

Теорема 1. Для любого натурального $n \geq 2$ в метрическом пространстве M_n с топологией равномерной сходимости на полуоси внутренность множества WE_n слабо экспоненциально дихотомических систем совпадает с множеством экспоненциально дихотомических систем, т. е. $\text{int } WE_n = E_n$ для любого $n \geq 2$.

Следствие. В метрическом пространстве M_n , $n \geq 2$, с топологией равномерной сходимости на полуоси множество WE_n не является ни открытым, ни замкнутым, все его точки предельные, а его край $\text{ed } WE_n$ (т. е. множество $\text{ed } WE_n \stackrel{\text{def}}{=} WE_n \setminus \text{int } WE_n$) составляют в точности слабо экспоненциально дихотомические системы, не являющиеся экспоненциально дихотомическими.

Теорема 1 и ее следствие допускают усиление.

Приведем необходимое определение. Если вышеупомянутые положительные постоянные $c_1(x)$ и $c_2(x)$ можно выбрать одними и теми же для всех решений из L_- и L_+ , но не при всех $t \geq 0$, а при всех $t \geq t_x$, где t_x свое, вообще говоря, для каждого решения $x(\cdot)$, то приходим к определению слабо экспоненциально дихотомической системы в узком смысле.

Класс таких систем обозначим SWE_n .

Теорема 2. Включения $E_n \subset SWE_n \subset WE_n$ являются собственными.

Теорема 1 и ее следствие справедливы и для класса слабо экспоненциально дихотомических систем в узком смысле.

Литература

1. Бекряева Е. Б. О равномерности оценок норм решений экспоненциально дихотомических систем // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 5. С. 626–636.
2. Бекряева Е. Б. Линейные дифференциальные системы, близкие к экспоненциально дихотомическим // Докл. НАН Беларуси. 2011. Т. 55, № 1. С. 36–40.
3. Барабанов Е. А., Конюх А. В. Равномерные показатели линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 10. С. 1665–1676.
4. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 536 с.

ОСОБЫЕ РЕШЕНИЯ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

М.А. Белозерова, Т.С. Тютюникова

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова, Одесса, Украина

Marbel@ukr.net, gedr@inbox.ru

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \alpha_0 p(t) \varphi_0(y) \varphi_1(y'), \quad (1)$$

в котором $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ ($-\infty < a < \omega \leq +\infty$) — непрерывная функция, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \rightarrow]0, +\infty[$ ($i = 0, 1$) — непрерывные функции, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} — либо промежуток $[y_i^0, Y_i[$ либо $]Y_i, y_i^0]$ (здесь при $\omega > 0$ считаем, что $a > 0$, а при $Y_i = +\infty$ ($Y_i = -\infty$) считаем $y_i^0 > 0$ ($y_i^0 < 0$) соответственно). Кроме того, предполагается, что каждая из функций φ_i является правильно меняющейся (см. [1]) при $z \rightarrow Y_i$ ($z \in \Delta_{Y_i}$) порядка σ_i , причем $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$.

Определение 1. Решение y уравнения (1) будем называть $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -решением, если

$$y^{(i)} : [t_0, \omega[\rightarrow \Delta_{Y_i}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0, 1), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0.$$

Наиболее сложными для изучения являются те из них, для которых $\lambda_0 = 0, 1, \infty$. Настоящая работа посвящена $P_\omega(Y_0, Y_1, \infty)$ -решениям.

Определение 2. Будем говорить, что функция $\varphi_i(z)$, где $i \in \{0, 1\}$, удовлетворяет условию S_i , если для любой непрерывно дифференцируемой функции $L : \Delta_{Y_i} \rightarrow]0; +\infty[$ такой, что

$$\lim_{\substack{z \rightarrow Y_i \\ z \in \Delta_{Y_i}}} \frac{zL'(z)}{L(z)} = 0,$$

имеет место соотношение

$$\theta_i(zL(z)) = \theta_i(z)(1 + o(1)) \quad \text{при } z \rightarrow Y_i, \quad (z \in \Delta_{Y_i}).$$

В работе [2] исследованы $P_\omega(Y_0, Y_1, \infty)$ -решения уравнения (1) для случаев, когда функция $\varphi_0(z)$ удовлетворяет условию S_0 . В настоящей работе удалось распространить эти результаты на общий случай уравнения (1). Получены необходимые и достаточные условия существования у уравнения (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \infty)$ -решений, а также найдены асимптотические представления при $t \uparrow \omega$ для таких решений и их производных.

Литература

1. Seneta E. *Regularly varying functions*. Lecture Notes in Math. Vol. 508. Springer-Verlag, Berlin, 1976.
2. Евтухов В. М., Белозерова М. А. *Асимптотические представления решений существенно нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка* // Укр. Мат. журн. 2008. Т. 60, № 3. С. 310–331.

О ГРУБОСТИ L^p -ДИХОТОМИИ НА ОСИ

Л.И. Бортницкая, Р.А. Прохорова

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

Рассматриваем линейные системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{1}$$

с кусочно-непрерывными коэффициентами $A(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ и с фундаментальной матрицей $X(t)$, $X(0) = E$. В дальнейшем систему (1) будем отождествлять с ее матрицей коэффициентов $A(\cdot)$ и называть системой A .

Определение [1, с. 9; 2]. Будем говорить, что система (1) обладает свойством L^p -дихотомии на числовой прямой \mathbb{R} с параметром $p > 0$ и обозначать это включением $A \in L^p_{\mathbb{R}}D$, если существуют положительная постоянная K и пара взаимно дополнительных проекторов P_1 и P_2 таких, что выполнено неравенство

$$\int_{-\infty}^t \|X(t)P_1X^{-1}(\tau)\|^p d\tau + \int_t^{+\infty} \|X(t)P_2X^{-1}(\tau)\|^p d\tau \leq K, \quad t \in \mathbb{R}.$$