# ФУНКЦИЯ ДЮЛАКА — ЧЕРКАСА В ОКРЕСТНОСТИ НЕГРУБОГО ФОКУСА КУБИЧЕСКОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ

**А.А. Гринь, А.В. Кузьмич**

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
grin@grsu.by, andrei-ivn@mail.ru

Рассмотрим кубическую автономную систему вида

$$\frac{dx}{dt} = y + \alpha x + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3,$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + \alpha y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3 \qquad (1)$$

с фиксированными вещественными коэффициентами $a_{ij}, b_{ij}, 2 \leqslant i+j \leqslant 3$ и параметром $\alpha \in I \subset R$ в случае, когда точка $O(0,0)$ является негрубым фокусом системы и первая фокусная величина Ляпунова $v_3$ отлична от нуля при $\alpha = 0$.

Для оценки числа и локализации предельных циклов в области $\Omega \subset R^2$ будем использовать обобщенный метод Дюлака [1], который заключается в нахождении функции Дюлака — Черкаса $\Psi(x,y) \in C^1(\Omega)$ и числа $k \in R, k \neq 0$, удовлетворяющего неравенству

$$\Phi \equiv k\Psi divX + \frac{\partial\Psi}{\partial x}P + \frac{\partial\Psi}{\partial y}Q > 0(<0), \quad (x,y) \in \Omega, \quad X = (P,Q). \qquad (2)$$

Так как система (1) является структурно неустойчивой, то этот метод напрямую не применим.

Идея нашего подхода заключается в построении функции $\Psi$ в виде полинома четвертой степени

$$\Psi = e_1 + e_2x + e_3y + e_4x^2 + \ldots + e_{15}y^4 \qquad (3)$$

на основе нахождения функции $\Phi$ в виде полинома, содержащего члены не ниже четвертого порядка относительно фазовых переменных [2].

Коэффициенты $e_i$, $i = \overline{1,15}$, выбираем так, чтобы выполнялось равенство

$$\Phi = r\alpha^2 + s(x^2+y^2)^2 + \tilde{\Phi}(x,y), \qquad (4)$$

где функция $\tilde{\Phi}$ содержит члены более высоких порядков, а $s$ зависит от коэффициентов $a_{ij}$, $b_{ij}$ и числа $k$. Для положительности $\Phi$ в окрестности $U_\delta \times V_\epsilon$ необходимо найти подходящие значения $s > 0$ и $r > 0$. Коэффициенты $e_i$, $i = \overline{1,15}$, находятся с помощью решения системы линейных алгебраических уравнений, полученной приравниванием коэффициентов при соответствующих степенях полиномов (2) и (4).

**Теорема.** *Для системы* (1) *существуют функция* $\Psi$ *в виде полинома* (3), *а также числа* $k < 0$, $\delta_0 > 0$, $\alpha_0 > 0$ *такие, что при всех* $(x,y)$ *из окрестности* $U_\delta = \{(x,y) : |x| \leqslant \delta_0, |y| \leqslant \delta_0\}$ *и всех* $\alpha$ *из окрестности* $V_\epsilon = \{\alpha : 0 < \alpha \leqslant \alpha_0\}$ *для полинома* $\Phi(x,y,k,\alpha)$ *вида* (4) *выполняется неравенство* (2).

*Если при этом уравнении* $\Psi = 0$ *определяет один овал, то в рассматриваемой окрестности фокуса, кроме, быть может малоамплитудного предельного цикла, других предельных циклов система* (1) *не имеет.*

**Литература**

1. Черкас Л. А. *Функция Дюлака полиномиальных автономных систем на плоскости* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 5. С. 689–699.

2. Гринь А. А. *Функция Дюлака-Черкаса в окрестности неустойчивого фокуса полиномиальных автономных систем на плоскости* // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 1. С. 3–9.

# ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА С ПАРАМЕТРОМ

**Л.А. Данилович**

Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь



В работе [1] на основе применения метода [2, гл. 2] получены коэффициентые достаточные условия однозначной разрешимости задачи

$$\frac{dX}{dt} = \lambda A(t)X\left(K_0 + \lambda K_1(t)\right) + \lambda^2 B(t)XC(t) + F_0(t) + \lambda F_1(t), \tag{1}$$

$$X(0,\lambda) = X(\omega,\lambda), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times m}, \tag{2}$$

где $A(t), B(t), C(t), K_1(t), F_i(t)$ $(i = 0,1)$ — вещественные непрерывные матрицы соответствующих размеров, $K_0$ — постоянная матрица; $\lambda \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$.

Данная работа является продолжением и развитием [1].

Примем следующие обозначения:

$$\tilde{A}(\omega) = \int\limits_0^\omega A(\tau)\,d\tau, \quad \gamma = \|\tilde{A}^{-1}(\omega)\|, \quad \varepsilon = |\lambda|, \quad \alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta = \max_t \|B(t)\|,$$

$$\mu = \max_t \|C(t)\|, \quad \beta_0 = \|K_0\|, \quad \beta_1 = \max_t \|K_1(t)\|, \quad r = \|K_0^{-1}\|,$$

$$q_1 = \frac{1}{2}\gamma\alpha^2\beta_0\omega^2 + \gamma(\alpha\beta_1 + \beta\mu)r\omega, \quad q_2 = \frac{1}{2}\gamma\alpha\omega^2(\alpha\beta_1 + \beta\mu), \quad q = \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2,$$

где $t \in [0,\omega]$, $\|\cdot\|$ — согласованная норма матриц.

**Теорема.** *Пусть выполнены условия:* $\det K_0\tilde{A}(\omega) \neq 0$, $0 < q(\varepsilon) < 1$. *Тогда задача* (1), (2) *однозначно разрешима. Ее решение* $X(t,\lambda)$ *представимо в виде*

$$X(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k-1} X_{k-1}(t), \tag{3}$$

*где матрицы* $X_{k-1}(t)$ *определены рекурретным интегральным соотношением типа* [1, 2].

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости ряда (3).

**Литература**

1. Данилович Л. А., Лаптинский В. Н. *О периодической краевой задаче для обощенного уравнения Ляпунова с параметром* // XV Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям «Еругинсткие чтения–2013»: тез. докл. Междунар. науч. конф. Ч. 1. 2013. С. 51–52.

2. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.