

Введение в курс лекций

Под процессом распространения теплоты понимается обмен внутренней энергией между отдельными элементами, областями рассматриваемой среды. Перенос теплоты осуществляется тремя основными способами: теплопроводностью, конвекцией и тепловым излучением.

Теплопроводность представляет собой молекулярный перенос теплоты в телах (или между ними), обусловленный переменной температурой в рассматриваемом пространстве.

Конвекция возможна только в текучей среде. Под конвекцией теплоты понимают процесс ее переноса при перемещении объемов жидкости или газа (текучей среды) в пространстве из области с одной температурой в область с другой. При этом перенос теплоты неразрывно связан с переносом самой среды.

Тепловое излучение – процесс распространения теплоты с помощью электромагнитных волн, обусловленный только температурой и оптическими свойствами излучающего тела; при этом внутренняя энергия тела (среды) переходит в энергию излучения. Процесс превращения внутренней энергии вещества в энергию излучения, переноса излучения и его поглощения веществом называется теплообменом излучением. В природе и технике элементарные процессы распространения теплоты – теплопроводность, конвекция и тепловое излучение – очень часто происходят совместно.

Теплопроводность в чистом виде большей частью имеет место лишь в твердых телах.

Конвекция теплоты всегда сопровождается теплопроводностью. совместный процесс переноса теплоты конвекцией и теплопроводностью называется *конвективным теплообменом*.

В инженерных расчетах часто определяют конвективный теплообмен между потоками жидкости или газа и поверхностью твердого тела; этот процесс конвективного теплообмена называют *конвективной теплоотдачей* или *теплоотдачей*.

В технике и в быту часто происходят процессы теплообмена между различными жидкостями, разделенными твердой стенкой. Процесс передачи теплоты от горячей жидкости к холодной через разделяющую их стенку называется *теплопередачей*. Теплопередача осуществляется различными элементарными процессами теплопереноса. Парогенерирующие трубы котельного агрегата, например, получают теплоту от продуктов сгорания топлива в результате радиационно-конвективного теплообмена. Через слой наружного загрязнения, металлическую стенку и слой накипи теплота передается теплопроводностью. От

внутренней поверхности трубы к омывающей ее жидкости теплота переносится конвективным теплообменом (теплоотдачей).

Процессы теплообмена могут происходить в различных средах: чистых веществах и разных смесях, при изменении и без изменения агрегатного состояния рабочих сред и т.д. В зависимости от этого теплообмен протекает по-особому и описывается различными уравнениями.

Многие процессы переноса теплоты сопровождаются переносом вещества. Например, при испарении воды в воздух, помимо теплообмена, имеет место и перенос образовавшегося пара в паровоздушной смеси. В общем случае перенос пара осуществляется как молекулярным, так и конвективным путем. Совместный молекулярный и конвективный перенос массы называют *конвективным массообменом*. При наличии массообмена процесс теплообмена усложняется. Теплота дополнительно может переноситься вместе с массой диффундирующих веществ.

Тепломассообмен – это наука о самопроизвольных необратимых процессах совместного переноса теплоты и массы компонента в пространстве с неоднородными полями температур и концентраций компонента.

При теоретическом исследовании теплообмена приходится вводить некоторые модельные представления о среде, в которой происходят изучаемые процессы. Рассматриваемые газы, жидкости и твердые тела в подавляющем большинстве случаев считаются сплошной средой, т.е. средой, при рассмотрении которой допустимо пренебречь ее дискретным строением.

Сплошная среда может быть однофазной и многофазной. В однофазной среде, состоящей из чистого вещества или из смеси веществ, свойства изменяются в пространстве непрерывно. В многофазной среде, состоящей из ряда однофазных частей, на границах раздела свойства изменяются скачками. теплообмен в однофазных и многофазных системах протекает по-разному.

Изучение как простых, так и более сложных процессов переноса теплоты и массы в различных средах и является задачей изучаемого курса.

Часть первая. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

1.1 Температурное поле

Явление теплопроводности представляет собой процесс распространения тепловой энергии при непосредственном соприкосновении отдельных частиц тела или отдельных тел, имеющих различные температуры. Теплопроводность обусловлена движением микрочастиц вещества.

При этом в газах перенос энергии осуществляется путем диффузии молекул и атомов, а в жидкостях и твердых телах-диэлектриках – путем упругих волн. В металлах перенос энергии в основном осуществляется путем диффузии свободных электронов, а роль упругих колебаний кристаллической решетки здесь второстепенна.

Следует указать, что в жидкостях и газах чистая теплопроводность может быть реализована при выполнении условий, исключающих перенос теплоты конвекцией.

Всякое физическое явление в общем случае сопровождается изменением в пространстве и времени существенных для данного явления физических величин. Процесс теплопроводности, как и другие виды теплообмена, может иметь место только при условии, что в различных точках тела (или системы тел) температура неодинакова. В общем случае процесс передачи теплоты теплопроводностью в твердом теле сопровождается изменением температуры, как в пространстве, так и во времени.

Аналитическое исследование теплопроводности сводится к изучению пространственно-временного изменения температуры, т. е. к нахождению уравнения

$$t = f(x, y, z, t). \quad (1.1)$$

Уравнение (1.1) представляет математическое выражение температурного поля. Таким образом, температурное поле есть совокупность значений температуры во всех точках изучаемого пространства для каждого момента времени.

Различают стационарное и нестационарное температурные поля. Уравнение (1.1) является записью наиболее общего вида температурного поля, когда температура изменяется с течением времени и от одной точки к другой. Такое поле отвечает неустановившемуся тепловому режиму теплопроводности и носит название *нестационарного температурного поля*.

Если тепловой режим является установившимся, то температура в каждой точке поля с течением времени остается неизменной и такое *температурное поле* называется *стационарным*. В этом случае температура является функцией только координат

$$t = f_1(x, y, z); \frac{\partial t}{\partial t} = 0. \quad (1.2)$$

Температурное поле, соответствующее уравнениям (1.1) и (1.2), является пространственным, так как температура является функцией трех координат. Если температура есть функция двух координат, то поле называется *двухмерным* и его запись имеет вид

$$t = f_2(x, y, t); \frac{\partial t}{\partial z} = 0. \quad (1.3)$$

Если температура есть функция одной координаты, то поле называется *одномерным*

$$t = f_3(x, t); \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0. \quad (1.4)$$

Наиболее простой вид имеет уравнение одномерного стационарного температурного поля

$$t = f_4(x); \frac{\partial t}{\partial t} = 0; \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0. \quad (1.5)$$

1.2 Температурный градиент

Если соединить точки тела, имеющие одинаковую температуру, получим поверхность равных температур, называемую *изотермической*. Итак, изотермической поверхностью называется геометрическое место точек в температурном поле, имеющих одинаковую температуру.

Так как одна и та же точка тела не может одновременно иметь различные температуры, то изотермические поверхности не пересекаются. Они либо окан-

чиваются на поверхности тела, либо целиком располагаются внутри самого тела.

Пересечение изотермических поверхностей плоскостью дает на этой плоскости семейство изотерм. Они обладают теми же свойствами, что и изотермические поверхности, т. е. не пересекаются, не обрываются внутри тела, оканчиваются на поверхности, либо целиком располагаются внутри самого тела.

На рис. 1.1 приведены изотермы, температуры которых отличаются на Δt .

Температура в теле изменяется только в направлениях, пересекающих изотермические поверхности. При этом наибольший перепад температуры на единицу длины происходит в направлении нормали к изотермической поверхности.

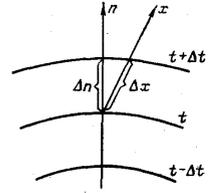


Рис. 1.1 Изотермы.

Возрастание температуры в направлении нормали к изотермической поверхности характеризуется *градиентом температуры*.

Градиент температуры есть вектор, направленный по нормали к изотермической поверхности в сторону возрастания температуры и численно равный производной от температуры по этому направлению, т. е.

$$\mathit{grad}t = \mathbf{n}_0 \frac{\partial t}{\partial n}, \quad (1.6)$$

где \mathbf{n}_0 – единичный вектор, нормальный к изотермической поверхности и направленный в сторону возрастания температуры;

$\partial t / \partial n$ – производная температура по нормали n .

Скалярная величина температурного градиента $\partial t / \partial n$ не одинакова для различных точек изотермической поверхности. Она больше там, где расстояние Δn между изотермическими поверхностями меньше. Скалярную величину температурного градиента $\partial t / \partial n$ мы будем также называть температурным градиентом.

Величина $\partial t / \partial n$ в направлении убывания температуры отрицательна.

Проекции вектора $\mathit{grad}t$ на координатные оси Ox , Oy , Oz будут равны

$$\begin{aligned}
 (gradt)_x &= \frac{\partial t}{\partial n} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_x) = \frac{\partial t}{\partial x}; \\
 (gradt)_y &= \frac{\partial t}{\partial n} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_y) = \frac{\partial t}{\partial y}; \\
 (gradt)_z &= \frac{\partial t}{\partial n} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_z) = \frac{\partial t}{\partial z}.
 \end{aligned}
 \tag{1.7}$$

1.3 Тепловой поток. Закон Фурье

Необходимым условием распространения теплоты является неравномерность распределения температуры в рассматриваемой среде. Таким образом, для передачи теплоты теплопроводностью необходимо неравенство нулю температурного градиента в различных точках тела.

Согласно гипотезе Фурье количество теплоты dQ_t , Дж, проходящее через элемент изотермической поверхности dF за промежуток времени dt , пропорционально температурному градиенту $\partial t / \partial n$

$$dQ_t = -l \frac{\partial t}{\partial n} dF dt. \tag{1.8}$$

Опытным путем установлено, что коэффициент пропорциональности в уравнении (1.8) есть физический параметр вещества. Он характеризует способность вещества проводить теплоту и называется *коэффициентом теплопроводности*.

Количество теплоты, проходящее в единицу времени через единицу площади изотермической поверхности $q = \frac{dQ_t}{dF dt}$, Вт/м², называется *плотностью теплового потока*. Плотность теплового потока есть вектор, определяемый соотношением

$$\mathbf{q} = -n_0 l \frac{\partial t}{\partial n}. \tag{1.9}$$

Вектор плотности теплового потока \mathbf{q} направлен по нормали к изотермической поверхности. Его положительное направление совпадает с направлением убывания температуры, так как теплота всегда передается от более горячих частей тела к холодным. Таким образом, векторы \mathbf{q} и $gradt$ лежат на

одной прямой, но направлены в противоположные стороны. Это и объясняет наличие знака «минус» в правых частях уравнений (1.9) и (1.8).

Линии, касательные к которым совпадают с направлением вектора \dot{q} , называются *линиями теплового потока*. Линии теплового потока ортогональны к изотермическим поверхностям (рис. 1.2).

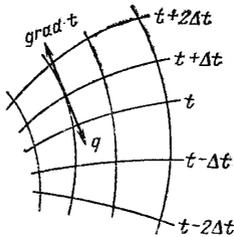


Рис. 1.2. Изотермы и линии теплового потока.

ратуры.

Скалярная величина вектора плотности теплового потока q , Вт/м², будет равна

$$q = -l \frac{\partial t}{\partial n}. \quad (1.10)$$

Многочисленные опыты подтвердили справедливость гипотезы Фурье. Поэтому уравнение (1.8), так же как и уравнение (1.9), является математической записью основного закона теплопроводности, который формируется следующим образом: плотность теплового потока пропорциональна градиенту температуры.

Количество теплоты, проходящее в единицу времени через изотермическую поверхность F , называется *тепловым потоком*. Если градиент температуры для различных точек изотермической поверхности различен, то количество теплоты, которое пройдет через всю изотермическую поверхность в единицу времени, найдется как

$$Q = \int_F q dF = - \int_F l \frac{\partial t}{\partial n} dF, \quad (1.11)$$

где dF – элемент изотермической поверхности. Величина Q измеряется в ваттах.

Полное количество теплоты Q_t , Дж, прошедшее за время t через изотермическую поверхность F , равно

$$Q_t = - \int_0^t \int_F l \frac{\partial t}{\partial n} dF dt. \quad (1.12)$$

Количество теплоты, проходящее через элементарную площадку dF_i , расположенную под углом φ к плоскости, касательной к изотермической поверхности (рис. 1.3), определяется по той же формуле (1.12), если учесть, что

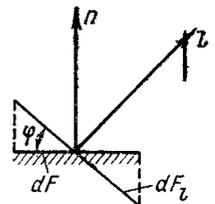


Рис. 1.3. К расчету теплового потока.

$$q_l = q \cdot \cos j = \frac{dQ_t}{dt} \cdot \frac{1}{dF} \cos j = \frac{dQ_t}{dt} \cdot \frac{1}{dF_l} \quad (1.13)$$

Так как $dF = dF_l \cos j$ является проекцией площадки dF_l на изотермическую поверхность, то количество теплоты, протекающее через элементарную площадку dF_l за время dt , запишется как

$$dQ_t = q_l \cdot dF_l \cdot dt = q(dF_l \cdot \cos j) dt = q \cdot dF \cdot dt \quad (1.14)$$

Общее количество теплоты, протекающее за время τ через поверхность F_l

$$Q_t = - \int_0^{\tau} \int_F \frac{\partial t}{\partial l} dF_l dt \quad (1.15)$$

Из уравнения (1.13) следует, что самой большой плотностью теплового потока будет та, которая рассчитана вдоль нормали к изотермической поверхности. Если такой поток спроектировать на координатные оси Ox , Oy , Oz , то согласно уравнению (1.7) получим

$$q_x = -I \frac{\partial t}{\partial x}; \quad q_y = -I \frac{\partial t}{\partial y}; \quad q_z = -I \frac{\partial t}{\partial z} \quad (1.16)$$

Тепловые потоки, выраженные уравнением (1.16), являются составляющими вектора плотности теплового потока

$$\mathbf{\dot{q}} = iq_x + jq_y + kq_z \quad (1.17)$$

Из сказанного следует, что для определения количества теплоты, проходящего через какую-либо поверхность твердого тела, необходимо знать температурное поле внутри рассматриваемого тела. Нахождение температурного поля и является главной задачей аналитической теории теплопроводности.

1.4 Коэффициент теплопроводности

Как было сказано, коэффициент теплопроводности является физическим параметром вещества. В общем случае коэффициент теплопроводности зависит от температуры, давления и рода вещества; в большинстве случаев коэффициент теплопроводности для различных материалов определяется эксперимен-

тальными методами. Большинство из них основано на измерении теплового потока и градиента температур в заданном веществе.

Коэффициент теплопроводности λ , Вт/(м·К), при этом определяется из соотношения

$$I = \frac{|q|}{|gradt|}. \quad (1.18)$$

Из уравнения (1.18) следует, что коэффициент теплопроводности численно равен количеству теплоты, которое проходит в единицу времени через единицу изотермической поверхности при температурном градиенте, равном единице.

Порядок значений λ различных веществ показан на рис. 1.4.

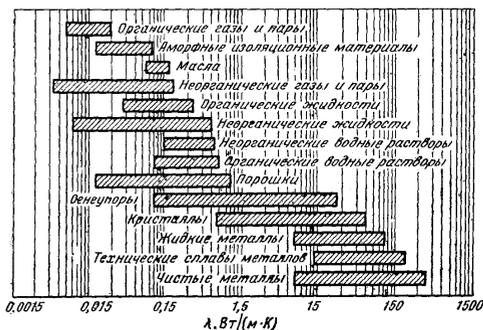


Рис. 1.4. Порядок значений коэффициентов теплопроводности различных веществ.

$$I = I_0 \cdot [1 + b \cdot (t - t_0)], \quad (1.19)$$

где λ_0 – значение коэффициента теплопроводности при температуре t_0 ;

b – постоянная, определяемая опытным путем.

1.5 Дифференциальное уравнение теплопроводности

Изучение любого физического явления сводится к установлению зависимости между величинами, характеризующими это явление. Для сложных физических процессов, в которых определяющие величины могут существенно

Так как тела могут иметь различную температуру, а при наличии теплообмена и в самом теле температура будет распределена неравномерно, то в первую очередь важно знать зависимость коэффициента теплопроводности от температуры. Опыты показывают, что для многих материалов с достаточной для практики точностью зависимость коэффициента теплопроводности от температуры можно принять линейной

изменяться в пространстве и времени, установить зависимость между этими величинами очень трудно. В этих случаях на помощь приходит метод математической физики, который исходит из того, что ограничивается промежутком времени и из всего пространства рассматривается лишь элементарный объем. Это позволяет в пределах элементарного объема и выбранного малого отрезка времени пренебречь изменением некоторых величин, характеризующих процесс, и существенно упростить зависимость.

Выбранные таким образом элементарный объем du и элементарный промежуток времени dt , в пределах которых рассматривается изучаемый процесс, с математической точки зрения являются величинами бесконечно малыми, а с физической точки зрения – величинами еще достаточно большими, чтобы в их пределах можно было игнорировать дискретное строение среды и рассматривать ее как континуум (сплошную). Полученная таким образом зависимость является общим дифференциальным уравнением рассматриваемого процесса. Интегрируя дифференциальные уравнения, можно получить аналитическую зависимость между величинами для всей области интегрирования и всего рассматриваемого промежутка времени.

При решении задач, связанных с нахождением температурного поля, необходимо иметь дифференциальное уравнение теплопроводности.

Для облегчения вывода этого дифференциального уравнения сделаем следующие допущения:

- тело однородно и изотропно;
- физические параметры постоянны;
- деформация рассматриваемого объема, связанная с изменением температуры, является очень малой величиной по сравнению с самим объемом;
- внутренние источники теплоты в теле, которые в общем случае могут быть заданы как $q_u = f(x, y, z, t)$, распределены равномерно.

В основу вывода дифференциального уравнения теплопроводности положен закон сохранения энергии, который в рассматриваемом случае может быть сформулирован следующим образом: количество теплоты dQ , введенное в элементарный объем извне за время dt вследствие теплопроводности, а также от внутренних источников, равно изменению внутренней энергии или энтальпии вещества (в зависимости от рассмотрения изохорного или изобарного процесса), содержащегося в элементарном объеме

$$dQ_1 + dQ_2 = dQ, (1.20)$$

где dQ_1 – количество теплоты, Дж, введенное в элементарный объем путем теплопроводности за время dt ;

dQ_2 – количество теплоты, Дж, которое за время dt выделилось в элементарном объеме du за счет внутренних источников;

dQ – изменение внутренней энергии или энтальпии вещества, содержащегося в элементарном объеме du , за время dt .

Для нахождения составляющих уравнения (1.20) выделим в теле элементарный параллелепипед со сторонами dx , dy , dz (рис. 1.5). Параллелепипед расположен так, чтобы его грани были параллельны соответствующим координатным плоскостям.

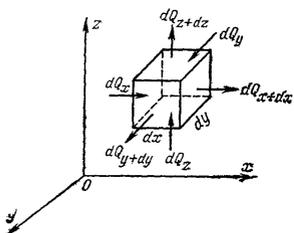


Рис.1.5. К выводу дифференциального уравнения теплопроводности.

Количество теплоты, которое подводится к граням элементарного объема за время dt в направлении осей Ox , Oy , Oz обозначим соответственно dQ_x , dQ_y , dQ_z .

Количество теплоты, которое будет отводиться через противоположные грани в тех же направлениях, обозначим соответственно dQ_{x+dx} , dQ_{y+dy} , dQ_{z+dz} . Количество теплоты, подведенное в грани $dydz$ в направлении оси Ox за время dt , составляет $dQ_x = q_x dydzdt$,

где q_x – проекция плотности теплового потока на направление нормали к указанной грани.

Количество теплоты, отведенное через противоположную грань элементарного параллелепипеда в направлении оси Ox , запишется так

$$dQ_{x+dx} = q_{x+dx} dy \cdot dz \cdot dt.$$

Разница количеств теплоты, подведенного к элементарному параллелепипеду и отведенного от него за время dt в направлении оси Ox , представляет собой количество теплоты

$$dQ_{x1} = dQ_x - dQ_{x+dx}$$

или

$$dQ_{x1} = q_x \cdot dy \cdot dz \cdot dt - q_{x+dx} \cdot dy \cdot dz \cdot dt. \quad (a)$$

Функция q_{x+dx} является непрерывной в рассматриваемом интервале dx и может быть разложена в ряд Тейлора

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 q_x}{\partial x^2} \cdot \frac{dx^2}{2!} + \dots$$

Если ограничиться двумя первыми членами ряда, то уравнение (а) запишется в виде

$$dQ_{x1} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt . \text{ (б)}$$

аналогичным образом можно найти количество теплоты, подводимое к элементарному объему и в направлениях двух других координатных осей Оу и Oz.

Количество теплоты dQ , подводимое теплопроводностью к рассматриваемому объему, будет равно

$$dQ_1 = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt . \text{ (в)}$$

Определим вторую составляющую уравнения (1.20). Обозначим количество теплоты, выделяемое внутренними источниками в единице объема среды в единицу времени и называемое мощностью внутренних источников теплоты, через q_u Вт/м³. Тогда

$$dQ_2 = q_u du \cdot dt . \text{ (г)}$$

Третья составляющая в уравнении (1.20) найдется в зависимости от характера термодинамического процесса изменения системы.

В случае рассмотрения изохорного процесса вся теплота, подведенная к элементарному объему, уйдет на изменения внутренней энергии вещества, заключенного в этом объеме, т. е. $dQ = dU$.

Если рассматривать внутреннюю энергию единицы объема $u = u(t, u)$, тогда dU найдется как

$$dU = C_u \frac{\partial t}{\partial t} dt \cdot du = c_u r \frac{\partial t}{\partial t} dt \cdot du , \text{ (д)}$$

где C_u – изохорная теплоемкость единицы объема, Дж/(м³·К);

c_u – изохорная теплоемкость единицы массы, Дж/(кг·К);

ρ – плотность вещества, кг/м³.

Подставляя полученные выражения (в), (г) и (д) в уравнение (1.20), получим

$$c_u r \frac{\partial t}{\partial t} = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + q_u, \quad (1.21)$$

или

$$c_u r \frac{\partial t}{\partial t} = - \operatorname{div} \mathbf{q} + q_u. \quad (1.21')$$

Выражение (1.21) является дифференциальным уравнением энергии для изохорного процесса переноса теплоты.

При рассмотрении изобарного процесса вся теплота, подведенная к объему, уйдет на изменения энтальпии вещества, заключенного в этом объеме, и уравнение (1.20) запишется следующим образом

$$dQ_1 + dQ_2 = dI. \quad (1.22)$$

Если рассматривать энтальпию единицы объема как $i = i(t, p)$, то можно показать, что

$$dI = C_p \frac{\partial t}{\partial t} dt \cdot du = c_p r \frac{\partial t}{\partial t} dt \cdot du = r \frac{\partial i}{\partial t} dt \cdot du, \quad (e)$$

где C_p – изобарная теплоемкость единицы объема, Дж/(м³·К);

c_p – изобарная теплоемкость единицы массы, Дж/(кг·К).

Если полученные выражения (в), (г) и (е) подставить в уравнение (1.22), получим

$$r \frac{\partial i}{\partial t} = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + q_u, \quad (1.23)$$

или

$$r \frac{\partial i}{\partial t} = - \operatorname{div} \mathbf{q} + q_u, \quad (1.23')$$

Соотношение (1.23) является дифференциальным уравнением энергии в самом общем виде для изобарного процесса переноса теплоты. Уравнение (1.23) будет широко использоваться и в других разделах курса при рассмотрении конкретных видов переноса теплоты.

В твердых телах перенос теплоты осуществляется по закону Фурье $q = -I \partial t / \partial x$, числовое значение разности c_p и c_v мало и можно принять $c_u = c_p = c$.

Напомним, что проекции вектора плотности теплового потока на координатные оси Ox , Oy , Oz определяются выражениями

$$q_x = -I \frac{\partial t}{\partial x}; \quad q_y = -I \frac{\partial t}{\partial y}; \quad q_z = -I \frac{\partial t}{\partial z}.$$

Подставляя полученные выражения проекций вектора плотности теплового потока в уравнение (1.21) и опуская индекс при c , получим

$$\frac{\partial t}{\partial t} = \frac{1}{c \cdot r} \cdot \left[\frac{\partial t}{\partial x} \left(I \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial t}{\partial y} \left(I \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial t}{\partial z} \left(I \frac{\partial t}{\partial z} \right) \right] + \frac{q_u}{c \cdot r}, \quad (1.24)$$

или

$$\frac{\partial t}{\partial t} = \frac{1}{c \cdot r} \operatorname{div}(I \operatorname{grad} t) + \frac{q_u}{c \cdot r}. \quad (1.24')$$

Выражение (1.24), так же как и в (1.24'), называется дифференциальным уравнением теплопроводности. Оно устанавливает связь между временным и пространственным изменением температуры в любой точке тела, в котором происходит процесс теплопроводности.

Наиболее общее дифференциальное уравнение теплопроводности в частных производных имеет ту же форму, что и (1.24), но с переменными теплофизическими характеристиками λ , c и r , которые можно обозначить как $I(x, y, z, t)$, $c(x, y, z, t)$ и $r(x, y, z, t)$. Такая запись включает как пространственно-временную, так и температурную зависимость. Уравнение (1.24) описывает большое количество задач теплопроводности, представляющих практический интерес. Так, если принять теплофизические характеристики постоянными, что предполагалось при выводе уравнения, то (1.24) принимает вид

$$\frac{\partial t}{\partial t} = \frac{I}{c \cdot r} \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{q_u}{c \cdot r}. \quad (1.25)$$

В уравнении (1.25) можно обозначить

$$\frac{I}{c \cdot r} = a \quad (\text{ж})$$

и

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \nabla^2 t, \quad (3)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

выражение оператора Лапласа в декартовой системе координат.

Выражение $\nabla^2 t$ в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial j^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}, \quad (и)$$

где r – радиус-вектор; φ – полярный угол; z – аппликата.

Выражение $\nabla^2 t$ в сферической системе координат имеет вид

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial m} \cdot \left[(1 - m^2) \frac{\partial t}{\partial m} \right] + \frac{1}{r^2 \cdot (1 - m^2)} \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}, \quad (к)$$

где r – радиус-вектор; $m = \cos \varphi$; q, y – соответственно полярное расстояние и долгота.

С учетом сказанного в общем виде уравнение (1.25) запишется следующим образом

$$\frac{\partial t}{\partial t} = a \nabla^2 t + \frac{q_u}{c \cdot r}. \quad (1.26)$$

Коэффициент пропорциональности $a, m^2/c$, в уравнении (1.26) называется *коэффициентом температуропроводности* и является физическим параметром вещества. Он существен для нестационарных тепловых процессов и характеризует скорость изменения температуры. Если коэффициент теплопроводности характеризует способность тел проводить теплоту, то коэффициент температуропроводности является мерой теплоинерционных свойств тела. Из уравнения (1.26) следует, что изменение температуры во времени $\partial t / \partial t$ для любой точки пространства пропорционально величине a . Иначе говоря, скорость изменения температуры в любой точке тела будет тем больше, чем больше коэффициент температуропроводности a . Поэтому при прочих равных условиях выравнивание температур во всех точках пространства будет происходить быстрее в том теле, которое обладает большим коэффициентом температуропроводности. Коэффициент температуропроводности зависит от природы вещества. Например, жидкости и газы обладают большой тепловой инерционностью и, следовательно,

но, малым коэффициентом теплопроводности. Металлы обладают малой тепловой инерционностью, так как они имеют большой коэффициент теплопроводности. Далее, если система тел не содержит внутренних источников теплоты ($q=0$), тогда выражение (1.26) принимает форму уравнения Фурье

$$\frac{\partial t}{\partial t} = a \nabla^2 t. \quad (1.27)$$

Если имеются внутренние источники теплоты, но температурное поле соответствует стационарному состоянию, т. е. $t = t(x, y, z)$ то дифференциальное уравнение теплопроводности превращается в уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{q_u}{c \cdot r} = 0. \quad (1.28)$$

Наконец, для стационарной теплопроводности и отсутствия внутренних источников теплоты выражение (1.25) принимает вид уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0. \quad (1.29)$$

Нахождение частных решений этих уравнений в частных производных и некоторых других является основным содержанием теории теплопроводности.

1.6 Условия однозначности для процессов теплопроводности

Так как дифференциальное уравнение теплопроводности выведено на основе общих законов физики, то оно описывает явление теплопроводности в самом общем виде. Поэтому можно сказать, что полученное дифференциальное уравнение описывает целый класс явлений теплопроводности. Чтобы из бесчисленного количества выделить конкретно рассматриваемый процесс и дать его полное математическое описание, к дифференциальному уравнению необходимо присоединить математическое описание всех частных особенностей рассматриваемого процесса.

Эти частные особенности, которые совместно с дифференциальным уравнением дают полное математическое описание конкретного процесса теплопроводности, называются *условиями однозначности или краевыми условиями*.

Условия однозначности включают в себя:

– геометрические условия, характеризующие форму и размеры тела, в которых протекает процесс;

– физические условия, характеризующие физические свойства среды и тела;

– временные (начальные) условия, характеризующие распределение температур в изучаемом теле в начальный момент времени;

– граничные условия, характеризующие взаимодействие рассматриваемого тела с окружающей средой.

Геометрическими условиями задаются форма и линейные размеры тела, в котором протекает процесс.

Физическими условиями задаются физические параметры тела λ , c , ρ и др. и может быть задан закон распределения внутренних источников теплоты.

Начальные условия необходимы при рассмотрении нестационарных процессов и состоят в задании закона распределения температуры внутри тела в начальный момент времени. В общем случае начальное условие аналитически может быть записано следующим образом

при $\tau = 0$

$$t = f(x, y, z). \quad (1.30)$$

В случае равномерного распределения температуры в теле начальное условие упрощается

при $\tau = 0$

$$t = t_0 = \text{const}. \quad (1.31)$$

а) *Граничные условия первого рода*. При этом задается распределение температуры на поверхности тела для каждого момента времени

$$t_c = f(x, y, z, t), \quad (1.32)$$

где t_c – температура на поверхности тела; x, y, z – координаты поверхности тела.

В частном случае, когда температура на поверхности является постоянной на протяжении всего времени протекания процессов теплообмена, уравнение (1.32) упрощается и принимает вид

$$t_c = \text{const}.$$

б) *Граничные условия второго рода*. При этом задаются значения теплового потока для каждой точки поверхности тела и любого момента времени.

Аналитически это можно представить следующим образом

$$q_n = f(x, y, z, t), \quad (1.33)$$

где q_n – плотность теплового потока на поверхности тела; x, y, z – как и в случае (1.32) – координаты на поверхности тела.

В простейшем случае плотность теплового потока по поверхности и во времени остается постоянной:

$$q_n = q_o = const. \quad (1.34)$$

Такой случай теплообмена имеет место, например, при нагревании различных металлических изделий в высокотемпературных печах.

в) *Граничные условия третьего рода*. При этом задаются температура окружающей среды $t_{жс}$ и закон теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой. Граничное условие третьего рода характеризует закон теплообмена между поверхностью и окружающей средой в процессе охлаждения и нагревания тела. Для описания процесса теплообмена между поверхностью тела и средой используется закон Ньютона – Рихмана.

Процесс теплообмена между поверхностью тела и средой относится к очень сложным процессам и зависит от большого количества параметров. Подробно эти вопросы будут рассмотрены во второй и третьей частях комплекса.

Согласно закону Ньютона – Рихмана количество теплоты, отдаваемое единицей поверхности тела в единицу времени, пропорционально разности температур поверхности тела t_c и окружающей среды $t_{жс}$ ($t_c > t_{жс}$)

$$q = a \cdot (t_c - t_{жс}), \quad (1.35)$$

где a – коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом теплоотдачи, Вт/(м²·К).

Коэффициент теплоотдачи характеризует интенсивность теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой. Численно он равен количеству теплоты, отдаваемому (или воспринимаемому) единицей поверхности в единицу времени при разности температур между поверхностью тела и окружающей средой, равной одному градусу.

Согласно закону сохранения энергии количество теплоты, которое отводится с единицы поверхности в единицу времени вследствие теплоотдачи,

должно равняться теплоте, подводимой к единице поверхности в единицу времени вследствие теплопроводности из внутренних объемов тела, т. е.

$$\mathbf{a} \cdot (t_c - t_{ж}) = -I \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_c, \quad (1.36)$$

где \mathbf{n} – нормаль к поверхности тела; индекс «с» указывает на то, что температура и градиент относятся к поверхности тела (при $n = 0$).

Окончательно граничное условие третьего рода можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_c = -\frac{\alpha}{I} \cdot (t_c - t_{ж}). \quad (1.37)$$

Уравнение (1.37) по существу является частным выражением закона сохранения энергии для поверхности тела.

Коэффициент теплоотдачи зависит от большого числа факторов. Однако во многих случаях коэффициент теплоотдачи можно считать неизменным, поэтому мы будем в дальнейшем при решении задач теплопроводности принимать величину α постоянной.

2. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

2.1 Передача теплоты через плоскую стенку ($q_u = 0$)

При установившемся, или стационарном, тепловом режиме температура тела во времени остается постоянной, т.е. $\partial t / \partial t = 0$.

При этом дифференциальное уравнение теплопроводности будет иметь вид

$$a \nabla^2 t + \frac{q_u}{c \cdot r} = 0 \quad (2.1)$$

или

$$\nabla^2 t + \frac{q_u}{l} = 0. \quad (2.1')$$

Если внутренние источники теплоты отсутствуют ($q_u = 0$), то уравнение (2.1) упростится и примет вид

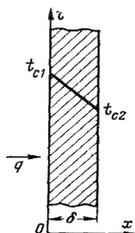
$$\nabla^2 t = 0 \quad (2.2)$$

или

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0. \quad (2.2)$$

а) *Граничные условия первого рода.*

Рассмотрим однородную и изотропную стенку толщиной δ с постоянным коэффициентом теплопроводности λ . На наружных поверхностях стенки поддерживают постоянными температуры t_{c1} и t_{c2} .



При заданных условиях температура будет изменяться только в направлении, перпендикулярном плоскости стенки. Если ось Ox направить, как показано на рис. 2.1, то температура в направлении осей Oy и Oz будет оставаться постоянной

Рис. 2.1. Однородная плоская стенка.

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0.$$

В связи с этим температура будет функцией только одной координаты x и дифференциальное уравнение теплопроводности для рассматриваемого случая запишется в виде

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = 0. \quad (2.3)$$

Граничные условия в рассматриваемой задаче зададим следующим образом

$$\text{при } x = 0 \quad t = t_{c1};$$

$$\text{при } x = \delta \quad t = t_{c2}. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.3) и условия (2.4) дают полную математическую формулировку рассматриваемой задачи.

В результате решения поставленной задачи должно быть найдено распределение температуры в плоской стенке, т. е. $t = f(x)$, и получена формула для определения количества теплоты, проходящего в единицу времени через стенку.

Закон распределения температур по толщине стенки найдется в результате двойного интегрирования уравнения (2.3).

Первое интегрирование дает

$$\frac{dt}{dx} = C_1. \quad (2.5)$$

После второго интегрирования получим

$$t = C_1 x + C_2. \quad (2.6)$$

Из уравнения (2.6) следует, что при постоянном коэффициенте теплопроводности температура в стенке изменяется по линейному закону.

Постоянные C_1 и C_2 в уравнении (2.6) определяются из граничных условий

$$\text{при } x = 0 \quad t = t_{c1} \text{ и } C_2 = t_{c1};$$

при $x = \delta$ $t = t_{c2}$ и $C_1 = -\frac{t_{c1} - t_{c2}}{d}$.

Подставляя значения постоянных C_1 и C_2 в уравнение (2.6), получим закон распределения температуры в рассматриваемой плоской стенке

$$t = t_{c1} - \frac{t_{c1} - t_{c2}}{d} \cdot x. \quad (2.7)$$

Если отсчет избыточной температуры в стенке вести от наименьшей заданной температуры t_{c2} , то уравнение (2.7) можно привести к безразмерному виду.

Обозначим $\Delta t = t - t_{c2}$ – текущий температурный напор или избыточная температура; $\Delta t_0 = t_{c1} - t_{c2}$ – полный температурный напор или наибольшая избыточная температура.

После введения этих обозначений уравнение (2.7) запишется следующим образом

$$\Delta t = \Delta t_0 - \frac{\Delta t_0}{d} \cdot x \quad (2.8)$$

или

$$\frac{\Delta t}{\Delta t_0} = 1 - \frac{x}{d}$$

Обозначив $\Delta t / \Delta t_0 = \Theta$ – безразмерный температурный напор или безразмерная избыточная температура; $x / d = X$ – безразмерная координата; получим

$$\Theta = 1 - X. \quad (2.8')$$

Уравнение температурного поля (2.8') является универсальным. Его универсальность заключается в том, что распределение температуры в стенке можно представить единой прямой в отрезках на осях для любого заданного значения t_{c1} , t_{c2} и δ (рис. 2.2). В ряде случаев пользоваться безразмерными уравнениями весьма удобно.

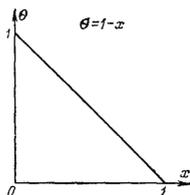


Рис.2.2. Безразмерное поле температур в плоской стенке $\Theta = 1 - X$.

Для определения количества теплоты, проходящего через единицу поверхности стенки в единицу времени в направлении оси Ox , воспользуемся законом Фурье, согласно которому $q = -l \partial t / \partial x$. Учитывая, что $\partial t / \partial x = C_1 = (t_{c1} - t_{c2}) / d$, после подстановки значения $\partial t / \partial x$ в выражение закона Фурье получим

$$q = \frac{l}{d} \cdot (t_{c1} - t_{c2}). \quad (2.9)$$

Из уравнения (2.9) следует, что количество теплоты, проходящее через единицу поверхности стенки в единицу времени, прямо пропорционально коэффициенту теплопроводности λ , разности температур на наружных поверхностях стенки $t_{c1} - t_{c2}$ и обратно пропорционально толщине стенки δ . Следует указать, что тепловой поток определяется не абсолютным значением температур, а их разностью $t_{c1} - t_{c2} = \Delta t$, которую принято называть температурным напором.

Отношение λ / δ , Вт/(м²·К), называется тепловой проводимостью стенки, а обратная величина δ / λ , (м²·К)/Вт – тепловым или термическим сопротивлением стенки. Последнее представляет собой падение температуры в стенке на единицу плотности теплового потока. Зная плотность теплового потока, легко вычислить общее количество теплоты Q_t , которое передается через поверхность стенки величиной F за промежуток времени t

$$Q_t = q \cdot F \cdot t = \frac{l}{d} \cdot (t_{c1} - t_{c2}) \cdot F \cdot t. \quad (2.10)$$

Из уравнения (2.9) найдем

$$\frac{t_{c1} - t_{c2}}{d} = \frac{q}{l}.$$

После введения этого выражения в уравнение температурного поля (2.7), получим

$$t = t_{c1} - \frac{q}{l} \cdot x. \quad (2.11)$$

Из уравнения (2.11) следует, что при прочих равных условиях температура в стенке убывает тем быстрее, чем больше плотность теплового потока.

Выражения (2.7) и (2.9) получены в предположении, что $l = const$. В действительности λ является переменной величиной.

Рассмотрим случай, когда коэффициент теплопроводности является только функцией температуры

$$I = I(t).$$

Для многих материалов зависимость коэффициента теплопроводности от температуры близка к линейной

$$I = I_0(1 + b \cdot t),$$

где λ_0 – значение коэффициента теплопроводности при 0°C .

