ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ В РАМКАХ МНЕМОФУНКЦИОНАЛЬНОГО ПОДХОДА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

А.Х. Уазиз

Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка, Минск, Беларусь
aminminsk@gmail.com

В докладе будет рассматриваться некорректная многомерная задача Коши

$$\dot{X}(t) = f(X(t))\dot{L}(t), \quad X(0) = X_0, \quad t \in T. \tag{1}$$

Здесь $X : T \to \mathrm{R}^p$ неизвестная вектор-функция, $t \in T = [0; a]$, f — матрично-значная функция , $f(X(t)) = (f^{ij}((X(t))),\ i = \overline{1,p},\ j = \overline{1,p}$, где f^{ij} — ограниченного роста и удовлетворяют условию Липшица по всем переменным, а $L(t)$ — вектор-функция столбец, где $L^i(t)$ — непрерывные справа функции ограниченной вариации, причем $L^i(0) = 0$ и $L^i(a{-}0) = L(a)$, $\dot{L}(t)$ — ее обобщенная производная, вычисляемая покоординатно.

Следуя подходу с позиций алгебр мнемофункций (см., напр., [1]), задаче Коши (1) поставим в соответствие уравнение в дифференциалах в алгебре мнемофункций, которое на уровне представителей имеет вид многомерной конечно-разностной задачи:

$$X_n^i(t + h_n) - X_n^i(t) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{ij}(X_n(t))[L_n^j(t + h_n) - L_n^j(t)],$$

$$X_n^i(t)|_{[0,h_n)} = X_{n0}^i(t), \quad i = \overline{1,p}, \tag{2}$$

где в качестве представителей f_n и L_n будут использоваться соответствующие полиномы Бернштейна.

Пусть t — произвольная фиксированная точка из отрезка T. Тогда t представляется в виде $t = \tau_t + m_t h_n$, где $\tau_t \in [0, h_n)$, $m_t \in \mathrm{N} \cup \{0\}$. Решение системы (2) можно переписать следующим образом:

$$X_n^i(t{+}h_n){=}X_{n0}^i(\tau_t){+}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{ij}(X_n(\tau_t{+}kh_n))[L_n^j(\tau_t{+}(k{+}1)h_n){-}L_n^j(\tau_t{+}kh_n)]], \quad i{=}\overline{1,p}.$$

Следующая теорема определяет условия сходимости задачи (2) и описывает вид ассоциированных решений задачи (1).

Теорема. *Решение $X_n(t)$ задачи (2) сходится в $L^1(T)$ при $n \to \infty$, $h_n \to 0$ так, что $1/n = o(h_n^2)$ к решению двумерного интегрального уравнения $X(t) = x_0 + \int_0^{t+} f(X(s-0))\,dL(s)$, если выполняется $\int_T |X_{n0}(\tau_t) - x_0|\,dt \to 0$.*

Отметим, что ранее подобная задача изучалась другими авторами в рамках мнемофункционального подхода с использованием в качестве представителей исключительно сверток. При этом в теоремах об ассоциированном решении (1) фигурировало другое условие на характер связи $1/n$ и h_n, что связано с аппроксимационными свойствами выбираемых представителей мнемофункций. Также напомним, что аналогичная задача Коши в одномерном случае в алгебре мнемофункций с использованием полиномов Бернштейна была рассмотрена в [1].

Литература

1. Уазиз А. Х., Яблонский О. Л. *Дифференциальные уравнения с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемофункций в случае применения полиномиальной аппроксимации* // Докл. НАН Беларуси. 2012. Т. 56, № 2. С. 22–26.

ОЦЕНКА СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПРЯМОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ АЛГЕБР МНЕМОФУНКЦИЙ

Е.В. Шлыков

Международный университет «МИТСО», Минск, Беларусь
eugene.shlykov@gmail.com

Как известно, при решении дифференциальных уравнений и систем, содержащих произведение обобщенных функций, сталкиваются с необходимостью корректного определения данного произведения, поскольку в общем случае это произведение не определено. Отметим, что получаемое решение существенно зависит от способа определения произведения обобщенных функций. Существуют различные методы исследования подобного рода задач, одним из которых является их рассмотрение в рамках теории мнемофункций.

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений (1), где функции f^i удовлетворяют условию Липшица, а L^i — непрерывные справа функции ограниченной вариации:

$$\dot{X}^i(t) = f^i(X^1(t), X^2(t))\dot{L}^i(t), \quad X^i(0) = x_0^i, \quad t \in T = [0, a] \in \mathbf{R}, \quad i = 1, 2. \tag{1}$$

На уровне представителей в прямом произведении алгебр мнемофункций исходной задаче Коши мы можем поставить в соответствие конечно-разностную задачу с осреднением которая имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} X_n^i(t + h_n) - X_n^i(t) &= f^i(X_n^1(t), X_n^2(t))[L_n^i(t + h_n) - L_n^i(t)], \\ X_n^i|_{t\in[0,h_n)} &= X_{n0}^i(t), \quad t \in T, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь в качестве представителей рассматриваются свертки функций f^i и L^i со стандартными шапочками [1]. В работе [1] отмечалось, что в случае использования стандартных шапочек вид ассоциированного решения задачи (2) зависит от связи между $1/n$ и h_n, $1/\gamma(n)$ и h_n, где $\gamma(n)$ — некоторая монотонная функция, $\gamma(n) \to \to \infty$ при $n \to \infty$ и приводилась полная классификация ассоциированных решений задачи Коши (2).

Однако при построении решений с использованием вычислительной техники имеет значение не только факт существования решения, но и скорость сходимости решения конечно-разностной задачи с осреднением к решению соответствующей системы интегральных уравнений.

В докладе рассматривается вопрос об оценке скорости сходимости в $L_1(T)$ решения задачи (2) в случае, когда $1/n = o(h_n)$ и $1/\gamma(n) = o(h_n)$.

Литература

1. Лазакович Н. В., Шлыков Е. В. *Системы дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в прямом произведении алгебр мнемофункций* // Докл. НАН Беларуси. 2007. Т. 51. № 6. С. 17–21.