2) p_2 — *результант* $u_9x^3 + (3u_{10} + 2u_{13})x^2y + (3u_{11} + u_{14})xy^2 + u_{12}y^3$.

Аналогичное утверждение имеет место и в случае $r = 6$ для системы из 3 уравнений.

Таким образом, основным направлением продолжения исследования является проверка гипотезы о том, что при любом r все сингулярные точки описывается системой уравнений, каждое из которых является инвариантом некоторой бисистемы.

Литература

1. Аграчев А. А., Сачков Ю. Л. *Геометрическая теория управления.* М.: Физматлит, 2005.
2. Grayson M., Grossman. R. *Models for Free Nilponent Lie Algerbras* // J. Algebra. 1988. Vol. 35. P. 177–191.
3. Doubrov B., Zelenko I. *On local geometry of nonholonomic rank 2 distributions* // Journal of London Mathematical Society. 2009. Vol. 80. Iss. 3. P. 545–566
4. Olver P. *Classical Invariant Theory.* London: Cambridge University Press, 1999.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ДВА МАЛЫХ ПАРАМЕТРА

Н.А.Письменный

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
n.pismennyy@gmail.com

Рассматривается следущая система дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1) + \mu_1\gamma_1(t, x_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_2) + \mu_2\gamma_2(t, x_1). \tag{1}$$

Предполагается, что $f_1, f_2 : R^n \to R^n$, $\gamma_1, \gamma_2 : R^1 \times\ R^n \to R^n$, γ_1, γ_2 являются T-периодическими функциями по первой переменной, μ_1, μ_2 — малые положительные параметры. Функции $f_1, f_2, \gamma_1, \gamma_2$ имеют непрерывные производные по соответствующим пространственным переменным x_1, x_2.

При нулевых значениях параметров μ_1 и μ_2 система (1) распадается на два автономных уравнения:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_i), \quad i = 1, 2 \tag{2}$$

каждое из которых имеет $T-$ периодические решение $\varphi_i(t)$. Также предполагается, что 1 является простым собственным значением у операторов сдвига по траектории линеаризованных на φ_i уравнений (2).

Найдены условия устойчивости периодических решений системы (1).

СТАТИСТИЧЕСКИ СЛАБО ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Л.И. Родина

Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия
box0589@udmnet.ru

Предлагается новый подход к расширению понятия инвариантности, который исследовался в работах [1, 2]. Этот подход состоит в изучении статистически инвариантных и статистически слабо инвариантных множеств относительно управляемой системы

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m. \tag{1}$$

В данной работе предполагаем, что $u \in U$, U — компакт в $\mathbb{R}^m$, функция $f(t, x, u)$ непрерывна, функция $t \to f(t, x, u)$ почти периодическая в смысле Бора.

Определим верхнюю относительную частоту попадания траектории решения $\varphi(t)$ системы (1) в заданное множество $\mathfrak{M} = \big\{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in M(t)\big\}$:

$$\mathrm{freq}^*(\varphi) \doteq \varlimsup_{\vartheta \to \infty} \frac{\mathrm{mes}\{t \in [0, \vartheta] : \varphi(t) \in M(t)\}}{\vartheta},$$

где mes — мера Лебега на числовой прямой. Аналогично определим нижнюю относительную частоту $\mathrm{freq}_*(\varphi)$. Если $\mathrm{freq}^*(\varphi) = \mathrm{freq}_*(\varphi)$, то предел $\mathrm{freq}(\varphi) = \mathrm{freq}^*(\varphi) = \mathrm{freq}_*(\varphi)$ назовем *относительной частотой попадания решения* $\varphi(t)$ в множество $\mathfrak{M}$.

Пусть функция $t \to M(t)$, задающая множество $\mathfrak{M}$, почти периодическая и для каждого $t \in \mathbb{R}$ множество $M(t)$ выпукло, компактно и имеет непустую внутренность. Многозначная функция $t \to M(t)$ называется почти периодической, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Theta(\varepsilon) \doteq \{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{t \in \mathbb{R}} \mathrm{dist}(M(t + \tau), M(t)) \leqslant \varepsilon\}$ относительно плотно на $\mathbb{R}$ (здесь dist — расстояние по Хаусдорфу). Если функции $\varphi(t)$ и $M(t)$ почти периодические, то предел $\mathrm{freq}(\varphi)$ существует. Обозначим через $\partial M(t)$ границу, через $\mathrm{int}M(t)$ — внутренность множества $M(t)$.

Определение [1, 2]. Множество $\mathfrak{M}$ называется *статистически слабо инвариантным* относительно управляемой системы (1), если для любой точки $x \in M(0)$ найдется хотя бы одно решение $\varphi(t)$ системы (1), определенное при всех $t \geqslant 0$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0) = x$ и равенству $\mathrm{freq}^*(\varphi) = 1$.

Теорема. *Пусть для любой точки* $x \in M(0)$ *найдется решение* $\varphi(t)$ *системы* (1), *удовлетворяющее условию* $\varphi(0) = x$ *и равенству* $\lim\limits_{t \to \infty} |\varphi(t) - \widetilde{\varphi}(t)| = 0$, *где* $\widetilde{\varphi}(t)$ *— почти периодическое решение данной системы. Тогда выполнено неравенство* $\mathrm{freq}^*(\varphi) \leqslant \mathrm{freq}(\widetilde{\varphi})$. *Если, кроме того,*

$$\lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\mathrm{mes}\,\{t \in [0, \vartheta] : \widetilde{\varphi}(t) \in \partial M(t)\}}{\vartheta} = 0,$$

то предел $\mathrm{freq}(\varphi)$ *существует и* $\mathrm{freq}(\varphi) = \mathrm{freq}(\widetilde{\varphi})$.

Следствие. *Пусть для любой точки* $x \in M(0)$ *существует решение* $\varphi(t)$ *системы* (1), *удовлетворяющее начальному условию* $\varphi(0) = x$ *и равенству* $\lim\limits_{t \to \infty} |\varphi(t) - \widetilde{\varphi}(t)| = 0$, *где* $\widetilde{\varphi}(t)$ *— почти периодическое решение, такое что*

$$\lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\mathrm{mes}\{t \in [0, \vartheta] : \widetilde{\varphi}(t) \in \mathrm{int}M(t)\}}{\vartheta} = 1.$$

Тогда множество $\mathfrak{M}$ *статистически слабо инвариантно относительно системы* (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №12-01-00195).

Литература

1. Родина Л. И. *Пространство* $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ *с метрикой Хаусдорфа — Бебутова и статистически инвариантные множества управляемых систем* // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 2012. Т. 278. С. 217–226.

2. Родина Л. И. *Оценка статистических характеристик множества достижимости управляемых систем* // Изв. вузов. Математика. 2013. Т. 11. С. 20–32.