арифметическом способе их решения ответ на вопрос задачи находится в результате выполнения арифметических действий над числами, что развивает смекалку и сообразительность, вырабатывает у учащихся умение ставить вопросы, отвечать на них, то есть развивает естественный язык, готовит учащихся к дальнейшему обучению. Арифметические способы решения позволяют развивать умение анализировать задачные ситуации, строить план решения с учетом взаимосвязей между известными и неизвестными величинами, истолковывать результат каждого действия в рамках условия задачи, проверять правильность решения с помощью составления и решения обратной задачи. Арифметические способы решения текстовых задач приучают учащихся к первым абстракциям, позволяют воспитывать логическую культуру, могут способствовать созданию благоприятного эмоционального фона обучения, развитию у школьников эстетического чувства применительно к решению задачи и изучению математики, вызывая интерес сначала к процессу поиска решения задачи, а потом и к изучаемому предмету.

Текстовые задачи в большинстве своем являются прикладными (практическими) задачами и на их примере удобно проиллюстрировать метод математического моделирования как метод обучения. Текстовые задачи и их решение способствует осознанию учащимися межпредметных связей между учебными предметами, а эффективным средством реализации таких связей в учебном процессе являются межпредметные текстовые задачи. Они характеризуется как познавательные задачи, включают ученика в деятельность по установлению и усвоению связей между структурными элементами учебного материала и умениями по разным учебным предметам. Например. «Рабочая пчела за минуту облетает 12 цветков, а это значит, что за рабочий день она посетит не менее 7200 цветков. Приблизительные подсчеты подсказывают, что пчелы одной семьи в день опыляют не менее 360 миллионов цветков. Сколько цветков опыляют пчелы одной семьи за целое лето?». Или: «Одним из самых эффективных средств от кашля является микстура из корня алтея. Для приготовления микстуры необходимо измельченный корень алтея смешать с водой в отношении по массе $13 : 460$. Сколько воды необходимо добавить к двум чайным ложкам измельченного корня алтея для приготовления микстуры, если в одной чайной ложке содержится 3,25 г корня алтея?»

Задачи такого содержания эффективны при отработке различных аспектов теории и методики решения текстовых задач. Среди них выделяются такие, как основные приемы поиска плана решения, формы записи решения, приемы проверки правильности решения, основные типы арифметических задач, решение текстовой задачи с развернутым объяснением и др.

ПРОБЛЕМЫ ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ В ВУЗЕ

Г.В. Федяченко

Могилевский государственный университет им. А. А. Кулешова, Могилев, Беларусь
Fedyachencko.galka@yandex.by

Одной из основных задач высшего образования является формирование творческой личности специалиста, способного к самообразованию, саморазвитию, инновационной деятельности. Преподаватели должны научить студента учиться самостоятельно, приобретать знания из различных источников информации самостоятельным путем. Необходимо перевести студента из пассивного потребителя знаний в активного человека, умеющего сформулировать проблему, проанализировать пути ее решения, найти оптимальный результат и доказать его правильность.

В этой связи все большее значение приобретает самостоятельная работа студентов. Самостоятельная работа позволит студенту сформировать общекультурные и профессиональные компетенции и получить углубленные знания и навыки для успешной профессиональной деятельности.

Основоположниками исследования самостоятельной учебной деятельности учащихся являются Б. П. Есипов, М. Н. Скаткин, П. И. Пидкасистый. Учебная деятельность протекает наиболее успешно там, где она максимально мотивирована. Правильно сформированные мотивы, по мнению многих авторов (А. Н. Леонтьева, А. К. Маркова, Г. В. Рогова), имеют большое значение при формировании положительного отношения к учению, которое в свою очередь способствует формированию познавательного интереса. В связи с этим возникает новая задача — проведение целенаправленной работы по созданию на кафедре достаточного числа специальных заданий, которые были бы интересны по содержанию и, одновременно, позволяли бы студентам работать самостоятельно.

