где $(t,X)\in I\times\mathbb{R}^{n\times m}$, $A\in\mathbb{C}(I,\mathbb{R}^{n\times n})$, $B\in\mathbb{C}(I,\mathbb{R}^{m\times m})$, $F_i\in\mathbb{C}(I,\mathbb{R}^{n\times m})$ $(i=0,1)$, M_s — заданные постоянные $(n\times n)$-матрицы, $\lambda\in\mathbb{R}$, $I=[0,\omega]$.

Введены следующие обозначения:

$$\gamma=\|\Psi^{-1}\|,\quad m_s=\|M_s\|,\quad \alpha_2=\max_t\|A_2(t)\|,\quad \beta_2=\max_t\|B_2(t)\|,\quad h_i=\max_t\|F_i(t)\|,$$

$$\varepsilon=|\lambda|,\quad \lambda_1=\max_t\|U(t)\|,\quad \lambda_2=\max_t\|U^{-1}(t)\|,\quad u_s=\|U_s\|,\quad U_s=U(t_s),$$

$$\mu_1=\max_t\|V(t)\|,\quad \mu_2=\max_t\|V^{-1}(t)\|,\quad v_s=\|V_s\|,\quad V_s=V(t_s),$$

$$q=\gamma\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2(\alpha_2+\beta_2)\omega\sum_{s=1}^{k}m_su_sv_s,\quad N=\gamma\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2\omega h\sum_{s=1}^{k}m_su_sv_s,$$

где $t\in I$, $s=\overline{1,k}$, $h=h_0+\varepsilon h_1$, $\|\cdot\|$ — согласованная норма матриц, Ψ — линейный оператор, $\Psi Y=\sum_{s=1}^{k}M_sU_sYV_s$, $U(t)$ и $V(t)$ — фундаментальные матрицы уравнений $dU/dt=A_1(t)U$ и $dV/dt=VB_1(t)$ соответственно, при этом матрицы $A_1(t)$, $B_1(t)$ выбираются определенным образом [2, гл. 1], $A_2(t)=A(t)-A_1(t)$, $B_2(t)=$ $=B(t)-B_1(t)$.

В данной работе, являющейся продолжением [1] и развитием [3, 4], с помощью подхода [2, гл. 1] получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости и оценка области локализации решения задачи (1), (2).

Теорема. *Пусть оператор Ψ обратим и выполнено условие $q<1$. Тогда задача* (1), (2) *однозначно разрешима; ее решение $X(t)$ представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих условию* (2), *при этом справедлива оценка $\|X(t)\|\leqslant N/(1-q)$.*

На основе используемой методики получено в формально замкнутой форме, представляющей собой двусторонний аналог функции Грина, точное решение данной задачи, из которого при $B(t)\equiv 0$ следует аналогичное решение задачи [2, гл. 1].

Литература

1. Бондарев А. Н. *О многоточечной краевой задаче для матричного уравнения Ляпунова с параметром* // XV Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения–2013): тез. докл. Междунар. науч. конф. 2013. Ч. 1. С. 44–45.

2. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: ИМ НАН Беларуси, 1998.

3. Бондарев А. Н., Лаптинский В. Н. *О многоточечной краевой задаче для матричного уравнения Ляпунова* // Тр. ИСА РАН: Динамика неоднородных систем. 2008. Т. 32, № 3. С. 19–26.

4. Бондарев А. Н., Лаптинский В. Н. *Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае сильного вырождения краевых условий* // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 6. С. 776–784.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА КВАДРАТИЧНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ТРЕХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.И. Булгаков, Е.К. Жилко, С.Н. Алыцкая

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

Рассмотрим систему вида

$$\dot{x}=a_{11}x^2+a_{12}xy+a_{22}y^2+a_{13}xz+a_{23}yz+a_{33}z^2+a_{10}x+a_{20}y+a_{30}z,$$

$$\dot{y} = b_{11}x^2 + b_{12}xy + b_{22}y^2 + b_{13}xz + b_{23}yz + b_{33}z^2 + b_{10}x + b_{20}y + b_{30}z,$$
$$\dot{z} = c_{11}x^2 + c_{12}xy + c_{22}y^2 + c_{13}xz + c_{23}yz + c_{33}z^2 + c_{10}x + c_{20}y + c_{30}z, \qquad (1)$$

где $a_{ij},\ b_{ij},\ c_{ij} \in \mathbb{R},\ i, j = \overline{0,3}$.

