О ЛЯПУНОВСКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ СИСТЕМ С ВОЗМУЩЕНИЯМИ

В.И. Залыгина

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
wizkaz@mail.ru

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathfrak{M}^n$ линейное пространство вещественных $(n \times n)$-матриц с нормой

$$\|A\| = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}|,$$

а через $\mathcal{M}^n$ — множество линейных систем вида

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, \infty),$$

с кусочно непрерывной (не обязательно ограниченной) матричной функцией $A{:}\,\mathbb{R}^+ \to \mathfrak{M}^n$, которую будем отождествлять с соответствующей системой.

Определение (ср. [1]). Скажем, что система $A \in \mathcal{M}^n$ ляпуновски эквивалентна системе $B \in \mathcal{M}^n$, если существует непрерывная и кусочно дифференцируемая матричная функция $L\colon \mathbb{R}^+ \to \mathfrak{M}^n$, удовлетворяющая условиям:

$$\det L(t) \neq 0, \quad B(t) = L^{-1}(t)A(t)L(t) - L^{-1}(t)\dot{L}(t), \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} (\|L(t)\| + \|L^{-1}(t)\|) < \infty.$$

Для заданной непрерывной функции $f : \mathbb{R}^+ \to (0, \infty)$ обозначим через $\mathcal{M}^n_f$ множество систем $A \in \mathcal{M}^n$, удовлетворяющих при всяком $t \in \mathbb{R}^+$ условию

$$\|A(t)\| \leqslant f(t).$$

Если функция f есть константа $K > 0$, то условимся писать $\mathcal{M}^n_K$ вместо $\mathcal{M}^n_f$.

Обозначим через $\mathcal{T}$ множество неограниченных строго возрастающих последовательностей положительных вещественных чисел. Для всякой последовательности $\tau \in \mathcal{T}$ обозначим через $\mathcal{C}^n(\tau)$ множество кусочно постоянных матричных функций из $\mathcal{M}^n$ с разрывами разве что в точках последовательности τ.

Формулируемые ниже теоремы представляют собой некие аналоги теоремы Богданова [1] для случая системы с неограниченными коэффициентами.

Теорема 1. *Для всякой непрерывной функции $f : \mathbb{R}^+ \to (0, \infty)$ найдется такая последовательность $\tau \in \mathcal{T}$, что для любой системы $A \in \mathcal{M}^n_f$ существует ляпуновски эквивалентная ей система $B \in \mathcal{M}^n_f \cap \mathcal{C}^n(\tau)$.*

Теорема 2. *Для всякой непрерывной функции $f : \mathbb{R}^+ \to (0, \infty)$ найдется такая последовательность $\tau \in \mathcal{T}$, что для всяких числа $K > 0$ и системы $B \in \mathcal{M}^n_K$ существует система $\widetilde{B} \in \mathcal{C}^n(\tau)$, обладающая следующими свойствами:*

1) *элементы матрицы $\widetilde{B}$ принимают лишь значения $\pm K$;*

2) *для всякой системы $A \in \mathcal{M}^n_f$ системы $A + B$ и $A + \widetilde{B}$ ляпуновски эквивалентны.*

Замечание. В доказательствах этих теорем использована теорема 1 из [2].

Литература

1. Мазаник С. А. *Преобразования Ляпунова линейных дифференциальных систем.* Мн.: БГУ, 2008.

2. Изобов Н. А., Мазаник С. А. *Об асимптотически эквивалентных линейных системах при экспоненциально убывающих возмущениях* // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 2. С. 168–173.