Эффективность выполнения внеаудиторной самостоятельной работы во многом зависит от четко сформулированной педагогом цели задания. При определении заданий внеаудиторной самостоятельной работы необходимо исходить из содержания раздела программы «Основные требования к знаниям и умениям». Каждое внеаудиторное задание должно стать логическим звеном в системе заданий для самостоятельной работы, главный итог которых — формирование компетенций очерченных программой.

При выполнении любого вида самостоятельной работы студент должен пройти следующие этапы:

— определение цели самостоятельной работы;

— конкретизация познавательной (проблемной или практической) задачи;

— самооценка готовности к самостоятельной работе по решению поставленной или выбранной задачи;

— выбор адекватного способа действий, ведущего к решению задачи (выбор путей и средств для ее решения);

— планирование (самостоятельно или с помощью преподавателя) самостоятельной работы по решению задачи;

— реализация программы выполнения самостоятельной работы;

— осуществление в процессе выполнения самостоятельной работы управленческих актов: контроль над ходом самостоятельной работы, самоконтроль промежуточных и конечного результатов работы, корректировка на основе результатов программ выполнения работы, устранение ошибок и их причин.

Внеаудиторная самостоятельная работа — это познавательная деятельность студента, которая переводит студента в субъект обучения; формирует механизм самоуправления в профессиональной направленности; опосредованно управляется преподавателем; направлена на совершенствование профессиональных знаний и умений, а также на развитие профессиональных качеств личности будущего специалиста.

КОМБИНИРОВАННЫЕ МЕТОДЫ В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ

Т.И. Чепелева

Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь

tchepeleva@gmail.com

В условиях инновационного развития экономики следует совершенствовать и высшее образование. Преподавание математики в вузе – это лекционные и практические занятия, контрольные работы, типовые расчеты, управляемая самостоятельная работа, домашние задания, экзаменационная работа. Совершенствование учебного процесса – это основная задача каждого преподавателя. Каждый семестр внедряются какие-то новые методы, подходы в преподавании математики, поскольку сам студент так же с каждым годом меняется в ту либо другую сторону. Возможно он слабее знает школьную математику, зато он великолепно владеет информационными технологиями. Поэтому презентационные лекции особо нравятся студентам, если на слайдах информации не слишком много, и она изложена ярко и выразительно.

Используются комбинированные методы изложения лекционного материала. Отдельные моменты «объясняются мелом»: другие подходы к решению задач, или отдельные моменты при доказательстве теорем. Использование различных способов изложения лекционного материала только лишь расширяет кругозор студента. Удобно использовать презентации и на практических занятиях, хотя бы для предварительного просмотра комплекта решенных задач по излагаемой теме, для представления условий задач аудиторных и домашних и т. п. Задание контрольных, домашних работ чаще всего алгоритмизируется. При этом не требуется карточная система. По указанному алгоритму студенты модернизируют условие задачи. Это все зависит от профессионализма преподавателя.

Больше всего студента волнует сдача экзамена и другие вопросы, связанные с экзаменом: каков он будет письменный или устный. Важна и сама посадка студентов на экзамене в аудитории. Удобно посадить студентов на экзамене в виде русской буквы «П». При таком образе посадки студентов на экзамене преподавателю хорошо виден каждый студент. Обычно час дается на подготовку, затем в присутствии студента проверяется работа. При проставлении оценки в ведомость и в зачетку используется и учитывается рейтинговая система.

Рейтинг — это есть определенный документ, отражающий относительную успеваемость студента за выбранный промежуток времени. Он представляет собой список студентов курса одного направления обучения, отсортированный по *«успеваемости»* в порядке убывания. За *«успеваемость»* принято считать рейтинговую сумму, равную сумме итоговых и промежуточных оценок студента, полученных в предыдущем семестре в ходе рубежного контроля, умноженных на кредитные коэффициенты соответствующих дисциплин или доли последних, если это не первый или не последний в данном учебном году зачет/экзамен по дисциплине. Неудовлетворительные оценки, оценки «не зачтено» и неявки (независимо от причины) при расчете рейтингового балла приравниваются к оценке «0», т. е. рейтинг студента, получившего «2» по всем предметам, будет равен 0.

