в пространствах вектор-функций $L_2(X, \mathbb{C}^m, \mu)$. Здесь $\alpha : X \to X$ — заданное отображение, $A$ — заданная матрично-значная функция. В работе получены условия существования решения уравнения (1) для любой правой части и получена формула, дающая одно из решений. В операторных терминах это означает, что построен правый обратный к оператору $I - B$, где $Bu(x) = A(x)u(\alpha(x))$ — оператор взвешенного сдвига.

При выполнении ряда условий на отображение $\alpha$ и коэффициент $A$ (мы не приводим здесь эти условия ввиду ограниченности объема) доказано следующее утверждение.

**Теорема.** *Для уравнения* (1) *следующие свойства эквивалентны:*

*i) для любой функции $f \in L_2(X, \mu)$ существует решение $u \in L_2(X, \mu)$;*

*ii) существует ограниченная измеримая проекторно-значная матрица-функция $p(x)$, такая, что ряд*

$$-\sum_{k=0}^{+\infty} B^k P f + \sum_{k=-1}^{-\infty} B^k (I - P) f, \tag{2}$$

*где $P$ — оператор умножения на $p(x)$, сходится для всех $f \in L_2(X, \mathbb{C}^m, \mu)$.*

*Сумма ряда* (2) *есть одно из решений уравнения* (1).

Уравнения вида (1) являются аналогами линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t) \tag{3}$$

в банаховых пространствах (здесь $u$ есть функция со значениями в банаховом пространстве $E$, $A$ — линейный оператор в этом пространстве). Для таких уравнений задача о разрешимости ставится следующим образом. Пусть задана пара пространств $U$ и $F$, состоящих из функций на $\mathbb{R}$ со значениями в $E$. Требуется найти условия на оператор $A$, при выполнении которых для любой функции $f \in F$ существует решение $u$ уравнения (3), принадлежащее пространству $U$. Эта задача детально исследована (см. [1, 2]), однако для дифференциальных уравнений формулы, задающие такие решения для любого $f$, не получены.

**Литература**

1. Массера Х., Шеффер Х. *Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства.* М.: Мир, 1970.

2. Баскаков А. Г. *Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений* УМН. 2013. Т. 68, №1. С. 77–128.

## АСИМПТОТИКА ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЭРМИТА

**А.В. Астафьева, А.П. Старовойтов**

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

{astafeva,svoitov}@gsu.by

Диагональными аппроксимациями Эрмита — Паде I типа (Latin type) и $(n - 1)$-го порядка для набора экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^{k}$ называются $k+1$ многочленов $A_n^0(z), A_n^1(z), \ldots, A_n^k(z)$ степени не выше $n-1$, для которых

$$R_n(z) = \sum\nolimits_{p=0}^{k} A_n^p(z)\, e^{\lambda_p z} = O(z^{kn+n-1}), \quad z \to 0. \tag{1}$$

Используя теорему Коши о вычетах, легко показать, что функции, заданные интегралами

$$A_n^p(z) = \frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i} \int\limits_{C_p} \frac{e^{\xi z} d\xi}{[\varphi(\xi)]^n}, \tag{2}$$

где $\lambda_j$ — произвольные различные действительные числа, $j = 0, 1, \ldots, k$, $C_p$ — круг с центром в точке $\lambda_p$ столь малого радиуса, что все остальные $\lambda_j$ лежат во внешности этого круга, а $\varphi(\xi) = (\xi-\lambda_0)(\xi-\lambda_1)\ldots(\xi-\lambda_k)$, удовлетворяют (1) и всем другим свойствам. Интегралы (2) называются интегралами Эрмита Latin type, которые Ш. Эрмит ввел в 1883 г.

В работах К. Малера, П. Борвейна, В. Вилонского и др. авторов был обнаружен ряд замечательных свойств таких многочленов. В частности, с их помощью можно дать новое обоснование трансцендентности числа $e$.

Далее $k = 3$ и $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2 + \varepsilon$, $\lambda_3 = 3 + \varepsilon$, где $\varepsilon$ — действительное число по модулю меньшее 1. В этом случае нами найдена асимптотика интегралов (2).

**Теорема.** *При $n \to \infty$ локально равномерно по $z$*

$$A_n^0(z) = \frac{(-1)^n}{2\gamma\sqrt{\pi n}} \left(\frac{2}{2+\varepsilon}\right)^{2n-1} e^{(3+\varepsilon-\gamma)z/2}(1 + O(1/n)),$$

$$A_n^3(z) = \frac{(-1)^{n+1}}{2\gamma\sqrt{\pi n}} \left(\frac{2}{2+\varepsilon}\right)^{2n-1} e^{(3+\varepsilon+\gamma)z/2}(1 + O(1/n)),$$

$$A_n^1(z) = \frac{1}{\gamma\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{4}{(1+\varepsilon)(3+\varepsilon)}\right)^{2n-1} e^{(1+\varepsilon)z/2}(1 + O(1/n)) -$$
$$- \frac{(-1)^n}{2\gamma\sqrt{\pi n}} \left(\frac{2}{2+\varepsilon}\right)^{2n-1} e^{(1+\varepsilon-\gamma)z/2}(1 + O(1/n)),$$

$$A_n^2(z) = \frac{(-1)^n}{2\gamma\sqrt{\pi n}} \left(\frac{2}{2+\varepsilon}\right)^{2n-1} e^{(-1-\varepsilon-\gamma)z/2}(1 + O(1/n)) -$$
$$- \frac{1}{\gamma\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{4}{(1+\varepsilon)(3+\varepsilon)}\right)^{2n-1} e^{-(1+\varepsilon)z/2}(1 + O(1/n)),$$

*где $\gamma = \sqrt{5 + 4\varepsilon + \varepsilon^2}$.*

**Литература**

1. Hermite C. *Sur la généralisation des fractions continues algébriques* // Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A. 1883. Vol. 21. P. 289–308.

## СОПРЯЖЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО АЛГЕБРЫ ФУНКЦИЙ С РАЗРЫВАМИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

**А.Н. Глаз**

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
anna-glaz@yandex.ru

Пусть $A$ — подалгебра алгебры ограниченных комплекснозначных функций на $[0, 1]$, содержащая:

1) функции, обладающие конечными односторонними пределами в каждой точке;