На основании закона Фурье

$$q = -I(t) \frac{dt}{dx} = -I_0 \cdot (1 + bt) \frac{dt}{dx}. \quad (\text{а})$$

Разделяя переменные и интегрируя выражение (а) в пределах от $x=0$ до $x=\delta$ в интервале температур от t_{c1} до t_{c2} , получаем

$$qd = I_0 \left[1 + b \frac{t_{c1} + t_{c2}}{2} \right] \cdot (t_{c1} - t_{c2}). \quad (\text{б})$$

В выражении (б) множитель

$$I_0 \left(1 + b \frac{t_{c1} + t_{c2}}{2} \right)$$

является средним интегральным значением коэффициента теплопроводности, т.е.

$$I_{cp} = \frac{1}{t_{c1} - t_{c2}} \int_{t_{c2}}^{t_{c1}} I(t) dt. \quad (2.12)$$

При этом плотность теплового потока q , Вт/м², на поверхности пластины

$$q = \frac{I_{cp}}{d} \cdot (t_{c1} - t_{c2}). \quad (2.13)$$

Из уравнения (2.13) следует, что если коэффициент теплопроводности λ зависит от температуры, то q можно вычислять в предположении, что $\lambda = \text{const}$, принимая для него среднеинтегральное значение в интервале температур от t_{c1} до t_{c2} .

Интегрируя выражение (а) в пределах от $x=0$ до любой текущей координаты x и в интервале температур от t_{c1} до t , получаем выражение для температурного поля

$$t = \sqrt{\left(\frac{1}{b} + t_{c1}\right)^2 - \frac{2 \cdot q \cdot x}{I_0 \cdot b} - \frac{1}{b}}. \quad (2.14)$$

Из этого уравнения следует, что температура в стенке изменяется не линейно, а по кривой. Характер температурной кривой определяется знаком и числовым значением коэффициента b .

Рассмотрим теплопроводность многослойной плоской стенки, состоящей из n однородных слоев. Примем, что контакт между слоями совершенный и температура на соприкасающихся поверхностях двух слоев одинакова.

При стационарном режиме тепловой поток, проходящий через любую изотермическую поверхность неоднородной стенки, один и тот же

$$\partial q / \partial x = 0.$$

При заданных температурах на внешних поверхностях такой стенки, размерах слоев и соответствующих коэффициентах теплопроводности можно составить систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{I_1}{d_1} \cdot (t_{c1} - t_{c2}); \\ q &= \frac{I_2}{d_2} \cdot (t_{c2} - t_{c3}); \quad (в) \\ &\dots\dots\dots \\ q &= \frac{I_n}{d_n} \cdot (t_{cn} - t_{c(n+1)}) \end{aligned} \right\}$$

Определив температурные напоры из (в) в каждом слое и сложив правые и левые части полученных уравнений, будем иметь

$$t_{c1} - t_{c(n+1)} = q \cdot \left(\frac{d_1}{I_1} + \frac{d_2}{I_2} + \dots + \frac{d_n}{I_n} \right).$$

Отсюда плотность теплового потока

$$q = \frac{t_{c1} - t_{c(n+1)}}{\frac{d_1}{I_1} + \frac{d_2}{I_2} + \dots + \frac{d_n}{I_n}} = \frac{t_{c1} - t_{c(n+1)}}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{d_i}{I_i}}. \quad (2.15)$$

Величина $\sum_{i=1}^{i=n} d_i / I_i$, равна сумме термических сопротивлений всех n слоев, называется полным термическим сопротивлением теплопроводности многослойной стенки.

При сравнении переноса теплоты через многослойную стенку и стенку из однородного материала удобно ввести в рассмотрение эквивалентный коэффициент теплопроводности $\lambda_{\text{экв}}$ многослойной стенки. Он равен коэффициенту теплопроводности однородной стенки, толщина которой Δ равна толщине многослойной стенки $\sum_{i=1}^{i=n} d_i$, а термическое сопротивление равно термическому сопротивлению рассматриваемой многослойной стенки, т.е.

$$\frac{\sum_{i=1}^{i=n} d_i}{I_{\text{экв}}} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d_i}{I_i}.$$

Отсюда

$$I_{\text{экв}} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} d_i}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{d_i}{I_i}}. \quad (2.16)$$

Из уравнения (2.16) следует, что эквивалентный коэффициент теплопроводности $\lambda_{\text{экв}}$ зависит не только от теплофизических свойств слоев, но и от их толщины. Температуры на границах соприкосновения двух соседних слоев равны

$$\left. \begin{aligned} t_{c2} &= t_{c1} - q \cdot \frac{d_1}{I_1}; \\ t_{c3} &= t_{c2} - q \cdot \left(\frac{d_1}{I_1} + \frac{d_2}{I_2} \right); \\ t_{c(i+1)} &= t_{c1} - q \sum_{i=1}^i \frac{d_i}{I_i} \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

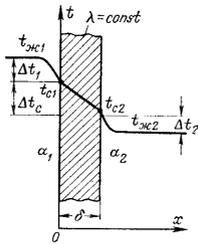
Внутри каждого из слоев температура изменяется согласно (2.7) или (2.14), а для многослойной стенки в целом температурная кривая представляет ломаную линию.

б) Граничные условия третьего рода (теплопередача)

Передача теплоты из одной подвижной среды (жидкости или газа) к другой через разделяющую их однородную или многослойную твердую стенку любой формы называется *теплопередачей*. Теплопередача включает в себя теплоотдачу от более горячей жидкости к стенке, теплопроводность в стенке, теплоотдачу от стенки к более холодной подвижной среде.

Рассмотрим теплопередачу через однородную и многослойную плоские стенки.

Пусть плоская однородная стенка имеет толщину δ (рис. 2.3). Заданы коэффициенты теплопроводности стенки λ , температуры окружающей среды $t_{жк1}$ и $t_{жк2}$, а также коэффициенты теплоотдачи α_1 и α_2 ; будем считать, что величины $t_{жк1}$, $t_{жк2}$, α_1 и α_2 постоянны и не меняются вдоль поверхности. Это позволяет рассматривать изменение температуры жидкостей и стенки только в направлении, перпендикулярном плоскости стенки.



При заданных условиях необходимо найти тепловой поток от горячей жидкости к холодной и температуры на поверхностях стенки.

Рис. 2.3. Теплопередача через плоскую стенку.

Плотность теплового потока от горячей жидкости к стенке определяется уравнением

$$q = \alpha_1 \cdot (t_{жк1} - t_{c1}) \quad (2.18)$$

При стационарном тепловом режиме тот же тепловой поток пройдет путем теплопроводности через твердую стенку

$$q = \frac{\lambda}{d} \cdot (t_{c1} - t_{c2}) \quad (2.19)$$

Тот же тепловой поток передается от второй поверхности стенки к холодной жидкости за счет теплоотдачи

$$q = a_2 \cdot (t_{c2} - t_{жс2}). \quad (2.20)$$

Уравнения (2.18)– (2.20) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} q \cdot \frac{1}{a_1} &= t_{жс1} - t_{c1}; \\ q \cdot \frac{d}{l} &= t_{c1} - t_{c2}; \\ q \cdot \frac{1}{a_2} &= t_{c2} - t_{жс2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

Сложив равенства (2.21) почленно, получим

$$q = \left(\frac{1}{a_1} + \frac{d}{l} + \frac{1}{a_2} \right) = t_{жс1} - t_{жс2}.$$

Отсюда плотность теплового потока, Вт/м²

$$q = \frac{t_{жс1} - t_{жс2}}{\frac{1}{a_1} + \frac{d}{l} + \frac{1}{a_2}}. \quad (2.22)$$

Обозначим

$$\frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{d}{l} + \frac{1}{a_2}} = k. \quad (2.23)$$

Эта величина измеряется в Вт/(м²·К).

С учетом (2.23) уравнение (2.22) можно записать в виде

$$q = k(t_{жс1} - t_{жс2}), \text{ Вт/м}^2. \quad (2.24)$$

Величина k имеет ту же размерность, что и α , и называется *коэффициентом теплопередачи*. Коэффициент теплопередачи k характеризует интенсивность передачи теплоты от одной жидкости к другой через разделяющую их стенку и численно равен количеству теплоты, которое передается через единицу поверхности стенки в единицу времени при разности температур между жидкостями в один градус.

Величина, обратная коэффициенту теплопередачи, называется *полным термическим сопротивлением теплопередачи*.

Полное термическое сопротивление однослойной стенки запишется

$$R = \frac{1}{k} = \frac{1}{a_1} + \frac{d}{l} + \frac{1}{a_2}. \quad (2.25)$$

Из (2.25) видно, что полное термическое сопротивление складывается из частных термических сопротивлений $1/a_1$, d/l и $1/a_2$ причем $1/a_1 = R_1$ – термическое сопротивление теплоотдачи от горячей жидкости к поверхности стенки; $d/l = R_c$ – термическое сопротивление теплопроводности стенки; $1/a_2 = R_2$ – термическое сопротивление теплоотдачи от поверхности стенки к холодной жидкости.

Поскольку общее термическое сопротивление состоит из частных термических сопротивлений, то совершенно очевидно, что в случае многослойной стенки нужно учитывать термическое сопротивление каждого слоя. И если стенка состоит из n слоев, то полное термическое сопротивление теплопередачи через такую стенку будет равно

$$R = \frac{1}{k} = \frac{1}{a_1} + \frac{d_1}{l_1} + \frac{d_2}{l_2} + \dots + \frac{d_n}{l_n} + \frac{1}{a_2}$$

или

$$R = \frac{1}{a_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d_i}{l_i} + \frac{1}{a_2}.$$

Отсюда

$$k = \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d_i}{l_i} + \frac{1}{a_2}}. \quad (2.26)$$

Плотность теплового потока через многослойную стенку, состоящую из n слоев, будет равна

$$q = \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d_i}{l_i} + \frac{1}{a_2}} = k \cdot (t_{ж1} - t_{ж2}). \quad (2.27)$$

Уравнение (2.27) для многослойной стенки подобно уравнению (2.24) для однородной плоской стенки. Различие заключается в выражениях для коэффициентов теплопередачи k . При сравнении уравнений (2.26) и (2.23) видно, что соотношение (2.23) является частным случаем уравнения (2.26), когда $n = 1$.

Тепловой поток Q , Вт, через поверхность F твердой стенки

$$Q = q \cdot F = k \cdot \Delta t \cdot F. \quad (2.28)$$

Температуры поверхностей однородной стенки можно найти из уравнений (2.21). Из них следует, что

$$t_{c1} = t_{ж1} - q \cdot \frac{1}{a_1}; t_{c2} = t_{ж1} - q \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{d}{l} \right)$$

или

$$t_{c2} = t_{ж2} + q \cdot \frac{1}{a_2}.$$

Из сопоставления уравнений (2.15) и (2.27) следует, что передача теплоты через многослойную стенку при граничных условиях первого рода является частным случаем общего случая передачи теплоты при граничных условиях третьего рода.

На основании сказанного температура на границе любых двух слоев i и $i+1$ при граничных условиях третьего рода может быть определена по уравнению

$$t_{c(i+1)} = t_{ж1} - q \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \sum_{i=1}^i \frac{d_i}{l_i} \right). \quad (2.29)$$

Наряду с уравнением (2.29) для расчета граничных температур применяются и графические методы.

Рассмотрим графический метод определения температур на поверхностях слоев неоднородной стенки, в основу которого положено свойство линейной зависимости температурного напора в стенке от ее термического сопротивления

$$t_{ж1} - t_{ж2} = q \cdot \frac{1}{k},$$

или для любого слоя

$$t_{ci} - t_{c(i+1)} = q \cdot \frac{d_i}{l_i}.$$

Такая зависимость дает возможность построить фиктивную стенку, в которой толщины слоев будут пропорциональны соответствующим термическим сопротивлениям, а внешние термические сопротивления теплоотдачи $1/a_1$ и $1/a_2$ учитываются введением двух условных граничных слоев соответствующей толщины. Сущность метода поясним, на примере трехслойной стенки.

Общее термическое сопротивление теплопередачи через такую стенку равно:

$$R = \frac{1}{k} = \frac{1}{a_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{d_3}{\lambda_3} + \frac{1}{a_2}.$$

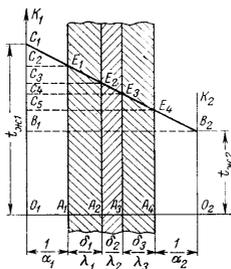


Рис. 2.4. Графический способ определения температур.

Отложим на горизонтали отрезки O_1A_1 , A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 и A_4O_2 соответственно равные термическим сопротивлениям $1/a_1, d_1/\lambda_1, d_2/\lambda_2, d_3/\lambda_3, 1/a_2$ (рис. 2.4). В точках $O_1, A_1, A_2, A_3, A_4, O_2$ поставим перпендикуляры и на O_1K_1 и O_2K_2 отложим в некотором масштабе температуры подвижных сред $t_{ж1}$ и $t_{ж2}$. Соединим прямой линией точки C_1 и B_2 . Отрезки A_1E_1, A_2E_2, A_3E_3 и A_4E_4 будут равны искомым температурам t_{c1}, t_{c2}, t_{c3} и t_{c4} . Из подобия треугольников $C_1B_1B_2$ и $C_1C_2E_1$ следует, что

$$\frac{C_1C_2}{C_1B_1} = \frac{C_2E_1}{B_1B_2} \quad \text{или} \quad \frac{C_1C_2}{t_{ж1} - t_{ж2}} = \frac{1/a_1}{1/k}. \quad (2.30)$$

Из отношения (2.30) следует, что $C_1C_2 = t_{ж1} - t_{c1}$, следовательно, отрезок

$$A_1E_1 = O_1C_1 - C_1C_2 = t_{c1}.$$

Аналогичным образом доказывается, что и отрезки A_2E_2, A_3E_3 и A_4E_4 соответственно равны температурам t_{c2}, t_{c3} и t_{c4} .

в) Граничные условия второго и третьего рода

Рассмотрим случай, когда при передаче теплоты через однородную и изотропную стенку на одной ее поверхности заданы граничные условия второго рода в виде $q_c = const$ (при $x=0$); на другой поверхности заданы коэффициент те-

площадки a_2 и температура окружающей среды $t_{жс2}$, т. е. граничные условия третьего рода (рис. 2.5). Внутренние источники в стенке отсутствуют ($q_u = 0$).

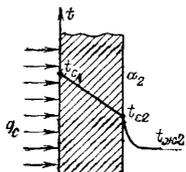


Рис. 2.5. Передача теплоты через плоскую стенку (смешанные граничные условия).

Такая задача сводится к нахождению распределения температуры в стенке и температур на ее поверхности. В силу стационарности теплового режима можно записать следующие уравнения

$$q_c = (t_{c1} - t_{c2}) \cdot \frac{1}{d}; q_c = a_2 \cdot (t_{c2} - t_{жс2}). \quad (2.31)$$

Из уравнений (2.31) следует, что при заданном значении q_c

$$t_{c2} = t_{жс2} + q_c \cdot \frac{1}{a_2}; t_{c1} = t_{жс2} + q_c \cdot \left(\frac{1}{a_2} + \frac{d}{l} \right). \quad (2.32)$$

Если мы имеем многослойную стенку, состоящую из n однородных слоев то температура на ее поверхностях и на границе слоев может быть определена по следующими уравнениями:

на внешней правой поверхности

$$t_{c(n+1)} = t_{жс2} + q_c \cdot \frac{1}{a_2};$$

на внешней левой поверхности

$$t_{c1} = t_{жс2} + q_c \cdot \left(\frac{1}{a_2} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d_i}{l_i} \right);$$

на поверхности между слоями $m-1$ и m

$$t_{cm} = t_{жс2} + q_c \cdot \left(\frac{1}{a_2} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d_i}{l_i} \right). \quad (2.33)$$

Распределение температуры внутри любого слоя найдется по уравнениям (2.7) или (2.14).

2.2 Передача теплоты через цилиндрическую стенку ($q_u = 0$)

а) Граничные условия первого рода

Рассмотрим стационарный процесс теплопроводности в цилиндрической стенке (трубе) с внутренним диаметром $d_1=2r_1$ и наружным диаметром $d_2=2r_2$ (рис. 2.6).

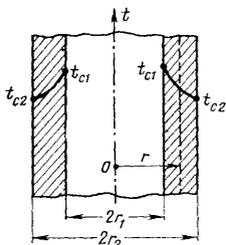


Рис. 2.6. Теплопроводность цилиндрической стенки.

На поверхностях стенки заданы постоянные температуры t_{c1} и t_{c2} . В заданном интервале температур коэффициент теплопроводности материала стенки λ является постоянной величиной. Необходимо найти распределение температур в цилиндрической стенке и тепловой поток через нее.

В рассматриваемом случае дифференциальное уравнение теплопроводности удобно записать в цилиндрической системе координат

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial j^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0. \quad (2.34)$$

При этом ось Oz совмещена с осью трубы.

При заданных условиях температура изменяется только в радиальном направлении и температурное поле будет одномерным. Поэтому

$$\frac{\partial t}{\partial z} = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0. \quad (a)$$

Кроме того, т.к. температуры на наружной и внутренней поверхностях трубы неизменны, изотермические поверхности являются цилиндрическими, имеющими с трубой общую ось. Тогда температура не должна изменяться также вдоль ϕ , т.е.

$$\frac{\partial t}{\partial j} = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 t}{\partial j^2} = 0. \quad (б)$$

С учетом (а) и (б) уравнение (2.34) примет вид

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dt}{dr} = 0. \quad (2.35)$$

Граничные условия

при $r = r_1$ $t = t_{c1}$;

}

при $r = r_2$ $t = t_{c2}$. (2.36)

Если решить уравнение (2.35) совместно с (2.36), получим уравнение температурного поля в цилиндрической стенке.

Введем новую переменную

$$u = \frac{dt}{dr}, \quad (\text{в})$$

тогда

$$\frac{d^2t}{dr^2} = \frac{du}{dr}; \quad \frac{1}{r} \cdot \frac{dt}{dr} = \frac{u}{r}. \quad (\text{г})$$

Подставляя (в) и (г) в уравнение (2.35), получим

$$\frac{du}{dr} + \frac{1}{r} \cdot u = 0. \quad (2.37)$$

Интегрируя (2.37), получаем

$$\ln u + \ln r = \ln C_1. \quad (\text{д})$$

Протенцируя выражение (д) и переходя к первоначальным переменным, получаем

$$dt = C_1 \cdot \frac{dr}{r}. \quad (\text{е})$$

После интегрирования получим

$$t = C_1 \cdot \ln r + C_2. \quad (2.38)$$

Постоянные C_1 и C_2 можно определить, если в уравнение (2.38) подставить граничные условия

$$\text{при } r = r_1 \quad t = t_{c1}, \text{ отсюда } t_{c1} = C_1 \cdot \ln r_1 + C_2$$

$$\text{при } r = r_2 \quad t = t_{c2}, \text{ отсюда } t_{c2} = C_1 \cdot \ln r_2 + C_2 \quad (\text{ж})$$

}

Решение уравнений (ж) относительно C_1 и C_2 дает

$$C_1 = \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}}; C_2 = t_{c1} - (t_{c1} - t_{c2}) \cdot \frac{\ln \frac{r_1}{r_2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}}.$$

Подставив значения C_1 и C_2 в уравнение (2.38), получим

$$t = t_{c1} - (t_{c1} - t_{c2}) \cdot \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

или

$$t = t_{c1} - (t_{c1} - t_{c2}) \cdot \frac{\ln \frac{d}{d_1}}{\ln \frac{d_2}{d_1}}. \quad (2.39)$$

Полученное выражение представляет собой уравнение логарифмической кривой. То обстоятельство, что распределение температуры в цилиндрической стенке является криволинейным, можно объяснить следующим.

В случае плоской стенки плотность теплового потока q остается одинаковой для всех изотермических поверхностей. По этой причине градиент температуры сохраняет для всех изотермических поверхностей постоянную величину. В случае цилиндрической стенки плотность теплового потока через любую изотермическую поверхность зависит от радиуса.

Для нахождения количества теплоты, проходящего через цилиндрическую поверхность величиной F в единицу времени, можно воспользоваться законом Фурье

$$Q = -I \frac{dt}{dr} \cdot F.$$

Подставляя в уравнение закона Фурье значение градиента температуры согласно уравнению (е), получаем (учитывая, что $F = 2\pi \cdot r \cdot l$)

$$Q = \frac{2 \cdot p \cdot l \cdot l \cdot (t_{c1} - t_{c2})}{\ln \frac{d_2}{d_1}}, \quad (2.40)$$

здесь Q измеряется в ваттах.

Из уравнения (2.40) следует, что количество теплоты, проходящее через цилиндрическую стенку в единицу времени, полностью определяется заданными граничными условиями и не зависит от радиуса.

Тепловой поток (2.40) может быть отнесен либо к единице длины трубы, либо к единице внутренней или внешней поверхности. При этом расчетные формулы для плотности теплового потока, Вт/м², принимают вид

$$\frac{Q}{p \cdot d_1 \cdot l} = q_1 = \frac{2 \cdot I \cdot (t_{c1} - t_{c2})}{d_1 \cdot \ln \frac{d_2}{d_1}}, \quad (2.41)$$

(тепловой поток через единицу внутренней поверхности);

$$\frac{Q}{p \cdot d_2 \cdot l} = q_2 = \frac{2 \cdot I \cdot (t_{c1} - t_{c2})}{d_2 \cdot \ln \frac{d_2}{d_1}} \quad (2.42)$$

(тепловой поток через единицу наружной поверхности);

$$\frac{Q}{l} = q_l = \frac{p \cdot (t_{c1} - t_{c2})}{\frac{1}{2 \cdot I} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1}} \quad (2.43)$$

(поток теплоты, проходящий через единицу длины трубы, Вт/м).

Тепловой поток, отнесенный к единице длины трубы, измеряется в Вт/м и называется *линейной плотностью теплового потока*. Как видно из уравнения (2.43), при неизменном отношении d_2/d_1 линейная плотность теплового потока не зависит от поверхности цилиндрической стенки. Плотности теплового потока q_1 и q_2 (отнесенные к внутренней и внешней поверхности) в случае передачи теплоты через трубу неодинаковы, причем всегда $q_1 > q_2$. Последнее ясно видно из уравнений (2.41) и (2.42).

Из уравнений (2.41)-(2.43) легко установить связь между величинами q_1 , q_2 и q_l

$$q_l = p \cdot d_1 \cdot q_1 = p \cdot d_2 \cdot q_2. \quad (2.44)$$

В случае, когда коэффициент теплопроводности является функцией температуры вида $I(t) = I_0(1 + bt)$ можно показать, что тепловой поток можно вычислить по той же формуле, что и для случая $\lambda = \text{const}$

$$q_l = \frac{P \cdot (t_{c1} - t_{c2})}{\frac{1}{2 \cdot I_{cp}} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1}}. \quad (2.45)$$

При этом следует помнить, что в формуле (2.45) I_{cp} является среднеинтегральным значением коэффициента теплопроводности

$$I_{cp} = \frac{1}{(t_{c1} - t_{c2})} \cdot \int_{t_{c2}}^{t_{c1}} I(t) dt.$$

Для нахождения температурного поля в случае $I = I(t) = I_0(1 + bt)$ можно воспользоваться уравнением закона Фурье, записанного для цилиндрической стенки

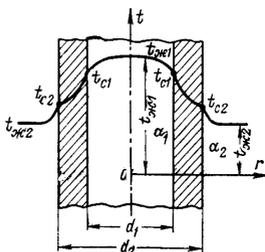
$$q_l = -I(t) \frac{dt}{dr} 2 \cdot p \cdot r. \quad (2.46)$$

Если разделить переменные и проинтегрировать уравнение (2.46) в пределах от $r = r_1$ до r и от $t = t_{c1}$ до t и найти из полученного интеграла t , получим выражение для температурного поля следующего вида

$$t = \sqrt{\left(\frac{1}{b} + t_{c1}\right)^2 - \frac{q_l \cdot \ln \frac{d}{d_1}}{p \cdot b \cdot I_0} - \frac{1}{b}}. \quad (2.47)$$

б) Граничные условия третьего рода (теплопередача)

Рассмотрим однородную цилиндрическую стенку (трубу) с постоянным коэффициентом теплопроводности λ . Заданы постоянные температуры подвижных сред $t_{жс1}$ и $t_{жс2}$ и постоянные значения коэффициентов теплоотдачи на внутренней и наружной поверхностях труб α_1 и α_2 (рис. 2.7).



Необходимо найти q_l и t_c . Будем полагать, что длина трубы велика по сравнению с толщиной стенки. Тогда потерями теплоты с торцов трубы можно пренебречь, и при установившемся тепловом режиме количество теплоты, которое будет передаваться от горячей среды к поверхности стенки, проходить через однородную цилиндрическую стенку и отдаваться от стено-

вая среды к поверхности стенки, проходить через однородную цилиндрическую стенку и отдаваться от стено-

Рис. 2.7. Теплопередача через однородную цилиндрическую стенку.

ки к холодной жидкости, будет одно и то же.

Следовательно, можно написать

$$\left. \begin{aligned} q_l &= a_1 \cdot p \cdot d_1 \cdot (t_{ж1} - t_{c1}); \\ q_l &= \frac{p(t_{c1} - t_{c2})}{\frac{1}{2 \cdot l} \ln \frac{d_2}{d_1}}; \quad (2.48) \\ q_l &= a_2 \cdot p \cdot d_2 \cdot (t_{c2} - t_{ж2}). \end{aligned} \right\}$$

Представим эти уравнения следующим образом

$$t_{ж1} - t_{c1} = \frac{q_l}{p} \cdot \frac{1}{a_1 d_1};$$

$$t_{c1} - t_{c2} = \frac{q_l}{p} \cdot \frac{1}{2l} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1}; \quad (2.48')$$

$$t_{c2} - t_{ж2} = \frac{q_l}{p} \cdot \frac{1}{a_2 d_2}.$$

Складывая уравнения, входящие в систему (2.48'), получаем температурный напор

$$t_{ж1} - t_{ж2} = \frac{q_l}{p} \cdot \left(\frac{1}{a_1 d_1} + \frac{1}{2l} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{a_2 d_2} \right).$$

Отсюда следует

$$q_l = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{1}{a_1 d_1} + \frac{1}{2l} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{a_2 d_2}}. \quad (2.49)$$

Обозначим

$$k_l = \frac{1}{\frac{1}{a_1 d_1} + \frac{1}{2l} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{a_2 d_2}}. \quad (2.50)$$

С учетом (2.50) уравнение (2.49) запишется

$$q_l = k_l \cdot p \cdot (t_{ж1} - t_{ж2}). \quad (2.49')$$

Величина k_l называется линейным коэффициентом теплопередачи, он измеряется в Вт/(м·К). Он характеризует интенсивность передачи теплоты от одной подвижной среды к другой через разделяющую их стенку. Значение k_l численно равно количеству теплоты, которое проходит через стенку длиной 1 м в единицу времени от одной среды к другой при разности температур между ними 1 град.

Величина $R_l = 1/k_l$, обратная линейному коэффициенту теплопередачи, называется *линейным термическим сопротивлением теплопередачи*. Она равна

$$R_l = \frac{1}{k_l} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2l} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}, \quad (2.51)$$

здесь R_l измеряется в м·К/Вт.

Отдельные составляющие полного термического сопротивления представляют собой

$1/\alpha_1 d_1, 1/\alpha_2 d_2$ – термические сопротивления теплоотдачи на соответствующих поверхностях, обозначим их соответственно R_{l1} и R_{l2} ;

$\frac{1}{2l} \ln \frac{d_2}{d_1}$ – термические сопротивления теплопроводности стенки, обозначим его через R_{lc} .

Следует отметить, что линейные термические сопротивления теплоотдачи для трубы определяются не только коэффициентами теплоотдачи α_1 и α_2 , но и соответствующими диаметрами.

Если тепловой поток через цилиндрическую стенку отнести к внутренней или наружной поверхности стенки, то получим плотность теплового потока, Вт/м², отнесенную к единице соответствующей поверхности трубы

$$q_1 = \frac{Q}{p \cdot d_1 \cdot l} = \frac{k_l}{d_1} (t_{ж1} - t_{ж2}),$$

или

$$q_2 = \frac{Q}{p \cdot d_2 \cdot l} = \frac{k_l}{d_2} (t_{ж1} - t_{ж2})$$

и

$$q_1 = k_1 \cdot (t_{жс1} - t_{жс2}); \quad q_2 = k_2 \cdot (t_{жс1} - t_{жс2}),$$

где $k_1 = k_l / d_1; k_2 = k_l / d_2$.

Последнее соотношение устанавливает связь между коэффициентом теплопередачи при отнесении теплового потока к единице длины цилиндрической стенки и к единице поверхности

$$k_l = d_1 \cdot k_1 = d_2 \cdot k_2,$$

здесь k_l измеряется в Вт/(м·К).

Формулы же для k_1 и k_2 , Вт/(м²·К), в развернутом виде имеют вид

$$k_1 = \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{d_1}{2l} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{d_1}{a_2 d_2}}; \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad (2.52)$$

$$k_2 = \frac{1}{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{d_2}{d_1} + \frac{d_2}{2l} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{a_2}}$$

На практике часто встречаются цилиндры, толщина стенок которых мала по сравнению с диаметром. В этом случае при расчетах можно пользоваться упрощенными формулами. Для получения таких формул поступим следующим образом.

Величину $\ln \frac{d_2}{d_1}$ разложим в ряд

$$\ln \frac{d_2}{d_1} = \left(\frac{d_2}{d_1} - 1 \right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d_2}{d_1} - 1 \right)^2 + \dots$$

Если отношение $d_2 / d_1 \rightarrow 1$, то такой ряд сходится быстро, и с достаточной точностью можно ограничиться первым членом ряда

$$\ln \frac{d_2}{d_1} = \left(\frac{d_2}{d_1} - 1 \right) = \frac{d_2 - d_1}{d_1} = \frac{2\delta}{d_1},$$

где δ – толщина цилиндрической стенки, м.

Подставив полученное значение $\ln \frac{d_2}{d_1}$ в уравнение (2.52), получим

$$k_1 = \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{d}{l} + \frac{1}{a_2}} \quad (2.53)$$

Следовательно, если стенка трубы тонкая, то при практических расчетах можно пользоваться формулой

$$Q = k \cdot p \cdot d_x \cdot l \cdot (t_{ж1} - t_{ж2}), \quad (2.54)$$

где k , Вт/(м²·К), взят согласно формуле (2.53), т.е. как для плоской стенки. При этом, если $d_2/d_1 < 2$, погрешность расчета не превышает 4%. Для многих технических расчетов ошибка, не превышающая 4%, вполне допустима. Обычно в инженерных расчетах при $d_2/d_1 \leq 1,8$ пользуются формулой (2.54).

Ошибку можно уменьшить, если в качестве расчетной поверхности в (2.54) брать поверхность, со стороны которой α меньше:

- 1) если $\alpha_1 \gg \alpha_2$, то $d_x = d_2$;
- 2) если $\alpha_2 \gg \alpha_1$, то $d_x = d_1$;
- 3) если $\alpha_1 \approx \alpha_2$, то $d_x = \frac{d_1 + d_2}{2}$.

В случае теплопередачи через многослойную цилиндрическую стенку система равенства (2.48') должна быть заменена системой, учитывающей сопротивление теплопроводности всех слоев

$$\begin{aligned} t_{ж1} - t_{c1} &= \frac{q_l}{p} \cdot \frac{1}{a_1 d_1}; \\ t_{c1} - t_{c2} &= \frac{q_l}{p} \cdot \frac{1}{2l} \ln \frac{d_2}{d_1}; \\ &\dots\dots\dots (2.55) \\ &\dots\dots\dots \\ t_{cn} - t_{c(n+1)} &= \frac{q_l}{p} \cdot \frac{1}{2l_n} \ln \frac{d_{n+1}}{d_n}; \\ t_{c(n+1)} - t_{ж2} &= \frac{q_l}{p} \cdot \frac{1}{a_2 d_{n+1}}. \end{aligned}$$

После сложения равенства (2.55) и решения относительно q_l , Вт/м, получим

$$q_l = \frac{p \cdot (t_{жс1} - t_{жс2})}{\frac{1}{a_1 d_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2l_i} \cdot \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{a_2 d_{n+1}}}, \quad (2.56)$$

или

$$q_l = k_l \cdot p \cdot (t_{жс1} - t_{жс2}). \quad (2.56')$$

Величина

$$\frac{1}{k_l} = R_l = \frac{1}{a_1 d_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2l_i} \cdot \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{a_2 d_{n+1}} \quad (2.56'')$$

называется полным термическим сопротивлением многослойной цилиндрической стенки и измеряется в м·К/Вт.

Из уравнения (2.55) следует, что

$$\left. \begin{aligned} t_{c1} &= t_{жс1} - \frac{q_l}{p} \cdot \frac{1}{a_1 d_1}; \\ t_{c2} &= t_{жс1} - \frac{q_l}{p} \cdot \left(\frac{1}{a_1 d_1} + \frac{1}{2l_i} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1} \right); \\ t_{c(i+1)} &= t_{жс1} - \frac{q_l}{p} \cdot \left(\frac{1}{a_1 d_1} + \sum_{i=1}^i \frac{1}{2l_i} \cdot \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.57)$$

В случае задания граничных условий первого рода их можно рассматривать как предельный случай граничных условий третьего рода, когда коэффициенты теплоотдачи на поверхностях α_1 и α_2 устремляются к бесконечности, в силу чего $t_{жс1}$ и $t_{жс2}$ становятся равными t_{c1} и $t_{c(n+1)}$. При этих условиях уравнение (2.56) принимает вид

$$q = \frac{p \cdot (t_{c1} - t_{c(n+1)})}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2l_i} \cdot \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}}, \quad (2.58)$$

а выражение для расчета температуры на границах между слоями

$$t_{c(i+1)} = t_{c1} - \frac{q_l}{p} \cdot \sum_{i=1}^i \frac{1}{2l_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}. \quad (2.59)$$

2.3 Критический диаметр цилиндрической стенки

Рассмотрим влияние изменения наружного диаметра на термическое сопротивление однородной цилиндрической стенки. Из (2.51) имеем

$$R_l = \frac{1}{k_l} = \frac{1}{a_1 d_1} + \frac{1}{2l} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{a_2 d_2}.$$

При постоянных значения α_1 , d_1 , λ и a_2 полное термическое сопротивление теплопередачи цилиндрической стенки будет зависеть от внешнего диаметра. Из уравнения (2.51) следует, что при этих условиях $1/a_1 d_1 = R_{l1} = const$.

Термическое сопротивление теплопроводности $\frac{1}{2l} \ln \frac{d_2}{d_1} = R_{lc}$ с увеличением d_2 будет возрастать, а термическое сопротивление теплоотдачи $1/a_2 d_2 = R_{l2}$ будет уменьшаться. Очевидно, что полное термическое сопротивление будет определяться характером изменения составляющих R_{lc} и R_{l2} .

Изменение частных термических сопротивлений изображено на рис. 2.8.

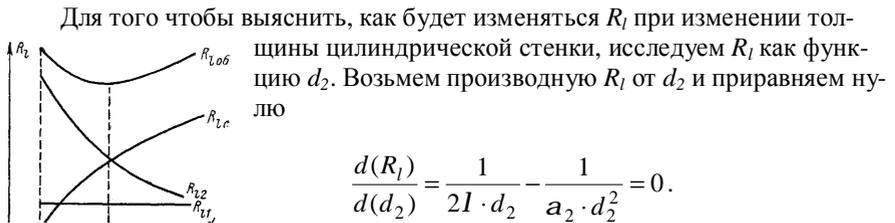


Рис. 2.8. Зависимость термического сопротивления цилиндрической стенки от d_2 .

$$\frac{d(R_l)}{d(d_2)} = \frac{1}{2l \cdot d_2} - \frac{1}{a_2 \cdot d_2^2} = 0.$$

Значение d_2 из последнего выражения соответствует экстремальной точке кривой $R_l=f(d_2)$. Исследовав кривую любым из известных способов на максимум и минимум, увидим, что в экстремальной точке имеет место минимум. Таким образом, при значении диаметра $d_2 = 2l / a_2$ термическое сопротивление теплопередачи будет минимальным.

Значение внешнего диаметра трубы, соответствующего минимальному полному термическому сопротивлению теплопередачи, называется *критическим диаметром* и обозначается $d_{кр}$. Рассчитывается он по формуле

$$d_{кр} = \frac{2l}{a_2} \cdot (2.60)$$

При $d_2 < d_{кр}$ с увеличением d_2 полное термическое сопротивление теплопередачи снижается, так как увеличение наружной поверхности оказывает на термическое сопротивление большее влияние, чем увеличение толщины стенки

При $d_2 > d_{кр}$ с увеличением d_2 термическое сопротивление теплопередачи возрастает, что указывает на доминирующее влияние толщины стенки.

Изложенные соображения необходимо учитывать при выборе тепловой изоляции для покрытия различных цилиндрических аппаратов и трубопроводов.

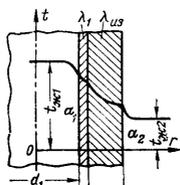


Рис. 2.9. К понятию критического диаметра изоляции.

Рассмотрим критический диаметр изоляции, наложенной на трубу (рис. 2.9). Термическое сопротивление теплопередачи для такой трубы запишется

$$R_l = \frac{1}{a_1 d_1} + \frac{1}{2l_c} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{l_{из}} \cdot \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{a_2 d_3}.$$

Из уравнения $q_l = p \cdot \Delta t / R_l$ следует, что q_l при увеличении внешнего диаметра изоляции d_3 сначала будет возрастать и при $d_3 = d_{кр}$ будет иметь максимум q_l . При дальнейшем увеличении внешнего диаметра изоляции q_l будет снижаться (рис. 2.10).

Выбрав какой-либо теплоизоляционный материал для покрытия цилиндрической поверхности, прежде всего нужно рассчитать критический диаметр по формуле (2.60) для заданных $\lambda_{из}$ и a_2 .

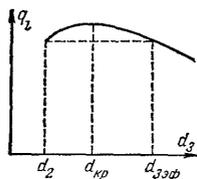


Рис. 2.10. Зависимость тепловых потерь от толщины изоляции, наложенной на цилиндрическую стенку.

Если окажется, что величина $d_{кр}$ больше наружного диаметра трубы d_2 , то применение выбранного материала в качестве тепловой изоляции нецелесообразно. В области $d_2 < d_3 < d_{кр.из}$ при увеличении толщины изоляции будет наблюдаться увеличение теплопотерь. Это положение наглядно иллюстрируется на рис. 2.10. Только при $d_3 = d_{3эф}$ тепловые потери вновь станут такими же, как для перво-

начального, неизолированного трубопровода. Следовательно, некоторый слой тепловой изоляции не будет оправдывать своего назначения. Значит, для эффективной работы тепловой изоляции необходимо, чтобы $d_{кр.из} \leq d_2$.

2.4 Передача теплоты через шаровую стенку

а) Граничные условия первого рода

Пусть имеется полый шар с радиусами r_1 и r_2 постоянным коэффициентом теплопроводности λ и с заданными равномерно распределенными температурами поверхностей t_{c1} и t_{c2} .

