где $x \in R^n$, $y \in R^m$, $u \in R^r$, $A_0, A_1, A_2, B_1, B_2, C$ — постоянные матрицы соответствующих размеров, h $(h \geqslant 1)$ — натуральное число (запаздывание).

В докладе для системы (1) ставится задачи различных видов управляемости и наблюдаемости, приводятся результаты полученные собственно авторами [1–9], а также указываются направления и задачи дальнейших исследований этой и других более сложных сингулярных дискретных систем.

Литература

1. Габасов Р. Ф., Кирилова Ф. М., Крахотко В. В., Минюк С. А. *Теория управляемости линейных систем. I. Определяющее уравнение* // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 5. С. 767–773.
2. Габасов Р. Ф., Кирилова Ф. М., Крахотко В. В., Минюк С. А. *Теория управляемости линейных систем. II. Обыкновенные системы* // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 6. С. 1081–1091.
3. Габасов Р. Ф., Кирилова Ф. М., Крахотко В. В., Минюк С. А. *Теория управляемости линейных систем. III. Системы с последействием* // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. № 7. С. 1283–1291.
4. Размыслович Г. П. *Управляемость каузальных линейных дескрипторных дискретных систем с запаздыванием* // Вестн. БГУ. 1996. Сер. 1. № 2. С. 72–74.
5. Крахотко В. В., Размыслович Г. П. *Управляемость каузальных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием* // Изв. Ин-та математики и информатики. 2006. Вып. 3(37). Ижевск. С. 75–76.
6. Крахотко В. В., Размыслович Г. П. *К управляемости дискретных систем с запаздыванием по управлению.* // Тез. докл. Междунар. конф. «АМАДЕ». 11–14 сентября 2009 г. Минск. С. 91–92.
7. Игнатенко В. В. Крахотко В. В., Размыслович Г. П. *H-управляемость линейных дескрипторных дискретных систем с запаздыванием по управлению* // Материалы Междунар. научно-технической конф. «Автоматический контроль и автоматизация производственных процессов». 28–29 сентября 2009 г. БГТУ, Минск. С. 319–320.
8. Крахотко В. В., Размыслович Г. П. *Некоторые задачи наблюдаемости дискретных динамических систем.* // Тез. докл. Междунар. конф. «XI Белорусская математическая конференция». г. Минск, 5–9 ноября 2012 г. Ч. 2. С. 114–115.
9. Игнатенко В. В., Крахотко В. В., Размыслович Г. П. *Управляемость дескрипторных линейных дискретных систем* // Тез. докл. Междунар. конф. «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация». Минск, 1–5 октября 2013 г. С. 135–136.

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ДЕМПФИРОВАНИИ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ОКРЕСТНОСТИ АСИМПТОТИЧЕСКИ ИНВАРИАНТНОГО МНОЖЕСТВА

С.Е. Купцова

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
sekuptsova@yandex.ru

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y), \tag{1}$$

относительно которой предположим, что она удовлетворяет всем условиям существования и единственности решения задачи Коши, а также имеет устойчивый предельный цикл вида $x^2 + y^2 = 1$. Наряду с системой (1) рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = f(x, y) + R_1(t) + b_1 u, \quad \dot{y} = g(x, y) + R_2(t) + b_2 u, \tag{2}$$

где b_1 и b_2 постоянные строчки размерности r, u — вектор управлений размерности r, функции $R_1(t)$ и $R_2(t)$ определены и непрерывны на множестве $t \geqslant 0$. Полагая

$\Phi(x,y) = (xf+yg)/(x^2+y^2)$ и $\omega(x,y) = (xg-yf)/(x^2+y^2)$, перепишем систему (2) полярных координатах:

$$\dot{\varrho} = \Psi(\varrho,\varphi) + R_1(t)\cos\varphi + R_2\sin\varphi + b_1 u\cos\varphi + b_2 u\sin\varphi,$$

$$\varrho\dot{\varphi} = \varrho\omega + R_2(t)\cos\varphi - R_1\sin\varphi + b_2 u\cos\varphi - b_1 u\sin\varphi,$$

где $\Psi(\varrho,\varphi) = \Phi(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\varrho$. Относительно Ψ предположим, что $\Psi(0,\varphi) \equiv 0$, $\Psi(1,\varphi) \equiv 0$ и при каждом $\varrho \neq 0$ и $\varrho \neq 1$ функция $\Psi(\varrho,\varphi)$ равномерно отделена от нуля на множестве $\varphi \in [0,2\pi]$ некоторой константой, зависящей от ϱ, причем $\Psi < 0$ при $\varrho > 1$ и $\Psi > 0$ при $0 < \varrho < 1$. При выполнении этих условий, система (1) будет иметь устойчивый предельный цикл.

Функция $V(\varrho) = (\varrho-1)/2$ определяет расстояние от точки на траектории, соответствующей переходному процессу до предельного цикла. Нам надо управлять системой так, чтобы это расстояние убывало наискорейшим образом. В качестве управлений будем брать кусочно непрерывные функции с ограничениями вида

$$|u_j| \leqslant 1, \quad j = 1,\ldots,r. \tag{3}$$

Из [1] известно, что при ограничениях (3) управления оптимальные по отношению к демпфированию функции V будут иметь вид

$$u_j^{(0)} = -\mathrm{sign}((\nabla V)^\top b^j), \quad j = 1,\ldots,r,$$

где b^j это j-й столбец матрицы $B = (b_1^\top, b_2^\top)^\top$. Положим

$$\overline{\Psi} = \overline{\Psi}(\varrho) = \max_{\varphi\in[0,2\pi]} \Psi(\varrho,\varphi), \quad R(t) = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}.$$

Теорема 1. *Если у матрицы B найдутся такие линейно независимые столбцы b^i и b^j, что:*

$$R(t) \leqslant (\|(b^i,b^j)^{-1}\|)^{-1},$$

тогда любая траектория системы (1), *стартующая из точки, находящейся вне произвольной δ-окрестности множества $\varrho \leqslant 1$, в произвольный момент времени $t = t_0$, при выбранном законе управления, будет попадать в эту δ–окрестность множества $\varrho \leqslant 1$ за время $t \leqslant t_0 + m^{-1}(r_0 - (1+\delta))$, где $m = -\max\overline{\Psi}(r)$.*

Теперь предположим, что $\Psi(1,\varphi) = 0$ при всех $\varphi \in [0,2\pi]$ и существует величина $\Delta > 0$ такая, что $\Psi(\varrho,\varphi) \leqslant \Delta$ на множестве $\varrho \geqslant 1$ и $\Psi(\varrho,\varphi) \geqslant -\Delta$ на множестве $\varrho \leqslant 1$. В этом случае система (1) будет иметь инвариантное множество $\varrho = 1$. Построим управление вида (3), которое будет оптимальным в смысле демпфирования функции $V(\varrho) = (\varrho-1)/2$ и будет переводить любое движение системы (2) в произвольно малую окрестность множества $\varrho = 1$.

Теорема 2. *Если у матрицы B найдутся такие линейно независимые столбцы b^i и b^j, что:*

1) $\Delta < (\|(b^i,b^j)^{-1}\|)^{-1}$;

2) $R(t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$,

тогда все траектории системы (2), *при выбранном законе управления, будут стремиться к множеству $\varrho = 1$ при $t \to \infty$.*

Литература

1. Зубов В. И. *Лекции по теории управления.* М.: Наука, 1975.