Теорема. *Пусть* $\lambda(t,x)$ *является непрерывно дифференцируемой функцией, существует единственное решение уравнений* $z = x - as_k(x)$, $z = x + as_k(x)$, $z = \gamma^0(t) - at$, $z = \gamma^{-1}(t) + at$ *для всех* $k = \overline{0,\infty}$, *которые также являются дважды непрерывно-дифференцируемыми функциями. Функции, задающие границу принадлежат классу* C^2 *на множестве своего задания. Если выполняются условия согласования на начальные и граничные условия в точках* $(t^{(0)}, x^{(0)})$ *и* $(t^{(-1)}, x^{(-1)})$ *и функция* $f(t,x) \in C^2(\overline{Q})$ *и удовлетворяет условию* $f(t,\gamma^{(0)}(t)) = f(t,\gamma^{(0)}(t)) = 0$, *тогда существует единственное решение первой смешанной задачи для неоднородного уравнения Клейна — Гордона — Фока, которое принадлежит классу* $C^2(\overline{Q})$.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ФАКТОРИЗОВАННОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ ПРИ ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ВРЕМЕНИ ПЕРВОЙ КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

Ф.Е. Ломовцев, Ю.Ф. Новик

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

lomovcev@bsu.by, overon@tut.by

Во множестве классических решений изучена корректность по Адамару краевой задачи

$$(\partial_t - a_2\partial_x + b_2)(\partial_t + a_1\partial_x + b_1)u(x,t) = f(x,t),$$

$$\{x,t\} \in G = [0,\infty[\times[0,\infty[, \quad a_1 > 0, \quad a_2 \geqslant 0, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x < \infty, \tag{2}$$

$$(\alpha(t)u_t + \beta(t)u_x + \gamma(t)u)|_{x=0} = \mu(t), \quad 0 \leqslant t < \infty, \tag{3}$$

где $f, \varphi, \psi, \mu, \alpha, \beta, \gamma$ — заданные функции указанных выше независимых переменных x и t.

Методом характеристик в явном виде получена формула классических решений $u \in C^{(2)}(G)$ начально-краевой задачи (1)–(3), а также выведены необходимые и достаточные условия гладкости (4), (5) на правую часть f, начальные данные φ, ψ, граничное данное μ и условия согласования (6), (7) исходных данных, которые обеспечивают существование единственных классических решений этой краевой задачи. Доказана

Теорема. *Пусть коэффициенты граничного условия* $\alpha, \beta, \gamma \in C^{(1)}[0,\infty[$ *и* $\beta(t) \neq a\alpha(t)$, $t \in [0,\infty[$. *Для существования единственных классических решений* $u \in C^{(2)}(G)$ *начально-краевой задачи* (1)–(3) *необходимо и достаточно выполнения следующих условий:*

$$f \in C(G), \quad \varphi \in C^{(2)}[0,\infty[, \quad \psi \in C^{(1)}[0,\infty[, \quad \mu \in C^{(1)}[0,\infty[, \tag{4}$$

$$\int_0^t f^{(1,0)}(x + (-1)^i a_i(t-\tau), \tau)\, d\tau \in C(G), \quad i = 1,\, 2, \tag{5}$$

$$\alpha(0)\psi(0) + \beta(0)\varphi'(0) + \gamma(0)\varphi(0) = \mu(0), \tag{6}$$

$$\alpha(0)[f(0,0) + (a_2 - a_1)\psi'(0) + a_1a_2\varphi''(0) - (b_1 + b_2)\psi(0) - (a_1b_2 - a_2b_1)\varphi'(0) - b_1b_2\varphi(0)] +$$
$$+ (\alpha'(0) + \gamma(0))\psi(0) + \beta(0)\psi'(0) + \beta'(0)\varphi'(0) + \gamma'(0)\varphi(0) = \mu'(0), \tag{7}$$

Здесь $C^{(i)}(\Omega)$ — множество i раз непрерывно дифференцируемых функций на множестве Ω, $i = 1, 2$, $C(\Omega)$ — множество непрерывных функций на множестве Ω, одним и двумя штрихами над функциями обозначены соответственно первая и вторая производные этих функций и индексом $(1, 0)$ над функцией $f(y, s)$ обозначена ее первая частная производная по переменной y.

Явные формулы классических решений начально-краевой задачи для неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны, а также необходимые и достаточные условия на правую часть f, начальные данные φ, ψ и граничное данное μ были впервые получены в случае зависящей от времени первой косой производной в граничном условии в [1]. В случае однородного уравнения колебаний полуограниченной струны явные формулы классических решений при зависящей от времени первой косой производной в граничном условии, а также достаточные условия на φ, ψ и μ были установлены С.Н. Барановской, Н.И. Юрчуком в [2].

Литература

1. Ломовцев Ф. Е., Новиков Е. Н. *Метод Дюамеля решения неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны с косой производной в нестационарном граничном условии* // Вестн. БГУ. 2012. Сер. 1. № 1. С. 83–86.

2. Барановская С.Н., Юрчук Н. И. *Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косой производной в краевом условии* // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 8. С. 1188–1191.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ФАКТОРИЗОВАННОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ ПРИ ПОЛУНЕСТАЦИОНАРНОЙ ВТОРОЙ ФАКТОРИЗОВАННОЙ КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

lomovcev@bsu.by, novikovevgenij@gmail.by

Методом характеристик получена явная формула классических решений задачи

$$(\partial_t - a_2\partial_x + b_2)(\partial_t + a_1\partial_x + b_1)u(x,t) = f(x,t), \quad t \geqslant 0, \quad x \geqslant 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 \geqslant 0, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \geqslant 0, \tag{2}$$

$$[(\alpha_2(t)\partial_t + \beta_2(t)\partial_x + \gamma_2(t))(\alpha_1\partial_t + \beta_1\partial_x + \gamma_1)u]|_{x=0} = \mu(t), \quad t \geqslant 0, \tag{3}$$

где правая часть f, начальные данные φ, ψ, граничное данное μ, коэффициенты α_2, β_2, γ_2 — заданные функции независимых переменных x, t и α_1, β_1, γ_1 — вещественные постоянные.

Для существования единственных классических решений этой смешанной задачи нами установлены необходимые и достаточные условия гладкости (4), (5) на правую часть f, начальные данные φ, ψ и граничное данное μ, а также условие их согласования (6).

Теорема. *Пусть коэффициенты* $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in C[0,\infty[$ *и* $a_1\alpha_i \neq \beta_i$, $t \in [0,\infty[$, $i = 1, 2$. *Единственные классические решения* $u \in C^{(2)}(G)$, $G = [0,\infty[\times[0,\infty[$, *смешанной задачи* (1)–(3) *существуют тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

$$f \in C(G), \quad \varphi \in C^{(2)}[0,\infty[, \quad \psi \in C^{(1)}[0,\infty[, \quad \mu \in C[0,\infty[, \tag{4}$$