Основным методом анализа устойчивости нелинейных систем является прямой метод Ляпунова. Для систем с запаздывающим аргументом при его применении используются или функционалы Ляпунова — Красовского [1, 2] или функции Ляпунова и подход Б. С. Разумихина [2, 3].

В данной работе рассматриваются нелинейные системы с запаздывающим аргументом. Предлагается метод анализа устойчивости, основанный на совмещении подходов Н. Н. Красовского и Б. С. Разумихина. Конструктивный критерий исследования асимптотической устойчивости линейных систем [4] переносится на нелинейные системы.

В качестве примера рассматриваются однородные системы, для которых обобщаются предложенные в статье [1] метод построения функционалов Ляпунова — Красовского для линейных систем и в статье [4] критерий анализа асимптотической устойчивости линейных систем.

Предположим, что векторная функция $g(z_0, z_1, \ldots, z_m)$ от векторных аргументов $z_0, z_1, \ldots, z_m$ является непрерывно дифференцируемой. Тогда верна

Теорема. *Нулевое решение системы* $\dot{x}(t) = g(x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_m))$ *асимптотически устойчиво по Ляпунову тогда и только тогда, когда существуют положительно определенная и непрерывно дифференцируемая функция* $w(x)$ *и непрерывно дифференцируемый функционал* $v(\varphi)(v(0) = 0)$, *определенный на множестве кусочно непрерывных функций* $\varphi \in PC([-\tau_m, 0])$, *такие, что:*

1) $\dot{v}(x_t)|_{\dot{x}(t)=g(x(t),x(t-\tau_1),\ldots,x(t-\tau_m))} \leqslant -w(x(t))$;

2) $v(x_t) \geqslant v_1(c)$ *на множестве функций* $x_t \in S_c(t)$.

Здесь $S_c(t) = \{x_t : \|x(t+\sigma)\| \leqslant \|x(t)\| = c, \ \sigma \in [-\tau_m, 0]\}$, *а функция* $v_1(c)$ *положительно определена и непрерывна в некоторой окрестности нуля.*

Литература

1. Kharitonov V. L., Zhabko A. P. *Lyapunov — Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay system* // IEEE Trans. Automatica. 2003. Vol. 39. P. 15–20.
2. Александров А. Ю., Жабко А. П. *Об асимптотической устойчивости решений нелинейных систем с запаздыванием* // Сиб. матем. ж. 2012. Т. 53. № 3. С. 495–508.
3. Разумихин Б. С. *Об устойчивости систем с запаздыванием* // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, № 4. С. 500–512
4. Жабко А. П., Медведева И. В. *Алгебраический подход к анализу устойчивости дифференциально-разностных систем* // Вестн. СПбГУ. 2011. Сер. 10, вып. 1. С. 9–20.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

А.И. Калинин, Л.И. Лавринович

Белорусский госцдарственный университет, Минск, Беларусь
{kalininai, lavrinovich}@bsu.by

В рамках математической теории оптимальных процессов значительное внимание уделяется задачам оптимизации сингулярно возмущенных систем. Интерес к таким задачам вызван эффективностью асимптотических методов их решения, при применении которых они распадаются на задачи меньшей размерности. Кроме того, асимптотический подход позволяет избежать интегрирования сингулярно возмущенных систем, которые являются жесткими.

Доклад посвящен построению асимптотических приближений в виде программы и обратной связи к решению следующей задачи оптимального управления:

$$\dot{y} = A_1(t)y + A_2(t)z + B_1(t)u, \quad y(t_*) = y_*,$$

$$\mu\dot{z} = A_3(t)y + A_4(t)z + B_2(t)u, \quad z(t_*) = z_*,$$

$$y(t^*) = 0, \quad z(t^*) = 0, \quad J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_*}^{t^*} (y'M(t)y + \mu z'N(t)z + u'P(t)u)\,dt \to \min,$$

где μ — малый положительный параметр, t_*, t^* — заданные моменты времени ($t_* < t^*$), y — n-вектор медленных переменных, z — m-вектор быстрых переменных, u — r-вектор управления, $M(t)$, $N(t)$ — неотрицательно определенные симметрические матрицы, а $P(t)$ — положительно определенная симметрическая матрица для всех $t \in [t_*, t^*]$.

Предполагается, что матрица $A_4(t)$, $t \in [t_*, t^*]$, устойчивая, т. е. действительные части всех ее собственных значений отрицательны.

Суть предлагаемого метода состоит в построении асимптотики множителей Лагранжа в виде разложений по целым степеням малого параметра. Старшие коэффициенты этих разложений могут быть найдены в результате решения двух невозмущенных задач оптимального управления с n и m фазовыми переменными соответственно.

МЕТОД ЗНАКОПОСТОЯННЫХ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Б.С. Калитин

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
Kalitine@bsu.by

В настоящем докладе представлены исследования задачи об устойчивости равновесия для почти периодических по времени (в смысле Бора) обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x,t), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Здесь D — открытая связная окрестность начала координат n-мерного евклидового пространства $\mathbb{R}^n$, $f(x,t)$ — непрерывная, почти периодическая по времени t функция, удовлетворяющая условию Липшица по x, причем $f(0,t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Доказаны теоремы об устойчивости, асимптотической устойчивости (локальной и глобальной) и неустойчивости с использованием не определенно положительных, а знакопостоянных функций Ляпунова. Установлено, что почти периодические системы, как подкласс обыкновенных неавтономных дифференциальных уравнений, допускают формулировки теорем второго метода, весьма близкие к тем, которые представлены для автономных систем в монографиях [1, 2]. В частности, теорема об устойчивости формулируется следующим образом.

Теорема. *Предположим, что для системы* (1) *существуют окрестность* U *точки* $x = 0$, *непрерывно дифференцируемая, почти периодическая по времени* t *функция* $V : U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *такая, что для всех* $(x,t) \in U \times \mathbb{R}$ *выполняются следующие условия:*