Так как в рассматриваемом случае температура измеряется только в направлении радиуса шара, то дифференциальное уравнение теплопроводности в сферических координатах принимает вид

$$\nabla^2 t = \frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{dt}{dr} = 0. \quad (2.61)$$

Граничные условия запишутся

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } r = r_1 \quad t = t_{c1}, \\ \text{при } r = r_2 \quad t = t_{c2}, \end{array} \right\} (2.62)$$

После первого интегрирования уравнения (2.61) получаем

$$\frac{dt}{dr} = \frac{C_1}{r^2}. \quad (\text{а})$$

Второе интегрирование дает

$$t = C_2 - \frac{C_1}{r}. \quad (2.63)$$

Постоянные интегрирования в уравнении (2.63) определяются из граничных условий (2.62). При этом получим

$$C_1 = - \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}; \quad (\text{б})$$

$$C_2 = t_{c1} - \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \cdot \frac{1}{r_1}. \quad (\text{в})$$

Подставляя значения C_1 и C_2 в уравнение (2.63), получаем выражения для температурного поля в шаровой стенке

$$t = t_{c1} - \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right). \quad (2.64)$$

Для нахождения количества теплоты, проходящей через шаровую поверхность величиной F в единицу времени, можно воспользоваться законом Фурье

$$Q = -l \frac{dt}{dr} F = -l \cdot 4p \cdot r^2 \frac{dt}{dr};$$

здесь Q измеряется в ваттах.

Если в это выражение подставить значение градиента температуры dt/dr , то получим

$$Q = \frac{4p \cdot l \cdot (t_{c1} - t_{c2})}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} = \frac{2p \cdot l \cdot \Delta t}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}} = p \cdot l \cdot \frac{d_1 d_2}{d_2 - d_1} \cdot \Delta t. \quad (2.65)$$

Эти уравнения являются расчетными формулами теплопроводности шаровой стенки. Из уравнения (2.64) следует, что при постоянном λ температура в шаровой стенке меняется по закону гиперболы.

б) Граничные условия третьего рода (теплопередача)

При заданных граничных условиях третьего рода кроме r_1 и r_2 будут известны $t_{жс1}$ и $t_{жс2}$, а также коэффициенты теплоотдачи на поверхности шаровой стенки α_1 и α_2 . Величины $t_{жс1}$, $t_{жс2}$, α_1 и α_2 предполагаются постоянными во времени, а α_1 и α_2 – и по поверхностям.

Поскольку процесс стационарный и полный тепловой поток Q , Вт, будет постоянным для всех изотермических поверхностей, то можно записать

$$Q = a_1 \cdot p \cdot d_1^2 (t_{ж1} - t_{c1}); \quad Q = \frac{2p \cdot l}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}} (t_{c1} - t_{c2}); \quad Q = a_2 \cdot p \cdot d_2^2 (t_{c2} - t_{ж2}).$$

Из этих уравнений следует, что

$$Q = \frac{p(t_{ж1} - t_{ж2})}{\frac{1}{a_1 d_1^2} + \frac{1}{2l} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{1}{a_2 d_2^2}} = k_{ш} \cdot p \cdot \Delta t. \quad (2.66)$$

Величина

$$k_{ш} = \frac{1}{\frac{1}{a_1 d_1^2} + \frac{1}{2l} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{1}{a_2 d_2^2}}$$

называется коэффициентом теплопередачи шаровой стенки и измеряется в Вт/К.

Обратная величина

$$\frac{1}{k_{ш}} = R_{ш} = \frac{1}{a_1 d_1^2} + \frac{1}{2l} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{1}{a_2 d_2^2}$$

называется термическим сопротивлением теплопередачи шаровой стенки и измеряется в К/Вт.

2.5 Пути интенсификации теплопередачи

а) Интенсификация теплопередачи путем увеличения коэффициента теплоотдачи

Из уравнения теплопередачи

$$Q = k \cdot F \cdot \Delta t$$

следует, что при заданных размерах стенки и температурах жидкостей величиной, определяющей теплоотдачу, является k . Но поскольку теплопередача – явление сложное, то правильное решение можно найти на основе анализа частных составляющих, характеризующих процесс. Например, если мы имеем дело с плоской стенкой, для которой

$$k = \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{d}{l} + \frac{1}{a_2}},$$

то при $d/l \rightarrow 0$ (что можно принять для тонких стенок с большим коэффициентом λ)

$$k' = \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}} = \frac{a_1}{1 + \frac{a_1}{a_2}} = \frac{a_2}{\frac{a_2}{a_1} + 1}. \quad (2.67)$$

Из уравнения (2.67) следует, что коэффициент теплопередачи не может быть больше самого малого α . При $a_2 \rightarrow \infty$ k' стремится к своему предельному значению α_1 . При $a_1 \rightarrow \infty$ коэффициент теплопередачи стремится к a_2 .

Проследим это на числовых примерах:

а)

$$1) \alpha_1 = 40 \text{ и } \alpha_2 = 5000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К});$$

$$2) \alpha_1 = 40 \text{ и } \alpha_2 = 10000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}).$$

По формуле (2.67) находим, коэффициенты теплопередачи будут равны

$$k'_1 = 39,7 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}) \text{ и } k'_2 = 39,8 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}).$$

б)

$$1) \alpha_1 = 80 \text{ и } \alpha_2 = 5000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К});$$

$$2) \alpha_1 = 200 \text{ и } \alpha_2 = 5000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}).$$

Для случая б) находим, что коэффициенты теплопередачи становятся равными

$$k'_1 = 78,8 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}) \text{ и } k'_2 = 192 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}).$$

Из рассмотренного примера видно, что при $\alpha_1 \ll \alpha_2$ увеличение большего из коэффициентов теплопередачи (α_2) практически не дает увеличения k'_1 . Увеличение меньшего из коэффициентов теплопередачи (α_1) в 2 и 5 раз дает увеличение k' почти во столько же раз.

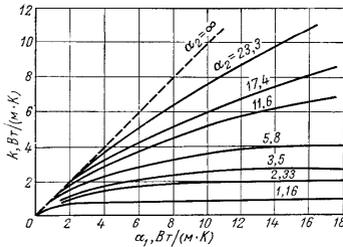


Рис. 2.11. Зависимость $k=f(\alpha_1, \alpha_2)$.

На рис. 2.11 представлена зависимость $k' = f(\alpha_1, \alpha_2)$ согласно формуле (2.67). Из графика следует, что при увеличении α_1 значение k' быстро растет до тех пор, пока α_1 не сравняется с α_2 . После того как α_1 станет больше α_2 , рост k' замедляется и при дальнейшем увеличении α_1 практически прекращается. Следовательно, при $\alpha_1 \ll \alpha_2$ для увеличения k' следует увеличивать α_1 , т. е. уменьшать большее из термических сопротивлений $1/\alpha_1$. Иначе говоря, при $\alpha_1 \ll \alpha_2$ увеличение k' возможно только за счет увеличения α_1 . Если $\alpha_1 \approx \alpha_2$ увеличение коэффициента теплопередачи возможно за счет увеличения любого из α .

б) Интенсификация теплопередачи за счет оребрения стенок

При передаче теплоты через цилиндрическую стенку термические сопротивления $1/a_1 d_1$ и $1/a_2 d_2$ определяются не только значениями коэффициентов теплоотдачи, но и размерами самих поверхностей. При передаче тепла через шаровую стенку влияние диаметров d_1 и d_2 оказывается еще сильнее, что видно из соотношений $1/a_1 d_1^2$ и $1/a_2 d_2^2$. Отсюда следует, что если a мало, то термическое сопротивление теплоотдачи можно уменьшить путем увеличения соответствующей поверхности. Такой же результат можно получить и для плоской стенки, если одну из поверхностей увеличить путем оребрения. Последнее обстоятельство и положено в основу интенсификации теплопередачи за счет оребрения. При этом термические сопротивления станут пропорциональными величинам

$$\frac{1}{a_1 F_1} \text{ и } \frac{1}{a_2 F_2}.$$

Следует указать, что при использовании метода оребрения нужно руководствоваться следующими соображениями: если $\alpha_1 \ll \alpha_2$, то оребрять поверхность со стороны α_1 следует до тех пор, пока $a_1 F_1$ не достигает значения $a_2 F_2$. Дальнейшее увеличение поверхности F_1 малоэффективно. Ребристые поверхности изготавливаются или в виде сплошных отливок или отдельных ребер, прикрепленных к поверхности.

Строгое аналитическое решение задачи о распространении теплоты в ребре связано со значительными трудностями. В основу решения поэтому кладут некоторые допущения, которые позволяют сравнительно простым путем

получить нужный результат. Ниже рассмотрим метод решения задач о теплопроводности в ребрах простейших геометрических форм.

2.6 Теплопроводность в стержне (ребре) постоянного поперечного сечения

а) Дифференциальное уравнение и его решение

Ребра в поперечном сечении могут иметь профиль самой различной геометрической конфигурации (прямоугольник, круг, треугольник и другие фигуры, в том числе и неправильной геометрической формы). Рассмотрим распространение теплоты в прямом стержне с постоянным поперечным сечением по длине. Обозначим площадь поперечного сечения стержня через f и периметр через u . Стержень находится в среде с постоянной температурой $t_{жс}$, коэффициент теплоотдачи от поверхности стержня к окружающей среде будем считать постоянным для всей поверхности. Будем полагать также, что коэффициент теплопроводности материала стержня λ достаточно велик, а поперечное сечение очень мало по сравнению с его длиной. Последнее дает основание пренебречь изменением температуры в поперечном сечении и считать, что она изменяется только вдоль оси стержня. Для удобства дальнейших выкладок отсчет температуры будем вести от $t_{жс} = const$. Отсчитанную таким образом избыточную температуру стержня обозначим через J . Очевидно,

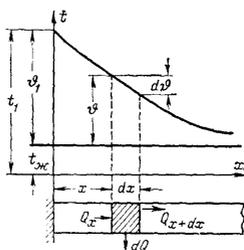
$$J = t - t_{жс},$$

где $t_{жс}$ — температура среды, окружающей стержень; t — текущая температура стержня.

Если задана температура основания стержня t_1 то избыточная температура стержня (рис. 2.12) будет

$$J_1 = t_1 - t_{жс}.$$

Рис. 2.12. Перенос теплоты через стержень.



На расстоянии x от основания стержня выделим элемент стержня длиной dx . Уравнение теплового баланса для рассматриваемого элемента можно записать:

$$Q_x - Q_{x+dx} = dQ, \text{ (a)}$$

где Q_x – количество теплоты, входящее в левую грань элемента за единицу времени;

Q_{x+dx} – количество теплоты, которое выходит из противоположной грани элемента за то же время;

dQ – количество теплоты, отдаваемое за единицу времени наружной поверхностью элемента окружающей его среде.

Согласно закону Фурье

$$Q_x = -l \frac{dJ}{dx} f$$

и

$$Q_{x+dx} = -l \frac{d}{dx} \left(J + \frac{dJ}{dx} dx \right) f,$$

откуда

$$Q_{x+dx} = -lf \frac{dJ}{dx} - lf \frac{d^2J}{dx^2} dx.$$

Следовательно,

$$Q_x - Q_{x+dx} = lf \frac{d^2J}{dx^2} dx. \quad (6)$$

С другой стороны, согласно закону Ньютона-Рихмана

$$dQ = a_p \cdot J \cdot u dx. \quad (в)$$

Приравнявая (6) и (в), получаем следующее дифференциальное уравнение, описывающее изменения температуры стержня

$$\frac{d^2J}{dx^2} = \frac{a_p u}{lf} J = m \cdot J^2, \quad (2.68)$$

где

$$m = + \sqrt{\frac{a_p u}{lf}} \quad (г)$$

где m измеряется в $1/м$.

Из выражения (г) видно, что для ребра, форма и размеры которого заданы, при условии постоянства коэффициента теплоотдачи α_p по всей поверхности и постоянства λ в рассматриваемом интервале температур, величина $m = const$. Тогда общий интеграл для уравнения (2.68) будет

$$J = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}. \quad (2.69)$$

Значения постоянных C_1 и C_2 определяются из граничных условий. Граничные условия могут быть заданы по-разному в зависимости от длины стержня и других факторов.

б) Стержень бесконечной длины

В начальном сечении стержня температура поддерживается постоянной, т.е. при $x=0$ величина $J = J_1$. Если длина стержня $l \rightarrow \infty$, то вся теплота, подводимая к стержню, будет отдана им в окружающую среду и при $x \rightarrow \infty$ имеем $J = 0$.

Подстановка граничных условий в уравнение (2.69) дает

$$\text{при } x=0 \quad J_1 = C_1 + C_2;$$

$$\text{при } x \rightarrow \infty \quad C_1 e^\infty = 0.$$

Последнее равенство возможно только при $C_1=0$. Таким образом, $C_2 = J_1$. Подставляя эти значения постоянных C_1 и C_2 в уравнение (2.69), получаем

$$J = J_1 \cdot e^{-mx}. \quad (2.70)$$

Последнее равенство можно записать в виде

$$\Theta = \frac{J}{J_1} = e^{-mx}, \quad (2.70')$$

где Θ – безразмерная температура, выраженная в долях температуры J_1 начального сечения стержня.

На рис. 2.13 представлена зависимость безразмерной температуры Θ от длины стержня при различных значениях параметра m ($m_1 < m_2 < m_3$).

Из рассмотрения рис. 2.13 следует, что безразмерная температура убывает тем сильнее, чем больше множитель m . При $x \rightarrow \infty$ все кривые асимптотически приближаются к $\Theta=0$.

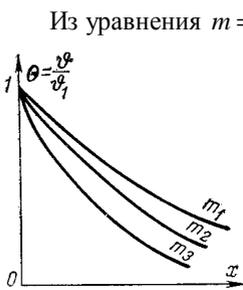


Рис. 2.13. Изменение температуры по длине стержня.

Из уравнения $m = \sqrt{a_p u / I f}$ следует, что величина m пропорциональна теплоотдаче с боковой поверхности и обратно пропорциональна $\sqrt{I f}$ – фактору, определяющему передачу теплоты теплопроводностью вдоль стержня. Отсюда следует, что при ребрении нужно выбирать материал для ребер с большим коэффициентом теплопроводности. Последнее приводит к уменьшению m и сохранению больших избыточных температур вдоль стержня. При $a_p / I = \text{const}$ величина m возрастает с возрастанием u/f , что указывает на более эффективную работу ребер с профилями, имеющими меньшее отношение u/f при том же поперечном сечении. Количество теплоты, передаваемое стержнем в окружающую среду, очевидно, будет равняться количеству теплоты, проходящему через его основание.

Через основание стержня проходит тепловой поток

$$Q = -I \left(\frac{dJ}{dx} \right)_{x=0} f,$$

здесь Q измеряется в ваттах.

Из уравнения (2.70) находим

$$\left(\frac{dJ}{dx} \right)_{x=0} = -m e^{-mx} J_1 \Big|_{x=0} = -m J_1.$$

Подставляя значение градиента температуры при $x=0$ в предыдущее уравнение для теплового потока, получаем формулу, определяющую количество теплоты, отданной стержнем в окружающую среду

$$Q = I \cdot f \cdot m \cdot J_1 = J_1 \sqrt{a_p I \cdot u \cdot f}. \quad (2.71)$$

в) Стержень конечной длины

Для стержня конечной длины дифференциальное уравнение (2.68) и его решение (2.69) сохраняет силу, но граничные условия будут другими

$$\left. \begin{aligned} &\text{при } x=0 \quad J = J_1; \\ &\text{при } x=l \quad -I \left(\frac{dJ}{dx} \right)_{x=l} = a_1 J_1; \quad (2.72) \\ &\text{или} \quad \left(\frac{dJ}{dx} \right)_{x=l} = -\frac{a_1}{I} J_1, \end{aligned} \right\}$$

где J_1 – температура на конце стержня; a_1 – коэффициент теплоотдачи с торца стержня.

При $x=l$ имеет место равенство количества теплоты, подведенного к торцу стержня за счет теплопроводности и количества теплоты, отдаваемого поверхностью торца в окружающую среду за счет теплоотдачи. Для определения постоянных C_1 и C_2 в уравнении (2.69) используем граничные условия (2.72)

$$\left. \begin{aligned} &\text{при } x=0 \quad J_1 = C_1 + C_2; \\ &\text{при } x=l \\ &\left(\frac{dJ}{dx} \right)_{x=l} = C_1 m e^{ml} - C_2 m e^{-ml} = -\frac{a_1}{I} J_1; \quad (2.72') \\ &\text{и } J_1 = C_1 e^{ml} + C_2 e^{-ml} \end{aligned} \right\}$$

Из полученных уравнений (2.72) определяем постоянные C_1 и C_2

$$C_1 = \frac{J_1 \left(m - \frac{a_1}{I} \right)}{e^{2ml} \left(m + \frac{a_1}{I} \right) + m - \frac{a_1}{I}}; \quad C_2 = J_1 \cdot \frac{e^{2ml} \left(m + \frac{a_1}{I} \right)}{e^{2ml} \left(m + \frac{a_1}{I} \right) + m - \frac{a_1}{I}}.$$

Подставляя полученные значения C_1 и C_2 в уравнение (2.69), получаем

$$J = J_1 \cdot \left[\frac{e^{mx} \left(m - \frac{a_l}{l} \right)}{e^{2ml} \left(m + \frac{a_l}{l} \right) + m - \frac{a_l}{l}} + \frac{e^{-mx} \cdot e^{2ml} \left(m + \frac{a_l}{l} \right)}{e^{2ml} \left(m + \frac{a_l}{l} \right) + m - \frac{a_l}{l}} \right]. \quad (2.73)$$

Умножив и разделив правую часть уравнения (2.73) на e^{-ml} и произведя простые алгебраические преобразования, получим

$$J = J_1 \left[\frac{m \left[e^{m(l-x)} + e^{-m(l-x)} \right] + \frac{a_l}{l} \left[e^{m(l-x)} - e^{-m(l-x)} \right]}{m \left[e^{ml} + e^{-ml} \right] + \frac{a_l}{l} \left[e^{ml} - e^{-ml} \right]} \right].$$

Напомним, что

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch(x) \quad \text{и} \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sh(x).$$

С учетом сказанного уравнение (2.73) запишется

$$J = J_1 \frac{ch[m(l-x)] + \frac{a_l}{ml} sh[m(l-x)]}{ch(ml) + \frac{a_l}{ml} sh(ml)}. \quad (2.73')$$

Если теплоотдачей с конца стержня пренебречь, то граничные условия (2.72) можно записать в виде

$$\text{при } x=0 \quad J = J_1;$$

$$\text{при } x=l \quad \left(\frac{dJ}{dx} \right)_{x=l} = 0.$$

Последнее можно допустить для случая, когда a_l на торце стержня мало, а коэффициент теплопроводности материала λ велик и отношение $a_l / l \rightarrow 0$, т. е. можно пренебречь теплоотдачей с торца стержня.

Для этих условий в соотношении (2.73') вторые члены числителя и знаменателя правой части обращаются в нуль и уравнение принимает вид

$$J = J_1 \frac{ch[m(l-x)]}{ch(ml)}, \quad (2.74)$$

здесь J измеряется в $^{\circ}\text{C}$.

Обычно доля теплоты, отдаваемой с торца стержня, является величиной малой по сравнению с количеством теплоты, отдаваемым с поверхности ребра, и для практических инженерных расчетов, как правило, используется формула (2.74).

В предельном случае, когда $x=l$, формула (2.74) принимает вид

$$J_{x=l} = \frac{J_1}{ch(ml)}.$$

Количество теплоты Q_p , Вт, отдаваемое поверхностью ребра в окружающую среду, будет равно количеству теплоты, подводимому к основанию ребра

$$Q_p = -lf \left(\frac{dJ}{dx} \right)_{x=0}.$$

Из уравнения (2.74) находим

$$\left(\frac{dJ}{dx} \right)_{x=0} = -J_1 m \frac{sh(ml)}{ch(ml)} = -J_1 m \cdot th(ml).$$

Тогда

$$Q_p = lfmJ_1 th(ml). \quad (2.75)$$

Подставив $m = \sqrt{a_p u / lf}$ в (2.75), получим

$$Q_p = J_1 \sqrt{a_p \cdot u \cdot l \cdot f} th(ml). \quad (2.75')$$

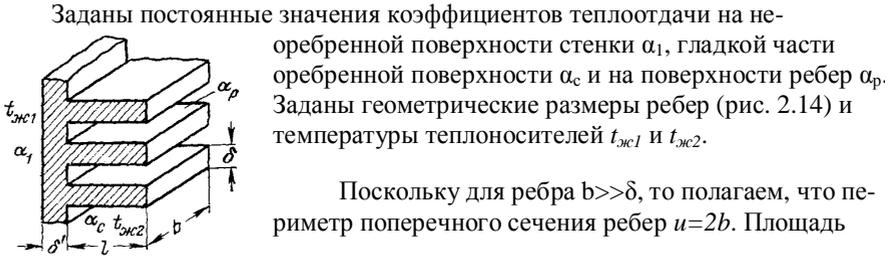
Если длина стержня очень велика, то $ch(ml) \rightarrow \infty$, а $th(ml) \approx 1$. Тогда

$$J_{x=l} = 0$$

и формула (2.75) превращается в (2.71).

2.7 Теплопередача через ребристую плоскую стенку

Необходимо найти тепловой поток через плоскую ребристую стенку безграничных размеров. Стенка оребрена со стороны меньшего коэффициента теплоотдачи (рис. 2.14).



Заданы постоянные значения коэффициентов теплоотдачи на неоребренной поверхности стенки α_c , гладкой части оребренной поверхности α_c и на поверхности ребер α_p . Заданы геометрические размеры ребер (рис. 2.14) и температуры теплоносителей $t_{жс1}$ и $t_{жс2}$.

Поскольку для ребра $b \gg \delta$, то полагаем, что периметр поперечного сечения ребер $u=2b$. Площадь

Рис. 2.14. Теплопередача поперечного сечения ребра $f=b\delta$.
через ребристую стенку.

Следовательно,
 $m = \sqrt{a_p u / l f} = \sqrt{2a_p / l d}$, 1/м. Подставив полученное выражение для m в уравнение (2.75), умножив и разделив на $2l$, получим

$$Q_p = J_1 \sqrt{a_p 2b l b d} \frac{2l}{2l} th \left(\frac{1}{d} \sqrt{\frac{2a_p d}{l}} \right) = a_p J_1 F_p \frac{th \left(\frac{l}{d} \sqrt{\frac{2a_p d}{l}} \right)}{\frac{l}{d} \sqrt{\frac{2a_p d}{l}}},$$

здесь $a_p d / l = Bi$ – безразмерный комплекс, называемый *числом Био*.

Число Bi является важной характеристикой процесса теплопроводности. Оно представляет собой отношение внутреннего термического сопротивления теплопроводности к внешнему термическому сопротивлению теплоотдачи

$$Bi = \frac{d/l}{1/a_p}.$$

Окончательно уравнение для теплового потока с поверхности ребра можно записать в виде

$$Q_p = a_p J_1 F_p \frac{th \left(\frac{l}{d} \sqrt{2Bi} \right)}{\frac{l}{d} \sqrt{2Bi}}. \quad (2.76)$$

Обозначим

$$\frac{th\left(\frac{l}{d}\sqrt{2Bi}\right)}{\frac{l}{d}\sqrt{2Bi}} = E.$$

Величина E называется *коэффициентом эффективности ребра*. Тогда уравнение (2.76) принимает вид

$$Q_p = a_p J_1 F_p E.$$

Величина $E = f\left(\frac{l}{d}\sqrt{2Bi}\right)$ стремится к своему максимальному значению, равному единице, при $\frac{l}{d}\sqrt{2Bi} \rightarrow 0$ (при заданных геометрических размерах ребра последнее возможно в случае, если $l \rightarrow \infty$, т.е. $Bi \rightarrow 0$).

Теплота Q_c , Вт, отдаваемая гладкой частью ребренной поверхности

$$Q_c = a_c J_1 F_c.$$

Общее количество теплоты

$$Q = Q_p + Q_c = a_p J_1 F_p E + a_c J_1 F_c \quad (\text{а})$$

или

$$Q = a_{np} J_1 F_{p.c.}, \quad F_{p.c.} = F_p + F_c. \quad (\text{б})$$

Из сопоставления (а) и (б) следует, что

$$a_{np} = a_p E \frac{F_p}{F_{p.c.}} + a_c \frac{F_c}{F_{p.c.}} \quad (2.77)$$

Величина a_{np} , входящая в уравнение (2.77), называется *приведенным коэффициентом теплоотдачи*. Это такой усредненный коэффициент теплоотдачи ребристой стенки, который учитывает теплоотдачу поверхности ребра, поверхности гладкой стенки и эффективность работы ребра.

Тогда для передачи теплоты через ребристую стенку можно записать систему уравнений

$$Q = a_1 F_1 (t_{жс1} - t_{с1}); \quad Q = \frac{l}{d'} \cdot F_1 \cdot (t_{с1} - t_{с2}); \quad Q = a_{np} F_{p.c.} (t_{с2} - t_{жс2});$$

здесь δ' – см. рис.2.14.

Из этих уравнений получаем

$$Q = \frac{t_{жс1} - t_{жс2}}{\frac{1}{a_1 F_1} + \frac{d'}{l F_1} + \frac{1}{a_{np} F_{p.c.}}}. \quad (2.78)$$

Если тепловой поток отнести к единице оребренной поверхности стенки, то

$$\frac{Q}{F_{p.c.}} = q_{p.c.} = \frac{t_{жс1} - t_{жс2}}{\frac{1}{a_1} \frac{F_{p.c.}}{F_1} + \frac{d'}{l} \frac{F_{p.c.}}{F_1} + \frac{1}{a_{np}}} = k_{p.c.} (t_{жс1} - t_{жс2}), \quad (2.79)$$

$$\text{где } k_{p.c.} = \frac{1}{\frac{1}{a_1} \frac{F_{p.c.}}{F_1} + \frac{d'}{l} \frac{F_{p.c.}}{F_1} + \frac{1}{a_{np}}}$$

– коэффициент теплопередачи через ребристую стенку при отнесении теплового потока к оребренной поверхности, Вт/(м²·К).

Если тепловой поток отнести к неоребренной поверхности стенки, то получим

$$\frac{Q}{F_1} = q_1 = \frac{t_{жс1} - t_{жс2}}{\frac{1}{a_1} + \frac{d'}{l} + \frac{1}{a_{np}} \cdot \frac{F_1}{F_{p.c.}}} = k_1 (t_{жс1} - t_{жс2}), \quad (2.80)$$

где

$$k_1 = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{d'}{l} + \frac{1}{a_{np}} \frac{F_1}{F_{p.c.}}}$$

– коэффициент теплопередачи при отнесении теплового потока к неоребренной поверхности стенки.

Отношение оребренной поверхности $F_{p.c.}$ к гладкой F_1 называется *коэффициентом оребрения*.

Влияние оребрения на коэффициент теплопередачи можно показать на следующем примере. Пусть $\alpha_1 = 1000$ и $\alpha_2 = 20$ Вт/(м²·К). Предположим, что d'/l мало и им можно пренебречь, тогда

$$k_1' = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_{np}} \frac{F_1}{F_{p.c.}}}.$$

Для плоской поверхности (коэффициент оребрения $F_{p.c.}/F_1$ равен единице) получим

$$k_1' = \frac{1}{\frac{1}{1000} + \frac{1}{20}} \approx 20 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}.$$

Если стенка имеет ребра с одной стороны, причем коэффициент $F_{p.c.}/F_1 = 2$, то

$$k_1' = \frac{1}{\frac{1}{1000} + \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{2}} \approx 40 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}.$$

Следовательно, при заданных соотношениях коэффициентов теплоотдачи при оребрении плоской стенки со стороны малого α с коэффициентом оребрения $F_{p.c.}/F_1 = 2$, передача теплоты увеличивается примерно в 2 раза.

3. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

3.1 Основные положения

Если температурное поле меняется во времени, то тепловые процессы, протекающие в таких условиях, называются *нестационарными*.

Нестационарные процессы теплопроводности встречаются при охлаждении металлических заготовок, прокаливании твердых тел, в производстве стекла, обжиге кирпича, нагревании дерева, при вулканизации резины и т.п.

Передачу теплоты при нестационарном режиме можно определить, если найти закон изменения температурного поля и теплового потока во времени и в пространстве

$$f = f(x, y, z, t) \text{ и } Q = j(x, y, z, t),$$

где x, y, z – координаты точки; t – время.

Указанные зависимости могут быть найдены из решения дифференциального уравнения теплопроводности Фурье

$$\frac{\partial t}{\partial t} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) = a \nabla^2 t. \quad (3.1)$$

При решении уравнения (3.1) необходимо задать граничные условия и начальное распределение температуры в теле.

Граничные условия задаются уравнением

$$\left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_{нов} = -\left(a / I_{ст} \right) \cdot (t_{нов} - t_{среды}), \quad (3.2)$$

где $\left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_{нов}$ – градиент температуры на поверхности;

a – коэффициент теплоотдачи между жидкой средой и поверхностью твердого тела;

$\lambda_{ст}$ – коэффициент теплопроводности стенки;

$t_{нов}$ – температура поверхности стенки;

$t_{среды}$ – температура окружающей среды.

Физические величины λ, c, ρ считаются постоянными.

Температура рассматриваемого тела в начальный момент времени при $\tau=0$ распределена равномерно, т.е.

$$t_0 = const.$$

Решение уравнения (3.1) и (3.2) с учетом граничных и временных условий дает уравнение температурного поля вида

$$t = f(a, l, a, t, x, y, z, t_0, t_{cp}, l_0, l_1, \dots, l_n) \quad (3.3)$$

Из уравнения (3.3) видно, что температура зависит от большого числа переменных и постоянных параметров и решение его представляет весьма сложную математическую задачу.

При анализе уравнения (3.3) оказывается, что переменные можно сгруппировать в три безразмерных комплекса

$$\frac{a \cdot l}{l_{cm}} = Bi \text{ – число Био;}$$

$$\frac{a \cdot t}{l^2} = Fo \text{ – число Фурье;}$$

$$\frac{x}{l} \text{ – безразмерная координата.}$$

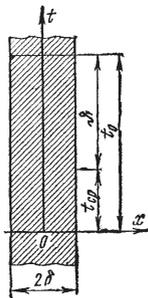
Искомая функция в виде безразмерной температуры J/J_1 может быть представлена следующим уравнением

$$\frac{J}{J_1} = F \left(Fo, Bi, \frac{x}{l} \right) \quad (3.4)$$

Здесь и дальше под J понимается избыточная температура тела, отсчитанная то температуры окружающей среды, т.е. $J = t_{\text{тела}} - t_{\text{среды}}$.

3.2 Неограниченная пластина

Рассмотрим охлаждение плоскопараллельной пластины толщиной 2δ ($l=\delta$). Размеры пластины в направлении осей Oy и Oz бесконечно велики (рис. 3.1). пластина омывается с обеих сторон жидкостью или газом с постоянной



температурой t_{cp} , причем коэффициент теплоотдачи α для обеих поверхностей имеет одинаковое и постоянное значение.

В начальный момент времени пластина имеет во всех точках постоянную температуру t_0 , поэтому и избыточная температура $J_1 = t_0 - t_{cp}$ будет также постоянной для всех точек тела. Кроме того, заданы коэффициент теплопроводности $\lambda_{ст}$, плотность тела ρ и теплоемкость его c , величины которых полагаются постоянными. Коэффициент температуропроводности a определяется по уравнению $a = \lambda / c \cdot \rho$. Т.к. пластина безгранична как по высоте, так и по ширине, то дифференциальное уравнение принимает вид

Рис. 3.1.

$$\frac{\partial J}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}.$$

Граничное условие при $x = \pm d$

$$\left(\frac{\partial J}{\partial x} \right)_{x=\pm d} = \pm \frac{a \cdot J_{cm}}{l_{cm}}$$

и начальное условие при $\tau=0$

$$J = J_1.$$

Температуры поверхности стенки и в ее средней плоскости определяются из соотношения

$$\frac{J_{cm}}{J_1} = \frac{t_{cm} - t_{cp}}{t_0 - t_{cp}} = f\left(\frac{a \cdot l}{l_{cm}}, \frac{at}{l^2}\right) = f(Bi, Fo). \quad (3.5)$$

Безразмерная координата x/l в средней плоскости и на поверхности пластины становится постоянной величиной (при $x=0$ $x/l=0$; при $x=\delta$ $x/l=1$) и поэтому отсутствует в уравнении (3.5)

$$\frac{J_u}{J_1} = \frac{t_{уенмп} - t_{cp}}{t_0 - t_{cp}} = f_1(Bi, Fo). \quad (3.6)$$

Количество теплоты, которое отдает (или воспринимает) пластина в окружающую среду за время τ , должно равняться изменению ее внутренней энергии за период полного ее охлаждения (нагревания).

Начальная внутренняя энергия пластины, отсчитанная от внутренней энергии при температуре среды, окружающей стенку, как от нуля, равна

$$Q_0 = 2 \cdot F \cdot c \cdot r \cdot d \cdot (t_0 - t_{cp}) = 2 \cdot F \cdot c \cdot r \cdot d \cdot J_1 \cdot (3.7)$$

Количество теплоты, выделяющееся при охлаждении пластины, определяется также безразмерными числами Bi и Fo

$$Q_t / Q_0 = f_2(Bi, Fo), (3.8)$$

$$Q_t = F \cdot 2 \cdot c \cdot r \cdot d (t_0 - t_{cp,cm}),$$

где Q_t – количество теплоты, переданное в окружающую среду за время τ , Дж;

$t_{cp,cm}$ – средняя температура стенки по истечении периода времени τ , °С.

Зависимости (3.5), (3.6) и (3.7) даются в виде графиков или в виде таблиц 3.1, 3.2 и 3.3. Сначала вычисляются числа Bi и Fo , а потом по табл. 3.1, 3.2, 3.3 определяют $J_y / J_1, J_{cm} / J_1, Q_t / Q_0$. Т.к. $t_0 = t_{cp}$ и начальное теплосодержание известны, то легко вычисляются t_{cm}, t_n и Q_t .

Таблица 3.1

Значения $J_y / J_1 = f(Bi, Fo)$ для неограниченной пластины

Bi	0,0001	0,001	0,01	0,1	0,5	1	4	10	20	50
Fo										
0,02	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0,05	-	-	-	-	-	-	1,0	1,0	1,0	1,0
0,1	-	-	1,0	1,0	1,0	1,0	0,98	0,97	0,96	0,95
0,5	-	1,0	0,99	0,97	0,87	0,78	0,56	0,46	0,41	0,39
1,0	-	1,0	0,99	0,92	0,70	0,54	0,25	0,16	0,13	0,12
2	-	1,0	0,98	0,83	0,46	0,31	0,06	0,02	0,01	0,01
5	-	1,0	0,95	0,62	0,13	0,03	0,0	0,0	0,0	0,0
10	1,0	0,99	0,90	0,37	0,02	0,0	-	-	-	-
20	1,0	0,98	0,82	0,14	0,0	-	-	-	-	-
50	1,0	0,96	0,61	0,01	-	-	-	-	-	-

Таблица 3.2

Значения $J_{cm} / J_1 = f(Bi, Fo)$ для неограниченной пластины

Bi	0,0001	0,001	0,01	0,1	0,5	1	4	10	20	50
Fo										
0,02	-	1,0	0,99	0,98	0,93	0,86	0,59	0,34	0,19	0,08
0,05	-	1,0	0,99	0,98	0,89	0,79	0,46	0,23	0,12	0,05
0,1	-	1,0	0,99	0,97	0,85	0,73	0,37	0,17	0,08	0,04
0,5	-	1,0	0,99	0,92	0,69	0,51	0,17	0,06	0,03	0,01
1,0	-	1,0	0,98	0,88	0,56	0,35	0,08	0,02	0,01	0,0

2	-	1,0	0,97	0,79	0,37	0,17	0,02	0,0	0,0	-
5	-	1,0	0,95	0,59	0,1	0,02	-	-	-	-
10	1,0	0,99	0,9	0,36	0,01	0,0	-	-	-	-
20	1,0	0,98	0,81	0,13	0,0	-	-	-	-	-
50	1,0	0,96	0,6	0,01	-	-	-	-	-	-

Таблица 3.3

Значения $Q_t / Q_0 = f(Bi, Fo)$ для неограниченной пластины

Bi	0,000	0,001	0,01	0,1	0,2	0,5	1	4	10	50
Fo	1									
0,02	-	-	-	-		0,01	0,02	0,05	0,09	0,12
0,05	-	-	-	0,01	0,01	0,02	0,04	0,12	0,18	0,23
0,1	-	-	-	0,02	0,03	0,05	0,08	0,2	0,27	0,34
0,5	-	-	-	0,05	0,09	0,2	0,32	0,58	0,69	0,75
1,0	-	-	0,01	0,1	0,17	0,35	0,53	0,81	0,89	0,92
2	-	-	0,02	0,17	0,31	0,59	0,78	0,96	0,98	0,99
5	-	-	0,05	0,39	0,63	0,88	0,98	1,0	1,0	1,0
10	-	0,01	0,1	0,62	0,84	0,99	1,0	-	-	-
20	-	0,02	0,18	0,81	0,93	1,0	-	-	-	-
50	0,01	0,04	0,39	0,92	0,99	-	-	-	-	-

3.3 Цилиндр бесконечной длины

Рассмотрим охлаждение равномерно прогретого круглого цилиндра большой длины радиусом r в среде с меньшей постоянной температурой. Коэффициент теплоотдачи от поверхности цилиндра к среде не меняется во времени. Физические величины s , ρ и λ материала цилиндра не зависят от температуры и считаются известными. Необходимо определить: температуру поверхности, температуру на оси цилиндра и количество теплоты, отданное цилиндром в окружающую среду, для любого момента времени.

Для цилиндра неограниченной длины дифференциальное уравнение теплопроводности удобнее отнести к цилиндрическим координатам. При этом принято, что в начальный момент времени ($\tau=0$) температура по всему объему цилиндра постоянна. Тогда

$$\frac{\partial J}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 J}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial J}{\partial r} \right). \quad (3.9)$$

Задача на охлаждение цилиндра аналогична задаче на охлаждение пластины. Поэтому температура на поверхности, на центральной оси и теплототе-

ри цилиндра через произвольные промежутки времени определяются из следующих соотношений

$$J_{cm} / J_1 = f(Bi, Fo); J_{\eta} / J_1 = f_1(Bi, Fo); Q_t / Q_0 = f_2(Bi, Fo). \quad (3.10)$$

Для цилиндрической стенки

$$Bi = a \cdot r / I_{cm}; Fo = a \cdot t / r^2,$$

где r – радиус цилиндра.

Величины $J_{cm} / J_1; J_{\eta} / J_1; Q_t / Q_0$ определяют по таблицам 3.4, 3.5, 3.6, а затем по ним легко найти t_{cp}, t_{η} и Q_{τ} .

Таблица 3.4.