По итогам зачета (экзамена) студенту в ведомость проставляется средняя арифметическая оценка, состоящая из накопленной оценки и оценки за зачет (экзамен). Накопленная оценка представляет собой средневзвешенную оценку за аудиторные, домашние задания и оценку за выполнения УСР и контрольных работ; оценка за зачет (экзамен) представляет собой оценку за устный ответ или письменную экзаменационную работу.

Все эти подходы в ведении занятий по математике весьма важны. Самое главное — их комплексное, комбинированное выполнение. Такой подход в учебном процессе будет стимулировать работу студента в семестре, тем самым будет внесен особый вклад в его образование, которое так важно для нашего государства.

ИНТЕГРАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ И ПРОФЕССИОНАЛЬНО ЗНАЧИМЫХ УМЕНИЙ КУРСАНТОВ ВОЕННОЙ АКАДЕМИИ

Г.А. Шунина, Д.А. Гошко

Военная академия Республики Беларусь, Минск, Беларусь
SHUNINAGALINA@mail.ru, alexgoshko@tut.by

Актуальна интеграция знаний курсантов дисциплины «Основы высшей математики» (ОВМ) с их военной профессиональной подготовкой на основе реализации принципа профессиональной направленности обучения в Военной академии Республики Беларусь. Обучение математическим дисциплинам курсантов военно-инженерных вузов Российской Федерации на основе принципа профилирования (профессиональной ориентации) обосновано Е. Г. Плотниковой: ориентация на профиль вуза, инженерную и военную специальность; формирование социальной и психологической направленности на военную профессиональную деятельность [1]. Не обнаружив законченных исследований по обучению математике курсантов военно-командных специальностей военного вуза, обоснована необходимость профессиональной направленности обучения математике курсантов военно-командных специальностей Военной академии в [2]. Профессиональная направленность преподавания математики предполагает включение в ее содержание математических профессионально значимых понятий, утверждений, методов и заданий, которые иллюстрируют связь с будущей военной профессией, помогают осваивать военную профессию, показывают необходимость математики для военной профессии и тем самым усиливают мотивацию изучения математики будущими офицерами.

В настоящее время реализация профессиональной направленности преподавания высшей математики курсантам Военной академии осуществляется:

— совершенствованием содержания программы ОВМ в прежнем объеме добавлением новых тем прикладной математики на основе междисциплинарных связей математики с военными дисциплинами за счет уплотнения теоретических математических тем и частичного вынесения их на самостоятельное изучение [3];

— использованием методического и организационного профессионально направленного комплекса для совершенствования математической образовательной среды обучения, включающего: курс лекций и практических занятий; методические разработки; учебные и учебно-методические пособия; дидактические материалы для индивидуальной, групповой и фронтальной работы; задания для самоподготовки и контрольных работ и др.;

— внедрением в дидактическую практику специальных форм, приемов и средств обучения (комплексных лекций по математике совместно с преподавателями военных дисциплин, практических занятий на авторском материале с профессиональной направленностью, расчетно-графических работ на решение военно-прикладных задач, курсовой работой по исследованию операций в военном деле, компьютерными средствами обучения и др.);

— разработкой системы профессионально значимых математических задач, востребованных в обучении курсантов военным специальным дисциплинам;

— созданием инновационного программно-математического лабораторного практикума из четырех лабораторных работ, выполняемых с помощью информационных технологий.

Литература

1. Плотникова Е. Г. *Развитие теории и практики обучения математическим дисциплинам курсантов военно-инженерных вузов*: автореф. дис. ... д-ра пед. наук: 20.01.06. Пермский военный институт ракетных войск. Пермь, 2002. 38 с.

