Доказательство. В полярных координатах гамильтониан (2) имеет вид

$$H(r,\varphi) = r^2((U(r,\varphi))^2 + (V(r,\varphi))^2), \tag{3}$$

а система (1) — вид

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{2}H_\varphi(r,\varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}H_r(r,\varphi). \tag{4}$$

Преобразование

$$w = \varphi - \frac{i}{2}\ln\left(\frac{(1-ir\cos\varphi)(\cos\varphi - i\sin\varphi)(U(r,\varphi)+iV(r,\varphi))}{(1+ir\cos\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi)(U(r,\varphi)-iV(r,\varphi))}\right),$$

где i — мнимая единица, переводит систему (4) в систему с совершенной изохронностью [1], т.е. гамильтониан (3) изохронный. Гамильтониан (3) неглобальный, так как его линия уровня $H = 1$ распадается на две непересекающиеся кривые, асимптотами которых яляется ось Ox.

Литература

1. Руденок А.Е. *Изохронность обратимых систем с однородными нелинейностями* // Вестн. Белоруского гос. ун-та. Сер. 1. 2013. № 2. С. 90–97.

ЦЕНТРЫ КУБИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ИНВАРИАНТНЫМИ ПРЯМЫМИ И КОНИКАМИ

А.П. Садовский, Т.В. Щеглова

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
sadovskii@bsu.by, shcheglovskaya@tut.by

Рассматривается система

$$\dot{x} = (1+Gx)(y + Hx^2 + Dxy + Ry^2),$$
$$\dot{y} = -x + Ax^2 + 3Bxy + Cy^2 + Kx^3 + 3Lx^2y + Mxy^2 + Ny^3, \tag{1}$$

где $A, B, C, D, G, H, K, L, M, N, R \in \mathbb{C}$.

Введем вектор $p = (A, B, C, D, G, H, K, L, M, N, R)$ и идеалы J_1 и J_2, где

$J_1 = \langle 4a_5^2u^5w_1Av + w_1(a_2w_1uv + 2w)(a_2w_1^2u + a_2w_1Ruv + 2Rw) + 2a_5(-2w^2v + w_1^2uv \times (a_2u^2(-v^2 + (a_2+3B)u) - 2w) + w_1u(2u^2(a_2+3B) - v^2(2R+3u))w) + 4a_5^2uv(2u^3w_1^2 - v^3w_1u(R+u) + 3u^3w_1Bv - v^2(w_1^2u + w)), -w_1 + Cu + (R+u)v, 8a_5^3u^6w_1^2Kv + (-a_2w_1 + 2a_5v)(4a_5^3u^4v^2w_1^2 + a_2w_1^4u(a_2w_1^2u + a_2w_1Ruv + 2Rw) + 2a_5w_1(a_2u^3w_1^3(-v^2 + (a_2+3B)u) + 2w^2Rv + a_2v^2w_1Ruw + 2w_1^2Ruvw) + 2a_5^2v(-2v^2w_1u(R+u)(w_1^2u + w) - 2v(w_1^2u + w)^2 + u^3w_1(w_1^2(a_2+6B)u + 2(a_2+3B)w))), 4a_5^3u^2v^2(-2u^2+v^2)w_1^2 + 12a_5^2u^5w_1^2Lv + a_2w_1^2(2a_2u^2w_1^4 + 4w^2R + a_2u^2w_1^3Rv + 2w_1^2u(4R+u)w + 2a_2w_1Ruvw) + a_5\, w_1(a_2u^2w_1^3(4u^2(a_2+3B) - v^2(2R + 3u)) - 4w^2(3R+u)v - 8a_2w_1^2uvw + 4a_2w_1u(3u^2B + a_2(u-v)(u+v))w) + 4a_5^2v((-2u^2w_1^4 + w^2)v + v^2w_1u(-w_1^2u(R+u) + a_2w) + u^3w_1(a_2(w_1^2\, u - w) - 3Bw)), -a_2w_1^4u + 2a_5u^3w_1Mv + w_1^3(-2a_5 + a_2R)uv - 2a_5v^2Rw - 2w_1^2(a_5u^3(a_2+3B) - a_5v^2u(3R+2u) + Rw) + 2w_1v(a_5^2(u^3 - 2v^2u) + a_2Rw), -w_1R + Nu + a_5v, 4a_5^2u^3w_1Hv - (a_2w_1 + 2a_5v)(-w_1(a_2w_1^2u + a_2w_1Ruv + 2Rw) + 2\, a_5(-u^3w_1(a_2+3B) + v(w_1u(w_1 + (R+u)v) + w))), -a_2w_1^3u + 2a_5u^2w_1Dv - 2w_1Rw + 2a_5(-u^3w_1(a_2+3B) + v(w_1u(-w_1 + a_2v) + w)), -2w_1 + a_1u + a_2v, a_2 - 2R - u, 4a_3a_5u^2 - (a_2w_1 - 2a_5v)^2, -a_2w_1 + a_4u + 2a_5v, u^2w_1G - 2w_1^2u - w\rangle,$

