О ПРИМЕНЕНИИ ОБРАТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДЛЯ ФИЛЬТРАЦИИ ЗАШУМЛЕННЫХ ДАННЫХ

В.Т. Борухов, О.И. Костюкова, М.А. Курдина

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
borukhov@im.bas-net.by, kostyukova@im.bas-net.by, kurdina@im.bas-net.by

В настоящее время активно развиваются методы обработки сигналов, которые также могут найти применение при решении обратных задач математической физики. Мы устанавливаем связи между методами априорного синтеза и анализа [1] оптимальной обработки сигналов и методом обращения открытых динамических систем [2].

Метод априорного синтеза дает оценку $\tilde{x}$ искомого сигнала $(x \in \mathbb{R}^n)$ в виде

$$\tilde{x} = T\tilde{c}, \quad \text{где} \;\; \tilde{c} = \arg\min_{c} ||y - Tc||_2^2 + ||c||_\gamma^\gamma.$$

Здесь y — наблюдаемый зашумленный сигнал, $\|c\|_p$ — p-норма вектора c, T — линейный оператор синтеза. Метод априорного анализа дает оценку искомого сигнала в виде

$$\tilde{x} = \arg\min_{x} ||y - x||_2^2 + ||Fx||_p^p,$$

где F — линейный оператор.

Рассмотрим задачу оптимального управления линейной динамической системой (ДС) вход — состояние — выход (в другой терминологии — открытой ДС)

$$\Sigma : \quad \begin{aligned} &\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), \quad t \in [t_0, t_f]; \\ &x(t) = Cz(t) + Du(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где $z(\cdot) = (z(t), t \in [t_0, t_f])$ — траектория динамической системы Σ, $u(\cdot) = (u(t), t \in \in [t_0, t_f])$ и $x(\cdot) = (x(t), t \in [t_0, t_f])$ — входной и выходной сигналы соответственно, $z \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$, $x \in \mathbb{R}^m$, A, B, C, D — матрицы соответствующих размерностей.

Оптимальное управление ДС Σ состоит в минимизации функционала качества

$$\mathcal{F}(z_0, u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_f} f(y(s) - x(s))\, ds + R(u(\cdot)), \quad (z_0 := z(t_0)), \tag{2}$$

$$\mathcal{F}(z_0, u(\cdot)) \to \min_{z_0, u(\cdot)}, \tag{3}$$

где $y(\cdot) = (y(t), t \in [t_0, t_f])$, $y \in \mathbb{R}^m$, — заданная функция. Другими словами, необходимо найти пару $(z_0^0, u^0(\cdot))$ такую, что функционал (2) принимает минимальное значение с учетом условий (1).

В задаче оценки сигнала $x(\cdot)$ функция $y(\cdot)$ может быть интерпретирована как зашумленная реализация искомой функции $x(\cdot)$ т.е. $y(t) = x(t) + w(t)$, $t \in [t_0, t_f]$, где $w(t)$ — ошибка измерений, которая рассматривается как случайная величина. В этом случае оценка $\tilde{x}(t)$ для сигнала $x(t)$ имеет вид $\tilde{x}(t) = Cz^0(t) + Du^0(t)$, где $z^0(\cdot) = (z^0(t), t \in [t_0, t_f])$ — траектория ДС Σ, соответствующая оптимальной паре $(z_0^0, u^0(\cdot))$. Таким образом задачу (1)–(3) можно рассматривать как обобщение подхода априорного синтеза. Применяя обратную ДС Σ^{-1}, получим обобщение метода априорного анализа.

Теорема. *Оценка* $\tilde{x}(t)$ *сигнала* $x(t)$, *полученная методом обобщенного априорного синтеза, совпадает с оценкой, полученной методом обобщенного априорного анализа.*

Литература

1. Karahanoglu F. I., Bayram I., Van De Ville D. *A signal processing approach to generalized 1-D total variation* // IEEE Transactions on Signal Processing. 2011. Vol. 59, no. 11. P. 5265–5274.

2. Борухов В. Т., Гайшун И. В., Тимошпольский В. И. *Структурные свойства динамических систем и обратные задачи математической физики.* Мн.: Бел. навука, 2009. 174 с.

ОБ ОДНОМ ОБОСНОВАНИИ ФОРМУЛЫ СТИРЛИНГА ДЛЯ Γ-ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА

В.И. Булатов

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
boulatov@bsu.by

На основании интегрального представления логарифмической производной Γ-функции Эйлера [1]

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \lim_{b\to+0}\big(\Gamma(b) - B(a;b)\big) = \int\limits_0^1 \left(\frac{x^{a-1}}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) dx$$

для $a > 0$ показывается, что

$$\ln\Gamma(a+1) = C + \left(a + \frac{1}{2}\right)\ln a - a + r(a), \tag{1}$$

где

$$C = 1 - \int\limits_0^1 f(x)\,dx, \quad r(a) = \int\limits_0^1 x^{a-1} f(x)\,dx, \tag{2}$$

$$f(x) = \frac{(x+1)\ln x - 2x + 2}{2(x-1)\ln^2 x}, \quad x \in]0;1[. \tag{3}$$

При этом в отличие от традиционного подхода в [1] вывод формулы (1) не требует ни знания интеграла Фруллани, ни вычисления интеграла Раабе.

Далее, учитывая, что $f(+0) = 0$ и $f(1-0) = 1/12$, получаем, что функция (3) является ограниченной т. е. $\exists M = \mathrm{const} \geqslant 0$, что $|f(x)| \leqslant M$ для $\forall x \in]0;1[$. Отсюда, во-первых, в силу (2) имеем $|r(a)| \leqslant M/a$ и, значит, $r(a) \to 0$ при $a \to +\infty$, и, во-вторых, из (1) получаем

$$\Gamma(a+1) \sim C_0\sqrt{a}\left(\frac{a}{e}\right)^a, \tag{4}$$

где $C_0 > 0$ — некоторая постоянная.

Использование (4) для соответствующих $a \in \mathbb{N}$ в легко проверяемом для $n \in \mathbb{N}$ равенстве $4^n \cdot \Gamma(n+1/2)\Gamma(n+1) = \sqrt{\pi}\Gamma(2n+1)$, аналогичном формуле Лежандра, дает