2. Шунина Г. А. *Формирование профессионально значимых математических умений курсантов Военной академии* // Вышэйшая школа. 2009. № 3. С. 41–43.

3. Макаревич Т.А., Подкопаев П. А., Шунина Г. А. *Основы исследования операций. Математические методы* : учеб.-метод. пособие Мн.: ВА РБ, 2010. 96 с.

К ВОПРОСУ О МЕЖПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЯХ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИКИ НА ПЕДАГОГИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЯХ

Я.В. Якименко

Могилевский государственный университет им. А. А. Кулешова, Могилев, Беларусь

olenec@mail.ru

При изучении тем «Исследование функций», «Приложения определенного интеграла», «Криволинейные интегралы первого и второго рода» требуются умения строить графики функций. Преподавая в течение многих лет математический анализ, я постоянно сталкивалась с тем, что студенты не то что не умеют, а и не знают правил построения линий, заданных в параметрическом виде и в полярных координатах. Мы сетуем, что в средней школе недостаточно часов математики, чтобы отработать навыки решения задач. Но в высшей школе существует аналогичная ситуация.

В силу обстоятельств, мне пришлось преподавать геометрию на первом курсе физико-математического факультета. Темы параметрического способа задания линии, полярные координаты, переход от параметрического или полярного способа задания кривой к декартовым координатам и наоборот затрагивается в курсе аналитической геометрии. Однако именно «затрагивается». Навыки построения линий, заданных в различных видах, невозможно отработать за то небольшое количество часов, которое отведено для данной темы. В итоге, в курсе математического анализа приходится "начинать с нуля». Способ построения линии в полярных координатах порой звучит для студентов как открытие, как совершенно новый и неизвестный материал.

Считаю, что при преподавании аналитической геометрии необходимо больше обращать внимание на то, что данный материал будет использоваться в курсе математического анализа. Межпредметная связь здесь выражена очень ярко. К сожалению, мы, преподаватели, замыкаемся в узких рамках своего учебного предмета и не находим времени и поводов для обсуждения таких очевидных фактов, связывающих учебные курсы, изучаемые одними и теми же студентами.

Нехватка аудиторных часов, неумение большей части первокурсников много и упорно работать самостоятельно вызывает необходимость применения таких видов учебных заданий, которые позволяли бы студентам делать собственные «открытия», тем самым вызывали бы интерес к изучению определенных тем и курсов в целом. Примером таких заданий может служить групповая работа при подготовке и проведении практических занятий, когда студенческая группа разбивается на несколько равносильных по успеваемости групп. Каждой группе в качестве домашнего задания предлагается своя задача в зависимости от темы занятия. При изучении аналитической геометрии и математического анализа на первом курсе педагогических специальностей эти задания легко увязать с изучением математики в средней школе. Тем самым студентам предоставляется возможность приобщиться к их будущей профессии: 1) посмотреть на школьный учебник другими глазами; 2) сравнить учебники разных авторов; 3) ликвидировать пробелы по программному учебному школьному материалу; 4) выступить в роли обучающего на практическом занятии перед участниками других групп; 5) выбрать наиболее рациональное доказательство или способ решения задачи, исходя из возможностей школьной и вузовской математики.

Кстати, о решении одной и той же задачи несколькими способами. Первокурсники часто недооценивают выполнение заданий такого рода. Для них главным считается получение ответа. Тем не менее, поиск различных решений задачи способствует формированию творческой личности будущего учителя, что является одной из важнейших целей педагогического процесса в непрерывной системе образования.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННОГО УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА ПО МАТЕМАТИКЕ В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ ТЕХНИЧЕСКОГО ВУЗА

