ИССЛЕДОВАНИЕ УХОДЯЩИХ ДВИЖЕНИЙ

А.Ф. Зубова, И.С. Стрекопытов, С.А. Стрекопытов

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
ddemidova@mail.ru

Предлагается методика исследования движений, позволяющая изучить окрестность уходящей траектории и основанная на анализе структуры инвариантного множества.

Определение 1. Назовем уходящее движение $f(p,t)$ *положительно устойчивым по Пуассону в расширенном смысле по отношению к пространству* R_1, если существует хотя бы одна ω-предельная точка движения $f(p_1,p_2,t)$, принадлежащая самому движению, т. е. существует момент времени t^* такой, что $f_1(p_1,p_2,t^*)=q_1$, $q_1\in\Omega_{f_1}$.

Аналогичное определение можно ввести и в случае $t\to-\infty$.

Определение 2. Замкнутое в R R_1-инвариантное множество M динамической системы $f(p,t)=(f_1(p_1,p_2,t),f_2(p_1,p_2,t))$ называется *устойчивым по Ляпунову*, если по любому $\varepsilon>0$ можно указать величину $\delta>0$ такую, что при $\rho(p,M)<\delta$ выполняется

$$\rho_1(f_1(p_1,p_2,t),M\cap R_1)<\varepsilon \quad \text{при} \quad t\geqslant 0.$$

Теорема 1. *Для того чтобы замкнутое R_1-инвариантное множество M было устойчивым по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы существовал функционал $V(p)$, заданный в окрестности $S(M\bigcap R_1)\times R_2$ множества $(M\bigcap R_1)\times R_2$, удовлетворяющий условиям:*

1) $\forall c_1>0,\exists c_2>0\colon V(p)>c_2$ *при* $\rho_1(p_1,M\bigcap R_1)>c_1$;

2) $\forall\gamma_2>0,\exists\gamma_1>0: V(p)\leqslant\gamma_2$ *при* $\rho_1(p_1,M\bigcap R_1)<\gamma_1$;

3) $N(f(p,t))$ *является невозрастающей функцией при* $t\geqslant 0$, $p\in S(M,r)$, *пока* $f_1(p,t)$ *остается в* $S(M\bigcap R_1,r)$.

Определение 3. Множество $M\subset R=R_1\times R_2$ назовем R_1*-инвариантным по отношению к динамической системе* $f(p,t)=(f_1(p_1,p_2,t),f_2(p_1,p_2,t))$, если из $p\in$ $\in M$ следует: $f_1(p,t)\in M_{R_1}$, $\forall t\geqslant 0$, $M_{R_1}=\{p_1\in R_1\colon\exists p_2\in R_2,(p_1,p_2)\in M\}$.

Обозначим $M_{R_1}=M\bigcap R_1$. В качестве примера R_1-инвариантного множества в R можно привести множество $Q=\{q\times p(q_1)\}$. Действительно, из $p\in Q$ следует $f_1(p,t)\equiv q_1$, $f_1(p,I)\subset Q_{R_1}=q_1$. Таким образом, верна следующая

Теорема 2. *Множество точек $Q=\{q\times p(q_1)\}$ есть инвариантное замкнутое множество.*

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ВАЛЛЕ — ПУССЕНА ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.И. Кашпар, В.Н. Лаптинский

Институт технологии металлов НАН Беларуси, Могилев, Беларусь
alex.kashpar@tut.by, lavani@tut.by

Рассматривается краевая задача типа [1]:

$$\ddot{\mathbf{X}}=\mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{X}}+\dot{\mathbf{X}}\mathbf{B}(t)+\lambda(\mathbf{A}_1(t)\mathbf{X}+\mathbf{X}\mathbf{B}_1(t))+\lambda(\mathbf{A}_2(t)\dot{\mathbf{X}}+\dot{\mathbf{X}}\mathbf{B}_2(t))+\mathbf{F}(t), \qquad (1)$$

$$\mathbf{X}(0,\lambda)=\mathbf{M}, \quad \mathbf{X}(\omega,\lambda)=\mathbf{N}, \quad \mathbf{X}\in\mathbb{R}^{n\times m}, \tag{2}$$

где $\mathbf{F}(t)$, $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{A}_i(t)$, $\mathbf{B}_i(t)$ $(i=1,2)$ — матрицы класса $\mathbb{C}[0,\omega]$ соответствующих размерностей; $\mathbf{M},\mathbf{N}$ — заданные вещественные матрицы; $\omega>0$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

В данной работе на основе применения метода [2, гл. I] получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2), представляющие собой обобщение и развитие результатов [1, 3].

