Лемма 2. *Для того чтобы система* (1) *при дополнительных условиях* (2) *обладала свойством Пенлеве, необходимо, чтобы она дробно-линейным преобразованием* x, y *и аналитической заменой независимой переменной* t *приводилась к виду*

$$x'^2 = (y + a_{11}x + a_{10})^2, \quad y'^2 = yb_{12}^2(x + b_{11})^2, \tag{3}$$

где $b_{12} \neq 0$.

Построив уравнение относительно компоненты y и выполнив замену $y = v^2$, получим уравнение

$$v'' = \left(\lambda_1 a_{11} + \frac{b'_{12}}{b_{12}}\right)v' - \frac{1}{2}\lambda_1\lambda_2 b_{12}v^2 - \frac{1}{2}\lambda_2 b_{12}\left(b'_{11} + \lambda_1(a_{10} - a_{11}b_{11})\right), \tag{4}$$

где $\lambda_1^2 = 1$, $\lambda_2^2 = 1$.

Используя метод резонансов [2], найдены необходимые и достаточные условия наличия свойства Пенлеве у решений уравнения (4). Учитывая структуру построения уравнения (4), заключаем, что при полученных условиях и система (3) с условиями (2) обладает свойством Пенлеве.

Литература

1. Пецевич В. М. , Погерило Ю. В., Шевченя Д. Н. *Необходимые условия наличия свойства Пенлеве у одной системы дифференциальных уравнений специального вида* // Тез. докл. XV Междунар. науч. конф. «Еругинские чтения —2013». Гродно, 13–16 мая 2013 г.: в 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси, ред-кол.: А. К. Деменчук [и др.]. Минск, 2013. Ч. 1. С. 22.

2. Айнс Э. Л. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Харьков: ГНТИ, 1939. 719 с.

3. Cosgrove C., Scoufis G. *Painleve classification of a class of differential equations of the second order and second degree* // Stud. Appl. Math. 1993. Vpl. 88. P. 25–87.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОДНОЙ ПЕРЕКРЕСТНОЙ СИСТЕМЫ

О.Н. Парманчук

Гродненский государственный аграрный университет, Гродно, Беларусь
statola@tut.by

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} x'^2 &= Kb_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 + y(b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0),\\ y'^2 &= c_3y^3 + c_2y^2 + c_1y + c_0 + x(d_3y^3 + d_2y^2 + d_1y + d_0), \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$b_3 \neq 0, \quad |c_3| + |d_3| \neq 0, \quad |d_3| + |d_2| + |d_1| + |d_0| \neq 0, \tag{2}$$

$a_0, a_1, a_2, b_i, c_i, d_i$, $i = \overline{0,3}$, — функции аналитические по t, K — постоянная. В [1] показано, что для отсутствия подвижных многозначных особенностей необходимо, чтобы система (1) имела вид

$$x'^2 = (x + b)^2(xy + H), \quad y'^2 = (y + d)^2(xy + H), \tag{3}$$

где H — постоянная, b, d — функции, аналитические по t.

Из системы (3) для компоненты y построим дифференциальное уравнение

$$(2y(y+d)y'' - (2y+d)y'^2 - 2d'yy' + (y+d)^2(by^2 + Hd))\times$$
$$\times(2y(y+d)y'' - (4y+d)y'^2 - 2d'yy' + (y+d)^2(-by^2 + 2Hy + Hd)) = 0, \qquad (4)$$

которое распадается на два. Рассмотрим первое из них. Пусть $d \neq 0$. Выполняя в первом уравнении (4) замену по формуле $y = -du/(u-1)$, получим

$$u'' = \left(\frac{1}{2u} + \frac{1}{u-1}\right)u'^2 + u(u-1)\left(\frac{H}{2u^2} - \frac{H}{2u} - \frac{bd}{2(u-1)} + \frac{d'^2}{2d^2}u + \frac{2dd'' - 3d'^2}{2d^2}\right). \qquad (5)$$

Согласно [2, с. 318], для отсутствия подвижных многозначных особенностей у решений уравнения (5) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: $b = M_1e^{M_2t}$, $d = M_3e^{M_4t}$, где M_i, $i = \overline{1,4}$, — некоторые постоянные. При этом уравнение (5) является частным случаем пятого уравнения Пенлеве. Если $d = 0$, то выполняя в первом уравнении из (4) замену переменной по формуле $y = 1/u$, получим

$$u'' = \frac{u'^2}{u} + \frac{b}{2}.$$

Данное уравнение обладает свойством Пенлеве [2, с. 279], если $b = M_5e^{M_6t}$, где M_i, $i = \overline{5,6}$, — некоторые постоянные, и при этом является частным случаем третьего уравнения Пенлеве. Рассматривая второе уравнение из (4), получим, что для отсутствия подвижных многозначных особых точек необходимо и достаточно полагать $d = M_7e^{M_8t}$, где M_i, $i = \overline{7,8}$, — некоторые постоянные. Объединяя результаты исследования системы (3), заключаем, что справедлива

Теорема. *Для того, чтобы система* (1) *с ограничениями* (2) *обладала свойством Пенлеве, необходимо и достаточно, чтобы она линейным преобразованием и аналитической заменой независимой переменной приводилась к виду* (3) *с ограничениями* $b = Ke^{Lt}$, $d = Me^{Nt}$, *где* K, L, M, N *— некоторые постоянные.*

Литература

1. Парманчук О. Н., Пецевич В. М. *Об одной перекрестной системе второго порядка без подвижных многозначных особенностей* // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения : тез. докл. Третьей Междунар. науч. конф. Брест, 17-–22 сент. 2012 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина; редкол.: В. И. Корзюк [и др.]. Брест, 2012. С. 74.

2. Bureau F. J. *Differential equations with fixed critical points* // Ann. di Math. 1964. Vol. 64. P. 229—364.

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

О.Н. Парманчук

Гродненский государственный аграрный университет, Гродно, Беларусь
statola@tut.by

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка второй степени:

$$\left(y'' - \left(1 - \frac{1}{N}\right)\frac{y'^2}{y}\right)^2 = y', \qquad (1)$$