Значения $J_{\eta} / J_1 = f(Bi, Fo)$ для цилиндра бесконечной длины

Bi	0,0001	0,001	0,01	0,1	0,5	1	4	10	20	50
0,01	-	-	-	-	-	-	-	1,0	1,0	1,0
0,05	-	-	-	-	1,0	1,0	1,0	0,99	0,99	0,99
0,1	-	-	-	1,0	0,99	0,97	0,94	0,9	0,88	0,87
0,25	-	-	1,0	0,98	0,89	0,81	0,59	0,48	0,42	0,4
0,5	-	-	0,99	0,93	0,72	0,55	0,24	0,15	0,12	0,1
1,0	-	-	0,98	0,84	0,46	0,25	0,04	0,01	0,01	0,01
2,5	-	1,0	0,95	0,63	0,12	0,02	0,0	0,0	0,0	0,0
5,0	1,0	0,99	0,91	0,38	0,01	0,0	-	-	-	-
10	1,0	0,98	0,82	0,14	0,0	-	-	-	-	-
25	1,0	0,95	0,61	0,01	-	-	-	-	-	-

Таблица 3.5

Значения $J_{cm} / J_1 = f(Bi, Fo)$ для цилиндра бесконечной длины

Bi	0,0001	0,001	0,01	0,1	0,5	1	4	10	20	50
0,01	-	-	1,0	0,99	0,95	0,89	0,66	0,42	0,24	0,11
0,05	-	1,0	0,99	0,97	0,87	0,77	0,42	0,21	0,1	0,05
0,1	-	1,0	0,99	0,96	0,82	0,69	0,31	0,14	0,06	0,03
0,25	-	1,0	0,99	0,93	0,71	0,53	0,17	0,06	0,03	0,01
0,5	-	1,0	0,99	0,88	0,67	0,35	0,17	0,02	0,01	0,0
1,0	-	1,0	0,98	0,8	0,36	0,16	0,01	0,0	-	-
2,5	-	1,0	0,95	0,6	0,1	0,02	0,0	-	-	-
5,0	1,0	0,99	0,9	0,37	0,01	0,0	-	-	-	-
10	1,0	0,98	0,82	0,14	0,0	-	-	-	-	-
25	1,0	0,95	0,61	0,01	-	-	-	-	-	-

Таблица 3.6

Значения $Q_t / Q_0 = f(Bi, Fo)$ для цилиндра бесконечной длины

Bi	0,0001	0,001	0,01	0,1	0,5	1	4	10	20	50
Fo										
0,01	-	-	-	-	0,01	0,02	0,05	0,11	0,15	0,18
0,05	-	-	-	0,01	0,05	0,08	0,21	0,32	0,38	0,42
0,1	-	-	-	0,02	0,09	0,15	0,37	0,48	0,54	0,58
0,25	-	-	-	0,05	0,2	0,33	0,62	0,75	0,79	0,81
0,5	-	-	0,01	0,09	0,36	0,55	0,85	0,92	0,94	0,95

Продолжение табл. 3.6

1,0	-	-	0,02	0,18	0,59	0,79	0,98	0,99	1,0	1,0
2,5	-	-	0,05	0,39	0,89	0,98	1,0	1,0	1,0	1,0
5,0	-	0,01	0,09	0,62	0,99	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
10	-	0,02	0,18	0,86	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
25	-	0,04	0,39	0,99	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

Внутреннюю энергию рассматриваемого участка цилиндра длиной l , отсчитанную от ее значения при температуре среды, как от нуля, находим по формуле

$$Q_0 = p \cdot r^2 \cdot l \cdot c \cdot r \cdot J_1. \quad (3.11)$$

3.4 Шар

Рассмотрим охлаждение шара радиусом r , масса которого равномерно прогрета до постоянной температуры в среде с более низкой постоянной температурой. Физические постоянные c , ρ и λ , а также коэффициент теплоотдачи известны. Требуется определить для любого момента времени: температуру поверхности, температуру в центре шара и количество теплоты, теряемое шаром в окружающую среду.

Дифференциальное уравнение теплопроводности удобнее отнести к сферическим координатам

$$\frac{\partial J}{\partial t} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 J}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial J}{\partial r} \right). \quad (3.12)$$

Задача на охлаждение шара аналогична задачам на охлаждение пластины и цилиндра; безразмерные величины $J_{cm} / J_1; J_y / J_1; Q_t / Q_0$ являются функцией только двух чисел Bi и Fo и определяются из следующих соотношений

$$J_{cm} / J_1 = f(Bi, Fo); J_y / J_1 = f_1(Bi, Fo); Q_t / Q_0 = f_2(Bi, Fo).$$

Для шара

$$Bi = a \cdot r / I_{cm}; Fo = a \cdot t / r^2,$$

где r – радиус шара.

Зависимости между безразмерными величинами определяются по таблицам 3.7, 3.8 и 3.9 или графикам, а затем по ним – t_{cm} , t_y и Q_t .

Начальная внутренняя энергия шара отсчитывается от ее значения при температуре среды как то нуля по формуле

$$Q_0 = (4/3) \cdot p \cdot r^3 \cdot r \cdot c \cdot (t_0 - t_{cp}). \quad (3.13)$$

Таблица 3.7

Значения $J_y / J_1 = f(Bi, Fo)$ для шара

Bi	Fo									
Fo	0,0001	0,001	0,01	0,1	0,5	1	4	10	20	50
0,01	-	-	-	-	-	-	1,0	1,0	1,0	1,0
0,05	-	-	-	1,0	1,0	1,0	0,99	0,98	0,98	0,97
0,1	-	-	1,0	0,99	0,97	0,95	0,87	0,8	0,76	0,73
0,25	-	1,0	0,99	0,97	0,81	0,69	0,38	0,26	0,22	0,19
0,5	-	1,0	0,99	0,89	0,58	0,37	0,09	0,03	0,02	0,02
1,0	-	1,0	0,97	0,77	0,29	0,11	0,0	0,0	0,0	0,0
2,5	2,0	0,99	0,93	0,55	0,04	0,0	-	-	-	-
5,0	1,0	0,99	0,87	0,24	0,0	-	-	-	-	-
10	1,0	0,98	0,75	0,06	-	-	-	-	-	-
25	1,0	0,94	0,49	0,0	-	-	-	-	-	-

Таблица 3.8

Значения $J_{cm} / J_1 = f(Bi, Fo)$ для шара

Bi	Fo									
Fo	0,0001	0,001	0,01	0,1	0,5	1	4	10	20	50

0,01	1,0	1,0	1,0	0,99	0,94	0,89	0,64	0,38	0,22	0,1
0,05	1,0	1,0	0,99	0,97	0,86	0,75	0,39	0,17	0,09	0,03
0,1	1,0	1,0	0,99	0,95	0,79	0,64	0,26	0,1	0,05	0,02
0,25	1,0	1,0	0,99	0,92	0,64	0,44	0,1	0,03	0,01	0,0
0,5	1,0	1,0	0,98	0,85	0,46	0,24	0,02	0,0	0,0	-
1,0	1,0	1,0	0,97	0,73	0,23	0,07	0,0	-	-	-
2,5	1,0	0,99	0,93	0,52	0,03	0,0	-	-	-	-
5,0	1,0	0,99	0,86	0,23	0,0	-	-	-	-	-
10	1,0	0,97	0,75	0,05	-	-	-	-	-	-
25	1,0	0,94	0,48	0,0	-	-	-	-	-	-

Таблица 3.5

Значения $Q_t / Q_0 = f(Bi, Fo)$ для шара

Bi	0,0001	0,001	0,01	0,1	0,5	1	4	10	20	50
Fo	-	-	-	0,0	0,02	0,03	0,09	0,16	0,22	0,27
0,01	-	-	-	0,02	0,07	0,12	0,32	0,46	0,53	0,57
0,05	-	-	-	0,03	0,13	0,23	0,51	0,66	0,71	0,75
0,1	-	-	0,01	0,07	0,29	0,47	0,8	0,9	0,92	0,94
0,25	-	-	0,02	0,14	0,49	0,71	0,96	0,99	0,99	0,99
0,5	-	-	0,03	0,25	0,74	0,92	1,0	1,0	1,0	1,0
2,5	-	-	0,08	0,52	0,97	1,0	-	-	-	-
5,0	-	0,01	0,15	0,77	1,0	-	-	-	-	-
10	-	0,02	0,27	0,95	-	-	-	-	-	-
25	-	0,05	0,56	0,99	-	-	-	-	-	-

Продолжение табл. 3.5

1,0	-	-	0,03	0,25	0,74	0,92	1,0	1,0	1,0	1,0
2,5	-	-	0,08	0,52	0,97	1,0	-	-	-	-
5,0	-	0,01	0,15	0,77	1,0	-	-	-	-	-
10	-	0,02	0,27	0,95	-	-	-	-	-	-
25	-	0,05	0,56	0,99	-	-	-	-	-	-

3.5 Регулярный режим теплопроводности

Охлаждение однородного, изотропного тела произвольной формы в среде с постоянной температурой и постоянным коэффициентом теплоотдачи на его поверхности во времени определяется дифференциальным уравнением теплопроводности

$$\partial t / \partial t = a \nabla^2 t \quad (3.14)$$

и граничными условиями

$$(\partial t / \partial n)_{n_0} = -(a / l)(t_{cm} - t_{cp}),$$

$$(t)_{t=0} = f(x, y, z).$$

Решение уравнения (3.14) при $t_{cp}=const$ показывает, что температура в любой точке тела изменяется по экспоненциальному закону

$$J = \sum_{i=1}^{i=\infty} A_i U_i e^{-m_i t}, \quad (3.15)$$

где $J = t_0 - t_{cp}$; A_i – постоянные, зависящие от формы тела и начального распределения температур;

U_i – функция координат, характеризующая изменение температуры в пространстве;

m_i – постоянные, представляющие собой ряд положительных возрастающих чисел ($m_1 < m_2 < m_3 < \dots < m_i$).

Анализ уравнения (3.15) показывает, что при малых значениях τ от $\tau=0$ до $\tau=\tau_1$ процесс охлаждения (нагрева) зависит от начальных условий охлаждения и имеет случайный характер, не связанный с условиями охлаждения. Этот период охлаждения будет определяться не только первым, но и последующими членами ряда (3.15). Эту стадию охлаждения называют *первым периодом охлаждения*, или *неупорядоченным процессом*.

С увеличением времени τ ряд быстро сходится и все члены его, кроме первого, стремятся к нулю. При τ , превышающем некоторое определенное значение $\tau > \tau_1$, начальные условия начинают играть второстепенную роль, и процесс полностью определяется только условиями охлаждения на поверхности тела, его физическими свойствами, геометрической формой и размерами. Вторая стадия охлаждения называется *регулярным режимом* и описывается первым членом ряда (3.15), т. е.

$$J = A_1 U_1 e^{-m_1 t}. \quad (3.16)$$

Логарифмируя последнее уравнение, имеем

$$\ln J = \ln(AU) - mt = -mt + C(x, y, z). \quad (3.17)$$

Из уравнения (3.17) видно, что регулярный режим теплопроводности характеризуется тем, что натуральный логарифм избыточной температуры J любой точки тела изменяется во времени по линейному закону.

После дифференцирования обеих частей уравнения (3.17) по времени получаем

$$m = -\frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial t}, \frac{1}{\text{сек}}. \quad (3.18)$$

Относительная скорость изменения температуры в единицу времени в любой точке тела не зависит от координат и времени.

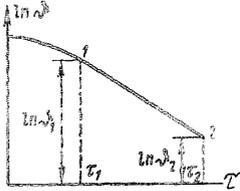


Рис. 3.2.

Величину m называют *темпом* регулярного режима и определяют из опыта. Если взять внутри тела какую-либо точку и измерять в этой точке температуру, то процесс охлаждения можно представить кривой $J = f(t)$ (рис. 3.2). Величина m , очевидно, равна тангенсу угла наклона прямой к оси абсцисс

$$m = (\ln J_1 - \ln J_2) / (t_2 - t_1). \quad (3.19)$$

Теория регулярного режима теплопроводности применима к телам любой формы. Она позволила установить связь между темпом регулярного режима, его физическими и геометрическими величинами и внешними условиями теплообмена. В общем случае величина m определяется из уравнения

$$m = yF \frac{a}{C}, \frac{1}{\text{сек}}, \quad (3.20)$$

т. е. величина m , характеризующая скорость охлаждения тела, прямо пропорциональна коэффициенту теплоотдачи a (если $a \rightarrow \infty$) поверхности тела F и обратно пропорциональна его полной теплоемкости $C = c \cdot r \cdot V$, y – безразмерный коэффициент пропорциональности, характеризующий неравномерность распределения температуры в теле и являющийся функцией числа Био.

Это уравнение выражает закон сохранения энергии для охлаждающегося тела в среде с постоянной температурой. Если $y = 1$, то распределение температур в теле равномерно; если $y = 0$, то распределение температур становится наиболее неравномерным – температура поверхности равна температуре среды, а температура внутри всего тела не равна температуре поверхности.

Если коэффициент теплоотдачи $a \rightarrow \infty$, то величина m прямо пропорциональна коэффициенту теплопроводности охлаждающегося тела

$$m_\infty = a / K \text{ или } a = K m_\infty, \quad (3.21)$$

где K – коэффициент пропорциональности, зависящий от геометрических размеров и формы тела, м^2 . Например, для шара

$$K = (r/p)^2,$$

для короткого цилиндра

$$K = \frac{1}{\left(\frac{2,405}{r}\right)^2 + \left(\frac{l}{r}\right)},$$

где r – радиус; l – длина цилиндра.

На основе теории регулярного режима теплопроводности разработаны методы определения теплофизических величин a , λ и c для твердых и жидких тел. Эти методы получили широкое распространение в технике.

3.6 Теплопроводность в телах сложной формы

Существует ряд приближенных решений задачи о распространении теплоты в телах произвольной формы. Рассмотрим метод, базирующийся на принципе стабильности теплового потока. Если на поверхности твердого тела оставить тепловой поток постоянным, но изменить, условия охлаждения на небольшом участке поверхности, то это вызовет существенное местное изменение температурного поля. Однако в точках, достаточно удаленных от места возмущения, изменение температурного поля будет ничтожным.

Из сказанного следует, что деформация поверхности тела будет оказывать существенное влияние на температурное поле только в точках, близких к поверхности, а в удаленных от поверхности точках характер температурного поля будет оставаться неизменным.

Используя эти свойства стабильности теплового потока, расчет теплопроводности в телах сложной геометрической конфигурации можно свести к расчету процесса нагрева (охлаждения) тел трех классических форм: одномерной плоской пластины – тело первого класса, длинного круглого цилиндра – тело второго класса и шара – тело третьего класса. При решении задачи прежде всего необходимо рациональным образом определить класс, к которому надо отнести рассматриваемое тело. Затем произвести сравнение температурного поля с температурным полем основного тела этого класса.

Согласно принципу стабильности должно выполняться условие

$$a(t_c - t_{жс})Fdt = a_0(t_{c0} - t_{жс0})F_0dt_0, \quad (3.22)$$

где a – среднее по поверхности значение коэффициента теплоотдачи, Вт/(м²·К);

t_c – средняя температура поверхности тела, $^{\circ}\text{C}$;

$t_{ж}$ – температура окружающей среды, $^{\circ}\text{C}$;

F – поверхность охлаждения, м^2 ;

τ – время, с.

Величина без индекса «0» относится к рассматриваемому телу, а с индексом «0» – к основному телу соответствующего класса. При соблюдении условий (3.22) расчет температурного поля рассматриваемого тела можно свести к расчету температурного поля эквивалентного основного тела соответствующего класса (пластины, цилиндра, или шара). Последнее предполагает, что внешняя конфигурация тела будет существенно влиять на температурное поле только в точках, близких к поверхности. Температурные поля вдали от поверхности становятся сопоставимыми с температурными полями в основных телах соответствующего класса.

Если в уравнении (3.22) обозначить

$$t_c - t_{ж} = J; \quad t_{c0} - t_{ж0} = J_0$$

и при этом принять

$$J = J_0 \text{ и } dt = dt_0,$$

то уравнение (3.22) принимает вид

$$aF = a_0F_0,$$

или

$$a_0 = a \frac{F}{F_0} = aA, \quad (3.23)$$

где

$$A = \frac{F}{F_0}. \quad (3.24)$$

Безразмерный множитель A характеризует размер поверхности рассматриваемого тела, выраженный через поверхность основного тела. Величину A называют критерием формы.

Уравнение (3.23) выражает количественные требования, которые необходимо выполнить для обеспечения эквивалентности температурных полей обоих тел.

При расчете температурных полей в формулы для основных тел вместо α подставляется величина α_0 , вычисленная по уравнению (3.23), и в качестве определяющего линейного размера l_0 берется эквивалентный размер для тела соответствующего класса. При этом число Bi имеет вид

$$Bi = \frac{\alpha \cdot A \cdot l_0}{I} = \frac{\alpha_0 \cdot l_0}{I}. \quad (3.25)$$

Для тел первого класса

– определяющий эквивалентный линейный размер

$$l_0 = X_1 = \frac{V}{2F_{cp}}, \quad (3.26)$$

где V – объем тела, м^3 ;

F_{cp} – площадь средней плоскости тела, м^2 ;

– критерий формы

$$A = A_1 = \frac{F}{F_{cp}}, \quad (3.27)$$

где F – площадь одной боковой поверхности стенки, м^2 .

Для тел второго класса:

– определяющий эквивалентный линейный размер

$$l_0 = X_2 = \sqrt{\frac{F_{сеч}}{P}}, \quad (3.28)$$

где $F_{сеч}$ – площадь поперечного сечения тела, м^2 ;

– критерий формы

$$A = A_2 = \frac{P}{\sqrt{4pF_{сеч}}} = \frac{P}{p_0}, \quad (3.29)$$

где p – периметр поперечного сечения рассматриваемого тела, м ;

p_0 – периметр поперечного сечения эквивалентного круглого цилиндра,

м.

Для тел третьего класса определяющий эквивалентный линейный размер

$$l_0 = X_3 = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\rho}}. \quad (3.30)$$

Если в уравнении (3.24) величину поверхности эквивалентного шара выразить через объем V , равный объему рассматриваемого тела, то критерий формы

$$A = A_3 = \frac{F}{\sqrt[3]{36\rho V^2}}. \quad (3.31)$$

Описанный метод расчета температурных полей дает удовлетворительные результаты при малой и средней интенсивности теплообмена на поверхности тела.

При большой интенсивности теплообмена ($Bi \gg 1$) вместо уравнения (3.23) используют выражение

$$I_0 = I \frac{F}{F_0} = IA. \quad (3.32)$$

В дальнейшем при выполнении расчета могут быть использованы ранее полученные формулы.

Методические указания.

Рассматривая теплопроводность элементарных тел (пластина, труба, шар) студент должен уметь применить закон Фурье для каждого случая, т.е. вывести уравнения, определяющие закон распределения температур по толщине стенки и количество теплоты, передаваемой через стенку. При изучении процесса теплопередачи через стенку надо уметь анализировать влияние отдельных термических сопротивлений на общее сопротивление, знать способы уменьшения термических сопротивлений. В нестационарной теплопроводности обратить внимание на решение конкретных задач с помощью критериев Bi и Fo , твердо усвоить их физический смысл и влияние на протекание процессов нагрева или охлаждения.

Вопросы для самопроверки.

1. Как передается теплота в процессе теплопроводности?
2. Сформулируйте основной закон теплопроводности.
3. Какова размерность коэффициентов α , λ , a ?
4. Уравнения теплоотдачи и теплопередачи.
5. Каков закон распределения температуры по толщине плоской и цилиндрической стенок?
6. Как связано термическое сопротивление и коэффициент теплопередачи?
7. Каковы пути интенсификации процесса теплопередачи?
8. По какому условию выбирается материал изоляции трубы?
9. Какова методика расчета нагрева и охлаждения тел с помощью критериев Bi и Fo ?
10. Чем характеризуется регулярный режим охлаждения (нагрева) тел?

Часть вторая. КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН

4. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА

4.1 Основные понятия и определения

Понятие конвективного теплообмена охватывает процесс теплообмена при движении жидкости или газа. При этом перенос теплоты осуществляется одновременно конвекцией и теплопроводностью. Под конвекцией теплоты понимают перенос теплоты при перемещении макрочастиц жидкости или газа в пространстве из области с одной температурой в область с другой. Конвекция возможна только в текучей среде, здесь перенос теплоты неразрывно связан с переносом самой среды.

Если в единицу времени через единицу контрольной поверхности нормально к ней проходит масса жидкости $r \cdot \dot{w}$, кг/(м²·с), где \dot{w} – скорость, r – плотность жидкости, то вместе с ней переносится энтальпия, Дж/(м²·с)

$$\dot{q}_{\text{конв}} = r \cdot \dot{w} \cdot i. \quad (4.1)$$

Конвекция теплоты всегда сопровождается теплопроводностью, т.к. при движении жидкости или газа неизбежно происходит соприкосновение отдельных частиц, имеющих различные температуры. В результате конвективный теплообмен описывают уравнением

$$\dot{q} = \dot{q}_{\text{мпр}} + \dot{q}_{\text{конв}} = -I \nabla t + r \cdot \dot{w} \cdot i. \quad (4.2)$$

Здесь q является локальным (местным) значением плотности теплового потока за счет конвективного теплообмена. Первый член правой части уравнения (4.2) описывает перенос теплоты теплопроводностью, второй – конвекцией.

Конвективный теплообмен между потоками жидкости или газа и поверхностью соприкасающегося с ним тела называется *конвективной теплоотдачей* или *теплоотдачей*. Очень часто в инженерных расчетах определяют теплоотдачу; при этом знание конвективного теплообмена внутри жидкой среды, может представить косвенный интерес, поскольку перенос теплоты внутри жидкости отражается и на теплоотдаче.

При расчетах теплоотдачи используют закон Ньютона – Рихмана

$$dQ_c = a(t_c - t_{\text{жс}})dF. \quad (4.3)$$

Согласно закону Ньютона – Рихмана тепловой поток dQ_c , Вт, от жидкости к элементу поверхности соприкасающегося тела dF (или от dF к жидкости) прямопропорционален dF и разности температур $\Delta t = t_c - t_{жс}$, где t_c – температура поверхности тела, где $t_{жс}$ – температура окружающей жидкой или газообразной среды. Разность температур $t_c - t_{жс}$ называют температурным напором.

Коэффициент пропорциональности α , входящий в уравнение (4.3) называется коэффициентом теплоотдачи. Он учитывает конкретные условия процесса теплоотдачи, влияющие на его интенсивность.

Согласно уравнению (4.3)

$$\alpha = \frac{dQ_c}{(t_c - t_{жс})dF} = \frac{q_c}{t_c - t_{жс}}. \quad (4.4)$$

Это тождество следует рассматривать как определение коэффициента теплоотдачи, который измеряется в Вт/(м²·К).

Таким образом, коэффициент теплоотдачи есть плотность теплового потока q_c на границе жидкости (газа) и соприкасающегося тела, отнесенная к разности температур поверхности этого тела и окружающей среды.

В общем случае коэффициент теплоотдачи переменен по поверхности F . Если α и Δt не изменяются по F , то закон Ньютона – Рихмана может быть записан следующим образом

$$Q_c = \alpha(t_c - t_{жс})F.$$

Коэффициент теплоотдачи зависит от большого количества факторов. В общем случае α является функцией формы и размеров тела, режима движения, скорости и температуры жидкости, физических параметров жидкости и других величин. По-разному протекает процесс теплоотдачи в зависимости от природы возникновения движения жидкости.

Чтобы привести жидкость в движение, к ней необходимо приложить силу. Силы, действующие на какой-либо элемент жидкости, можно разделить на массовые (или объемные) и поверхностные. *Массовыми* называют силы, приложенные ко всем частицам жидкости и обусловленные внешними силовыми полями (например, гравитационным или электрическим). *Поверхностные силы* возникают вследствие действия окружающей жидкости или твердых тел; они приложены к поверхности контрольного объема жидкости. Такими силами являются силы внешнего давления и силы трения.

Различают *свободную и вынужденную конвекцию*. В первом случае движение в рассматриваемом объеме жидкости возникает за счет неоднородности в нем массовых сил. Если жидкость с неоднородным распределением темпера-

туры, и, как следствие, с неоднородным распределением плотности, находится в поле земного тяготения, может возникнуть свободное гравитационное движение. В дальнейшем в основном будет рассматриваться гравитационная свободная конвекция, вызванная неоднородностью температурного поля.

Вынужденное движение рассматриваемого объема жидкости происходит под действием внешних поверхностных сил, приложенных на его границах, за счет предварительно сообщенной кинетической энергии (например, за счет работы насоса, вентилятора, ветра). Как вынужденное рассматривается и течение изучаемого объема жидкости под действием однородного в нем поля массовых сил. Иллюстрацией последнего может являться течение изотермической пленки жидкости по стенке под действием сил тяжести.

Вынужденное движение в общем случае может сопровождаться свободным движением. Относительное влияние последнего тем больше, чем больше разница температур отдельных частиц среды и чем меньше скорость вынужденного движения. При больших скоростях вынужденного движения влияние свободной конвекции становится пренебрежимо малым.

В дальнейшем в основном будут рассмотрены стационарные процессы течения и теплоотдачи. Условием стационарности является неизменность во времени скорости и температуры в любой точке жидкости (газа).

4.2 Физические свойства жидкости

В зависимости от физических свойств жидкостей (газов) процесс теплообмена может протекать различно и своеобразно. Особенно большое влияние оказывают коэффициент теплопроводности λ , удельная теплоемкость c_p , плотность ρ , коэффициент температуропроводности a , уже использовавшиеся при рассмотрении теплопроводности, и коэффициент вязкости μ . Для каждого вещества эти величины имеют определенные значения и являются функцией параметров состояния (температуры и давления, прежде всего температуры). Особенно существенные изменения физических свойств могут иметь место в околоскритической области термодинамических состояний и в области очень низких температур.

В комплексе в основном рассматриваются процессы при монотонных и не слишком значительных изменениях физических свойств определенного вещества.

При теоретическом анализе конвективного теплообмена для простоты и наглядности выводов в основном будем полагать, что физические свойства жидкости (газа) постоянны в исследуемом интервале температур.

Все реальные жидкости обладают вязкостью; между частицами или слоями, движущимися с различными скоростями, всегда возникает сила внутреннего трения, противодействующая движению. Согласно закону Ньютона эта касательная сила s , Па (отнесенная к единице поверхности), которая действует в любой точке потока в плоскости, ориентированной по течению, пропорциональна изменению скорости в направлении нормали к этой плоскости

$$s = m \frac{dw}{dn}. \quad (4.5)$$

Коэффициент μ называется *динамическим коэффициентом вязкости* или просто коэффициентом вязкости; его единица измерения Н·с/м². При $dw/dn = 1$ численно $m = s$.

В уравнении гидродинамики и теплопередачи часто входит отношение вязкости μ к плотности ρ , называемое *кинематическим коэффициентом вязкости* и обозначаемое буквой ν , м²/с

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

Коэффициенты μ и ν являются физическими параметрами. Они существенно зависят от температуры.

У капельных жидкостей вязкость почти не зависит от давления, но значительно уменьшается при повышении температуры. Типичный характер функции $m = f(t)$ для капельных жидкостей представлен на рис. 4.1.

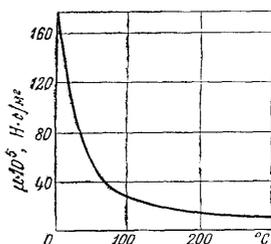


Рис. 4.1. Зависимость динамического коэффициента вязкости жидкости от температуры.

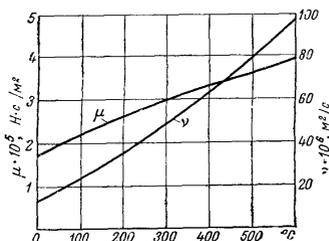


Рис. 4.2. Зависимость динамического и кинематического коэффициентов вязкости воздуха от температуры при давлении $p=760$ мм.рт.ст.

У газов μ увеличивается при повышении температуры (рис. 4.2). При увеличении давления коэффициент вязкости газов также увеличивается, но слабо.

Кинематическая вязкость капельных жидкостей уменьшается при повышении температуры почти в такой же степени, как и μ , т.к. плотность ρ слабо зависит от температуры. Напротив, у газов, плотность которых при повышении температуры сильно уменьшается, кинематическая вязкость при увеличении температуры быстро повышается. При течении жидкости или газа, обладающих вязкостью, наличие внутреннего трения приводит к процессу *диссипации (рассеяния) энергии*. Существо процесса диссипации состоит в том, что часть кинетической энергии движущейся жидкости необратимо переходит в теплоту и вызывает нагревание жидкости. Если вязкость жидкости или ее скорость невелики, то нагревание будет незначительным.

В дальнейшем в основном будут рассматриваться процессы, для которых выделяемая теплота трения незначительна, и ею можно пренебречь.

На теплоотдачу оказывает влияние *сжимаемость жидкостей*. Изотермической сжимаемостью или коэффициентом сжатия тела при $t=\text{const}$ называют величину

$$e = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial p} \right)_t, \quad (4.6)$$

представляющую собой относительное изменение плотности вещества при изменении давления.

Для капельных жидкостей изотермическая сжимаемость чрезвычайно мала. Так, например, для воды $e \approx 5 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$, т. е. повышение давления на 1 бар вызывает относительное изменение плотности на 1/20000. То же самое имеет место и для других капельных жидкостей, что позволяет пренебречь для них изотермической сжимаемостью.

Для воздуха в нормальном состоянии $e \approx 10^{-5} \text{ Па}^{-1}$. Таким образом, сжимаемость воздуха в 20000 раз больше сжимаемости воды. Аналогичное соотношение имеет место и для других газов.

Однако главным является не способность газа сжиматься, а то, насколько он в действительности сжимается в рассматриваемом течении. Для значительного сжатия газа необходимо значительное изменение давления. Если при движении газа возникают разности давления, небольшие по сравнению с его абсолютным давлением, то изменения объема получаются малыми, и такие потоки газа в первом приближении можно считать несжимаемыми.

Значительные изменения давления возникают при больших скоростях течения. При этом нужно учитывать теплоту трения и сжимаемость газа. В ре-

зультате теплоотдача при больших скоростях имеет ряд особенностей, неучет которых может привести к существенным ошибкам.

В дальнейшем в основном будет рассматриваться теплоотдача несжимаемой жидкости. При этом слово «жидкость» будет употребляться как собирательное понятие и для жидкостей, и для газов.

Между сжимаемыми и несжимаемыми течениями газа нет резкой границы. Обычно считают, что если скорость газа меньше четвертой части скорости звука, то к газам допустимо применять законы движения и теплоотдачи, полученные для несжимаемой жидкости.

Помимо изотермической сжимаемости для конвективного теплообмена большое значение имеет *тепловое расширение жидкости*. Последнее характеризуется температурным коэффициентом объемного расширения, определяемым уравнением ($p = \text{const}$)

$$b = -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)_p. \quad (4.7)$$

Согласно определению температурный коэффициент объемного расширения b, K^{-1} , представляет собой относительное изменение объема при изменении температуры на один градус (при постоянном давлении).

Для жидкостей температурный коэффициент объемного расширения сравнительно мал (исключение составляет область вблизи термодинамической критической точки). Для некоторых жидкостей, например для воды при $t < 4^\circ C$, коэффициент β может иметь отрицательное значение.

Для идеального газа температурный коэффициент объемного расширения есть величина, обратная абсолютной температуре газа,

$$b = \frac{1}{T}.$$

В неравномерно нагретой жидкости вследствие теплового расширения возникает неоднородное поле плотности, что в конечном итоге может привести к свободному движению.

4.3 Дифференциальные уравнения конвективного теплообмена

Из уравнения (4.2)

$$\dot{q} = -I \nabla t + r \cdot \dot{w} \cdot i$$

следует, что плотность теплового потока в любой точке жидкости для каждого момента времени однозначно определяется, если известны поля температур, удельной энтальпии и скорости.

Связь между температурой и энтальпией может быть установлена следующим образом. Для реальной жидкости $i = i(T, p)$, и согласно понятию о полном дифференциале

$$di = \left(\frac{\partial i}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial i}{\partial p} \right)_T dp.$$

Отсюда

$$i = \int_T c_p dT + \int_p \left(\frac{\partial i}{\partial p} \right)_T dp.$$

Для многих задач в предположении о несжимаемости жидкости ($\rho = \text{const}$) с достаточной степенью точности можно принять $(\partial i / \partial p)_T = 0$, т.е. пользоваться соотношением, справедливым для термодинамически идеального газа

$$di = c_p dT \text{ и } i = \int_T c_p dT.$$

Приведенные здесь уравнения позволяют установить связь между полем температур и полем энтальпии. Чтобы аналитически найти поля температур (энтальпии) и скоростей и определить \dot{q} , необходимо располагать соответствующими уравнениями.

Уравнение энергии. Выведем дифференциальное уравнение, описывающее температурное поле в движущейся жидкости. При выводе будем полагать, что жидкость однородна и изотропна, ее физические параметры постоянны, энергия деформации мала по сравнению с изменением внутренней энергии.

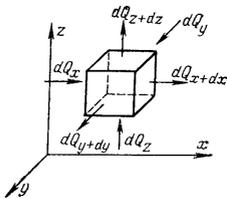


Рис. 4.3. К выводу дифференциального уравнения энергии.

Выделим в потоке жидкости неподвижный относительно координатной системы элементарный параллелепипед (рис. 4.3) с ребрами dx , dy и dz . Через грани параллелепипеда теплота переносится теплопроводностью и конвекцией; в общем случае в рассматриваемом объеме может выделяться теплота внутренними источниками за счет энергии, внешней по отношению к рассматриваемой жидкости.

Вывод уравнения энергии, соответствующего принятым здесь условиям, был получен ранее в виде уравнения (1.23')

$$\mathbf{r} \frac{\partial i}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + q_J,$$

где

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}.$$

Согласно уравнению (4.2) проекции плотности теплового потока \mathbf{q} на координатные оси Ox , Oy и Oz равны

$$q_x = -I \frac{\partial t}{\partial x} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{w}_x i, \quad q_y = -I \frac{\partial t}{\partial y} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{w}_y i \quad \text{и} \quad q_z = -I \frac{\partial t}{\partial z} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{w}_z i. \quad (4.8)$$

Подставляя значения q_x, q_y и q_z в уравнение (1.23), можно получить

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \frac{\partial i}{\partial t} = & I \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) - \mathbf{r} \left(w_x \frac{\partial i}{\partial x} + w_y \frac{\partial i}{\partial y} + w_z \frac{\partial i}{\partial z} \right) - \\ & - \mathbf{r} \cdot i \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) + q_J. \end{aligned}$$

Для несжимаемых жидкостей $\rho = \text{const}$

$$\operatorname{div} \mathbf{w} \equiv \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0.$$

Тогда

$$\frac{\partial i}{\partial t} + w_x \frac{\partial i}{\partial x} + w_y \frac{\partial i}{\partial y} + w_z \frac{\partial i}{\partial z} = \frac{I}{\mathbf{r}} \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{q_J}{\mathbf{r}} \quad (4.9)$$

или, если $i = \int c_p dT$,

$$\frac{\partial t}{\partial t} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{q_J}{\mathbf{r} \cdot c_p}. \quad (4.10)$$

Последнее уравнение, как и уравнение (4.9), является искомым уравнением энергии, описывающим распределение температур внутри движущейся жидкости.

Многочлен, стоящий в левой части уравнения (4.10), представляет собой полную производную от температуры по времени. Действительно, если $t = t(t, x, y, z)$, то на основании понятия о полной производной имеем

$$\frac{dt}{dt} = \frac{\partial t}{\partial t} + \frac{\partial t}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial t}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial t}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt},$$

где

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$$

имеют смысл соответствующих скоростей w_x, w_y, w_z .

Здесь $\partial t / \partial t$ характеризует изменение температуры во времени в какой-либо точке жидкости, т.е. является локальным изменением t ; член

$$w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z}$$

характеризует изменение температуры при переходе точки к точке, т.е. является конвективным изменением t .

Примем обозначение

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \nabla^2 t,$$

уравнение энергии можно записать в форме

$$\frac{dt}{dt} = a \cdot \nabla^2 t + \frac{q_J}{r \cdot c_p}. \quad (4.10')$$

Если $w_x = w_y = w_z = 0$, уравнение энергии переходит в уравнение теплопроводности.

При стационарных процессах конвективного теплообмена $\partial t / \partial t = 0$. Уравнение (4.10) еще более упрощается, если температура изменяется только по одной или двум координатам. В случае стационарного одномерного температурного поля все производные по t, y и z равны нулю.

Как следует из уравнения (4.10), температурное поле в движущейся жидкости зависит от составляющих скорости w_x, w_y, w_z . Чтобы сделать систему уравнений замкнутой, необходимо добавить уравнения, которые бы описывали

изменение скорости во времени и пространстве, Такими уравнениями являются дифференциальные уравнения движения.

Уравнения движения. Вывод дифференциального уравнения движения вязкой жидкости требует громоздких математических выкладок. В связи с этим будет дан упрощенный вывод этого уравнения для случая одномерного течения несжимаемой жидкости. Этот вывод не является строгим, его основное достоинство заключается в наглядности. Для трехмерного движения уравнение будет приведено без вывода.

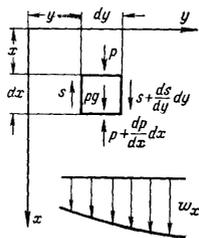


Рис. 4.4 К выводу дифференциального уравнения движения жидкости.

Выделим в потоке вязкой жидкости элементарный объем с размерами ребер dx , dy и dz (рис. 4.4). Скорость в потоке изменяется только в направлении оси y , закон изменения скорости произволен.

Вывод уравнения движения основан на втором закона Ньютона: сила равна массе, умноженной на ускорение.

Силы, действующие на рассматриваемый элемент жидкости, можно разделить на массовые (или объемные) и поверхностные. Массовые силы характеризуют вектором \vec{F} , м/с^2 , значение которого равно отношению силы, действующей на данную частицу, к массе этой частицы. Если учитывается только сила тяжести, то $\vec{F} = \vec{g}$, где \vec{g} – ускорение свободного падения. Мы в дальнейшем будем учитывать только силу тяжести. Значение поверхностных сил равно отношению силы, действующей на элемент поверхности, к величине площади этого элемента. К поверхностным силам относятся силы трения и силы давления

Таким образом, на рассматриваемый элемент жидкости действуют три силы: сила тяжести, равнодействующая сил давления и равнодействующая сил трения.

Найдем проекции этих сил на ось Ox .

Силы тяжести df_1 приложена в центре тяжести элемента. Ее проекция на ось Ox равна произведению проекции ускорения свободного падения g_x на массу элемента

$$df_1 = r \cdot g_x dJ.$$

Равнодействующая сила давления df_2 определяется следующим образом. Если на верхней грани элемента давление жидкости равно p , то на площадку $dydz$ действует сила $p dydz$.