$J_2 = \langle 6a_5^2u^2B(2R+u)(2a_5-2R^2-Ru)+w_1^2(2R+u)^2(-2a_5+R(2R+u))^2+2a_5^2(-2v^2\times(-2a_5+R(2R+u))^2-u^2(2R+u)(2R(2R+u)^2-a_5(8R+3u))), w_1u(-w_1^2(2R+u)^2(a_5-R(2R+u))(2a_5-R(2R+u))+2a_5^2(4a_5^2v^2+(u^2+v^2)R(2R+u)^3-a_5(2R+u)(2v^2(3R+u)+u^2(4R+u))))-2a_5(2R+u)(2a_5-2R^2-Ru)(-w_1R+a_5v)w, 1+a_2a_5^2w_1GRtu(-2a_5+R(2R+u))v(-w_1R+a_5v)(2a_5^2v^2-w_1R(2R+u)^2v+a_5(2R+u)(-(u^2+v^2)R+2w_1v))\rangle.$

Положим $I_1 = (J_1 + J_2)\bigcap \mathbb{C}[p]$.

Введем далее идеал $J_3 = \langle w, 4a_5^3v^2(u^2+v^2)+w_1^2R(2R+u)^2v(w_1+Rv)+6a_5u^2B(a_5(u^2+v^2)R-2a_5w_1v+w_1R(2R+u)v)+a_5w_1(2R+u)(u^2w_1R-2w_1^2v+2Ru(u^2-v^2+2Ru)v)+2a_5^2(-2v^2w_1^2+R(-u^3v^2-2v^4(R+u)+u^4(2R+u))-w_1u(-v^2+2u(R+u))v), a_5^2(u^2+v^2)v+w_1^2R(2R+u)v-a_5w_1(-2u^2R+v(3w_1+uv)), 1+a_2a_5w_1GRtu(-2a_5+R(2R+u))v(-w_1R+a_5v)(a_5(u^2+v^2)R-2a_5w_1v+w_1R(2R+u)v)\rangle$.

Положим $I_3 = (J_1 + J_3)\bigcap \mathbb{C}[p]$.

Теорема. *Пусть* V *— многообразие центра системы* (1). *Имеет место включение* $\mathbb{V}(I_1)\bigcup\mathbb{V}(I_2)\subset V$.

При $p\in\mathbb{V}(I_1)\bigcup\mathbb{V}(I_2)$ система (1) имеет инвариантную конику $f=0$, где

$$f = 1+\frac{2w_1-2Rv-uv}{u}x+\frac{(2a_5v-2w_1R-w_1u)^2}{4a_5u^2}x^2+$$
$$+(2R+u)y+\frac{2w_1R+w_1u-2a_5v}{u}xy+a_5y^2.$$

В обоих случаях центра существует интегрирующий множитель Дарбу $\mu = f^{s_1}(1+Gx)^{s_2}$, где $s_1, s_2\in\mathbb{C}$.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛЬЕНАРА С КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ ТРЕНИЯ

И.Н. Сидоренко

Могилевский государственный университет им. А. А. Кулешова, Могилев, Беларусь

sidorenkoin@tut.by

Рассматривается система Льенара

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-g(x)-f(x)y, \tag{1}$$

где $f(x)$, $g(x)$ — полиномы соответственно степени n, m, $g'(0)>0$. Цикличность фокуса или центра $O(0,0)$ системы (1) эффективно находится с помощью анализа фокусных величин [1]. При $n=3$, $m=3$ она равна четырем. Если хотя бы одна из особых точек такой системы — антиседло, то возможны следующие комбинации особых точек: $2S+A$, $2A+S$, A. Здесь через $2A$ обозначено два антиседла, S — одно седло.

Система (1) с конфигурациями особых точек $2S+A$, A была исследована в [3], было показано, что в этом случае система может имеет не менее 4 предельных циклов «нормального размера».

Если система (1) имеет конфигурацию особых точек $2A+S$, то она может быть записана в виде

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dx}=x(1-(1+L)x+Lx^2)-\varepsilon(a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3)y. \tag{2}$$