Введем следующие обозначения:

$$\lambda_U=\max_{0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant\omega}\|\mathbf{U}(t)\mathbf{U}^{-1}(\tau)\|, \quad \lambda_V=\max_{0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant\omega}\|\mathbf{V}^{-1}(\tau)\mathbf{V}(t)\|, \quad \alpha_i=\max_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|\mathbf{A}_i(t)\|,$$

$$\beta_i=\max_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|\mathbf{B}_i(t)\|, \quad \gamma=\|\mathbf{\Phi}^{-1}\|, \quad \varepsilon=|\lambda|, \quad a=\frac{1}{3}\gamma\omega^3\lambda_U^2\lambda_V^2(\alpha_1+\beta_1), \quad b=\frac{1}{2}\gamma\omega^2\lambda_U^2\lambda_V^2(\alpha_2+\beta_2),$$

где $\mathbf{U}(t)$, $\mathbf{V}(t)$ — интегральные матрицы уравнений

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt}=\mathbf{A}(t)\mathbf{U}, \quad \mathbf{U}(0)=\mathbf{E}_n, \quad \frac{d\mathbf{V}}{dt}=\mathbf{V}\mathbf{B}(t), \quad \mathbf{V}(0)=\mathbf{E}_m,$$

$\mathbf{\Phi}$ — линейный оператор, $\mathbf{\Phi}\mathbf{Z}(t)=\int_0^\omega \mathbf{U}(\tau)\mathbf{Z}(t)\mathbf{V}(\tau)\,d\tau$, $t\neq\tau$, $\mathbf{E}_k$ — единичная матрица порядка k.

Теорема. *Пусть выполнено условие $\varepsilon(a+b)<1$. Тогда задача* (1), (2) *однозначно разрешима, ее решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих условиям* (2).

Литература

1. Кашпар А. И., Лаптинский В. Н. *О задаче Валле — Пуссена для матричного уравнения Ляпунова второго порядка* // XI Белорус. матем. конф.: тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 5–9 ноября 2012 г. Ч. 2. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2012. С. 32.

2. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.

3. Кашпар А. И. *О задаче Валле — Пуссена для матричного уравнения Ляпунова второго порядка* // XV Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям (Еругинские чтения–2013): тез. докл. междунар. науч. конф., Гродно, 13–16 мая 2013 г. Ч. 1. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2013. С. 57.

ЦЕНТРЫ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ТИПА ЛЬЕНАРА ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

А.А. Кушнер

EPAM SYSTEMS, Минск, Беларусь
vesna85@tut.by

Рассмотрим систему

$$x'=y(1+Dx+Px^2+Fx^3),$$
$$y'=-x+Ax^2+3Bxy+Cy^2+Kx^3+3Lx^2y+Mxy^2+Ny^3+Rx^4+3Sx^3y+Wx^2y^2+Vxy^3, \tag{1}$$

где $A,B,C,D,F,K,L,M,N,P,R,S,W,V\in\mathbb{C}$.

Фокусные величины f_i, $i=1,2,\ldots$, являются полиномами из кольца $\mathbb{C}[p]$, где $p=(A,B,C,D,F,K,L,M,N,P,R,S,W,V)$. Образуем идеал $T=\langle f_1,f_2,\ldots,f_k,\ldots\rangle\subset\mathbb{C}[p]$. Тогда $\mathbb{V}(T)=\{p\in\mathbb{C}^{14}:\forall f\in T,\ f(p)=0\}$ является многообразием центра системы (1). Начало координат системы (1) — центр тогда и только тогда, когда $p\in\mathbb{V}(T)$. Положим $\omega=A+C$, $\psi=A+2C$, $\tau=A+3C$, $\kappa=C+D$, $\alpha=11A+23C$. Образуем идеалы:

PolotskSU