На нижней грани давление с точностью до второго члена разложения в ряд Тейлора равно $p + \frac{dp}{dx} dx$, и на эту грань действует сила $-(p + \frac{dp}{dx} dx)dydz$. Здесь знак минус указывает на то, что эта сила действует против направления движения жидкости. Равнодействующая сил давления равна их алгебраической сумме

$$df_2 = -\frac{dp}{dx} dJ.$$

Равнодействующая сил трения df_3 определяется из следующих соображений. Так как скорость изменяется только в направлении оси Oy , то сила трения возникает на боковых гранях элемента жидкости (рис. 4.4). Около левой грани скорость движения частиц жидкости меньше, чем в самом элементе, поэтому здесь в сечении y сила трения направлена против движения и равна $sdx dz$. Около правой грани, наоборот, скорость движения частиц жидкости больше, чем в самом элементе, поэтому здесь в сечении $y+dy$ сила трения направлена в сторону движения. Равнодействующая этих сил равна алгебраической сумме:

$$df_3 = \left(s + \frac{ds}{dy} dy \right) dx dz - s dx dz = \frac{ds}{dy} dJ.$$

Подставляя $s = m(dw_x / dy)$, получаем

$$df_3 = m \frac{d^2 w_x}{dy^2} dJ.$$

Суммируя df_1 , df_2 , и df_3 , получаем проекцию на ось Ox равнодействующей всех сил, приложенных к объему

$$df = \left(r \cdot g_x - \frac{dp}{dx} + m \frac{d^2 w_x}{dy^2} \right) dJ. \quad (a)$$

Согласно второму закону механики эта равнодействующая равна произведению массы элемента на его ускорение dw_x / dt и учитывает силы энергии

$$df = r \frac{dw_x}{dt} dJ. \quad (б)$$

Приравнивая правые части уравнений (а) и (б) и производя сокращения, окончательно имеем уравнение движения вдоль оси Ox

$$r \frac{dw_x}{dt} = r \cdot g_x - \frac{dp}{dx} + m \frac{d^2 w_x}{dy^2}.$$

Описание движения жидкости усложняется, если скорость изменяется по трем направлениям. В общем случае трехмерного движения несжимаемой жидкости с постоянными физическими параметрами скоростное поле описывается тремя уравнениями движения, каждое соответственно в проекциях сил на оси Ox , Oy и Oz

для оси Ox

$$r \frac{dw_x}{dt} = r \cdot g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + m \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right); \quad (4.11)$$

для оси Oy

$$r \frac{dw_y}{dt} = r \cdot g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + m \left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial z^2} \right); \quad (4.12)$$

для оси Oz

$$r \frac{dw_z}{dt} = r \cdot g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + m \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right). \quad (4.13)$$

Уравнения (4.11) – (4.13) называют уравнениями Навье–Стокса. Все слагаемые уравнений (4.11) – (4.13) имеют размерность силы, отнесенной к единице объема.

В общем случае составляющие скорости w_x, w_y, w_z изменяются во времени и в пространстве. Член, стоящий в левой части уравнении (4.11)–(4.13), представляет собой полную производную от скорости по времени.

На основании понятия о полной производной имеем

$$\frac{dw_x}{dt} = \frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z}. \quad (4.14)$$

аналогично и для других осей

$$\frac{dw_y}{dt} = \frac{\partial w_y}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_y}{\partial z}; \quad (4.15)$$

$$\frac{dw_z}{dt} = \frac{\partial w_z}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_z}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_z}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z}. \quad (4.16)$$

Производные $\frac{\partial w_x}{\partial t}$, $\frac{\partial w_y}{\partial t}$ и $\frac{\partial w_z}{\partial t}$ характеризуют изменение скорости во времени в какой-либо точке жидкости, т.е. характеризуют локальное изменение скорости; остальные три члена, стоящие в правых частях уравнений, характеризуют изменение скорости при переходе от точки к точке. Используя векторную форму записи, уравнения (4.11)–(4.13) можно написать в виде

$$r \frac{d\dot{\mathbf{w}}}{dt} = r \cdot \dot{\mathbf{g}} - \nabla p + m \nabla^2 \dot{\mathbf{w}}. \quad (4.17)$$

Уравнение движений (4.17) получено без учета зависимости физических параметров жидкости от температуры. В частности, не учтена зависимость плотности от температуры. В то же время свободное движение жидкости определяется разностью плотностей холодных и нагретых частиц жидкости.

Ограничимся приближенным учетом переменности плотности. Используем для этого температурный коэффициент объемного расширения β . Будем полагать, что в заданном интервале температур β является постоянной величиной, не зависящей от температуры. Это условие лучше выполняется для газов и хуже для капельных жидкостей.

Из определения температурного коэффициента объемного расширения, данного в п. 4.2, следует, что при $\beta = \text{const}$ будет

$$b = \frac{r_0 - r}{r_0 J},$$

где ρ и ρ_0 – плотности, соответствующие температурам t и t_0 ; $J = t - t_0$; t_0 – некоторая фиксированная температура (точка отсчета).

Из последнего соотношения следует, что

$$r = r_0 (1 - b \cdot J).$$

Подставляя значение плотности согласно последнему уравнению в член уравнения движения (4.17), учитывающий массовые силы, получаем

$$r \frac{d\dot{\mathbf{w}}}{dt} = r_0 (1 - b \cdot J) \dot{\mathbf{g}} - \nabla p + m \nabla^2 \dot{\mathbf{w}}.$$

Рассмотрим член $r_0 (1 - b \cdot J) \dot{\mathbf{g}} = r_0 \cdot \dot{\mathbf{g}} - r_0 \cdot \dot{\mathbf{g}} \cdot b \cdot J$. Его можно трактовать как сумму силы тяжести $r_0 \cdot \dot{\mathbf{g}}$, взятой при определенной плотности, и

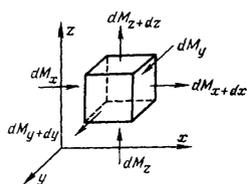
подъемной (архимедовой) силы $r_0 \cdot \frac{1}{g} \cdot b \cdot J$. Член $r_0 \cdot \frac{1}{g}$ можно представить как градиент гидростатического давления p_0 в покоящейся жидкости с плотностью ρ_0 . Тогда вместо $-(\nabla p - r_0 \cdot \frac{1}{g})$ можно написать $-\nabla p_1$, где $p_1 = p - p_0$. При замене p на p_1 уравнение движения будет учитывать и член $r_0 \cdot \frac{1}{g}$.

Опуская индекс «0» при ρ и индекс «1» при p , получаем после деления левой и правой частей на ρ следующее уравнение движения

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = -\frac{\vec{r}}{r} \cdot bJ - \frac{1}{r} \nabla p + n \nabla^2 \vec{w}. \quad (4.18)$$

Так как в уравнение движения, помимо w_x, w_y, w_z, J входит еще неизвестная величина p , то система уравнений не является замкнутой. Необходимо добавить еще одно уравнение. Таким уравнением является дифференциальное уравнение сплошности (неразрывности).

Уравнение сплошности. Выделим в потоке движущейся жидкости неподвижный элементарный параллелепипед со сторонами dx, dy и dz и подсчитаем массу жидкости, протекающей через него в направлении осей Ox, Oy и Oz за время dt (рис. 4.5).



В направлении оси Ox в параллелепипед втекает масса жидкости

$$dM_x = r \cdot w_x dy dz dt. \quad (a)$$

Величина $r w_x$ представляет собой количество

массы, протекающей в единицу времени через единицу поперечного сечения. Из противоположной грани вытекает масса

Рис. 4.5. К выводу дифференциального уравнения сплошности.

$$dM_{x+dx} = r \cdot w_{x+dx} dy dz dt.$$

Ограничиваясь первыми двумя членами разложения в ряд, получаем, что масса dM_{x+dx} вытекающая из элементарного параллелепипеда в направлении оси Ox , равна

$$dM_{x+dx} = \left[r \cdot w_x + \frac{\partial(r w_x)}{\partial x} dx \right] dy dz dt. \quad (б)$$

Вычитая (а) из (б), получаем излишек массы жидкости, вытекающий из элементарного объема в направлении оси Ox

$$dM_{x+dx} - dM_x = \frac{\partial(rw_x)}{\partial x} dJdt . (в)$$

Аналогичным образом для направлений по осям Oy и Oz имеем

$$dM_{y+dy} - dM_y = \frac{\partial(rw_y)}{\partial y} dJdt ; (г)$$

$$dM_{z+dz} - dM_z = \frac{\partial(rw_z)}{\partial z} dJdt . (д)$$

Суммируя равенства (в), (г) и (д), получаем полный избыток массы жидкости, вытекающей из рассматриваемого элементарного объема в направлении всех трех осей. Этот избыток обуславливается изменением плотности жидкости в объеме dv и равен изменению массы данного объема во времени $\frac{\partial \rho}{\partial t} dudt$.

Произведя сокращение на dv и dt и перенеся все члены в левую часть равенства, окончательно получим дифференциальное уравнение сплошности или непрерывности для сжимаемых жидкостей

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(rw_x)}{\partial x} + \frac{\partial(rw_y)}{\partial y} + \frac{\partial(rw_z)}{\partial z} = 0 . (4.19)$$

Для несжимаемых жидкостей, полагая $\rho = const$, получаем

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0 (4.20)$$

или, что то же самое

$$div \dot{\mathbf{w}} = 0 . (4.20')$$

Уравнение сплошности является уравнением сохранения массы.

Таким образом, процесс конвективного теплообмена в несжимаемой однородной среде с постоянными физическими параметрами описывается системой дифференциальных уравнений (4.2), (4.10), (4.18) и (4.20).

Условия однозначности. Полученные дифференциальные уравнения конвективного теплообмена описывают бесчисленное множество конкретных процессов. Чтобы выделить рассматриваемый процесс и определить его однозначно, к системе дифференциальных уравнений нужно присоединить условия однозначности. Условия однозначности дают математическое описание всех частных особенностей рассматриваемого явления; они состоят из:

1) геометрических условий, характеризующих форму и размеры тела или системы, в которой протекает процесс;

2) физических условий, характеризующих физические свойства среды;

3) временных или начальных условий, характеризующих особенности процесса в начальный момент времени; для стационарных задач эти условия отпадают;

4) граничных условий, характеризующих особенности протекания процесса на границах жидкой среды.

В последних должны быть заданы граничные значения зависимых (искомых) переменных или их производных. Например, для любого момента времени задаются распределение температур или тепловых потоков по поверхности тела (в простейшем случае $t_c = \text{const}$ или $q_c = -I(\partial t / \partial n)_{n=0} = \text{const}$), распределение температур и скоростей жидкости на входе в канал или на большом удалении от рассматриваемой поверхности теплообмена, значения скорости на стенке и т. д. Очевидно, в зависимости от вида задания граничных и других условий результаты решения (интегрирования), представляемые в виде формул или числовых значений, могут быть различны.

Система дифференциальных уравнений в совокупности с условиями однозначности представляет собой математическую формулировку краевой задачи.

Задание распределений $t_c(t, x_c, y_c, z_c)$ и $q_c(t, x_c, y_c, z_c)$, где x_c, y_c, z_c – координаты поверхности тела, часто затруднительно, так как t_c и q_c в общем случае зависят от процессов теплообмена в стенке и по другую ее сторону. Строго говоря, в этом случае тепловые граничные условия нельзя назначить заранее, так как они являются сложной функцией совокупности всех отдельных процессов теплообмена. Необходимо к системе дифференциальных уравнений рассматриваемого процесса конвективного теплообмена присоединить дифференциальные уравнения, описывающие процесс теплопроводности в стенке и процесс конвективного теплообмена по другую ее сторону, и задать условия сопряжения.

Для непрерывных полей условия сопряжения могут быть заданы в виде равенства температур на поверхности соприкосновения сред, а в случае отсутствия на непроницаемой границе раздела тепловыделения за счет внутренних источников – в виде равенства тепловых потоков, описываемых законом Фурье.

Для сопряженной задачи дифференциальные уравнения и условия однозначности, описывающие процессы теплообмена в смежных средах, и условия сопряжения можно трактовать как граничные условия. Конечно, в этом случае граничные условия будут очень сложны. Решения задач конвективного тепло-

обмена большей частью получают с помощью наперед заданных граничных условий.

Физический анализ процессов конвективного теплообмена показывает, что в ряде случаев математическая формулировка задачи может быть упрощена без внесения существенных погрешностей. Например, математическая формулировка может быть упрощена при использовании понятия пограничного слоя, рассматриваемого в следующем параграфе. В результате могут быть получены математически точные решения.

4.4 Гидродинамический и тепловой пограничные слои

Для инженерной практики особый интерес представляет теплообмен между жидкостью и омываемым ею телом. Рассмотрим особенности течения и переноса теплоты в пристенном слое жидкости.

Условия «прилипания». В настоящее время в гидродинамике вязкой жидкости получила признание гипотеза о том, что частицы жидкости, непосредственно прилегающие к твердому телу, адсорбируются последним, как бы прилипают к его поверхности, т. е. их скорость равна скорости тела (а если тело неподвижно, то нулю).

Этот слой «прилипшей» жидкости нужно рассматривать как бесконечно тонкий слой. Гипотеза о равенстве нулю скоростей жидкости на стенке нашла косвенное подтверждение в хорошем согласии с опытом¹ результатов многочисленных теоретических работ, в основу которых она была положена.

Равенство нулю скорости жидкости на стенке выполняется до тех пор, пока газ можно считать сплошной средой. По мере увеличения разрежения ослабляется взаимодействие газа со стенкой и разреженный газ вблизи стенки начинает проскальзывать.

Степень разрежения потока характеризуют значением параметра Кнудсена \bar{l}/l_0 представляющего собой отношение средней длины свободного пробега молекул газа \bar{l} к характерному размеру твердого тела l_0 (например, диаметру трубы или проволоки).

Если примерно $\bar{l}/l_0 > 0,001$, то газ уже нельзя рассматривать как сплошную среду, для которой выполняется условие прилипания.

Мы будем рассматривать в основном сплошные среды и исходить из равенства нулю скорости исчезающе тонкого слоя жидкости, непосредственно прилегающего к поверхности твердого тела.

Уравнение теплоотдачи. Так как у поверхности твердого тела имеется тонкий слой неподвижной жидкости, из уравнения (4.2) следует, что плотность теплового потока на стенке (теплоотдача) может быть определена по уравнению Фурье

$$q_c = -I \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n=0}, \quad (4.21)$$

где n – нормаль к поверхности тела.

Таким образом, если известно температурное поле, q_c , можно вычислить, не обращаясь к закону Ньютона – Рихмана

$$q_c = a(t_c - t_{жс}). \quad (4.21')$$

При необходимости по известному температурному полю можно определить и коэффициент теплоотдачи. Из уравнений (4.21) и (4.21') следует, что

$$a = - \frac{I}{t_c - t_{жс}} \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n=0}. \quad (4.22)$$

Будем называть это уравнение *уравнением теплоотдачи*.

Из условия равенства нулю относительной скорости жидкости на поверхности тела следуют и другие важные для расчетной практики выводы, облегчающие нахождение поля температур, и, следовательно, определение q_c и a .

Гидродинамический пограничный слой. Рассмотрим продольное обтекание плоской поверхности тела безграничным потоком жидкости. Скорость и температура набегающего потока постоянны и равны соответственно w_0 и t_0 . При соприкосновении частиц жидкости с поверхностью тела они «прилипают» к ней. В результате в области около пластины вследствие действия сил вязкости образуется тонкий слой заторможенной жидкости, в пределах которого скорость изменяется от нуля на поверхности тела до скорости невозмущенного потока (вдали от тела). Этот слой заторможенной жидкости получил название гидродинамического пограничного слоя.

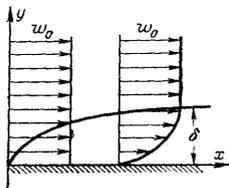


Рис. 4.6. Изменение скорости в гидродинамическом пограничном слое.

Чем больше расстояние x от передней кромки пластины, тем толще пограничный слой, так как влияние вязкости по мере движения жидкости вдоль тела все дальше проникает в невозмущенный поток. Эта особенность пограничного слоя иллюстрируется рис. 4.6, на котором представлены распределения скорости при различных значениях x . Для течения жидкости внутри пограничного слоя справедливо условие $\frac{\partial w_x}{\partial y} \neq 0$, вне пограничного слоя и на его внешней границе

$$\partial w_x / \partial y = 0 \text{ и } w_x = w_0.$$

Понятия «толщина пограничного слоя» и «внешняя граница пограничного слоя» довольно условны, так как резкого перехода от пограничного слоя к течению вне слоя нет. Скорость в пограничном слое по мере увеличения y асимптотически стремится к w_0 .

Поэтому под толщиной пограничного слоя δ подразумевается такое расстояние от стенки, на котором скорость будет отличаться от скорости потока вдали от тела на определенную заранее заданную малую величину $\epsilon \ll 1$ (например, на 1%): при $y = \delta$ $w_x = (1 - \epsilon)w_0$.

Таким образом, при омывании тела поток жидкости как бы разделяется на две части: на пограничный слой и на внешний поток. Во внешнем потоке преобладают силы инерции, вязкостные силы здесь не проявляются. Напротив, в пограничном слое силы вязкости и инерционные силы соизмеримы.

Тогда можно написать следующую систему дифференциальных уравнений, описывающих стационарное поле скоростей при омывании плоской пластины, бесконечной в направлении оси Oz . Уравнения движения

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad (4.23)$$

$$w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (4.24)$$

Уравнение сплошности

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0. \quad (4.25)$$

Рассмотрим возможности упрощения для пограничного слоя записанной системы дифференциальных уравнений и наметим границы справедливости упрощенной записи.

Ввиду малости толщины пограничного слоя принимают, что поперек него давление не изменяется, т.е. $\partial p / \partial y = 0$. При омывании плоской поверхности неограниченным потоком, когда во внешнем течении скорость постоянна и равна w_0 из уравнения Бернулли

$$p + \frac{rw_0^2}{2} = \text{const}$$

следует, что во внешнем потоке не изменяется и давление. Тогда $\partial p / \partial x = 0$ (такое течение в гидродинамике часто называют «безградиентным течением»). Условия $\partial p / \partial y = 0$ для пограничного слоя и $\partial p / \partial x = 0$ для внешнего течения приводят к выводу, что производная $\partial p / \partial x$ равна нулю и в области пограничного слоя (в рассматриваемом случае).

Скорость w_x изменяется от нуля до w_0 , порядок величины w_x оценим как w_0 . Для продольной координаты возьмем масштаб l . Тогда (O – обозначение порядка данной величины)

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} = O\left(\frac{w_0}{l}\right).$$

Согласно уравнению сплошности (4.25) порядок производных $\partial w_x / \partial x$ и $\partial w_y / \partial y$ одинаков. Отсюда

$$\frac{\partial w_y}{\partial y} = O\left(\frac{w_0}{l}\right) = O\left(w_0 \frac{d}{l} \cdot \frac{1}{d}\right),$$

где δ – порядок поперечной координаты y для пограничного слоя. Порядок величины w_y при этом может быть оценен как

$$w_y = O\left(w_0 \frac{d}{l}\right).$$

Оценим отдельные члены инерционной (конвективной) и вязкостной частей уравнения движения в проекциях на ось Ox

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} = O\left(\frac{w_0^2}{l}\right); w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = O\left(w_0 \frac{d}{l} \cdot \frac{w_0}{d}\right) = O\left(\frac{w_0^2}{l}\right);$$

$$n \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} = n \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w_x}{\partial x} = O\left(n \frac{w_0}{l^2}\right);$$

$$n \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} = n \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial w_x}{\partial y} = O\left(n \frac{w_0}{d^2}\right)$$

Из оценки следует, что порядок отдельных слагаемых инерционной части одинаков и равен w_0^2/l . Отношение вязкости членов дает

$$\frac{\partial^2 w_x / \partial x^2}{\partial^2 w_x / \partial y^2} = O\left(\frac{w_0 / l^2}{w_0 / d^2}\right) = O\left(\frac{d^2}{l^2}\right).$$

Для пограничного слоя $\delta \ll l$, отсюда $\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2}$, последней производной можно пренебречь. Тогда уравнение движения в проекциях на ось Ox может быть записано в следующем виде

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = n \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}. \quad (4.26)$$

Порядок левой части этого уравнения равен $O(\frac{w_0^2}{l})$, правой части $O(n \frac{w_0}{d^2})$. Приравнявая, получаем

$$O\left(\frac{w_0^2}{l}\right) = O\left(n \frac{w_0}{d^2}\right) \text{ или } \frac{d}{l} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{w_0 l}{n}}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}\right), \quad (4.27)$$

здесь $\text{Re} \equiv w_0 l / n$ – число Рейнольдса, характеризующее соотношение сил инерции и сил вязкости.

Если $\text{Re} \ll 1$, то $\frac{d}{l} \gg 1 (d \gg l)$. В этом случае по сути дела нет разделения потока на две области, все пространство жидкости у тела охвачено действием сил вязкости.

Если $\text{Re} \gg 1$, то $d \ll l$, т. е. у поверхности тела образуется сравнительно тонкий слой подторможенной жидкости, для которого в первом приближении справедливы сделанные нами упрощения. Таким образом, теория пограничного слоя приобретает характер метода упрощения математической формулировки краевой задачи и связанной с этим возможности решения.

Оценим порядок величин, входящих в уравнение движения в проекциях на ось Oy . Получим, учитывая уравнение (4.27), что члены

$$w_x \frac{\partial w_y}{\partial x}, w_y \frac{\partial w_x}{\partial y}, n \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2}$$

имеют величину порядка $O\left(\frac{w_0^2 d}{l}\right) = O\left(\frac{w_0^2}{l} \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}\right)$, а член

$$n \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} = O\left(\frac{w_0^2}{l} \frac{1}{\text{Re} \sqrt{\text{Re}}}\right).$$

Таким образом, члены уравнения движения в проекциях на ось Oy малы по сравнению с членами уравнения (4.23). Для пограничного слоя уравнение (4.24) можно опустить. Тогда для плоского безградиентного стационарного течения вязкой жидкости в пограничном слое у плоской поверхности можно записать

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = n \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}; \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0. \quad (4.29)$$

Здесь две зависимые переменные: w_x и w_y .

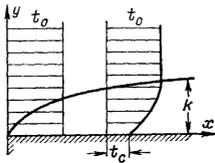


Рис. 4.7. Изменение температуры в тепловом пограничном слое.

Тепловой пограничный слой. Аналогично понятию гидродинамического пограничного слоя было введено понятие теплового пограничного слоя (рис. 4.7). Тепловой пограничный слой – это слой жидкости у стенки, в пределах которого температура изменяется от значения, равного температуре стенки, до значения, равного температуре жидкости вдали от тела. Для области внутри теплового пограничного слоя справедливо условие $\partial t / \partial y \neq 0$, а на внешней границе и вне его

$$\partial t / \partial y = 0 \text{ и } t = t_0.$$

Таким образом, все изменение температуры жидкости сосредоточивается в сравнительно тонком слое, непосредственно прилегающем к поверхности тела. Толщины гидродинамического и теплового пограничных слоев δ и k в общем случае не совпадают – это зависит от рода жидкости и некоторых параметров процесса течения и теплообмена. Будем полагать, что они одного порядка: $k = O(\delta)$. Ввиду малости толщины теплового граничного слоя можно пренебречь теплопроводностью вдоль слоя по сравнению с поперечным переносом теплоты, т. е. положить

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0 \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right) m.k.k^2 \ll l^2.$$

Тогда для рассматриваемого случая уравнение энергии примет вид

$$w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} = a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}. \quad (4.30)$$

Чтобы замкнуть задачу, к уравнению (4.30) необходимо добавить уравнение движения (4.28) и уравнение сплошности (4.29).

Своеобразно строится пограничный слой в случае свободного теплового течения, вызванного разностью плотностей более и менее нагретых частиц жидкости. Данное ранее определение пограничных слоев остается справедливым и для свободного движения. Однако во многих случаях скорость вдали от тела, у которого возникло свободное движение, равна нулю. На рис. 4.8 приведено примерное распределение температур и скоростей в определенном сечении свободного потока у горячего тела. В данном случае толщины теплового и гидродинамического слоев также могут не совпадать.

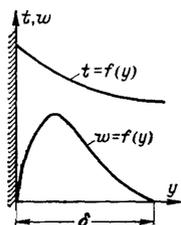


Рис. 4.8. Гидродинамический и тепловой пограничные слои при свободном движении.

При свободном тепловом движении ($w_0=0$) в дифференциальном уравнении движения (4.28) должен быть учтен член $\bar{g}bJ$. В этом случае поле скоростей неразрывно связано с полем температур (теплообменом).

Форма и размеры поверхности теплообмена существенно влияют на теплоотдачу. В зависимости от этих факторов может резко меняться характер обтекания поверхности, по-иному строится пограничный слой. В технике имеется большое многообразие поверхностей нагрева. Каждая такая поверхность создает специфические условия движения и теплоотдачи.

Известно, что имеются два основных режима течения жидкости: ламинарный и турбулентный. При ламинарном режиме частицы жидкости движутся без перемешивания, слоисто; при турбулентном – неупорядоченно, хаотически, направление и величина скорости отдельных частиц беспрепятственно меняются. Эти режимы течения наблюдаются и в пограничном слое. При малых значениях x течение в пограничном слое может быть ламинарным. По мере увеличения x толщина пограничного слоя возрастает, слой делается неустойчивым и течение в пограничном слое становится турбулентным.

Как будет показано в дальнейшем, теплоотдача существенно зависит от режима течения.

5. ПОДОБИЕ ПРОЦЕССОВ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА

5.1 Общие положения

Конвективный теплообмен описывается системой дифференциальных уравнений и условиями однозначности с большим количеством переменных. Попытки аналитического решения полной системы уравнений наталкиваются на серьезные трудности. Поэтому большое значение приобретает экспериментальный путь исследования. С помощью эксперимента для определенных значений аргументов можно получить числовые значения искомых переменных и затем подобрать уравнения, описывающие результаты опытов. Однако при изучении столь сложного процесса, как конвективный теплообмен, не всегда легко проводить и опытное исследование.

Для исследования влияния на процесс какой-либо одной величины остальные нужно сохранять неизменными, что не всегда возможно или затруднительно из-за большого количества переменных. Кроме того, при этом нужно быть уверенным, что результаты, получаемые с помощью какой-либо конкретной установки (модели), можно перенести и на другие аналогичные процессы (образец). Эти трудности помогает разрешить теория подобия. С помощью теории подобия размерные физические величины можно объединить в безразмерные комплексы, причем так, что число комплексов будет меньше числа величин, из которых составлены эти комплексы. Полученные безразмерные комплексы можно рассматривать как новые переменные.

При введении в уравнения безразмерных комплексов число величин под знаком искомой функции формально сокращается, что упрощает исследование физических процессов. Кроме того, новые безразмерные переменные отражают влияние не только отдельных факторов, но и их совокупности, что позволяет легче определить физические связи в исследуемом процессе.

Теория подобия устанавливает также условия, при которых результаты лабораторных исследований можно распространить на другие явления, подобные рассматриваемому. Ввиду этого теория подобия прежде всего является теоретической базой эксперимента, но не только. Теория подобия является важным подспорьем теоретических исследований. Хотя методами теории подобия вид искомой функции не может быть определен, эта теория облегчает в ряде случаев анализ процесса и описание полученных результатов.

Для практического использования выводов теории подобия необходимо уметь приводить к безразмерному виду математические описания изучаемых процессов.

Имеется несколько методов выполнения этой операции. Мы воспользуемся одним из них – методом масштабных преобразований.

5.2 Приведение математической формулировки краевой задачи к записи в безразмерных переменных

Пусть поверхность твердого тела омывается несжимаемой жидкостью, температура и скорость которой вдали от тела постоянны и равны соответственно t_0 и w_0 . Размер тела l_0 задан. Температура поверхности тела равна t_c . Для определенности примем, что $t_c > t_0$. Будем полагать, что физические параметры жидкости постоянны (учтем только подъемную силу, возникающую в результате зависимости плотности от температуры). Теплота трения не учитывается. Рассматриваемый процесс является стационарным.

Расположим оси координат так, как показано на рис. 5.1. Для простоты примем, что ось Oy нормальна к поверхности тела, а ось Ox направлена вдоль тела и вертикальна.

При этом $g_x = g$, а проекции вектора сил тяжести (или подъемной силы) на оси Oy и Oz будут равны нулю ($g_y = g_z = 0$).

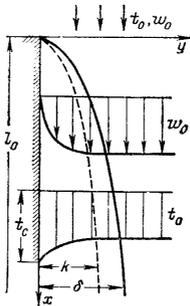


Рис. 5.1. К постановке задачи конвективного теплообмена.

Размер тела вдоль оси Oz намного больше l_0 .

При принятых условиях поля температур и скоростей можно описать дифференциальными уравнениями в приближении пограничного слоя (см. п. 4.4). Учтем дополнительно подъемную силу $r \cdot g \cdot b \cdot J$, считая ее соизмеримой с вязкостным членом $m(\partial^2 w_x / \partial y^2)$. Введем также обозначение $J = t - t_0$, где t – температура жидкости (заметим, что $dt = dJ$, т.к. $t_0 = \text{const}$).

Уравнение энергии

$$w_x \frac{\partial J}{\partial x} + w_y \frac{\partial J}{\partial y} = a \frac{\partial^2 J}{\partial y^2},$$

уравнение движения

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + gbJ,$$

уравнение сплошности

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0.$$

Напишем граничные условия:

1) Вдали от тела ($y = \infty$)

$$J = J_0 \equiv 0; w_x = w_0; w_y = 0.$$

2) На поверхности тела ($y = 0; 0 \leq x \leq l_0; -\infty \leq z \leq +\infty$) (a)

$$J = J_c \equiv t_c - t_0 = \text{const}; w_x = w_y = w_z = 0.$$

В уравнениях и условиях однозначности можно различить три вида величин:

– *независимые переменные* – это координаты x и y .

– *зависимые переменные* – это J, w_x, w_y ; зависимые переменные однозначно определяются значениями независимых переменных, если заданы величины, входящие в условия однозначности;

– *постоянные величины* – это $w_0, t_0, l_0, J_c, n, a, gb$ и др.; они задаются условиями однозначности и для определенной задачи являются постоянными, не зависящими от других переменных; от задачи к задаче они могут меняться; постоянными эти величины называют потому, что они не являются функцией независимых переменных.

Таким образом, искомые зависимые переменные J, w_x, w_y зависят от большого числа величин: они являются функцией независимых переменных и постоянных величин, входящих в условия однозначности.

Величины, содержащиеся в уравнениях и условиях однозначности, можно сгруппировать в комплексы. Число безразмерных комплексов будет меньше числа размерных величин.

Для приведения к безразмерному виду выберем масштабы приведения. В качестве масштабов удобно принять постоянные величины, входящие в условия однозначности. Для линейных величин выберем какой-либо характерный размер, например длину поверхности теплообмена l_0 , для скорости w_0 , для температуры J_c .

Обозначим безразмерные величины

$$X = \frac{x}{l_0}, Y = \frac{y}{l_0}, W_x = \frac{w_x}{l_0},$$

(б)

$$W_y = \frac{w_y}{w_0}, \Theta = \frac{J}{J_c}.$$

Тогда

$$x = l_0 X, y = l_0 Y, w_x = w_0 W_x,$$

(в)

$$w_y = w_0 W_y, J = J_c \Theta.$$

Подставим в уравнения значения величин согласно равенствам (в). преобразуем уравнение энергии. Так как, например,

$$\frac{\partial^2 J}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial(l_0 Y)} \left[\frac{\partial(J_c \Theta)}{\partial(l_0 Y)} \right] = \frac{J_c}{l_0^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2},$$

то в результате подстановки равенства (в) после умножения левой и правой частей уравнения энергии на l_0^2/a будем иметь

$$\frac{w_0 l_0}{a} \left(W_x \frac{\partial \Theta}{\partial X} + W_y \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2}. \quad (5.1)$$

Аналогично преобразуем и уравнение движения. После подстановки равенства (в) в уравнение движения умножим его на l_0^2/nw_0 .

В результате получим

$$\frac{w_0 l_0}{n} \left(W_x \frac{\partial W_x}{\partial X} + W_y \frac{\partial W_x}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 W_x}{\partial Y^2} + \frac{g \cdot b \cdot J_c \cdot l_0^2}{nw_0} \Theta.$$

Сделаем следующее преобразование комплекса, входящего в последнее уравнение

$$\frac{g \cdot b \cdot J_c \cdot l_0^2}{nw_0} \Theta = \frac{g b J_c l_0^3}{n^2} \cdot \frac{n}{w_0 l_0} \Theta.$$

Учитывая эти преобразования, окончательно получаем

$$\frac{w_0 l_0}{n} \left(W_x \frac{\partial W_x}{\partial X} + W_y \frac{\partial W_x}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 W_x}{\partial Y^2} + \frac{g \cdot b \cdot J_c \cdot l_0^3}{n^2} \cdot \frac{n}{w_0 l_0} \Theta. \quad (5.2)$$

После преобразования уравнения сплошности получим

$$\frac{w_0}{l_0} \left(\frac{\partial W_x}{\partial X} + \frac{\partial W_x}{\partial Y} \right) = 0$$

или, т.к. w_0/l_0 не равно нулю,

$$\frac{\partial W_x}{\partial X} + \frac{\partial W_y}{\partial Y} = 0. \quad (5.3)$$

Приводя к безразмерному виду граничные условия, получаем

1) вдали от тела $Y = \infty$

$$\Theta = \Theta_0 = 0, W_x = 1, W_y = 0;$$

2) на поверхности тела ($Y = 0; 0 \leq X \leq 1$) (г)

$$\Theta = \Theta_c = 1, W_x = W_y = 0.$$

Из условий (г) следует, что, несмотря на то, что величины w_0, t_c, t_0 и др., входящие в размерные граничные условия, могут иметь различные числовые значения, каждая из безразмерных величин Θ_0, Θ_c и др. имеет в рассматриваемом случае вполне конкретное числовое значение.

Как следует из п. 4.4, при известном температурном поле коэффициент теплоотдачи может быть определен по уравнению

$$a = -\frac{l}{t_c - t_0} \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

Приводя к записи в безразмерных переменных, получаем

$$\frac{a_0 l_0}{l} = - \left(\frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right)_{y=0}. \quad (5.4)$$

Безразмерный комплекс $a \cdot l_0 / l$ полностью определяется производной $(\partial \Theta / \partial Y)_{Y=0}$.

5.3 Критерии подобия и уравнения подобия

Помимо безразмерных величин Θ, W_x, W_y и безразмерных координат, составленных из однородных физических величин, в уравнения входят также безразмерные комплексы, состоящие из разнородных физических величин

$$\frac{a \cdot l_0}{l}, \frac{w_0 l_0}{n}, \frac{w_0 l_0}{a}, \frac{g b J_c l_0^3}{n^2}.$$

Этим комплексам, называемым числами подобия, присвоены имена ученых, внесших значительный вклад в развитие теплотехники и механики.

Первый из этих безразмерных комплексов обозначают

$$Nu \equiv \frac{a \cdot l_0}{l} \quad (5.5)$$

и называют *числом Нуссельта* или безразмерным коэффициентом теплоотдачи. Число Нуссельта характеризует теплообмен на границе стенка – жидкость. В задачах конвективного теплообмена число Nu обычно является искомой величиной, поскольку в него входит определяемая величина a .

Несмотря, на внешнее сходство с числом Био, рассмотренным при изучении теплопроводности, число Нуссельта существенно отличается от него. В число Bi входит коэффициент теплопроводности твердого тела; в число Nu – коэффициент теплопроводности жидкости. Кроме того, в число Био коэффициент теплоотдачи вводится как величина, заданная в условиях однозначности, мы же рассматриваем коэффициент теплоотдачи, входящий в Nu , как величину искомую.

Безразмерный комплекс

$$Re \equiv \frac{w_0 l_0}{n} \quad (5.6)$$

называют *числом Рейнольдса*. Оно характеризует соотношение сил инерции и сил вязкости. Действительно, число Рейнольдса будет получено, если член уравнения движения, учитывающий инерционные силы, разделить на член, учитывающий в этом уравнении силы трения

$$\frac{w_x \partial w_x / \partial x}{n \partial^2 w_x / \partial y^2} = \frac{w_0^2 / l_0}{n w_0 / l_0^2} \cdot \frac{W_x \partial W_x / \partial X}{\partial^2 W_x / \partial Y^2} = \frac{w_0 l_0}{n} \cdot \frac{W_x \partial W_x / \partial X}{\partial^2 W_x / \partial Y^2}.$$

Число Рейнольдса является важной характеристикой как изотермического, так и неизотермического процессов течения жидкости.

Третий безразмерный комплекс обозначают

$$Pe \equiv \frac{w_0 l_0}{a} \quad (5.7)$$

и называют числом *Пекле*. Его можно преобразовать следующим образом

$$\frac{w_0 l_0}{a} = \frac{r \cdot c_p w_0 J}{\frac{l}{l_0} J},$$

здесь числитель характеризует теплоту, переносимую конвекцией, а знаменатель – теплоту, переносимую теплопроводностью.

Безразмерный комплекс

$$Gr \equiv \frac{g b J_c l_0^3}{n^2} \quad (5.8)$$

называют *числом Грасгофа*. Оно характеризует подъемную силу, возникающую в жидкости вследствие разности плотностей. Т.к. при выводе уравнения движения было принято, что $bJ = \frac{r_0 - r}{r_0}$, вместо Gr можно написать его более общую модификацию – *число Архимеда*

$$Ar \equiv \frac{g l_0^3}{n^2} \frac{r_0 - r}{r_0}. \quad (5.9)$$

В случае однородной среды при условии $\beta = \text{const}$ число Архимеда идентично числу Gr.

Используя введенные обозначения, систему безразмерных дифференциальных уравнений можно записать в следующем виде

$$Nu = -(\partial \Theta / \partial Y)_{Y=0}; \quad (5.10)$$

$$Pe \left(W_x \frac{\partial \Theta}{\partial X} + W_y \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2}; \quad (5.11)$$

$$\operatorname{Re} \left(W_x \frac{\partial W_x}{\partial X} + W_y \frac{\partial W_y}{\partial Y} \right) = \frac{Gr}{\operatorname{Re}} \Theta + \frac{\partial^2 W_x}{\partial Y^2}; \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial W_x}{\partial X} + \frac{\partial W_y}{\partial Y} = 0. \quad (5.13)$$

Система безразмерных дифференциальных уравнений и безразмерных условий однозначности (Γ) представляет собой математическую формулировку задачи.

Безразмерные величины Θ , W_x , W_y , X , Y , Nu , Re , Pe , Gr можно рассматривать как новые переменные. Их можно разделить на три группы:

– независимые переменные – это безразмерные координаты X , Y ;

– зависимые переменные – это Nu , Θ , W_x , W_y ; они однозначно определяются значениями независимых переменных при определенных значениях величин, входящих в условия однозначности;

– постоянные величины – это Pe , Re , Gr ; они заданы условиями однозначности и для конкретной задачи являются постоянными (действительно, как следует из (5.6)-(5.8), числа Pe , Re и Gr состоят только из величин, входящих в условия задачи).

В результате можно написать

$$Nu = f_1(X_c, Y_c, Pe, Re, Gr), \quad (5.14)$$

$$\Theta = f_2(X, Y, Pe, Re, Gr), \quad (5.15)$$

$$W_x = f_3(X, Y, Pe, Re, Gr), \quad (5.16)$$

$$W_y = f_4(X, Y, Pe, Re, Gr). \quad (5.17)$$

Уравнения вида (5.14) – (5.17) называют уравнениями подобия.

Здесь X_c , Y_c – уравнение (5.14) – соответствуют поверхности теплоотдачи (стенки). Нахождение α (или Nu) для точек пространства, не лежащих на поверхности стенки, не имеет смысла.

Если в уравнении движения учесть член $\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial x}$, то в результате приведения к безразмерной записи появился бы член

$$\frac{l_0}{rw_0} \frac{\partial p}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{p}{rw_0^2} \frac{w_0 l_0}{n} \right) = \frac{\partial}{\partial X} (Eu Re).$$

Безразмерный комплекс

$$Eu = \frac{p}{rw_0^2} \quad (5.18)$$

называют числом *Эйлера*. Это число характеризует соотношение сил давления и сил инерции. В уравнения конвективного теплообмена зависимая переменная Eu входит только под знаком производной. Следовательно, для рассматриваемой нами несжимаемой жидкости с постоянными физическими параметрами существенно не абсолютное значение давления, а его изменение. Поэтому число Эйлера обычно представляют в виде

$$Eu = \frac{p - p_0}{rw_0^2},$$

где p_0 – какое-либо фиксированное значение давления, например давление на входе в канал. Это давление может быть неизвестной величиной.

