$$z = -\gamma_0 \frac{h}{(t-t_0)^2} - \frac{h}{(t-t_0)^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k \theta^k e^{-kh/(t-t_0)}$$

и ряды (7), (8),

$$z = -\frac{1}{t-t_0} - \gamma_0 \frac{h}{(t-t_0)^2} - \frac{h}{(t-t_0)^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k \theta^k e^{-kh/(t-t_0)},$$

имеющие место в области, ограниченной подвижной особой линией с уравнением $2\mu t\overline{t} - (2\mu t_0 + h)\overline{t} - (2\mu\overline{t_0} + \overline{h})t + 2\mu t_0\overline{t_0} + h\overline{t_0} + \overline{h}t_0 = 0$, *представляют общее решение систем* (1), (2) *и* (3), (4) *соответственно. Координаты любой точки, лежащей на подвижной особой линии, являются существенно особыми для общего решения каждой из систем* (1)–(4). *Здесь* $\overline{t}, \overline{t_0}, \overline{h}$ *означают числа, комплексно-сопряженные числам* t, t_0, h; $\mu = \sigma + \ln|\theta/c|$. *При этом* θ, h, t_0 *— произвольные постоянные, а коэффициенты* $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *такие же, как и для рядов* (6).

Литература

1. Леонтьев А. Ф. *Ряды экспонент.* Москва, 1976.

ОБОБЩЕННЫЕ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ И ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М.В. Милованов, О.Г. Медведева

Белорусский государственный педагогический университет, Минск, Беларусь

mvmil@mail.ru, olga_medvedeva@tut.by

Под обобщенной цепочкой Тоды с двумя экспонентами будем понимать гамильтонову систему дифференциальных уравнений с гамильтонианом вида

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + \cdots + p_n^2) + c_1^2 e^{\alpha_1 q_1 + \cdots + \alpha_n q_n} + c_2^2 e^{\beta_1 q_1 + \cdots + \beta_n q_n}. \tag{1}$$

В [1] показано, что любая обобщенная цепочка Тоды с двумя экспонентами сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' = \left(\lambda - \frac{1}{k} y'^2\right)\left(\frac{k}{y} + \frac{2y}{1 - x^2 - y^2}\right) \tag{2}$$

в полукруге $1 - x^2 - y^2 > 0$, $y > 0$ с коэффициентами k и λ одного знака.

Нет сомнений, что в общем случае уравнение (2) не интегрируется в квадратурах. Тем не менее, с его помощью можно получать важную информацию о решениях цепочек Тоды.

Легко видеть, что уравнение (2) имеет два однопараметрических семейства решений $y = \pm\sqrt{k\lambda}x + C$, которые приводят к двум $(2n-1)$-параметрическим семействам решений исходной цепочки Тоды в элементарных функциях. Эти решения уже невозможно угадать.

Описание решений уравнения (2) вблизи границы полукруга $1 - x^2 - y^2 > 0$, $y > 0$ позволяет исследовать поведение интегральных кривых цепочек Тоды с гамильтонианом (1) «на бесконечности».

Изучение решений (2) вблизи оси Ox, т.е. при малых $y > 0$, можно получить, положив в (2) $y^2 = 0$ и решив упрощенное таким образом уравнение.

Изучение решений (2) вблизи окружности $1-x^2-y^2 = 0$ так просто не получается. Если в уравнении (2) коэффициент λ достаточно мал, то (2) можно заменить более простым уравнением

$$y'' = -\frac{1}{k}\left(\frac{k}{y} + \frac{2y}{1-x^2-y^2}\right)y'^2. \qquad (3)$$

Выяснилось, что это уравнение (в отличие от уравнения (2)) имеет одномерную группу симметрии и, следовательно, к нему можно применить методы группового анализа дифференциальных уравнений [2]. В результате (3) сводится к двум уравнениям первого порядка

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(t^2+a)z}{(1-t^2)(t \pm z)}, \quad 0 < t < 1, \quad z > 0, \qquad (4)$$

где $a = (2-k)/k$. Уравнения (4) позволяют описать поведение решений уравнения (2) вблизи окружности $1-x^2-y^2=0$ в случае, когда коэффициент λ достаточно мал [3].

Литература

1. Милованов М. В., Медведева О. Г. *Об обобщенных цепочках Тоды с двумя экспонентами* // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 3. С. 37–42.

2. Софус Ли. *Симметрии дифференциальных уравнений.* Т. 1. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011.

3. Милованов М. В., Медведева О. Г. *Применение методов группового анализа к изучению обобщенных цепочек Тоды с двумя экспонентами* // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 1. С. 9–15.

СВОЙСТВА ЦЕЛЫХ РЕШЕНИЙ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ НУЛЕЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В.С. Немец

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

nemets@grsu.by

В монографии [1] достаточно подробно изложены и систематизированы исследования по изучению свойств целых решений у алгебраических дифференциальных уравнений общего вида. В основном такие исследования проводились в направлении определения роста решений на бесконечности, то есть определения порядка и типа. Так же изучались вопросы наличия целых трансцендентных решений у таких уравнений а зависимости от характеристик самого уравнения.

Предлагается изучить свойства целых трансцендентных решений у неалгебраических дифференциальных уравнений в зависимости от наличия у этих решений нулей (в частности, целых трансцендентных решений с конечным числом нулей). Такая постановка задачи изучения свойств целых решений в зависимости от количества нулей, продолжает исследования, начатые в [2, 3].

В докладе приводится дифференциальное уравнение первого порядка

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(z)\exp(B_i(z))\, w^{\nu_i}(w')^{\mu_i} = 0, \qquad (1)$$

где $A_i(z) \not\equiv 0$ и $B_i(z)$, $i = \overline{1,n}$, — полиномы комплексного переменного z. Числа ν_i и μ_i — целые неотрицательные, такие, что $|\nu_i - \nu_j| + |\mu_i - \mu_j| \neq 0$, $i, j = \overline{1,n}$.