Т.С. Яцкевич, В.И. Юринок, Л.А. Раевская

Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь
mathematics1@bntu.by

В процессе интеграции Республики Беларусь в мировое образовательное пространство со всей остротой встает вопрос о повышении качества высшего образования. В первую очередь это касается будущих инженеров. Только высокий образовательный уровень, профессиональная компетентность, готовность к исследовательской работе, способность к самостоятельному обучению являются гарантом конкурентоспособности инженера. К сожалению, в технических вузах в последние годы наблюдается тенденция сокращения объема учебных часов фундаментальных дисциплин, в том числе и курса математики. В этой связи особое значение приобретают современные педагогические технологии обучения, которые невозможны без применения компьютерных средств. Поэтому информационные технологии играют все более значимую роль в обучении будущих инженеров.

Авторами разработан электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Математика» для 1-го семестра обучения студентов инженерно-технических специальностей, который охватывает следующие разделы курса: линейная алгебра и аналитическая геометрия, введение в математический анализ, дифференциальное исчисление функций одной переменной, дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. ЭУМК структурно состоит из нескольких разделов: теоретических материалов по курсу математики первого семестра обучения, материалов для проведения практических занятий по учебной дисциплине, материалов для текущей и итоговой аттестации, вспомогательных материалов.

Теоретический раздел ЭУМК содержит основные определения, свойства, теоремы по программе 1-го семестра обучения. Материал представлен в удобной для восприятия студентами форме: основные определения, теоремы и формулы выделены набором, легко находятся и читаются. Теоретический материал комментируется большим числом подробно решенных типовых примеров. Практический раздел комплекса содержит материалы для проведения практических занятий и задания для самостоятельной работы. Раздел контроля знаний содержит материалы текущей и итоговой аттестации, позволяющие определить соответствие результатов учебной деятельности обучающихся требованиям образовательных стандартов высшего образования и учебно-программной документации, и представлен типовыми расчетами по темам дисциплины и тестами. В разделе тестов приведен пример их решения и размещены ответы к тестам. Вспомогательный раздел содержит программу дисциплины, экзаменационные вопросы, перечень учебно-методических пособий, рекомендуемых к использованию в образовательном процессе.

Разработанный на кафедре высшей математики №1 БНТУ ЭУМК «Математика. Часть 1» предназначен для студентов всех специальностей инженерно-технического профиля и отличается от других разработок прежде всего тем, что содержит набор методических материалов в виде рекомендаций студенту для работы с дисциплиной, кратких теоретических материалов, посвященных изложению в наглядном виде основных определений, свойств, формул и теорем, сопровождающихся подробными примерами, практикум по дисциплине, типовые расчеты и тесты для организации текущего контроля и самоконтроля знаний студентов. Материал изложен доступно, кратко и лаконично, методически продуман для успешного освоения студентами с различным уровнем школьной подготовки. Тестовые задания при текущем контроле могут быть выполнены как в аудитории, так и в системе компьютерного тестирования. В докладе авторы обсуждают преимущества и отличия данного комплекса от других разработок, рассматривают некоторые аспекты практического использования ЭУМК.

СОДЕРЖАНИЕ

Уравнения в частных производных

Интегро-дифференциальные операторы и уравнения

Дифференциальные уравнения и их приложения

Методика преподавания математических дисциплин в высшей школе

Научное издание

**XVI Международная научная конференция
по дифференциальным уравнениям**

(ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2014)

Тезисы докладов

Часть 2

Редакторы *А. К. Деменчук, С. Г. Красовский, Е. К. Макаров*
Компьютерная верстка *С. Г. Красовский*

Подписано в печать 05.05.2014 г.
Формат $60 \times 84\,{}^1/_8$. Усл. печ. л. 13,95. Уч.-изд. л. 12,56. Тираж 112 экз. Зак. 4.

Отпечатано на ризографе Института математики НАН Беларуси.
Издатель и полиграфическое исполнение:
Институт математики НАН Беларуси.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/257 от 2 апреля 2014 г.
200072, Минск, ул. Сурганова, 11.