Очевидно, при неизменной математической формулировке задачи новые 'безразмерные величины могут быть получены соответствующим комбинированием старых безразмерных величин, однако при этом число переменных под знаком функции не должно измениться.

Число Re , полученное при приведении к безразмерному виду уравнения энергии, можно представить как произведение двух безразмерных переменных

$$Pe = Re Pr = \frac{w_0 l_0 n}{n a}. \quad (5.19)$$

Безразмерная величина $Pr \equiv n / a$ представляет собой новую переменную, называемую числом *Прандтля*. Число Прандтля целиком составлено из физических параметров, и поэтому и само является физическим параметром. Его можно записать и в виде

$$Pr = \frac{n}{a} = \frac{m \cdot c_p}{l}. \quad (5.20)$$

Числу Прандтля можно придать определенный физический смысл. Уравнение энергии

$$w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} = a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$$

и уравнение движения

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} = n \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}$$

по записи аналогичны. При $a = n$ расчетные поля температур и скоростей будут подобны, если только аналогичны и условия однозначности. Условию $a = v$ соответствует равенство $Pr = 1$. Таким образом, при определенных условиях числу Прандтля может быть придан смысл меры подобия полей температур и скоростей.

Числа Pr *капельных жидкостей* сильно зависят от температуры, причем для большинства жидкостей эта зависимость в основном аналогична зависимости вязкости $\mu(t)$, так как теплоемкость c_p и коэффициент теплопроводности λ зависят от температуры более слабо. Значения числа Pr для воды при температурах от 0 до 180°C сильно уменьшаются с ростом температуры (от 13,7 до 1), что связано с резким уменьшением вязкости воды и ростом λ в этой области температур. Теплоемкость при этом очень мало зависит от температуры.

При температурах от 180 до 310°C значения числа Pr для воды очень незначительно изменяются и близки к единице. Характер зависимости Pr от температуры резко изменяется только при давлениях и температурах, близких к критическим.

Число Pr *газов* практически не зависит ни от температуры, ни от давления и для данного газа является величиной постоянной, определяемой атомностью газа.

В соответствии с кинетической теорией газов число Pr имеет следующие значения:

Для одноатомных газов 0,67

Для двухатомных газов 0,72

Для трехатомных газов 0,8

Для четырехатомных и более газов 1

Действительные значения числа Pr реальных газов несколько отличаются от указанных значений.

Учитывая, что $Pe = Re Pr$, уравнения подобия (5.14) – (5.17) можно записать в виде

$$Nu = F_1(X_c, Y_c, Re, Pr, Gr), \quad (5.21)$$

$$\Theta = F_2(X, Y, Re, Pr, Gr), \quad (5.22)$$

$$W_x = F_3(X, Y, Re, Pr, Gr), \quad (5.23)$$

$$W_y = F_4(X, Y, Re, Pr, Gr). \quad (5.24)$$

Исходя из уравнений (5.14) – (5.17) и (5.21) – (5.24), безразмерные переменные можно разделить на два вида:

– *определяемые* – это числа, в которые входят искомые зависимые переменные; в рассматриваемом случае зависимыми являются a, J, w_x, w_y , следовательно, определяемыми являются Nu, Θ, W_x и W_y ;

– *определяющие* – это числа, целиком составленные из независимых переменных и постоянных величин, входящих в условия однозначности; в рассматриваемом случае определяющими являются X, Y, Re, Pr (или Pe) и Gr .

Числа подобия, составленные из наперед заданных параметров (постоянных) математического описания процесса, называют также *критериями подобия*.

5.4 Условия подобия физических процессов

Полученная система безразмерных дифференциальных уравнений (5.10) – (5.13), так же как и исходная система размерных уравнений, описывает бесконечное множество конкретных процессов конвективного теплообмена. Уравнения будут справедливы для любого процесса теплоотдачи между твердым телом и несжимаемой жидкостью, удовлетворяющего данной формулировке задачи. Таким образом, записанная ранее система дифференциальных безразмерных уравнений описывает совокупность физических процессов, характеризующихся одинаковым механизмом.

С теплопроводностью мы познакомились в первой части курса. Дифференциальное уравнение теплопроводности $\nabla^2 t = 0$ описывает бесчисленное множество конкретных процессов, принадлежащих к одному и тому же классу. Общность этих процессов определяется одинаковым механизмом процесса распространения тепла. Однако, известны и другие дифференциальные уравнения,

аналогичные по форме записи уравнению теплопроводности, например уравнение электрического потенциала. Если для температуры и электрического потенциала ввести одинаковые обозначения, то оба уравнения по своему внешнему виду не будут отличаться друг от друга. Однако, хотя по форме записи оба уравнения совпадают, физическое содержание входящих в эти уравнения величин различно. Те явления природы, которые описываются одинаковыми по форме записи дифференциальными уравнениями, но различны по своему физическому содержанию, называются *аналогичными*.

Дифференциальные уравнения отражают наиболее общие черты явлений и не учитывают частные, количественные особенности. Такими особенностями являются форма и размеры системы, в которой протекает физический процесс; к частным особенностям относятся также физические свойства рабочих тел, участвующих в процессе, условия протекания процесса на границах системы и др. Частные особенности различных явлений одного и того же класса определяются с помощью условия, однозначности.

Проведенный анализ системы безразмерных дифференциальных уравнений и условий однозначности делает более понятными общие условия подобия физических процессов, сформулированные ниже в виде трех правил:

1. Подобные процессы должны быть качественно одинаковыми, т. е. они должны иметь одинаковую физическую природу и описываться одинаковыми по форме записи дифференциальными уравнениями.

2. Условия однозначности подобных процессов должны быть одинаковыми во всем, кроме числовых значений размерных постоянных, содержащихся в этих условиях.

3. Одноименные определяющие безразмерные переменные подобных процессов должны иметь одинаковое числовое значение.

Сформулированные условия являются определением подобия физических процессов.

Первое условие говорит, что подобные процессы должны относиться к одному и тому же классу физических явлений. Помимо одинаковой, физической природы подобные процессы должны характеризоваться одинаковыми по записи дифференциальными уравнениями.

Во многих задачах конвективного теплообмена при вынужденном движении можно пренебречь силами тяжести. Очевидно, равенство сил тяжести нулю меняет механизм и математическую запись рассматриваемого процесса. При рассмотрении свободного движения в большом объеме можно пренебречь градиентом давления в жидкости. Исключение градиента давления из уравнения движения приводит к иной записи уравнения, меняется класс рассматриваемого явления.

Таким образом, подобные процессы должны быть процессами конвективного теплообмена, характеризующимися одинаковой природой, одинаковыми действующими силами. Отдельные разновидности процессов конвективного теплообмена могут описываться различными дифференциальными уравнениями (хотя бы они и были частными случаями более общих уравнений), и в этом случае они будут принадлежать к различным классам явлений.

Изменение исходных дифференциальных уравнений в общем случае приводит к изменению системы безразмерных переменных, существенных для изучаемого процесса.

Второе условие подобия требует, чтобы условия однозначности подобных процессов были одинаковыми во всем, кроме числовых значений постоянных, содержащихся в этих условиях.

Таким образом, запись размерных условий однозначности подобных процессов в общем виде (буквенном) должна быть идентична. При этом конкретные значения скорости набегающего потока w_0 , температура стенки t_c и т.д. могут иметь различные числовые значения. Из сравнения граничных условий (а) и (г) (см. п. 5.2) видно, что несмотря на различные значения w_0, t_0, t_c и др., безразмерные граничные условия будут одинаковыми для всех этих процессов.

Из первого и второго условий подобия следует, что подобные процессы должны описываться одинаковыми (тождественными) безразмерными дифференциальными уравнениями и безразмерными граничными условиями.

В безразмерной форме математическая формулировка рассматриваемых подобных процессов одна и та же. Следовательно, рассматриваемые подобные процессы описываются единой формулой, например

$$Nu = f_1(X_c, Re, Pr)$$

или

$$\Theta = f_2(X, Y, Re, Pr) \text{ и т.д.}$$

функция f_1 будет одна и та же для всех подобных процессов. То же самое можно сказать и о функции f_2 и т. д.

При соблюдении первых двух условий подобия исследуемые процессы будут зависеть от одних и тех же безразмерных переменных. Этот вывод неизбежно вытекает из того, что подобные процессы описываются тождественными безразмерными уравнениями и граничными условиями.

Первых двух условий недостаточно для установления физического подобия. Нужно добавить условие, что одноименные определяющие безразмерные

переменные подобных процессов должны иметь одинаковое числовое значение т. е.

$$X = idem, Y = idem, Re = idem, Pr = idem, Gr = idem \text{ и т.п.}$$

Так как подобные процессы характеризуются одинаковыми функциями f_1, f_2 и т. д. и численно равными определяющими переменными, то определяемые одноименные переменные подобных процессов также будут иметь одинаковые значения, т. е.

$$Nu = idem, \Theta = idem, W_x = idem, W_y = idem \text{ и т.д.}$$

Предположим, что рассматривается система размерных дифференциальных уравнений совместно с размерными граничными условиями. Решение уравнений дало бы определенную формулу. Для примера можно взять решения задач теплопроводности, рассмотренные ранее. Подстановка конкретных числовых значений аргументов λ, δ и Δt в формулу $q = (I/d)\Delta t$ дала бы определенное числовое значение зависимой переменной q . Очевидно, при одних и тех же значениях λ, δ и Δt все процессы теплопроводности, описываемые этой формулой, будут тождественны – это будет один и тот же процесс.

Иное дело, когда формула представлена в безразмерных переменных. Незменность каждой в отдельности из определяющих величин X, Y, Re, Pr и Gr , например, в уравнении $\Theta = f(X, Y, Re, Pr, Gr)$ дает одно и тоже значение безразмерной температуры $\Theta = (t - t_0)/(t_c - t_0)$ однако размерные значения температур жидкости и стенки могут быть различны. Одинаковым значениям будет соответствовать множество различных по своим размерным температурным параметрам физических процессов. Только в частном случае может иметь место тождество процессов.

Как следует из изложенного, помимо выполнения первых двух условий подобия для подобия нужно еще, чтобы одноименные определяющие безразмерные переменные были численно равны. При этом для подобия процессов в целом достаточно, чтобы были численно равны одноименные определяющие переменные, составленные из постоянных величин, заданных в условиях однозначности. Например, подобие двух процессов теплообмена при течении жидкости в трубах будет иметь место, если будут выполнены первые два условия подобия и будут численно равны одноименные определяющие переменные, составленные только из заданных параметров математического описания процесса (постоянных). Процессы в целом будут подобны. В то же время локальные (точечные) значения искомых переменных необходимо рассматривать в точках, характеризующихся равенством одноименных безразмерных координат.

Таким образом, *критериями подобия* по существу являются определяющие безразмерные переменные, составленные из постоянных величин не являющихся функцией независимых переменных.

Как следует из изложенного, теорию подобия можно рассматривать как учение о характерных для каждого процесса обобщенных безразмерных переменных. Замена размерных переменных обобщенными является основной чертой теории подобия.

Мы рассмотрели условия подобия физических процессов на примере конвективного теплообмена несжимаемой жидкости в приближения пограничного слоя. Очевидно, условия подобия справедливы не только для рассмотренного частного процесса, но и для других процессов.

Безразмерные переменные можно получить для любого физического явления. Для этого необходимо иметь полное математическое описание рассматриваемого процесса. Знание математического описания является необходимой предпосылкой теории подобия.

Сформулированные ранее условия подобия можно использовать для установления аналогии двух физических разнородных процессов. Для этого в первом условии подобия необходимо потребовать только формальной тождественности дифференциальных уравнений. Таким образом, понятие подобия можно распространить на физически неоднородные (аналогичные) процессы.

5.5 Следствия из условий подобия

Пусть имеются два подобных процесса конвективного теплообмена, например, при течении жидкости в каналах произвольного поперечного сечения. Обозначим один процесс буквой A , другой – буквой B .

Масштабами линейных размеров выберем какой-либо размер каналов, например, их высоты h_A и h_B . Тогда

$$X_A = \frac{x_A}{h_A}, Y_A = \frac{y_A}{h_A}, Z_A = \frac{z_A}{h_A}$$

и

$$X_B = \frac{x_B}{h_B}, Y_B = \frac{y_B}{h_B}, Z_B = \frac{z_B}{h_B}.$$

Будем рассматривать процессы А и Б в точках, характеризующихся равенствами

$$X_A = X_B, Y_A = Y_B, Z_A = Z_B. \quad (5.25)$$

Точки, удовлетворяющие этим равенствам, называются *сходственными*.

Для сходственных точек справедливы следующие соотношения

$$x_A = x_B \frac{h_A}{h_B} = x_B c_l, y_A = y_B \frac{h_A}{h_B} = y_B c_l, z_A = z_B \frac{h_A}{h_B} = z_B c_l,$$

здесь $c_l = h_A / h_B$.

Если равенства (5.25) выполняются для двух подобных процессов, то, очевидно, для сходственных точек должны выполняться и равенства

$$W_{xA} = W_{xB} \text{ или } w_{xA} / w_{0A} = w_{xB} / w_{0B},$$

где w_{0A} и w_{0B} – значения скорости, заданные условиями однозначности; это может быть, например, скорость на входе соответственно в каналы А и Б. Из последнего равенства следует, что

$$\frac{w_{xA}}{w_{xB}} = \frac{w_{0A}}{w_{0B}} = c_w = const,$$

т.е. в любых сходственных точках подобных процессов отношение скоростей есть величина постоянная.

Аналогично можно написать

$$\frac{a_A}{a_B} = \frac{l_A}{l_B} \frac{h_A}{h_B} = c_a = \frac{c_l}{c_l} = const, \quad \frac{J_A}{J_B} = c_J = const \text{ и т.д.}$$

Таким образом, если процессы А и Б подобны, то любая физическая величина φ в данной точке процесса А пропорциональна соответствующей величине в сходственной точке процесса Б, т.е.

$$j_A = c_j j_B. \quad (5.26)$$

Коэффициенты пропорциональности c_j называют константами подобия. Они безразмерны; в общем случае не равны единице, не зависят ни от координат, ни от времени и различны для всех величин, имеющих различный физический смысл. Если все константы подобия равны единице, то процессы являются тождественными.

Предположим, что подобным процессам А и Б подобен также процесс В. Тогда можно записать

$$j_A = c'_j j_B,$$

причем c_j и c'_j в общем случае не равны.

Таким образом, подобные процессы можно рассматривать как один и тот же процесс, но взятый в различном масштабе, причем масштабы различных величин могут быть неодинаковыми.

Выбор констант подобия не может быть произведен произвольно. Покажем это на примере.

Для двух подобных процессов А и Б вынужденной конвекции справедливо условие $Re_A = Re_B$, где

$$Re_A = \frac{w_{0A} l_{0A}}{\nu_A} \text{ и } Re_B = \frac{w_{0B} l_{0B}}{\nu_B}.$$

Одноименные величины, входящие в Re_A и Re_B , связаны между собой с помощью констант подобия

$$w_{0A} = c_w w_{0B}, l_{0A} = c_l l_{0B}, \nu_A = c_\nu \nu_B.$$

Подставив эти равенства в Re_A , получим

$$Re_A = \frac{c_w c_l}{c_\nu} \cdot \frac{w_{0B} l_{0B}}{\nu_B} = \frac{c_w c_l}{c_\nu} Re_B$$

или

$$\frac{Re_A}{Re_B} = \frac{c_w c_l}{c_\nu} = 1.$$

Это и есть условие, ограничивающее произвольный выбор констант c_w, c_l, c_ν .

Аналогично

$$\frac{Pr_A}{Pr_B} = \frac{c_\nu}{c_a} = 1, \frac{Nu_A}{Nu_B} = \frac{c_a c_l}{c_l} = 1 \text{ и т.д.}$$

6 КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН В ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ

6.1 Средняя температура. Определяющая температура. Эквивалентный диаметр.

Во все формулы для определения величины теплового потока входит значение температуры жидкости, которая в большинстве случаев распределяется неравномерно как по сечению канала, так и по его длине. В связи с этим в технических расчетах под температурой жидкости понимают среднюю температуру потока, которая определяется следующим образом.

Через элементарную площадку dF в единицу времени поток жидкости переносит теплоту

$$dQ = c_p \cdot r \cdot t \cdot wdF.$$

Количество теплоты, переносимое через данное сечение в единицу времени, определяем по формуле

$$Q = \int_F c_p r t w dF.$$

Разделив полученное выражение на $\int_F c_p r \cdot t \cdot wdF$, получим среднее значение температуры по сечению (среднее по энтальпии жидкости)

$$t_{cp} = \frac{\int r \cdot c_p w dF}{\int_F r \cdot c_p w dF}. \quad (6.1)$$

Во многих случаях зависимостью c_p и ρ от температуры можно пренебречь, тогда уравнение (6.1) примет вид

$$t_{cp} = \frac{\int t w dF}{\int_F w dF} = \frac{1}{V_F} \int t w dF, \quad (6.2)$$

где F – площадь поперечного сечения канала, m^2 ;

t – температура в каждом элементе сечения, град;

$V = \int_F w dF$ – объемный расход жидкости, м³/сек;

w – скорость жидкости в каждом элементе dF .

Если скорость жидкости по сечению канала постоянна или равна нулю, то уравнение (6.2) примет вид

$$t_{cp} = \frac{1}{F} \int_F t dF.$$

Если температура потока жидкости изменяется не только по сечению, но и по длине канала, то необходимо производить ее усреднение также и вдоль течения жидкости. Обозначим среднюю температуру стенки t_{cm} , среднюю температуру жидкости у входа в канал t' , а у выхода t'' , тогда усредненная температура потока по длине канала $t_{жс}$ может быть определена по формуле

$$t_{жс} = t_{cm} \pm (t' - t'') / \ln \frac{t' - t_{cm}}{t'' - t_{cm}}. \quad (6.3)$$

В формуле (6.3) знак плюс берется при охлаждении жидкости, а знак минус – при ее нагревании. Для простейших случаев, когда температура потока изменяется в небольших пределах, среднюю температуру можно определить как среднеарифметическую из крайних значений

$$t_{жс} = 0,5(t' + t''). \quad (6.4)$$

Во всех ниже приведенных уравнениях подобия для определения коэффициента теплоотдачи всегда применяют среднюю скорость жидкости

$$w_{cp} = \frac{1}{F} \int_F w dF = \frac{V}{F}. \quad (6.5)$$

Физические параметры капельных жидкостей и газов изменяются с изменением температуры. Поэтому при обработке опытных данных за определяющую температуру, при которой берутся значения физических величин, принимают среднюю температуру потока или стенки или среднюю температуру пограничного слоя

$$t_{н.сл.} = 0,5(t_{cm} + t_{жс}).$$

При решении задач по определению коэффициента теплоотдачи всегда следует обращать внимание на то, какая температура для данного уравнения подобия принималась за определяющую.

В некоторые числа подобия входит линейный размер, причем берут тот размер, которым определяется развитие процесса. Для труб круглого сечения таким определяющим линейным размером является внутренний диаметр трубы. Для каналов некруглого сечения вместо диаметра берется так называемый *эквивалентный диаметр* $d_{\text{экв}} = 4F / S$, где F – площадь поперечного сечения канала; S – полный (смоченный) периметр сечения независимо от того, какая часть этого периметра участвует в теплообмене.

При поперечном обтекании трубы и пучка труб за определяющий размер берется наружный диаметр трубы; при обтекании плиты – ее длина по направлению движения потока. Вообще при использовании уравнений подобия всегда нужно обращать внимание на то, какой размер введен в числа подобия в виде определяющего.

6.2 Теплообмен при ламинарном течении жидкости в трубах

Механизм процесса теплоотдачи при течении жидкости в прямых гладких трубах является сложным.

Интенсивность теплообмена может изменяться в широких пределах и в большей степени зависит от скорости движения потока.

Изменение температуры жидкости происходит как по сечению, так и по длине трубы.

Характер движения жидкости в трубах может быть ламинарным и турбулентным. О режиме течения судят по величине числа Рейнольдса: $Re = w \cdot d / \nu$ где w – средняя скорость жидкости; d – внутренний диаметр трубы; ν – кинематический коэффициент вязкости. Если $Re < 2000$, то движение жидкости будет ламинарным. При $Re = 2 \cdot 10^3 - 10^4$ течение называют, *переходным*. При $Re > 10^4$ в трубе устанавливается развитое турбулентное течение жидкости. Формирование характера потока происходит в начальном участке трубы. При входе в трубу скорости по сечению распределяются равномерно. В дальнейшем при течении вдоль трубы у стенок образуется гидродинамический пограничный слой, толщина которого постепенно увеличивается и становится равной радиусу трубы, а в трубе устанавливается постоянное распределение скоростей, характерное для данного режима течения, или наступает так называемое *стабилизированное течение*. Последнее наблюдается как при ламинарном, так и при турбулентном течении жидкости. Длина участка стабилизации равна примерно $50 d$.

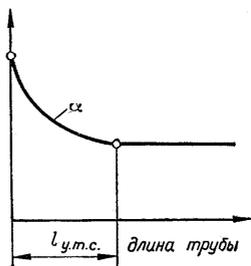


Рис. 6.1.

Теория и опыты показывают, что теплоотдача при течении жидкости в трубе неодинакова по длине и поэтому кроме участка стабилизированного течения образуется участок тепловой стабилизации $l_{y.m.c.}$. У входа в трубу коэффициент теплоотдачи α имеет максимальное значение, а затем резко убывает и при стабилизированном течении $l_{c.т}$ стремится к неизменному значению (рис. 6.1). Тепловой пограничный слой, который образуется у поверхности трубы, увеличивается по мере удаления от входа и на участке тепловой стабилизации достигает толщины, равной радиусу трубы. Длина стабилизированного участка для горизонтальной круглой трубы зависит от многих величин – коэффициента теплопроводности, числа Re , стабилизированного течения и других и принимается равной $50 d$.

При ламинарном изотермном течении жидкости скорости по сечению потока на расстоянии r_x от оси трубы распределяются по параболе (рис. 6.2, а)

$$w = w_{\max} \left(1 - r_x^2 / r^2\right),$$

где w_{\max} – скорость жидкости на оси трубы (при $r_x=0$);

r – радиус трубы.

На оси трубы скорость будет максимальной, а у стенки равна нулю. Средняя скорость при ламинарном течении $\bar{w} = 0,5w_{\max}$.

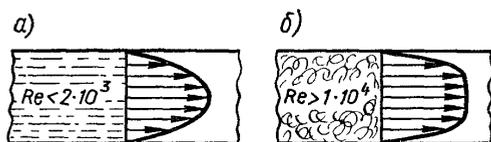


Рис. 6.2.

При ламинарном течении жидкости встречаются два режима неизотермного движения: вязкостный и вязкостно-гравитационный. Законы для этих режимов различны.

Вязкостный режим соответствует течению вязких жидкостей при отсутствии естественной конвекции. При этом режиме передача теплоты к стенкам канала (и наоборот) осуществляется только теплопроводностью.

Вязкостно-гравитационный режим имеет место тогда, когда вынужденное течение жидкости сопровождается и естественной конвекцией. При

этом режиме теплота будет передаваться не только теплопроводностью, но и конвекцией.

При вязкостном режиме распределение скоростей по сечению не будет чисто параболическим, так как с изменением температуры по сечению изменяется и вязкость. При этом важно отметить, что распределение скоростей зависит от направления теплового потока. При нагревании жидкости ее температура у стенки выше температуры основного потока, а вязкость меньше; при охлаждении процессы протекают в обратном направлении. Следовательно, при нагревании жидкости скорости у стенки больше, чем при охлаждении, и теплоотдача выше.

При вязкостно-гравитационном режиме имеет большое значение направление свободной конвекции и вынужденного движения. Они могут совпадать, могут быть противоположны друг другу и быть взаимно перпендикулярными, что наблюдается в горизонтальных трубах.

При совпадении движений естественной и вынужденной конвекции скорости жидкости у стенки возрастают и теплоотдача увеличивается. При противоположном направлении движений вынужденной и естественной конвекции скорости у стенки уменьшаются и теплоотдача падает, но иногда встречаются случаи, когда у стенки образуется вихревое движение, что может вызвать увеличение теплоотдачи.

При взаимно перпендикулярном движении естественной и вынужденной конвекции вследствие лучшего перемешивания жидкости теплоотдача увеличивается.

Таким образом, в неизотермных условиях строго ламинарного режима может не быть. Аналитическое исследование теплоотдачи при ламинарном режиме до сих пор не нашло своего окончательного разрешения и для определения коэффициента теплоотдачи пользуются эмпирическими формулами.

При вязкостном режиме рекомендуется определять средний коэффициент теплоотдачи в прямых гладких трубах по формуле

$$Nu_{ж,д} = 0,15 Re_{ж,д}^{0,33} \cdot Pr_{ж}^{0,43} (Pr_{ж}/Pr_{см})^{0,25}. \quad (6.6)$$

Для вязкостно-гравитационного режима рекомендуются приближенные расчеты среднего коэффициента теплоотдачи в прямых гладких трубах производить по формуле

$$Nu_{ж,д} = 0,15 Re_{ж,д}^{0,33} \cdot Pr_{ж}^{0,43} \cdot Gr_{ж,д}^{0,1} (Pr_{ж}/Pr_{см})^{0,25}. \quad (6.7)$$

Для воздуха эта формула упрощается и принимает вид

$$Nu_{ж,d} = 0,13 Re_{ж,d}^{0,33} \cdot Gr_{ж}^{0,1} \quad (6.8)$$

По этим уравнениям определяется число Нуссельта, а по нему – коэффициент теплоотдачи $\bar{a} = \bar{Nu}l / d$, где за определяющую температуру принята средняя температура жидкости: за определяющую скорость – средняя скорость жидкости в трубе; за определяющий размер – диаметр круглой трубы или эквивалентный диаметр трубы любой формы. Эти формулы дают среднее значение коэффициента теплоотдачи при $ld > 50$. Они применимы для любой жидкости и наиболее полно учитывают влияние естественной конвекции и направление теплового потока. Последнее учитывается введением эмпирического множителя из отношения чисел Pr жидкости и стенки в степени 0,25.

Для воздуха в двухатомных газов число Прандтля практически не зависит от температуры, а поэтому отношение $Pr_{ж} / Pr_{ст} = 1$.

Для труб, имеющих длину $l < 50 d$, следует значение α из формул (6.6), (6.7) и (6.8) умножить на средний поправочный коэффициент \bar{e}_l (табл. 6.1).

Таблица 6.1

Значение \bar{e}_l при ламинарном режиме.

l/d	1	4	5	10	15	20	30	40	50
\bar{e}_l	1,9	1,7	1,44	1,28	1,18	1,13	1,05	1,02	1,0

6.3 Теплообмен при турбулентном течении жидкости в трубах

При турбулентном движении жидкости, в связи с более сложным строением потока, распределение скоростей описать одним уравнением не удастся. Почти все сечение трубы заполнено турбулентным потоком и только у самой стенки образуется ламинарный поделой, представляющий основное термическое сопротивление. При стабилизированном турбулентном потоке распределение скоростей по сечению имеет вид усеченной параболы, указанной на рис. 6.2, б. Наиболее резко скорость потока изменяется вблизи стенки в пределах пограничного слоя, а в средней части сечения – полого. Максимальная скорость потока наблюдается на оси трубы. В практических расчетах пользуются средними скоростями

$$\bar{w} = V / F ,$$

где V – секундный объем жидкости, $\text{м}^3/\text{сек}$;

F – площадь поперечного сечения трубы, м^2 .

При турбулентном режиме отношение средней скорости к максимальной является функцией числа Re

$$\bar{w} / w_{\text{макс}} = f(Re) \approx 0,8 - 0,9 .$$

Отмеченные закономерности турбулентного течения жидкости справедливы только при изотермном течении.

При турбулентном потоке жидкость весьма интенсивно перемешивается и естественная конвекция практически не оказывает влияния на теплоотдачу. Поэтому из совокупности определяющих чисел подобия может быть исключено число Грасгофа. Температура жидкости по сечению ядра практически постоянна. При нагревании жидкости интенсивность теплоотдачи выше, чем при охлаждении жидкости. Эта зависимость также учитывается отношением

$$(Pr_{\text{жс}} / Pr_{\text{см}})^{0,25} .$$

Для определения среднего коэффициента теплоотдачи при развитом турбулентном движении ($Re_{\text{жс},d} > 10^4$), когда $l/d > 50$, рекомендуется следующее уравнение подобия

$$Nu_{\text{жс},d} = 0,021 Re_{\text{жс},d}^{0,8} \cdot Pr_{\text{жс}}^{0,43} (Pr_{\text{жс}} / Pr_{\text{см}})^{0,25} . \quad (6.9)$$

Для воздуха (при $Pr \approx 0,7$) эта формула упрощается

$$Nu_{\text{жс},d} = 0,018 Re_{\text{жс},d}^{0,8} . \quad (6.10)$$

За определяющую температуру принята средняя температура потока; за определяющий размер принят диаметр круглой трубы или эквивалентный диаметр трубы любой формы. Формулы применимы в пределах

$$Re_{\text{жс},d} = 1 \cdot 10^4 - 5 \cdot 10^6 \text{ и } Pr_{\text{жс}} = 0,6 - 2500 .$$

Для труб, имеющих $l/d < 50$, коэффициент теплоотдачи выше, поэтому значение $\bar{\alpha}$ из формул (6.9) и (6.10) следует умножить на средний поправочный коэффициент \bar{e}_l ; (табл. 6.2).

Таблица 6.2

Значение \bar{e}_l при турбулентном режиме.

l/d	\bar{e}_l при				
	Re=1·104	Re=2·104	Re=5·104	Re=1·105	Re=1·106
1	1,65	1,51	1,34	1,28	1,14
2	1,50	1,40	1,27	1,22	1,11
5	1,34	1,27	1,18	1,15	1,08
10	1,23	1,18	1,13	1,10	1,05
15	1,17	1,13	1,10	1,08	1,04
20	1,13	1,10	1,08	1,06	1,03
30	1,07	1,05	1,04	1,03	1,02
40	1,03	1,02	1,02	1,02	1,01
50	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

6.4 Теплообмен при переходном режиме

Переходный режим в каналах наблюдается при $Re = 2 \cdot 10^3 - 10^4$. Теплоотдача при этом режиме зависит от очень многих величин, трудно поддающихся учету, и поэтому не может быть описан одним уравнением подобия. Приведенные выше уравнения для ламинарного и турбулентного режимов нельзя распространять на область переходного режима.

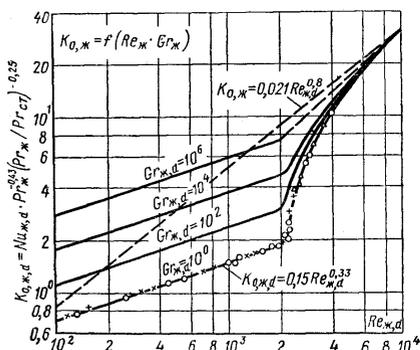


Рис. 6.3.

течения ($Re \approx 10^4$) все кривые сливаются в одну линию.

На рис. 6.3 представлен ход кривых комплекса K_0 в переходной области от числа Re . Как видно из рисунка, в области переходного режима опытные точки не объединяются единой зависимостью. С увеличением Re теплоотдача резко возрастает, причем существенное влияние на теплообмен оказывает естественная конвекция, величину которой характеризует число Грасгофа. Чем больше число Грасгофа, тем больше величина комплекса K_0 и, следовательно, коэффициента теплоотдачи α . При развитии турбулентного

В связи с тем, что до сих пор удовлетворительного метода расчета теплообмена для переходной области не имеется, определение коэффициента теплоотдачи может быть произведено только приближенно с помощью уравнения подобия

$$Nu_{ж,д} = K_0 \cdot Pr_{ж}^{0,43} (Pr_{ж} / Pr_{ст})^{0,25}.$$

Максимальные значения комплекса $K_{0,макс}$ можно получить по "уравнению для турбулентного течения в трубах, а минимальные $K_{0,мин}$ – непосредственно из графика (без учета влияния естественной конвекции).

6.5 Теплообмен при вынужденном движении жидкости вдоль пластины

Если плоская поверхность пластины омывается безграничным потоком с равномерным распределением скоростей, то, начиная от передней кромки пластины, на ней образуется гидродинамический пограничный слой. В последнем вследствие трения скорость жидкости изменяется от скорости, равной скорости невозмущенного потока, до нуля. Течение жидкости в пограничном слое может быть как ламинарным, так и турбулентным (рис. 6.2).

Опыты показывают, что переход от ламинарного режима течения к турбулентному происходит не мгновенно, а постепенно на некотором участке, течение на котором называется *переходным*.

О режиме течения в пограничном слое судят по величине числа Рейнольдса. Так, ламинарный режим течения в пограничном слое имеет место в изотермических потоках при $Re_{ж,л}^* < 5 \cdot 10^5$ (индексы «ж» и «л» обозначают, что величины Re берутся по температуре жидкости и длине пластины по направлению потока), а в неізотермических – при $Re_{ж,л} < 4 \cdot 10^4$ и разрушение ламинарного слоя зависит от степени турбулентности набегающего потока. При наличии разности температур между потоком жидкости и пластиной у поверхности последней кроме гидродинамического образуется также и тепловой пограничный слой. В пределах теплового пограничного слоя температура жидкости изменяется от температуры потока вдали от пластины до температуры, равной температуре поверхности пластины.

Анализ опытных данных показывает, что коэффициент теплоотдачи зависит не только от изменения характера течения жидкости (ламинарного или турбулентного), но и от рода жидкости, ее температуры, температурного напора и направления теплового потока, являющихся функцией температуры. Особенное значение имеет изменение вязкости жидкости в пограничном слое. Кроме того, при малых скоростях течения жидкости большое влияние на теплоотдачу оказывает естественная конвекция. В связи с тем, что влияние всех этих факторов на теплоотдачу в настоящее время в достаточной степени не выявлено, для определения среднего коэффициента теплоотдачи пластины, омываемой продоль-

ным потоком жидкости при ламинарном режиме в пограничном слое, можно рекомендовать следующие приближенные формулы при значениях чисел $Re < 4 \cdot 10^4$

$$\bar{Nu}_{ж,л} = 0,66 Re_{ж,л}^{0,5} \cdot Pr_{ж}^{0,43} (Pr_{ж} / Pr_{ст})^{0,25}. \quad (6.11)$$

Для воздуха при $Re < 4 \cdot 10^4$ формула упрощается

$$\bar{Nu}_{ж,л} = 0,66 Re_{ж,л}^{0,5}. \quad (6.12)$$

В этих формулах за определяющую температуру принята температура набегающего потока ($Pr_{ст}$ берется по температуре стенки); за определяющую скорость – скорость набегающего потока; за определяющий размер – длина пластины по направлению потока. Влияние естественной конвекции на теплоотдачу в этих формулах не учитывается.

При турбулентном гидродинамическом пограничном слое у поверхности пластины образуется тонкий слой ламинарно текущей жидкости, называемый ламинарным подслоем, в котором происходит основное изменение скорости потока. Также в ламинарном подслое происходят почти все изменения температуры текущей жидкости, т.е. ламинарный подслой представляет главное гидродинамическое и термическое сопротивление.

В настоящее время расчет конвективной теплоотдачи обычно производят по экспериментальным формулам. Для определения среднего коэффициента теплоотдачи капельных жидкостей при турбулентном пограничном слое у поверхности пластины рекомендуется при значениях критерия $Re_{ж,л} > 4 \cdot 10^4$ следующее уравнение

$$\bar{Nu}_{ж,л} = 0,037 Re_{ж,л}^{0,8} \cdot Pr_{ж}^{0,43} (Pr_{ж} / Pr_{ст})^{0,25}. \quad (6.13)$$

Для воздуха при $Pr \approx 0,7 = \text{const}$ уравнение упрощается и принимает вид

$$\bar{Nu}_{ж,л} = 0,032 Re_{ж,л}^{0,8}. \quad (6.14)$$

За определяющую температуру принята температура жидкости вдали от пластины; за определяющий размер берется длина пластины по направлению потока.

Опыты показывают, что при развитом турбулентном течении жидкости теплоотдача не зависит от числа Gr и, следовательно, в передаче всего количества теплоты принимает участие не естественная, а вынужденная конвекция.

6.6 Теплообмен при поперечном омывании одиночной трубы

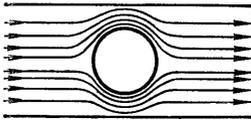


Рис. 6.4.

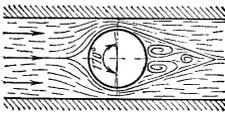


Рис. 6.5.

Процесс теплоотдачи при поперечном потоке жидкости, омывающей одиночную круглую трубу, характеризуется рядом особенностей. Плавное, безотрывное омывание поверхности круглой трубы наблюдается только при $Re < 5$ (рис. 6.4). При больших значениях Re условия омывания лобовой и кормовой половин трубы совершенно различны (рис. 6.5). Ламинарный пограничный слой, образующийся в лобовой части трубы около вертикального диаметра, отрывается от ее поверхности и в кормовой части образуются два симметричных вихря. Только 45—47% или при углах $(\varphi = 80 - 85^\circ)$, считая от лобовой точки, поверхность трубы омывается потоком жидкости безотрывно, вся остальная ее часть находится в вихревой зоне. Чем больше скорость потока, тем при больших углах φ происходит отрыв ламинарного пограничного слоя. При больших значениях числа Re ламинарный пограничный слой переходит в турбулентный, а отрыв слоя происходит при $\varphi = 120 - 130^\circ$. Это смещение приводит к уменьшению вихревой зоны в кормовой части трубы и обтекание ее улучшается. Турбулентный пограничный слой появляется при значительных числах $Re = 1 \cdot 10^5 - 4 \cdot 10^5$. На появление турбулентного пограничного слоя большое влияние оказывает начальная турбулентность потока; чем она больше, тем при меньших значениях числа Re появится турбулентный пограничный слой. Такая своеобразная картина движения жидкости при поперечном обтекании одиночной трубы в сильной мере отражается на коэффициенте теплоотдачи по ее окружности.

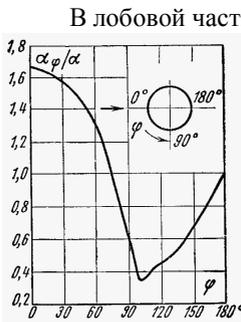


Рис. 6.6.

В лобовой части трубы (при $\varphi = 0$) коэффициент теплоотдачи имеет наибольшее значение, так как пограничный слой имеет наименьшую толщину. По мере движения жидкости вдоль поверхности толщина пограничного слоя увеличивается и достигает максимального значения почти у экватора, что примерно соответствует месту отрыва пограничного слоя (рис. 6.6). Благодаря увеличению толщины пограничного слоя коэффициент теплоотдачи уменьшается и у экватора достигает наименьшего значения. За экватором кормовая часть цилиндра омывается жидкостью, имеющей сложный вихревой характер движения, при этом происходит разрушение пограничного слоя, толщина его уменьшается, а коэффициент теплоотдачи увеличивается, достигая максимального значения при $\varphi = 180^\circ$, и может сравняться с тепло-

отдачей в лобовой части трубы. Описанная картина движения жидкости справедлива для значений чисел Рейнольдса $Re = 5-2 \cdot 10^5$.

Из изложенного следует, что теплоотдача по окружности одиночной трубы при поперечном обтекании тесно связана с характером смывания ее поверхности, зависит от скорости и направления потока жидкости, от температуры и диаметра трубы, от направления теплового потока, от внешних тел, изменяющих степень турбулизации потока, и т. д.

