решений этой системы. Если $\dim \mathcal{L} = p$, то говорят, что система (1) разрешима в лиувиллевых функциях (или *обобщенных квадратурах*, подробнее см. в [1, гл. III; 2, гл. 3]).

В случае, когда (формальные) показатели $\beta_i^1, \dots, \beta_i^p$ системы (1) в каждой ее особой точке a_i (числа, отвечающие за составляющие степенного роста (формальных) решений в особой точке) достаточно малы, оценка на размерность пространства $\mathcal{L}$ может быть получена исходя лишь из вида матрицы коэффициентов системы. В частности, имеет место следующее утверждение относительно разрешимости в обобщенных квадратурах такой системы.

Теорема 1. *Если в каждой особой точке a_i системы* (1) *ее (формальные) показатели β_i^j удовлетворяют условию*

$$\operatorname{Re} \beta_i^j > -\frac{1}{n(p-1)}, \quad j = 1, \dots, p,$$

то в общем положении такая система разрешима в обобщенных квадратурах тогда и только тогда, когда найдется постоянная матрица $C \in \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$ такая, что $CB(z)C^{-1}$ — верхнетреугольная матрица.

Частный случай этого утверждения, касающийся фуксовых систем, изложен в [3]. Напомним, что систему (1) называют *фуксовой*, если ее матрица коэффициентов $B(z)$ имеет полюс первого порядка в каждой особой точке. В таком случае показатели в точке a_i — это собственные значения матрицы-вычета $\operatorname{res}_{a_i} B(z)$. Мы проиллюстрируем данный критерий разрешимости в обобщенных квадратурах на примере фуксовой (2×2)-системы с тремя особыми точками 0, 1, ∞, не разрешимой в силу теоремы 1. Ее неразрешимость также будет следовать из того, что она эквивалентна гипергеометрическому уравнению, не попадающему в список Кимуры [4] гипергеометрических уравнений, разрешимых в обобщенных квадратурах.

Литература

1. Капланский И. *Введение в дифференциальную алгебру.* М.: ИЛ, 1959.
2. Хованский А. Г. *Топологическая теория Галуа. Разрешимость и неразрешимость уравнений в конечном виде.* М.: МЦНМО, 2008.
3. Вьюгин И. В., Гонцов Р. Р. *К вопросу о разрешимости в квадратурах фуксовых систем* // Успехи матем. наук. 2012. Т. 67, № 3. С. 183–184.
4. Kimura T. *On Riemann's equations which are solvable by quadratures* // Funk. Ekvac. 1969. Vol. 12. P. 269–281.

О СХОДИМОСТИ ФОРМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ОДУ

И.В. Горючкина

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

igoryuchkina@gmail.com

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$f(x, y, \delta y, \dots, \delta^n y) = 0, \tag{1}$$

где $f(x, y, \delta y, \dots, \delta^n y)$ — это многочлен своих переменных, $\delta = x\, d\, dx$, $\delta^n = \delta^{n-1} \circ \delta$, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть при $|x| \to 0$, $|\arg x| < \pi$ уравнение (1) имеет формальное решение

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k, \quad c_k \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

Согласно лемме Мальгранжа [1] существует такой номер μ', что с помощью замены переменной

$$y = \sum_{k=1}^{\mu} c_k x^k + x^{\mu} u, \quad \mu \geqslant \mu' \tag{3}$$

уравнение (1) приводится к уравнению специального вида

$$L(\delta)u + xg(x, u, \delta u, \ldots, \delta^n u) = 0, \tag{4}$$

где $L(\delta)$ — это линейный дифференциальный оператор, функция $g(x, u, \delta u, \ldots, \delta^n u)$ — это полином своих переменных.

Теорема Мальгранжа [1]. *Если в уравнении (4), которое получено из уравнения (1) с помощью замены переменной (3), степень многочлена $L(\delta)$ равна n, то ряд (2) равномерно сходится для достаточно малых $|x|$ и $|\arg x| < \pi$.*

При доказательстве этой теоремы Мальгранж использовал теорему о неявном отображении для Банаховых пространств [2]. Мы же в доказательстве (см. [3]) используем методы и теоремы теории аналитических функций, которые позволяют оценить радиус сходимости ряда (2).

Предложение. *Пусть функция $g(x, u_0, u_1, \ldots, u_n)$ из уравнения (4) голоморфна внутри замкнутого полидиска*

$$\overline{\Delta} = \{|x| \leqslant r, |u_0| \leqslant \rho, \ldots, |u_n| \leqslant \rho\}, \quad \mu = \max_{\overline{\Delta}} |g|.$$

Тогда степенной ряд $u = \sum_{k=\mu+1}^{\infty} c_k x^{k-\mu}$, удовлетворяющий уравнению (4), сходится в диске

$$D = \left\{ |x| < r\,\frac{\rho}{\rho + \mu r/\sigma N} \right\}, \quad N = (n+1)^{n+1}/(n+2)^{n+2}.$$

Литература

1. Malgrange B. *Sur le théorème de Maillet* // Asympt. Anal. 1989. Vol. 2. P. 1–4.
2. Дьедонне Ж. *Основы современного анализа.* М.: Мир, 1964.
3. Gontsov R. R., Goryuchkina I. V. *An analytic proof of the Malgrange — Sibuya theorem on the convergence of formal solutions of an ODE.* 2013. arXiv:1311.6416.

О РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ГАРНЬЕ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

В.И. Громак, И.И. Козлов

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
vgromak@gmail.com, ilya.kazlou@gmail.com

В настоящей работе исследуется свойства решений системы Гарнье, являющейся обобщением третьего уравнения Пенлеве на случай двух независимых переменных