Теорема. *Для того что бы система (1) имела первый интеграл*

$$F(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Mxz + Fyz + Gx + Ny + Tz + P = c,$$

необходимо и достаточно что бы она имела вид:

$$\dot{x} = a_{11}x^2 + a_{12}xy + \left(-\frac{1}{2A}(Da_{12} + 2Bb_{12} + Db_{22} + Mc_{22} + Fc_{12})\right)y^2 + a_{13}xz+$$
$$+\left(-\frac{1}{M}(Da_{33}+2Bb_{33}+Fb_{23}+Cc_{23}+Fc_{33})\right)yz+\left(-\frac{1}{2A}(Ma_{13}+Db_{33}+Fb_{13}+2Cc_{13}+Mc_{33})\right)z^2+$$
$$+a_{10}x + a_{20}y + \left(-\frac{1}{D}(Ma_{20} + Ga_{20} + 2Bb_{30} + Fb_{20} + Nb_{23} + 2Cc_{20} + Fc_{30} + Tc_{23})\right)z,$$
$$\dot{y}=\left(-\frac{1}{N}(2Aa_{10} + Ga_{11} + Db_{10} + Mc_{10} + Tc_{11})\right)x^2 + b_{12}xy+$$
$$+\left(-\frac{1}{F}(Da_{23} + Ma_{22} + 2Bb_{23} + +2Cc_{22} + Fc_{23})\right)y^2 + b_{13}xz+$$
$$+b_{23}yz + \left(-\frac{1}{N}(Ma_{30} + Ga_{33} + Fb_{30} + 2Cc_{30} + Tc_{33})\right)z^2+$$
$$+\left(-\frac{1}{2B}(2Aa_{20} + Da_{10} + Ga_{12} + Db_{20} + Nb_{12} + Mc_{30} + Fc_{10} + Tc_{12})\right)x+$$
$$+\left(-\frac{1}{2B}(Da_{20} + Ga_{22} + Nb_{22} + Fc_{20} + Tc_{22})\right)y+$$
$$+\left(-\frac{1}{D}(2Aa_{30} + Ma_{10} + Ga_{13} + Fb_{10} + Nb_{13} + 2Cc_{10} + Mc_{30} + Tc_{13})\right)z,$$
$$\dot{z} = \left(-\frac{1}{M}(2Aa_{11} + Db_{11}\right)x^2 + \left(-\frac{1}{M}(2Aa_{12} + Da_{11} + 2Bb_{11} + Db_{12} + Fc_{11})\right)xy+$$
$$+\left(-\frac{1}{M}(2Aa_{22} + Db_{22})\right)y^2 + \left(-\frac{1}{M}(2Aa_{13} + Ma_{11} + Db_{13} + Fb_{11} + 2Cc_{11})\right)xz+$$
$$+\left(-\frac{1}{M}(2Aa_{23} + Da_{13} + Ma_{12} + 2Bb_{13} + Db_{23} + Fb_{12} + 2Cc_{12} + Fc_{13})\right)yz+$$
$$+\left(-\frac{1}{M}(2Aa_{33}+Db_{33})\right)z^2+\left(-\frac{1}{T}(Ga_{10}+Nb_{10})\right)x+\left(-\frac{1}{T}(Ga_{20}+Nb_{20})\right)y+\left(-\frac{1}{T}(Ga_{30}+Nb_{30})\right)z.$$

Литература

1. Еругин Н. П. *Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую* // Прикладная математика и механика. 1952. Т. 16, вып. 6. С. 659–670.