В результате экспериментальных исследований были получены уравнения подобия, позволяющие определить средний коэффициент теплоотдачи по окружности одиночной трубы

$$\text{при } Re_{ж,д} = 5-1 \cdot 10^3$$

$$\bar{Nu}_{ж,д} = 0,5 Re_{ж,д}^{0,5} \cdot Pr_{ж}^{0,38} (Pr_{ж} / Pr_{см})^{0,25}; \quad (6.15)$$

для воздуха

$$\bar{Nu}_{ж,д} = 0,43 Re_{ж,д}^{0,5} \cdot (6.16)$$

$$\text{При } Re_{ж,д} = 1 \cdot 10^3-2 \cdot 10^5$$

$$\bar{Nu}_{ж,д} = 0,25 Re_{ж,д}^{0,6} \cdot Pr_{ж}^{0,38} (Pr_{ж} / Pr_{см})^{0,25}; \quad (6.17)$$

для воздуха

$$\bar{Nu}_{ж,д} = 0,216 Re_{ж,д}^{0,6} \cdot (6.18)$$

При вычислении чисел подобия за определяющий линейный размер принят внешний диаметр трубы, за определяющую температуру – средняя температура жидкости. Скорость отнесена к самому узкому сечению канала. Приведенные формулы справедливы для цилиндра, который располагается перпендикулярно направлению потока. Если угол атаки $\psi < 90^\circ$, то коэффициент теплоотдачи для $\psi = 90^\circ$ нужно умножить на поправочный коэффициент e_y , взятый из табл. 6.3 и $\bar{a}_y = e_y \bar{a}_{90}$.

Таблица 6.3

Значение e_y для одиночной трубы

ψ , град	90	80	70	60	50	40	30	20	10
e_y	1	1	0,98	0,95	0,87	0,77	0,67	0,6	0,55

6.7 Теплообмен при поперечном омывании пучков труб

Сложная гидродинамическая картина омывания одиночной трубы делается еще более сложной при омывании пучка круглых труб. Теплообменные аппараты, собирающиеся из пучка круглых труб и омываемые поперечным потоком жидкости, имеют в технике большое распространение. Применяются в основном два вида расположения труб в пучках: коридорный (рис. 6.7, а) и шахматный (рис. 6.7, б).

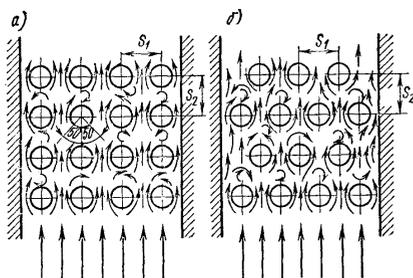


Рис. 6.7.

Характеристиками пучка труб считаются: внешний диаметр, количество рядов труб по движению жидкости и относительные шаги (отношение расстояния между осями труб по ширине пучка к внешнему диаметру труб – s_1/d и отношение расстояния между осями двух соседних рядов труб по направлению движения жидкости к внешнему диаметру труб – s_2/d). От расположения труб в значительной степени зависят характер движения жидкости, омывание труб каждого ряда и в целом теплообмен в пучке.

При этом если в канале было турбулентное движение жидкости, то оно будет турбулентным и в пучке труб, причем степень турбулизации будет возрастать от ряда к ряду, так как пучок труб является очень хорошим турбулирующим устройством. Если в канале перед пучком режим течения был ламинарным, то в зависимости от числа Re в пучке труб может быть как ламинарное, так и турбулентное течение жидкости.

При малых значениях числа $Re < 1 \cdot 10^3$ ламинарный режим течения может сохраниться и в пучке труб. В теплообменных аппаратах, как правило, встречается турбулентное течение жидкости. Однако и при турбулентном течении жидкости теплообмен в пучках определяется различными законами. Изменение законов теплоотдачи связано с появлением на трубах пучка турбулентного пограничного слоя, который может появиться при $Re \approx 1 \cdot 10^5$.

При $Re = 1 \cdot 10^5$ лобовая часть трубы омывается ламинарным пограничным слоем, а кормовая находится в вихревой зоне, при этом в межтрубном пространстве движения жидкости будет турбулентным. Такой режим называют *смешанным* режимом движения жидкости. В настоящее время наиболее изученным является именно этот режим, который соответствует значениям числа $Re = 1 \cdot 10^3 - 1 \cdot 10^5$. Рассмотрим его особенности. Омывание трубок первого ряда, независимо от расположения труб в пучке, практически не отличается от омывания одиночной трубы и зависит только от начальной турбулентности потока. Характер омывания следующих рядов труб в обоих пучках изменяется.

При коридорном расположении трубы любого ряда затеняются соответственными трубами предыдущего ряда, что ухудшает омывание лобовой части и большая часть поверхности трубы находится в слабой вихревой зоне. При шахматном расположении труб загораживания одних труб другими не происходит. Вследствие этого коэффициент теплоотдачи в шахматных пучках при одинаковых условиях выше, чем в коридорных.

На рис. 6.8 а и б показано изменение локального коэффициента теплоотдачи по окружности трубы в зависимости от угла φ для первого и последующих рядов семирядного коридорного и шахматного пучков. По оси ординат отложены относительные значения коэффициента теплоотдачи a_j / \bar{a} , а по оси абсцисс – угол φ , отсчитываемый от лобовой точки трубы. Здесь \bar{a} – среднее значение коэффициента теплоотдачи по окружности труб различных рядов, а a_j его локальное значение.

Из рассмотрения кривых (см. рис. 6.8, а и б) следует, что коэффициент теплоотдачи a_j для любого ряда шахматного расположения труб в лобовой части (при $\varphi=0$) получает максимальное значение и изменение его мало отличается от изменения коэффициента теплоотдачи для одиночной трубы. Такое же изменение коэффициента теплоотдачи имеет место и для первого ряда коридорного пучка.

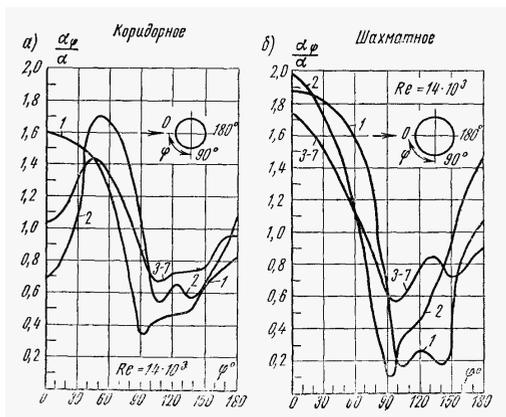


Рис. 6.8.

Для трубок второго и следующих рядов коридорного расположения получается два максимума теплоотдачи при углах α_j около $50 - 60^\circ$ к направлению потока. Из этого следует, что теплоотдача как в лобовой, так и в кормовой части трубок будет меньшей по сравнению с теплоотдачей одиночной трубы. При любом расположении труб каждый ряд вызывает дополнительную турбулизацию потока. Поэтому коэффициент теплоотдачи для труб второго ряда выше, чем для первого, а для третьего ряда выше, чем для второго. Начиная с третьего ряда поток жидкости стабилизируется и коэффициент теплоотдачи для всех последующих рядов остается величиной постоянной.

Если теплоотдачу третьего ряда принять за 100%, то теплоотдача первого ряда коридорных и шахматных пучков составляет лишь 60%. Теплоотдача второго ряда коридорного пучка составляет 90%, а шахматного – 70%. В целом теплоотдача в шахматных пучках за счет лучшей турбулизации потока выше, чем в коридорных. Кроме того, теплоотдача в пучках зависит от расстояния между трубами. Эта зависимость учитывается поправочным коэффициентом e_s , представляющего собой влияние относительных шагов.

Для глубинных рядов коридорного пучка

$$e_s = (s_2 / d)^{-0,15},$$

для шахматного

$$\text{при } s_1/s_2 < 2 \quad e_s = (s_1 / s_2)^{0,166},$$

$$\text{при } s_1/s_2 \geq 2 \quad e_s = 1,12.$$

При расчете теплообменных аппаратов и определении среднего коэффициента теплоотдачи третьего ряда пучка труб при смешанном режиме ($Re_{ж,д} \approx 1 \cdot 10^3 - 1 \cdot 10^5$) применяются следующие уравнения:

при коридорном расположении труб

$$\bar{Nu}_{ж,д} = 0,26 Re_{ж,д}^{0,65} \cdot Pr_{ж}^{0,33} (Pr_{ж}/Pr_{ст})^{0,25} \cdot e_s. \quad (6.19)$$

при шахматном расположении труб

$$\bar{Nu}_{ж,д} = 0,41 Re_{ж,д}^{0,6} \cdot Pr_{ж}^{0,33} (Pr_{ж}/Pr_{ст})^{0,25} \cdot e_s. \quad (6.20)$$

При вычислении чисел подобия за определяющую температуру принята средняя температура жидкости, за определяющую скорость – скорость жидко-

сти в самом узком сечении ряда, за определяющий размер – диаметр трубы. Формулы справедливы для любых капельных жидкостей и газов.

Значение коэффициента теплоотдачи для трубок первого ряда определяется путем умножения коэффициента теплоотдачи для третьего ряда на поправочный коэффициент $e_1 = 0,6$; для трубок второго ряда в шахматных пучках – на $e_2 = 0,7$, а в коридорных – на $e_2 = 0,9$.

Среднее значение коэффициента теплоотдачи для всего пучка в целом определяется по формуле осреднения

$$\bar{a} = \frac{\bar{a}_1 F_1 + \bar{a}_2 F_2 + \dots + \bar{a}_n F_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n}, \quad (6.21)$$

где $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ – средние коэффициенты теплоотдачи в отдельных рядах труб;

F_1, F_2, \dots, F_n – поверхности нагрева каждого ряда.

Если пучок труб омывается вынужденным потоком жидкости под углом $\psi < 90^\circ$, то коэффициент теплоотдачи для пучка труб при $\psi = 90^\circ$ необходимо умножить на поправочный коэффициент e_y , взятый из табл. 6.4, тогда

$$\bar{a}_y = e_y \cdot \bar{a}_{90}.$$

Таблица 6.4

Значение поправочного коэффициента e_y для пучков

ψ	90	80	70	60	50	40	30	20	10
e_y	1,0	1,0	0,98	0,94	0,88	0,78	0,67	0,52	0,42

6.8 Теплообмен при свободном движении жидкости

Свободное движение или конвективный теплообмен в свободном потоке возникает в связи с изменением плотности жидкости от нагревания. Свободная конвекция имеет место у нагретых стен печей, трубопроводов, у батарей центрального отопления, в холодильниках и др. Этот вид теплообмена играет большую роль как в промышленности, так и в быту. Свободный теплообмен возникает в неравномерно нагретом газе или жидкости, находящихся как в ограниченном, так и в неограниченном пространстве. Если тело имеет более высокую температуру, чем окружающая среда, то слои жидкости, нагреваясь от тела,

становятся легче и под действием возникающей подъемной силы поднимаются вверх, а на их место поступают из окружающего пространства более холодные слои. Поэтому и возникает свободное движение.

Рассмотрим свободный теплообмен в неограниченном пространстве у вертикальной плиты или трубы.

Возникающее свободное движение жидкости у вертикальных поверхностей может быть как ламинарным, так и турбулентным. Характер движения жидкости в основном зависит от температурного напора $\Delta t = t_{cm} - t_{жс}$, где t_{cm} – температура нагретой поверхности, $t_{жс}$ – температура неподвижной жидкости вдали от поверхности. При малых значениях температурного напора вдоль всей поверхности наблюдается ламинарное движение жидкости. При больших температурных напорах преобладает турбулентный режим движения. В развитии свободного движения форма тела играет второстепенную роль. Основное значение для свободного движения жидкости имеет длина поверхности, вдоль которой происходит теплообмен.

Для определения средних коэффициентов теплоотдачи при свободном ламинарном движении жидкости вдоль вертикальных стенок можно использовать следующие уравнения

при $t_{cm} = const$

$$\bar{Nu}_l = 0,63(Gr_l \cdot Pr)^{0,25}; \quad (6.22)$$

при $q_{cm} = const$

$$\bar{Nu}_{жс,l} = 0,75(Gr_{жс,l} \cdot Pr_{жс})^{0,25} (Pr_{жс} / P_{cm})^{0,25}. \quad (6.23)$$

В этих формулах за определяющую температуру принята температура жидкости вдали от нагретой поверхности, за определяющий размер – длина поверхности, отсчитываемая от начала теплообмена. Формулы получены для теплоносителей с числом Прандтля от 0,7 до $3 \cdot 10^3$ и ими следует пользоваться при $10^3 < Gr_{жс,l} \cdot Pr_{жс} < 10^9$.

Для определения средних коэффициентов теплоотдачи при свободном турбулентном движении жидкости вдоль вертикальной стенки, которое наступает при числах $Gr_{жс,l} \cdot Pr_{жс} > 6 \cdot 10^6$, предложена следующая формула

$$\bar{Nu}_{жс,l} = 0,15(Gr_{жс,l} \cdot Pr_{жс})^{0,33} (Pr_{жс} / P_{cm})^{0,25}. \quad (6.24)$$

Определяющая температура и линейный размер те же самые, что и в формуле (6.23).

Если $10^9 < Gr_{ж,л} \cdot Pr_{жс} < 6 \cdot 10^{10}$, то вдоль вертикальной пластины имеет место переходный режим свободного движения жидкости. Переходный режим отличается неустойчивостью как процесса течения жидкости, так и теплоотдачи. Характерная картина свободного движения и изменение коэффициента теплоотдачи вдоль вертикальной стенки показаны на рис. 6.9.

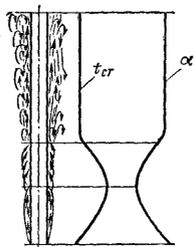


Рис. 6.9.

У нижней части стенки в поднимающемся с небольшой скоростью воздухе (жидкости) наблюдается ламинарное движение с постепенно увеличивающейся толщиной ламинарного пограничного слоя. На некотором расстоянии от нижнего конца стенки по ее высоте ламинарный пограничный слой начинает разрушаться, возникает локонообразное движение жидкости, которое постепенно усиливается и переходит в развитое турбулентное движение с ламинарным подслоем в непосредственной близости к поверхности трубы. В соответствии с изменением толщины пограничного слоя и характера движения жидкости у поверхности изменяется и коэффициент теплоотдачи. По мере увеличения ламинарного пограничного слоя, считая от нижнего конца стенки, коэффициент теплоотдачи уменьшается. Минимального значения коэффициент теплоотдачи достигает там, где толщина ламинарного пограничного слоя будет максимальной. В области локонообразного движения коэффициент теплоотдачи постепенно возрастает и принимает наибольшее постоянное значение в области развитого турбулентного движения жидкости. На рис. 6.9 показана зависимость α только от высоты стенки. Переменность физических параметров жидкости и температурного напора по высоте может привести к изменению коэффициента теплоотдачи. В среднем теплоотдача при переходном режиме возрастает от величины, соответствующей ламинарному течению, до величины, соответствующей турбулентному движению жидкости. Наименьшее и наибольшее значения коэффициента теплоотдачи в переходной области можно определить соответственно по формулам (6.24) и (6.23).

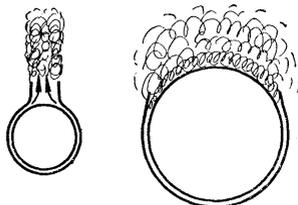


Рис. 6.10.

На рис. 6.10 показан характер свободного движения жидкости около горячих горизонтальных труб различных диаметров. У труб малого диаметра восходящий поток сохраняет ламинарный режим даже вдали от трубы. При большом диаметре переход в турбулентный режим может происходить в пределах поверхности самой трубы.

Для определения средних коэффициентов теплоотдачи при свободном ламинарном движении жидкости около горизонтальных труб может быть рекомендована формула

$$\bar{N}u_{ж,л} = 0,5 \cdot (Gr_{ж,д} \cdot Pr_{ж})^{0,25} (Pr_{ж} / Pr_{ст})^{0,25}. \quad (6.25)$$

В этой формуле за определяющую температуру принята температура капельной жидкости или газа вдали от трубы, а за определяющий размер – диаметр трубы.

Около горизонтальных нагретых поверхностей движение жидкости имеет особый характер и зависит от положения и размеров плит. Однако, для приближенных определений коэффициента теплоотдачи горизонтальных поверхностей можно рекомендовать формулу (6.25). При этом если нагретая поверхность обращена кверху, то коэффициент теплоотдачи, вычисленный по формуле (6.25), увеличивается на 30%. Если поверхность обращена книзу, то коэффициент теплоотдачи уменьшается на 30%. За определяющий размер в этих случаях берется меньшая сторона плиты.

В ограниченном пространстве явления нагревания и охлаждения жидкости протекают вблизи друг от друга и разделить их невозможно; в этом случае весь процесс надо рассматривать в целом. Вследствие ограниченности пространства и наличия восходящих и нисходящих потоков здесь усложняются условия движения. Они зависят от формы и геометрических размеров, от рода жидкости и температурного напора.

В вертикальных каналах и щелях в зависимости от их толщины δ циркуляция жидкости может протекать двояко. Если толщина δ достаточно велика, то восходящий и нисходящий потоки протекают без взаимных помех (рис. 6.11, а) и имеют такой же характер, как и вдоль вертикальной поверхности в неограниченном пространстве. Если же толщина δ мала, то вследствие взаимных помех внутри возникают циркуляционные контуры (рис. 6.11, б).

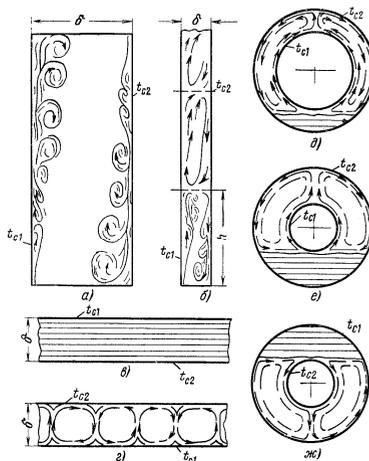


Рис. 6.11. Характер естественной циркуляции жидкости в ограниченном замкнутом пространстве.

В горизонтальных щелях процесс определяется взаимным расположением нагретых и холодных поверхностей и расстоянием между ними. Если нагретая поверхность расположена сверху, то циркуляция совсем отсутствует (рис. 6.11, в). Если же нагретая поверхность расположена снизу, то имеются и восходящие и нисходящие потоки, которые между собой чередуются (рис. 6.11, з).

В шаровых и горизонтальных цилиндрических прослойках в зависимости от их толщины (или соотношения диаметров) циркуляция протекает по схемам рис. 6.11, д и е. Необходимо обратить внимание, что здесь циркуляция развивается лишь в зоне, лежащей выше нижней кромки нагретой поверхности. Ниже этой кромки жидкость остается в покое. Если же нагрета внешняя цилиндрическая поверхность, то циркуляция жидкости протекает по схеме рис. 6.11, ж и охватывает все пространство, расположенное ниже верхней кромки холодной поверхности.

Для облегчения расчета такой сложный процесс конвективного теплообмена принято рассматривать как элементарное явление теплопроводности, вводя при этом понятие эквивалентного коэффициента теплопроводности $\lambda_{э\kappa\upsilon}$. Если значение последнего разделить на коэффициент теплопроводности λ среды, то получим безразмерную величину $e_{\kappa} = I_{э\kappa\upsilon} / I$, которая характеризует собой влияние конвекции и называется *коэффициентом конвекции*.

Так как циркуляция жидкости обусловлена разностью плотностей нагретых и холодных частиц и определяется произведением $GrPr$, то и e_{κ} должно быть функцией того же аргумента, т. е.

$$e_{\kappa} = f(Gr_{жс} Pr_{жс}).$$

При вычислении чисел подобия независимо от формы прослойки за определяющий размер принята ее толщина δ , а за определяющую температуру — средняя температура жидкости $t_{жс} = 0,5 (t_{c1} + t_{c2})$.

При малых значениях аргумента $Gr_{жс} Pr_{жс} < 10$ значение функции $e_{\kappa} = 1$. Это означает, что при малых значениях $Gr_{жс} Pr_{жс}$ перенос теплоты обуславливается только теплопроводностью жидкости.

При значениях $10^3 < Gr_{жс} Pr_{жс} < 10^6$

$$e_{\kappa} = 0,105(Gr_{жс} Pr_{жс})^{0,3} \quad (6.26)$$

и при $10^6 < Gr_{жс} Pr_{жс} < 10^{10}$

$$e_{\kappa} = 0,40(Gr_{жс} Pr_{жс})^{0,2}. \quad (6.27)$$

Зная e_{κ} и $\lambda_{\text{экв}}$ плотность теплового потока через прослойку определится

$$q = \frac{l_{\text{экв}}}{d} (t_{c1} - t_{c2}). \quad (6.28)$$

7. ТЕПЛООБМЕН ПРИ ИЗМЕНЕНИИ АГРЕГАТНОГО СОСТОЯНИЯ ВЕЩЕСТВА

7.1 Теплообмен при кипении

Общие представления о процессе кипения. Кипением называют процесс образования пара внутри объема жидкости.

Для возникновения кипения всегда необходим некоторый перегрев жидкости, т. е. превышение температуры жидкости $t_{ж}$ относительно температуры насыщения t_c при заданном давлении p . Этот перегрев зависит от физических свойств жидкости, ее чистоты, давления, а также свойств граничных твердых поверхностей. Чем чище жидкость, тем более высоким оказывается начальный перегрев, необходимый для возникновения кипения. Известны опыты, в которых тщательно очищенные жидкости, лишенные растворенных газов, удавалось перегревать без вскипания на десятки градусов при нормальном давлении. Однако, в конце концов такая перегретая жидкость все же вскипает, причем кипение происходит крайне бурно, напоминая взрыв. Теплота перегрева жидкости расходуется на парообразование, жидкость быстро охлаждается до температуры насыщения. Высокий начальный перегрев, необходимый для вскипания чистой жидкости, объясняется затрудненностью самопроизвольного образования внутри жидкости начальных маленьких пузырьков пара (зародышей) из-за значительной энергии взаимного притяжения молекул в жидкости.

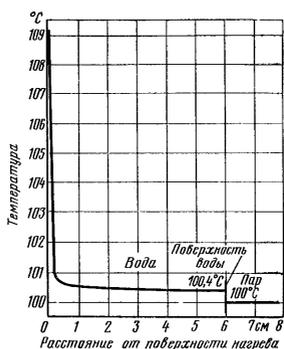


Рис. 7.1. Распределение температур в объеме жидкости ($t_c=109,1^{\circ}\text{C}$; $p_c=1\cdot 10^5$; $q=22500\text{Вт/м}^2$).

Начальный перегрев снижается в том случае, когда стенки сосуда, в котором происходит нагревание жидкости, имеют адсорбированный на поверхности газ, микрошероховатость, а также различные неоднородности и включения, понижающие молекулярное сцепление жидкости с поверхностью. При подводе теплоты через такую поверхность образование пузырьков наблюдается в отдельных точках поверхности, так называемых *центрах парообразования*. Таким образом, процесс кипения в этом случае начинается в слоях жидкости, контактирующих с поверхностью и имеющих одинаковую с ней температуру. Для практики этот вид кипения представляет наибольший интерес. Рассмотрим его основные характеристики.

По мере увеличения температуры поверхности нагрева t_c и соответственно температурного напора

$\Delta t = t_c - t_s$, число действующих центров парообразования растет, процесс кипения становится все более интенсивным. Паровые пузырьки периодически отрываются от поверхности и, всплывая к свободной поверхности, продолжают расти в объеме. Последнее объясняется тем, что температура в объеме кипящей жидкости, как показывают опытные данные, не равна температуре насыщения, а несколько превышает ее. Например, для воды при атмосферном давлении перегрев в объеме составляет $0,2 - 0,4^\circ\text{C}$ (рис. 7.1).

На рис. 7.2, а схематически показана картина пузырькового режима кипения жидкости. При повышении температурного напора Δt значительно возрастает поток теплоты, который отводится от поверхности нагрева к кипящей жидкости. Вся эта теплота в конечном счете расходуется на образование пара. Поэтому уравнение теплового баланса при кипении имеет вид

$$Q = rG'', \quad (7.1)$$

где Q – тепловой поток, Вт; r – теплота фазового перехода жидкости, Дж/кг;

G'' – количество пара, образующегося в единицу времени в результате кипения жидкости и отводимого от ее свободной поверхности, кг/с.

Тепловой поток Q при увеличении температурного напора Δt растет не беспредельно. При некотором значении Δt он достигает максимального значения, а при дальнейшем повышении Δt начинает уменьшаться. До момента достижения максимального теплового потока режим кипения называют *пузырьковым*. Максимальную тепловую нагрузку при пузырьковом кипении называют *первой критической плотностью теплового потока* и обозначают $q_{кр1}$.

Для воды при атмосферном давлении первая критическая плотность теплового потока составляет $q_{кр1} \approx 1,2 \cdot 10^6$ Вт/м²; соответствующее критическое значение температурного напора $\Delta t_{кр1} = 25 - 35^\circ\text{C}$.

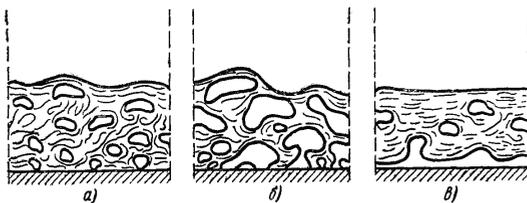


Рис. 7.2. Процесс кипения жидкости.

При больших значениях Δt наступает второй, *переходный* режим кипения (рис. 7.2, б). Он характеризуется тем, что как и на самой поверхности нагрева, так и вблизи нее пузырьки непрерывно сливаются между собой, образуются большие паровые полости. Из-за этого доступ жидкости к самой поверхности постепенно все более затрудняется. В отдельных местах поверхности возникают «сухие» пятна; их число и размеры непрерывно растут по мере увеличения температуры поверхности. Такие участки как бы выключаются из теплообмена, так как отвод теплоты непосредственно к пару происходит существенно менее интенсивно. Это и определяет резкое снижение теплового потока и коэффициента теплоотдачи в области переходного режима кипения.

Наконец, при некотором температурном напоре вся поверхность нагрева обволакивается сплошной пленкой пара, оттесняющей жидкость от поверхности. Так наступает третий, *пленочный* режим кипения (рис. 7.2, в). Перенос теплоты в режиме пленочного кипения от поверхности нагрева к жидкости осуществляется путем конвективного теплообмена и излучения через паровую пленку. По мере увеличения температурного напора все большая часть теплоты передается за счет излучения. Интенсивность теплообмена в режиме пленочного кипения достаточно низкая. Паровая пленка испытывает пульсации; пар, периодически накапливающийся в ней, отрывается в виде больших пузырей. В момент наступления пленочного кипения тепловая нагрузка, отводимая от поверхности, и соответственно количество образующегося пара имеют минимальные значения. Минимальное значение тепловой нагрузки при пленочном кипении называется *второй критической плотностью теплового потока* $q_{кр2}$. При атмосферном давлении для воды, кипящей на технических металлических поверхностях, момент начала пленочного кипения характеризуется температурным напором $\Delta t = t_c - t_s \approx 150^\circ\text{C}$, т. е. температура поверхности t_c составляет примерно 250°C .

Таким образом, при кипении жидкости на поверхности нагрева в зависимости от температурного напора $\Delta t = t_c - t_s$ могут наблюдаться три различных

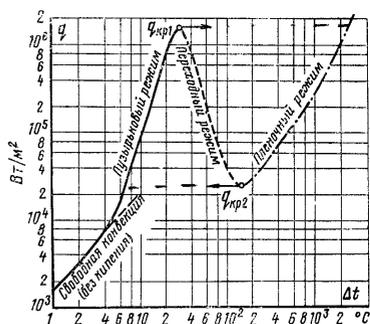


Рис. 7.3. Зависимость плотности теплового потока q от температурного напора Δt при кипении воды.

режима кипения. Общая картина изменения плотности теплового потока q , отводимого к кипящей жидкости, при увеличении температурного напора Δt показана в логарифмических координатах на рис. 7.3. Этот график относится к процессу кипения воды при атмосферном давлении. Такой же характер зависимости q от Δt имеет и для других жидкостей, кипящих в условиях свободного движения в большом объеме на металлических поверхностях нагрева: трубах, плитах и т. д.

Стационарное кипение в переходном режиме на практике может наблю-

даться в том случае, когда температура поверхности нагрева поддерживается неизменной за счет контакта этой поверхности с внешней стороны с другим теплоносителем, имеющим более высокую температуру и значительную интенсивность теплоотдачи. Такие условия подвода теплоты можно кратко характеризовать как условия обогрева при $t_c = \text{const}$. На практике, однако, часто встречаются также условия, когда к поверхности подводится фиксированный тепловой поток, т. е. $q = \text{const}$. Это характерно, например, для электрического обогрева поверхности, для обогрева за счет тепловыделения в результате ядерной реакции в атомном реакторе и приближенно в случае лучистого обогрева поверхности от источников с весьма высокой температурой. В условиях $q = \text{const}$ температура поверхности t_c и соответственно температурный напор Δt зависят от режима кипения жидкости. Оказывается, что при таких условиях подвода теплоты переходный режим стационарно существовать не может. Вследствие этого процесс кипения приобретает новые специфические черты, имеющие важное прикладное значение. Рассмотрим их подробнее. Для этого вновь обратимся к рис. 7.3. При постепенном повышении тепловой нагрузки q температурный напор Δt возрастает в соответствии с линией пузырькового режима кипения на рис. 7.3, и процесс развивается так же, как это было описано выше. Новые условия возникают тогда, когда подводимая плотность теплового потока достигает значения, которое соответствует первой критической плотности теплового потока $q_{кр1}$. Теперь при любом незначительном (даже случайном) повышении величины q возникает избыток между количеством подводимой к поверхности теплоты и той максимальной тепловой нагрузкой $q_{кр1}$, которая может быть отведена в кипящую жидкость. Этот избыток ($q - q_{кр1}$) вызывает увеличение температуры поверхности, т. е. начинается нестационарный разогрев материала стенки. Температура поверхности t_c оказывается более высокой по сравнению с $t_{c, кр1}$, на поверхности устанавливается переходный режим кипения, и отвод теплоты начинает снижаться. В итоге разность между подводимым и отводимым количеством теплоты быстро нарастает во времени. Соответственно увеличивается скорость разогрева поверхности. Развитие процесса приобретает кризисный характер. За доли секунды температура материала поверхности нагрева возрастает на сотни градусов, и лишь при условии, что стенка достаточно тугоплавкая, кризис заканчивается благополучно новым стационарным состоянием, отвечающим области пленочного кипения при весьма высокой температуре поверхности. На рис. 7.3 этот кризисный переход от пузырькового режима кипения к пленочному условно показан стрелкой как «перескок» с кривой пузырькового кипения на линию пленочного кипения при той же тепловой нагрузке $q_{кр1}$. Однако обычно кризис сопровождается расплавлением и разрушением поверхности нагрева (ее пережогом).

Вторая особенность состоит в том, что если произошел кризис и установился пленочный режим кипения (поверхность не разрушилась), то при снижении тепловой нагрузки пленочное кипение будет сохраняться, т. е. обратный процесс теперь будет происходить по линии пленочного кипения (рис. 7.3). Лишь при достижении $q_{кр2}$ жидкость начинает вновь в отдельных точках периодически достигать (смачивать) поверхность нагрева. Отвод теплоты растет и

превышает подвод теплоты, вследствие чего возникает быстрое охлаждение поверхности, которое также носит кризисный характер. Происходит быстрая смена режимов, и устанавливается стационарное пузырьковое кипение. Этот обратный переход (второй кризис) на рис. 7.3 также условно показан стрелкой как «перескок» с кривой пленочного кипения на линию пузырькового кипения при $q = q_{кр2}$.

Итак, в условиях фиксированного значения плотности теплового потока q , подводимого к поверхности нагрева, оба перехода от пузырькового к пленочному и обратно носят кризисный характер. Они происходят при критических плотностях теплового потока $q_{кр1}$ и $q_{кр2}$ соответственно. В этих условиях переходный режим кипения стационарно существовать не может, он является неустойчивым.

Отвод теплоты в режиме пузырькового кипения является одним из наиболее совершенных методов охлаждения поверхности нагрева. Он находит широкое применение, в атомных реакторах, при охлаждении реактивных двигателей, а также в ряде других технических устройств.

Теплообмен при пузырьковом кипении. Наблюдения показывают, что при увеличении температурного напора $\Delta t = t_c - t_s$, а также давления p на поверхности нагрева увеличивается число активных центров парообразования z . В итоге все большее количество пузырьков непрерывно возникает, растет и отрывается от поверхности нагрева. Вследствие этого увеличиваются турбулизация и перемешивание пристенного пограничного слоя жидкости. В процессе своего роста на поверхности нагрева пузырьки также интенсивно забирают теплоту из пограничного слоя. Все это способствует улучшению теплоотдачи. В целом процесс пузырькового кипения носит довольно хаотичный характер.

Исследования показывают, что на технических поверхностях нагрева число центров парообразования z зависит от материала, строения и микрошероховатости поверхности, наличия неоднородности состава поверхности и адсорбированного поверхностью газа (воздуха). Заметное влияние оказывают различные налеты, окисные пленки, а также любые другие включения, приводящие к понижению работы адгезии. *Под работой адгезии* понимают работу, которую необходимо затратить для отрыва жидкости от твердой поверхности на единице площади. Эта величина характеризует меру молекулярного сцепления жидкости с поверхностью и связана с явлением смачивания. Чем лучше жидкость смачивает данный участок поверхности, тем выше работа адгезии. Наблюдения показывают, что в реальных условиях центрами парообразования обычно служат отдельные элементы неровности и микрошероховатости поверхности (предпочтительно различные углубления и впадины), причем в первую очередь, по-видимому, те из них, для которых работа адгезии имеет наименьшее значение.

На условия образования паровых пузырьков большое влияние оказывает поверхностное натяжение на границе раздела жидкости и пара.

Напомним, что поверхностным натяжением называется сила, под действием которой свободная поверхность жидкости стремится сократиться; эта сила действует по касательной к поверхности. За единицу поверхностного натяжения принимают силу, приходящуюся на единицу длины произвольной линии на поверхности жидкости. Эта величина обозначается σ Н/м, и является физической характеристикой данного вещества. С увеличением температуры величина σ убывает и при критической температуре становится равной нулю.

Изменение поверхностного натяжения с температурой может быть определено по формуле Бачинского

$$s = c(r' - r'')^4, \quad (7.2)$$

где r' – плотность жидкости; r'' – плотность пара при температуре насыщения; c – коэффициент пропорциональности.

Вследствие поверхностного натяжения давление пара внутри пузырька p_n выше давления окружающей его жидкости $p_{жс}$. Их разность определяется уравнением Лапласа

$$\Delta p = p_n - p_{жс} = \frac{2s}{R}, \quad (7.3)$$

где σ – поверхностное натяжение; R – радиус пузырька (в общем случае – средний радиус кривизны поверхности раздела жидкости и пара).

Уравнение Лапласа выражает условие механического равновесия. Оно показывает, что поверхностное натяжение напоминает упругой оболочки «сжимает» пар в пузырьке, причем тем сильнее, чем меньше его радиус R .

Представление о порядке величин перепада давления Δp и абсолютного давления пара p_n внутри пузырька для воды при неизменном внешнем давлении $p_{жс} = 1,0 \cdot 10^5$ Па дает табл. 7.1, рассчитанная по уравнению (7.3).

Таблица 7.1

Значения Δp и $p_n \cdot 10^5$, Па, для воды

R, мм	Δp	p_n	R, мм	Δp	p_n
1,0	0,0012	1,0012	0,01	0,12	1,12
0,1	0,012	1,012	0,001	1,2	2,2

Приведенные цифры показывают, что при радиусе меньше нескольких десятков микрон давление пара внутри пузырька уже заметно превышает внешнее давление.

Зависимость давления пара в пузырьке от его размера накладывает особенности на условие теплового или термодинамического равновесия малых пу-

зырьков. Пар в пузырьке и жидкость на его поверхности находятся в равновесии, если поверхность жидкости имеет температуру, равную температуре насыщения при давлении пара в пузырьке, $t_s(p_n)$. Эта температура выше, чем температура насыщения при внешнем давлении в жидкости $t_s(p_{жс})$. Следовательно, для осуществления теплового равновесия жидкость вокруг пузырька должна быть перегрета на величину $t_s(p_n) - t_s(p_{жс})$.

В качестве примера рассмотрим два пузырька в воде при атмосферном давлении с радиусами, равными 0,01 и 0,001 мм соответственно. Давление пара в этих пузырьках приведено в табл. 7.1, оно составляет $1,12 \cdot 10^5$ и $2,2 \cdot 10^5$ Па. На линии насыщения воды этим давлениям соответствуют температуры насыщения 102,8 и 123, 3°C. Именно такие значения температуры должна иметь вода вокруг этих пузырьков для существования равновесия.

Следующая особенность заключается в том, что это равновесие оказывается *неустойчивым*. Если температура жидкости несколько превысит равновесное значение, то произойдет испарение части жидкости внутрь пузырьков и его радиус увеличится. При этом согласно уравнению Лапласа давление пара в пузырьке понизится. Это приведет к новому отклонению от равновесного состояния. Пузырек начнет неограниченно расти. Так же при незначительном понижении температуры жидкости часть пара сконденсируется размер пузырька уменьшится, давление пара в нем повысится. Это повлечет за собой дальнейшее отклонение от равновесных условий, теперь уже в другую сторону. В итоге пузырек полностью сконденсируется и исчезнет.

Следовательно, в перегретой жидкости не любые случайно возникшие маленькие пузырьки обладают способностью к дальнейшему росту, а только те, радиус которых превышает значение отвечающее рассмотренным выше условиям неустойчивого механического и теплового равновесия. Это *минимальное значение* радиуса пузырька $R_{мин}$ часто называют также *критическим радиусом* парового зародыша. Величина $R_{мин}$ зависит от степени перегрева жидкости, т. е. от разности температур $\Delta t = t_{жс} - t_s$, где t_s – температура насыщения при давлении в жидкости. Выражение для минимального радиуса парового пузырька можно получить из уравнения Лапласа

$$R_{мин} = \frac{2s}{\Delta p},$$

если учесть при этом, что разность давлений между паром и жидкостью для такого пузырька согласно условию теплового равновесия составляет

$$\Delta p = p_s(t_s + \Delta t) - p_s(t_s) \approx p'_s \Delta t,$$

где $p'_s = (\partial p / \partial t)_s$ – производная давления по температуре на линии насыщения.

Таким образом, имеем

$$R_{мин} = \frac{2\sigma}{p'_s \Delta t} \quad (7.4)$$

или с учетом зависимости давления насыщенного пара от кривизны поверхности раздела

$$R_{мин} = \frac{2\sigma}{p'_s \Delta t} \frac{r'}{r' - r''}, \quad (7.4a)$$

где производная p'_s представляет собой физическую характеристику данного вещества, она определяется уравнением Клапейрона-Клаузиуса

$$p'_s = \frac{r r' r''}{T_s (r' - r'')}, \quad (7.5)$$

т. е. выражается через другие физические постоянные: теплоту фазового перехода r , плотности пара ρ'' и жидкости ρ' и абсолютную температуру насыщения T_s .

Уравнение (7.4) показывает, что если в отдельных точках поверхности нагрева появляются паровые зародыши, то способность к дальнейшему самопроизвольному росту обладают лишь те из них, радиус кривизны которых превышает значение $R_{мин}$. Поскольку с ростом Δt величина $R_{мин}$ снижается, уравнение (7.4) объясняет экспериментально наблюдаемый факт увеличения числа центров парообразования z при повышении температуры поверхности.

Увеличение числа центров парообразования z с ростом давления также связано с уменьшением $R_{мин}$, ибо при повышении давления p'_s растет, а σ снижается. О порядке величины $R_{мин}$ дает представление следующий расчет. Для воды, кипящей при атмосферном давлении, поверхностное натяжение $\sigma = 5,87 \cdot 10^{-2}$ Н/м, производная $p'_s = 3,500$ Па/°С и температурный напор Δt изменяется в интервале от 5 до 25°С. Подставив эти значения в уравнение (7.4), найдем, что при $\Delta t = 5^{\circ}\text{C}$, $R_{мин} = 6,7$ мкм; при $\Delta t = 25^{\circ}\text{C}$, $R_{мин} = 1,3$ мкм.

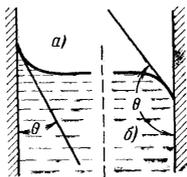


Рис. 7.4. Форма мениска и краевого угол θ при смачивании (а) и несмачивании (б) поверхности жидкостью.

После достижения пузырьком определенного размера он отрывается от поверхности. Отрывной размер определяется в основном взаимодействием сил тяжести, поверхностного натяжения и инерции. Последняя величина представляет собой динамическую реакцию, возникающую в жидкости вследствие быст-

рого роста пузырьков в размерах. Обычно эта сила препятствует отрыву пузырьков. Кроме того, характер развития и отрыва пузырьков в большой мере зависит от того, смачивает жидкость поверхность или не смачивает. Смачивающая способность жидкости характеризуется краевым углом θ , который образуется между стенкой и свободной поверхностью жидкости. Чем больше θ , тем хуже смачивающая способность жидкости. Принято считать, что при $\theta < 90^\circ$ (рис. 7.4, а), жидкость смачивает поверхность, а при $\theta > 90^\circ$ (рис. 7.4, б) – не смачивает. Значение краевого угла зависит от природы жидкости, материала, состояния и чистоты поверхности. Если кипящая жидкость смачивает поверхность нагрева, то паровые пузырьки имеют тонкую ножку и от поверхности отрываются легко (рис. 7.5, а). Если же жидкость не смачивает поверхность, то паровые пузырьки имеют широкую ножку (рис. 7.5, б) и отрываются по перешейку, или парообразование происходит по всей поверхности.

Обычные жидкости: вода, спирты, бензол, ацетон и др.– смачивают чистые металлические поверхности нагрева. Смачивающая способность воды значительно снижается, если металлическая поверхность покрыта жирной пленкой. Примером несмачивающей жидкости может служить ртуть ($\theta \approx 140^\circ$).

При кипении обычных жидкостей на металлических поверхностях нагрева средние отрывные диаметры пузырьков D_o при атмосферном давлении составляют примерно 1–2 мм.

При увеличении температурного напора (или теплового потока) постепенно начинает развиваться процесс слияния отдельных пузырьков с образованием больших вторичных пузырей и целых паровых «столбов». Около поверхности среднее объемное содержание пара возрастает до 60 – 80%. Однако, как показывают исследования, в очень тонком поверхностном слое у самой стенки по-прежнему преобладает жидкая фаза. Термическое сопротивление этого слоя в основном и определяет интенсивность теплоотдачи при развитом пузырьковом кипении. Эффективная толщина слоя по мере увеличения тепловой нагрузки снижается, что приводит к увеличению интенсивности теплоотдачи.

Коэффициент теплоотдачи α при кипении принято относить к температурному напору $\Delta t = t_c - t_s$

$$\alpha = \frac{q}{t_c - t_s}. \quad (7.6)$$

Экспериментальные данные показывают, что интенсивность теплоотдачи растет при увеличении плотности теплового потока и давления. Эта закономерность характерна для любых жидкостей, смачивающих поверхность нагрева.

Исследования показывают, что закономерность теплоотдачи при развитом пузырьковом кипении практически не зависит от размеров и формы теплоотдающей поверхности. Вместе с тем опыты обнаруживают, что интенсивность

теплообмена может меняться в зависимости от состояния, материала и чистоты поверхности нагрева. Влияние этих факторов на теплоотдачу проявляется в основном за счет изменения плотности центров парообразования. Улучшение теплоотдачи наблюдалось в ряде опытов при увеличении микрошероховатости металлической поверхности, а также при увеличении теплопроводности материала стенки.

При развитии кипения связь между a и q обычно может быть представлена в виде степенной зависимости с показателем степени около $2/3$

$$a = cq^{2/3} . (7.7)$$

Соответственно зависимость Δt от q определяется соотношением

$$\Delta t = \frac{1}{c} q^{2/3} , (7.8)$$

где c – коэффициент пропорциональности, значение которого зависит от рода жидкости давления, а также в некоторой степени от поверхностных условий. Так, для воды $c = \frac{3,4 p_s^{0,18}}{1 - 0,0045 p_s}$.

В целом приведенные данные показывают, что для процесса пузырькового кипения характерны высокая интенсивность теплоотдачи и возможность отвода с единицы поверхности весьма значительных потоков теплоты. Последние величины ограничены значением первой критической плотности теплового потока $q_{кр1}$.

Ограничение в процессе отвода теплоты объясняется тем, что при достижении определенной интенсивности парообразования ухудшаются условия подвода жидкости к отдельным участкам поверхности нагрева. Жидкая пленка на этих участках начинает периодически пересыхать. В итоге эффективная доля поверхности, участвующая в процессе отвода теплоты, уменьшается. Развитие такого процесса зависит от характера циркуляции жидкости и пара вблизи поверхности нагрева и интенсивности отвода паровых объемов от самой поверхности. Определенное влияние оказывают также условия смачивания, шероховатость и другие характеристики поверхности.

При кипении жидкости на горизонтальных трубах и плитах в условиях свободного движения (большого объема) скорость отвода пара от поверхности в основном определяется силой, вызываемой ускорением свободного падения. Значения $q_{кр1}$ для этих условий могут рассчитываться по формуле

$$q_{кр1} = 0,14 r \sqrt{r''} \cdot \sqrt[4]{Sg(r' - r'')} . (7.9)$$

Теплообмен при пленочном кипении. При пленочном режиме кипящая жидкость отделена от поверхности нагрева паровой пленкой, причем температура поверхности t_c значительно превышает температуру насыщения t_s . Поэтому наряду с конвективным теплообменом между поверхностью и паровой пленкой при высоких температурах заметная часть в переносе теплоты принадлежит тепловому излучению.

Интенсивность конвективного теплообмена при пленочном кипении определяется термическим сопротивлением паровой пленки. Характер движения пара в пленке и ее толщина зависят от размеров и формы поверхности нагрева и ее расположения в поле тяжести, а также от условий движения жидкости. Так, при пленочном кипении на поверхности горизонтальных труб в условиях свободного движения (в большом объеме) пар движется вдоль периметра трубы к верхней образующей и по мере накопления периодически удаляется в форме отрывающихся пузырей. Паровая пленка имеет толщину, измеряемую долями миллиметра, а движение пара в ней носит ламинарный характер. Средние коэффициенты теплоотдачи составляют примерно 100–300 Вт/(м²·°С). Расчет теплоотдачи при пленочном кипении на горизонтальных трубах в большом объеме следует проводить по формуле

$$\bar{\alpha} = 0,62 \cdot \sqrt[4]{\frac{I^{n_3} (r' - r'') g r_*}{n'' D (t_c - t_{сж})}}, \quad (7.10)$$

где $r_* = r + 0,5c_p''(t_c - t_s)$ – эффективная теплота фазового перехода, учитывающая перегрев пара в пленке; D – диаметр трубы.

Физические свойства в этой формуле (за исключением плотности жидкости ρ') относятся к паровой фазе. Их следует выбирать по средней температуре пара $t_{cp} = 0,5(t_c - t_s)$.

При пленочном кипении на поверхности вертикальных труб и пластин течение пара в пленке обычно имеет турбулентный (вихревой) характер. Поверхность пленки испытывает волновые колебания, толщина пленки растет в направлении движения пара. опыты показывают, что теплоотдача практически не зависит от высоты поверхности нагрева, а следовательно, и от расхода пара в пленке. В целом процесс оказывается во многом аналогичным свободной конвекции однофазной жидкости около вертикальных поверхностей. В данном случае подъемная сила, определяющая движение пара в пленке, определяется разностью плотностей жидкости и пара $g(r' - r'')$. Расчет теплоотдачи в этом случае может проводиться по формуле

$$\bar{\alpha} = 0,25 \cdot \sqrt[3]{\frac{I^{n_2} c_p'' g (r' - r'')}{n''}}. \quad (7.11)$$

Физические свойства пара в этой формуле следует выбирать по средней температуре пара.

Прекращение пленочного кипения наступает при уменьшении температуры поверхности ниже определенного значения. В эти моменты жидкость начинает касаться (смачивать) теплоотдающей поверхности. опыты показывают, что прекращение пленочного кипения происходит тогда, когда температура поверхности нагрева t_c оказывается равной или обычно несколько более низкой, чем *температура предельного перегрева жидкости* t_n . Последняя определяет тот максимальный перегрев жидкости, выше которого жидкая фаза оказывается термодинамически абсолютно неустойчивой: она самопроизвольно распадается и испаряется.

Пленочное кипение прекращается, когда температурный напор $\Delta t_{кр2} = t_c - t_s$ оказывается равным или обычно несколько меньшим, чем температурный напор, соответствующий предельному перегреву $\Delta t_n = t_n - t_s$.

Таким образом,

$$\Delta t_{кр2} = c \Delta t_n, \quad (7.12)$$

где коэффициент c обычно лежит в пределах 0,8 – 1,0.

При более высоких температурах поверхности ($t_c > t_n$) жидкость не может соприкоснуться с поверхностью нагрева, т.к. при приближении к поверхности происходит самопроизвольное ее распадение и испарение. Это определяет возможность существования пленочного кипения, несмотря на то, что паровая пленка часто оказывается гидродинамически неустойчивой. Критическая плотность теплового потока при прекращении пленочного режима кипения $q_{кр2}$ может быть найдена из соотношения

$$q_{кр2} = \alpha \Delta t_{кр2}, \quad (7.13)$$

где α – коэффициент теплоотдачи в режиме пленочного кипения.

7.2 Теплообмен при конденсации

Основные представления о процессе конденсации. Если пар соприкасается со стенкой, температура которой ниже температуры насыщения, то пар конденсируется и конденсат оседает на стенке. При этом различают два вида конденсации: *капельную*, когда конденсат осажается в виде отдельных капель, и *пленочную*, когда на поверхности образуется сплошная пленка жидкости.

Капельная конденсация возможна лишь в том случае, если конденсат не смачивает поверхность охлаждения. Искусственно капельная конденсация может быть получена путем нанесения на поверхность тонкого слоя масла, керосина или жирных кислот или путем примеси этих веществ к пару. При этом поверхность должна быть хорошо отполирована. При конденсации же чистого пара смачивающей жидкости на чистой поверхности всегда получается сплошная пленка. В промышленных аппаратах – *конденсаторах* – иногда возможны также случаи смешанной конденсации, когда в одной части аппарата получается капельная, а в другой – пленочная конденсация.

Для организации стационарного процесса конденсации пара теплоту необходимо непрерывно отводить от поверхности охлаждения. В целом интенсивность теплоотдачи при конденсации пара оказывается достаточно высокой.

Теплоотдача при пленочной конденсации пара. В процессе пленочной конденсации вся теплота, выделяющаяся на внешней границе пленки, отводится к поверхности охлаждения. При ламинарном движении жидкостной пленки перенос теплоты через нее осуществляется лишь путем теплопроводности. Если принять, что температура частиц конденсата, соприкасающихся с паром, равна температуре насыщения, то плотность теплового потока определяется выражением

$$q = \frac{\lambda}{\delta}(t_s - t_c), \quad (a)$$

где δ – толщина пленки; λ – коэффициент теплопроводности конденсата; t_s – температура поверхности.

С другой стороны по закону Ньютона – Рихмана

$$q = a(t_s - t_c). \quad (б)$$

Из сопоставления выражений (а) и (б) имеем

$$a = \frac{\lambda}{\delta}. \quad (в)$$

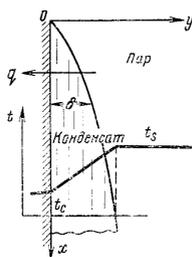


Рис. 7.6. Пленочная конденсация на вертикальной стенке.

Следовательно, определение коэффициента теплоотдачи сводится к определению толщины пленки конденсата δ , которая может быть получена из анализа условий его течения.

Такой анализ для случаев конденсации пара на вертикальной поверхности и горизонтальной трубе был впервые проведен Нуссельтом. Ниже приводится вывод Нуссельта для плоской вертикальной стенки (рис. 7.6). Ось x расположена в плоскости стенки и направлена вниз, ось y

направлена перпендикулярно стенке. Температура стенки t_c считается постоянной по высоте. Дифференциальное уравнение движения для единичного объема конденсата в пленке имеет вид

$$g(r' - r'') + m \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} = 0. \quad (\Gamma)$$

В этом уравнении сила тяжести единичного объема конденсата $g(r' - r'')$ уравнивается силой вязкости, действующей со стороны соседних слоев жидкости. Сила инерции, связанная с ускорением движения конденсата, как величина малая, в решении Нуссельта не учитывается. Интегрирование выражения (Г) приводит к соотношению

$$w_x = -\frac{g(r' - r'')}{2m} y^2 + C_1 y + C_2. \quad (\Delta)$$

Постоянные интегрирования определяются из граничных условий:

при $y = 0$ $w_x = 0$;

при $y = \delta$ $\partial w_x / \partial y = 0$, откуда следует, что $C_2 = 0$ и $C_1 = \frac{g(r' - r'')}{m} d$.

Подставляя значения C_1 и C_2 в выражение (Д), получаем закон распределения скоростей в слое конденсата

$$w_x = g \frac{r' - r''}{m} \left(yd - \frac{1}{2} y^2 \right). \quad (\text{E})$$

Количество жидкости, протекающей в единицу времени через сечение x при ширине стенки, равной единице, определяется по формуле

$$G = r' \int_0^d w_x dy = r' \bar{w}_x d = g \frac{r' - r''}{3n} d^3; \quad (\text{Ж})$$

отсюда

$$d = \sqrt[3]{\frac{3Gn}{g(r' - r'')}}. \quad (3)$$

т.е. толщина пленки увеличивается с ростом расхода жидкости в пленке G по соотношению $\delta \sim G^{1/3}$.

Количество конденсата G , которое определяется соотношением (Ж), образовалось за счет конденсации пара на всем протяжении стенки, расположенном

выше сечения x . Поэтому величина G может быть получена также из уравнения теплового баланса для участка длиной x при ширине стенки, равной единице

$$Q = \int_0^x q dx = \bar{q}x = rG, \text{ (и)}$$

где Q – тепловой поток, переданный стенке на участке Ox .

В уравнении (и) не учитывается небольшое дополнительное количество теплоты, которое передается стенке за счет охлаждения конденсата ниже температуры t_s .

Подставляя в уравнение (и) значение G из уравнения (ж) и величину q из уравнения (а), получаем

$$I(t_s - t_c) \int_0^x \frac{dx}{d} = rg \frac{r' - r''}{3n} d^3. \text{ (к)}$$

Это уравнение содержит одну неизвестную величину, толщину пленки δ . Поскольку при $x = 0$ толщина пленки должна быть равна нулю, можно искать решение (к) в виде

$$d = Bx^n. \text{ (л)}$$

Подставляя это выражение в (к), имеем

$$\frac{I(t_s - t_c)}{B} \cdot \frac{x^{1-n}}{1-n} = rg \frac{r' - r''}{3n} B^3 x^{3n}. \text{ (м)}$$

Соотношение (м) должно выполняться при любом x , следовательно, показатели степени при x слева и справа в выражении (м) должны быть одинаковы. Отсюда имеем

$$1 - n = 3n \text{ при } n = 1/4.$$

Далее из выражения (м) сразу находится также величина B

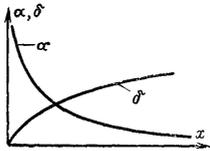
$$B = \sqrt[4]{\frac{4I(t_s - t_c)n}{rg(r' - r'')}}.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$d = \sqrt[4]{\frac{4I(t_s - t_c)nx}{rg(r' - r'')}}. \text{ (н)}$$

Зная выражение для толщины пленки, из выражения (в) определяем локальный коэффициент теплоотдачи

$$a = \frac{l}{d} = \sqrt[4]{\frac{l^3 rg(r' - r'')}{4(t_s - t_c)nx}}. \quad (7.14)$$



Характер изменения толщины пленки и коэффициента теплоотдачи вдоль вертикальной стенки показаны на рис.7.7. Среднее значение коэффициента теплоотдачи для вертикальной стенки или вертикальной трубы высотой h определяется формулой

$$\bar{a} = \frac{1}{h} \int_0^h a dx = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{l^3 rg(r' - r'')}{4(t_s - t_c)nh}} = 0,943 \frac{A}{\sqrt[4]{h\Delta t}}, \quad (7.15)$$

Рис. 7.7. Изменение коэффициента теплоотдачи α и толщины пленки δ вдоль вертикальной стенки.

$$\text{где } \Delta t = t_s - t_c; \quad A = \sqrt[4]{\frac{l^3 rg(r' - r'')}{n}}.$$

Из уравнения (7.15) следует, что средний коэффициент теплоотдачи уменьшается с ростом высоты h и температурного напора Δt .

Вывод, приведенный выше для вертикальной стенки, применим и для наклонной. При этом единственное отличие будет в том, что в уравнение движения (г) войдет составляющая силы тяжести в направлении движения пленки. Если Ψ – угол наклона стенки к горизонту, то вместо ускорения свободного падения g для вертикальной стенки во все соотношения войдет величина $g \sin \Psi$. Тогда расчетная формула для коэффициента теплоотдачи принимает вид

$$\bar{a}_y = \bar{a}_{\text{верт}} \sqrt[4]{\sin \Psi}. \quad (o)$$

Вывод, аналогичный изложенному выше для вертикальной стенки, был приведен Нуссельтом также для горизонтальной трубы. Полученная им формула для среднего коэффициента теплоотдачи имеет вид

$$\bar{a} = 0,728 \frac{A}{\sqrt[4]{D\Delta t}}, \quad (7.16)$$

где D – диаметр трубы.

Расчет теплоотдачи при конденсации пара на горизонтальной трубе целесообразно производить по формуле Нуссельта (7.16) при отнесении всех свойств к температуре насыщения и введении поправки (множителя) e_1

$$\bar{a} = \bar{a}_{N,s} e_t, \quad (7.17)$$

где $\bar{a}_{N,s}$ – коэффициент теплоотдачи, рассчитанный по формуле (7.16) при определяющей температуре t_s ; e_t – поправка, учитывающая зависимость физических свойств от температуры и определяется из таблиц.

На поверхности вертикальных платин и труб интенсивность теплоотдачи, как показывают опытные данные, обычно оказывается более высокой, чем вычисленная по формуле Нуссельта (7.17). Это объясняется тем, что в действительности в этих условиях наблюдается волновое течение пленки конденсата.

Выражения для поправки к формуле Нуссельта, учитывающей развитие волнового течения, имеет вид

$$e_n = (Re_s/4)^{0,04}, \quad (7.18)$$

где Re_s – число Рейнольдса конденсатной пленки.

При значениях $Re_s \leq 4$ $e_n = 1$, т.к. волновое течение пленки отсутствует. По мере увеличения расхода жидкости в пленке (или числа Re_s пленки) волнообразование постепенно нарастает и значение e_n увеличивается. Например, при $Re_s = 100$ $e_n = 1,14$; при $Re_s = 400$ $e_n = 1,20$; при $Re_s = 1600$ $e_n = 1,27$.

Число Re для пленки в общем случае определяется соотношением

$$Re = 4 \frac{G}{m}, \quad (7.19)$$

где G – массовый расход жидкости в пленке, приходящийся на единицу длины поверхности по нормали к направлению течения жидкости, кг/(м · с).

В условиях конденсации пара массовый расход конденсата G в сечении $x-h$ однозначно связан с тепловым потоком $Q = \bar{q}h$, переданным стенке на участке Oh , уравнением теплового баланса (и). Поэтому при конденсации число Re может быть выражено через теплообменные характеристики процесса

$$Re_s = 4 \frac{\bar{q}h}{rm} = 4 \frac{\bar{a}\Delta t h}{rm}. \quad (7.20)$$

С учетом поправки e_n на волновое течение расчетное соотношение для теплоотдачи при конденсации пара на поверхности вертикальных труб и плит имеет вид

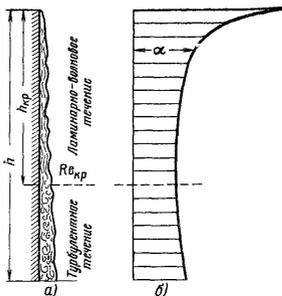
$$\bar{a} = \bar{a}_{N,s} e_n e_t, \quad (7.21)$$

где $\bar{a}_{N,s}$ – коэффициент теплоотдачи, определяемый по формуле (7.16) при отнесении физических свойств к температуре насыщения t_s ; e_n – поправка на волновое течение, определяемая по формуле (7.21); e_t – поправка, учитывающая зависимость физических свойств от температуры.

Уравнение (7.21) хорошо подтверждается многочисленными опытными данными по конденсации паров различных жидкостей на вертикальных пластинах и трубах разной высоты.

При большой высоте вертикальной поверхности и значительных температурных напорах расход конденсата может возрасти настолько, что возникает *турбулентный* режим течения пленки. Специальные исследования показали, что турбулентное течение свободно стекающих жидкостных пленок наступает обычно при значениях числа Re, больших некоторого критического значения: $Re_{кр} \approx 1600$.

На рис. 7.8, а показана картина течения конденсатной пленки вдоль вертикальной стенки большой высоты. При некотором значении $h_{кр}$ число Рейнольдса достигает критического значения $Re_{кр}$. Далее течение конденсата в пленке принимает турбулентный характер. При турбулентном течении локальная интенсивность теплоотдачи растет при увеличении расхода G и числа Re по соотношению



$$\frac{a}{l} \left(\frac{n^2}{g} \frac{r'}{r' - r''} \right)^{1/3} = 0,023 Re^{0,25} Pr^{0,5}, \quad (7.22)$$

что объясняется возрастанием интенсивности турбулентного перемешивания жидкости в пленке. Характер изменения теплоотдачи вдоль вертикальной поверхности большой протяженности показан на рис. 7.8, б.

Рис. 7.8. Характер течения конденсатной пленки (а) и изменение коэффициента теплоотдачи (б) вдоль вертикальной плиты большой высоты. При $h_{кр}$ течение пленки приобретает турбулентный характер.

Значения $(h\Delta t_{кр})$, при которых возникает турбулентный режим течения в пленке, определяются соотношением

$$(h\Delta t_{кр}) = 2300 \frac{r m_s}{l_s} \left(\frac{n_s^2}{g} \frac{r'}{r' - r''} \right)^{1/3}, \quad (7.23)$$

которое показывает, что величина $(h\Delta t_{кр})$ зависит лишь от физических свойств конденсата и ускорения свободного падения.

При наличии на вертикальной поверхности участка с турбулентным режимом течения конденсата в пленке расчетная формула для определения среднего по всей поверхности коэффициента теплоотдачи имеет вид

$$\bar{\alpha} = 400 \frac{r m_s}{h \Delta t} \left\{ 1 + 0,625 \text{Pr}^{0,5} \left[\frac{h \Delta \bar{t}}{(h \Delta \bar{t}_{кр})} - 1 \right] \right\}^{4/3}. \quad (7.24)$$

Расчетные соотношения (7.17), (7.21) и (7.24) справедливы при конденсации чистого насыщенного пара и на чистой поверхности. Поэтому при определении значения коэффициента теплоотдачи по возможности необходимо учитывать ряд дополнительных обстоятельств, влияющих на теплоотдачу.

а. Влияние перегрева пара. Если температура стенки ниже температуры насыщения, то процесс конденсации перегретого пара протекает так же, как и насыщенного. Конечно, это не значит, что перегретый пар сразу становится насыщенным во всем объеме; насыщенным пар становится лишь у стенки по мере его охлаждения, а вдали от стенки он может, и будет оставаться перегретым.

При конденсации перегретого пара необходимо учитывать теплоту перегрева $q_n'' = i_n'' - i_s''$, Дж/кг, и вместо теплоты фазового перехода r в расчетную формулу подставлять значение $r' = r + q_n''$, где i_n'' , i_s'' – энтальпии перегретого и насыщенного пара соответственно. За разность температур при этом по-прежнему принимается $\Delta t = t_s - t_c$.

Так как $r' > r$, то при конденсации перегретого пара теплоотдача несколько выше, чем при конденсации насыщенного пара. Однако, разница обычно незначительна и в практических расчетах ею часто вполне можно пренебречь.

б. Влияние состояния поверхности. Теплоотдача при конденсации пара зависит от состояния поверхности. Если поверхность шероховата или покрыта слоем окисла, то вследствие дополнительного сопротивления течению толщина пленки увеличивается, а коэффициент теплоотдачи при этом снижается. Здесь большое влияние оказывает также термическое сопротивление окисной пленки на поверхности.

в. Влияние содержания в паре неконденсирующихся газов. При наличии в паре воздуха или других неконденсирующихся газов теплоотдача при конденсации сильно снижается. Это происходит потому, что на холодной стенке конденсируется только пар, а воздух остается. При отсутствии конвекции с течением времени воздух скапливается около стенки и оказывает значительное препятствие продвижению пара к стенке.

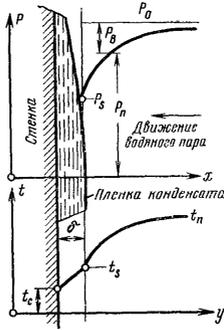


Рис. 7.9. Характер изменения парциальных давлений пара и воздуха, а также температуры пара.

В самом деле, на основании закона Дальтона общее давление смеси p_0 составляется из парциальных давлений пара p_n и воздуха $p_в$, т. е. $p_0 = p_n + p_в$. Вследствие конденсации пара p_n у стенки меньше, чем в остальном объеме. Поэтому в направлении к стенке p_n непрерывно падает, и чем ближе к стенке, тем быстрее, а $p_в$, наоборот, возрастает (рис. 7.9). Следовательно, у стенки получается зона с повышенным содержанием воздуха, через которую молекулы пара проникают лишь путем диффузии. Следствием этого является снижение температурного напора, $t_s - t_c$, так как из-за уменьшения парциального давления пара у поверхности пленки температура насыщения t_s всегда ниже температуры насыщения при давлении p_0 .

Опытная кривая изменения относительного коэффициента теплоотдачи в зависимости от концентрации воздуха в паре по данным приведена на рис.

7.10. Здесь по оси абсцисс нанесено значение массовой концентрации воздуха в паре $c = m_в / m_n$ %, а по оси ординат – отношение $\alpha_в / \alpha$, где $m_в$ – масса воздуха, кг; m_n – масса пара, кг, содержащиеся в единице объема смеси. Коэффициент теплоотдачи $\alpha_в$ отнесен к разности температур $t_n - t_c$, где t_n – температура паровоздушной смеси вдали от поверхности, 0C .

Опыты проводились на горизонтальных трубах. Как видно из рисунка, при содержании в паре даже 1% воздуха коэффициент теплоотдачи снижается на 60%. При работе промышленных конденсаторов воздух непрерывно отсасывается, хотя здесь вследствие хорошего перемешивания наличие воздуха сказывается меньше.

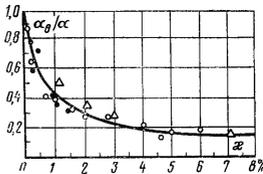


Рис. 7.10. Зависимость относительного коэффициента теплоотдачи от концентрации воздуха в паре.

г. Влияние скорости и направления течения пара. Приведенные выше зависимости справедливы для неподвижного пара или когда скорость его течения мала. При значительных скоростях поток пара оказывает динамическое воздействие на конденсатную пленку. Если движение пара совпадает с направлением течения пленки, поток пара ускоряет движение конденсата в пленке, ее толщина уменьшается, и коэффициент теплоотдачи возрастает. При движении пара снизу вверх, т. е. в обратном направлении, течение пленки тормозится, толщина ее увеличивается, а коэффициент теплоотдачи уменьшается. Однако такое явление происходит лишь до тех пор, пока динамическое воздействие пара не превысит силу тяжести. После этого пленка пара увлекается вверх и частично срывается с поверхности. При этом с увеличением скорости пара коэффициент теплоотдачи вновь растет.

д. *Влияние компоновки поверхности нагрева.* При проектировании конденсационных устройств большое внимание должно уделяться правильной компоновке поверхности нагрева. Теплоотдача на горизонтальных трубах имеет большую интенсивность, чем на вертикальных, так как в первом случае толщина пленки конденсата меньше. Однако это справедливо лишь для одной трубки или для верхнего ряда в пучке. В многорядных пучках конденсат с

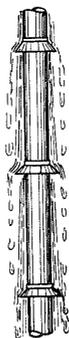


Рис. 7.11. Схема установки конденсатоотводных колпачков на вертикальных трубах.

верхних рядов стекает на нижние, поэтому и пленка здесь получается более толстой. Однако в реальных условиях конденсат стекает в виде отдельных капель или струйками, что вызывает одновременно значительные возмущения и даже турбулизацию пленки. Кроме того, при конденсации пара на многорядном пучке необходимо учитывать влияние скорости движения поступающего пара в зазорах между трубами, которая может изменять характер отекания конденсата.

Для вертикальных труб коэффициент теплоотдачи книзу уменьшается вследствие утолщения пленки. В этом случае среднее значение теплоотдачи можно увеличить путем установки по высоте трубы конденсатоотводных колпачков (рис. 7.11). Установка таких колпачков через каждые 10 см на трубе высотой $h = 3$ м увеличивает среднее значение коэффициента теплоотдачи в 2 – 3 раза.

Еще большее увеличение теплоотдачи получается при подаче пара в виде тонких струек, движущихся с большой скоростью. При ударе таких струек о стенку происходит разрушение пленки и разбрызгивание конденсата. По опытным данным термическое сопротивление теплоотдачи при этом уменьшается в 3– 10 раз. Последнее, конечно, в значительной мере зависит от диаметра струек, их количества, направления и скорости истечения. Имеются и другие средства интенсификации теплоотдачи. Однако эта задача в большинстве случаев не очень актуальна, так как при конденсации пара теплоотдача и так достаточно высока. Поэтому при проектировании конденсаторов большое внимание следует уделять профилактическим мерам против снижения теплоотдачи вследствие, например, наличия воздуха, неправильного отвода конденсата и подачи пара в аппарат, отложения на поверхности солей, масла и других загрязнений. Именно эти обстоятельства могут оказаться причиной неудовлетворительной работы конденсаторов.

Теплоотдача при капельной конденсации пара. Если конденсат не смачивает поверхность охлаждения, то конденсация пара приобретает капельный характер. На поверхности образуются и растут отдельные капли конденсата. По мере увеличения размера капель скорость их роста постепенно снижается. При этом одновременно наблюдается непрерывно идущий процесс взаимного слияния капель. В итоге, когда отдельные капли достигают размера примерно одного или нескольких миллиметров, они скатываются с поверхности под влиянием силы тяжести. Общая плотность капель на поверхности конденсации увеличи-

вается по мере возрастания температурного напора $\Delta t = t_s - t_c$. Наблюдения показывают, что при малых Δt капельки конденсата зарождаются в основном на разного рода микроуглублениях и других элементах неоднородности поверхности. При увеличении Δt на поверхности конденсации может возникать, кроме того, очень тонкая (около 1 мкм и менее) неустойчивая жидкостная пленка. Она непрерывно разрывается, стягиваясь во все новые капельки, и восстанавливается вновь. При этом число капель на поверхности резко увеличивается.

Зависимость коэффициента теплоотдачи α при капельной конденсации водяного пара от температурного напора Δt приведена на рис. 7.12. Этот график получен в результате анализа и обобщения опытных данных. Следует обратить внимание на то, что коэффициенты теплоотдачи при капельной конденсации имеют очень высокие значения. Зависимости, приведенные на рис. 7.12, могут быть рекомендованы для практических расчетов.

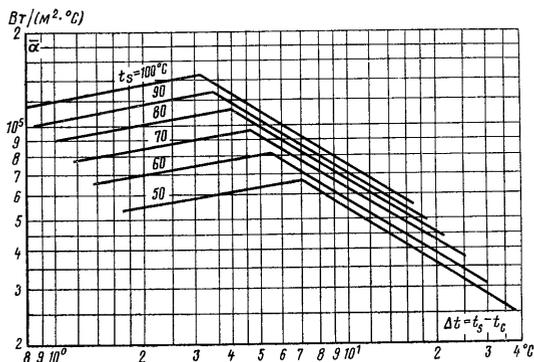


Рис. 7.12. Теплоотдача при капельной конденсации водяного пара в зависимости от t_s и Δt .

При капельной конденсации пара на поверхности пучка горизонтальных труб скатывание капель с трубы на трубу, как показывают опытные данные, приводит к некоторому снижению интенсивности теплоотдачи. Однако это снижение обычно не превышает 10–15%. Опыты показывают также, что из-за очень высокой интенсивности теплоотдача при капельной конденсации весьма чувствительна даже к ничтожным примесям в паре неконденсирующихся газов (воздуха).

8. ОСНОВЫ МАССООБМЕНА

8.1 Общие положения

Под *массообменом* понимают самопроизвольный необратимый процесс переноса массы определенного компонента в пространстве с неоднородным полем химического потенциала этого компонента. В простейшем случае неоднородным является поле концентрации парциального давления, при этом процесс переноса имеет определенную направленность. Например, в смеси с одинаковой температурой и давлением процесс массопереноса (диффузии) направлен к выравниванию концентраций в системе, при этом происходит перенос вещества из области с большей концентрацией в область с меньшей концентрацией.

Диффузия осуществляется молекулярным или молярным путем. Молекулярная диффузия – это перенос вещества в смеси, обусловленный тепловым движением микрочастиц. Молярный перенос неразрывно связан с макродвижением самой смеси (конвекцией). Массообмен, обусловленный совместным действием молекул ной диффузии и конвективного переноса вещества, называется *конвективным массообменом*.

Количество вещества, проходящего в единицу времени через данную поверхность в направлении нормали к ней, называется *потоком массы*. Он обозначается через J и измеряется в кг/с. Плотность потока массы j – это поток массы, проходящий через единицу поверхности: $j = dJ / dF$.

Причиной возникновения потока массы является либо неравномерное распределение концентрации вещества (*концентрационная диффузия*), либо неоднородность температурного поля (*термодиффузия*), либо неоднородность полного давления (*бародиффузия*).

Если в двухкомпонентной смеси отсутствует макродвижение, а температура и давление постоянны по объему системы, то плотность потока массы одного из компонентов, обусловленного молекулярной диффузией, определяется законом Фика

$$j_{м.д.} = -D(\partial C_i / \partial n), \quad (8.1)$$

где D – коэффициент диффузии, м²/с; C_i – местная концентрация данного компонента, равная отношению массы компонента к объему смеси, кг/м³; $\partial C_i / \partial n$ градиент концентрации (вектор), кг/м⁴.

В этом случае движущей силой является градиент концентрации. Так как плотность потока массы направлена в сторону убывания концентрации, а гра-

диент концентрации – в противоположную сторону, то в выражении (8.1) присутствует знак «минус». Закон Фика описывает концентрационную диффузию, в результате которой переносится основная доля вещества.

Если температура по объему смеси неодинакова, то под действием градиента температур также происходит перенос вещества – термическая диффузия (эффект Соре). При этом молекулы компонента, масса которых больше, обычно стремятся перейти в область низких температур; если же массы молекул одинаковы, то в холодные области стремятся перейти более крупные молекулы. В результате термодиффузия приводит к образованию градиента концентрации.

Суммарная плотность потока массы i -го компонента за счет молекулярного переноса с учетом концентрационной диффузии, термо- и бародиффузии составит

$$j_{m.o.} = -r \left(D \nabla m_i + \frac{D_T}{T} \nabla T + \frac{D_\delta}{p} \nabla p \right), \quad (8.2)$$

где ρ – плотность смеси; $m_i = C_i / r$ – относительная массовая концентрация i -го компонента; $D_T = K_T D$ – коэффициент термодиффузии; $D_\delta = K_\delta D$ – коэффициент бародиффузии; p – давление смеси; K_m , K_δ – термодиффузионное и бародиффузионное отношения.

Доля массы в общем потоке, вызванная термодиффузией, незначительна, и только при больших градиентах температур ощущается ее влияние. Бародиффузия проявляется при значительных перепадах давления. В процессах теплообмена такие случаи встречаются редко.

Таким образом, хотя суммарный поток массы любого компонента смеси и является результатом названных трех видов диффузии, но основную роль играет концентрационная диффузия и ее следует учитывать в первую очередь.

Рассмотренное уравнение переноса справедливо для неподвижной среды, когда массообмен осуществляется только молекулярным путем. Если же среда движется, то наряду с молекулярной диффузией будет происходить перенос вещества конвекцией. Составляющая потока массы, вызванная конвекцией, будет равна $j_{ik} = C_i w$, где w – скорость перемещения какого-либо объема смеси.

Суммарная плотность потока массы, обусловленного молекулярным и конвективным переносами, составит

$$j_i = j_{m.o.} + j_{ik} \quad (8.3)$$

8.2 Уравнения массообмена

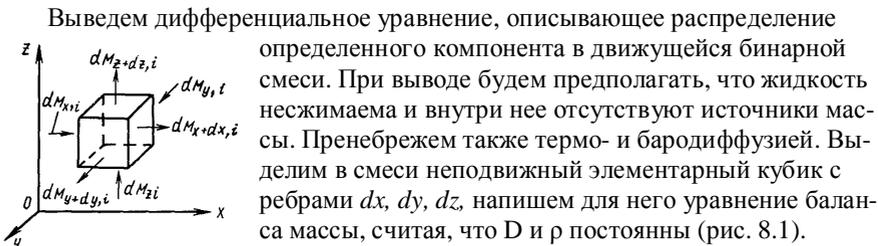


Рис. 8.1

Вдоль оси x в элементарный кубик за время dt вносится масса i -го компонента в количестве $dM_{x,i} = j_{x,i} dydzdt$ и вытекает $dM_{x+dx,i} = j_{x+dx,i} dydzdt$

Разность количества массы i -го компонента, поступившей и вытекшей в направлении Ox , определяется выражением

$$dM_{x,i} - dM_{x+dx,i} = -\frac{\partial j_{x,i}}{\partial x} dx dy dz = -\frac{\partial j_{x,i}}{\partial x} du dt .$$

Аналогичные уравнения можно написать для осей Oy и Oz

$$dM_{y,i} - dM_{y+dy,i} = -\frac{\partial j_{y,i}}{\partial y} du dt ,$$

$$dM_{z,i} - dM_{z+dz,i} = -\frac{\partial j_{z,i}}{\partial z} du dt .$$

Просуммировав по трем осям, получим, что изменение массы i -го компонента равно

$$dM_i = -\left(\frac{\partial j_{x,i}}{\partial x} + \frac{\partial j_{y,i}}{\partial y} + \frac{\partial j_{z,i}}{\partial z} \right) du dt .$$

Так как

$$dM_i = r \frac{\partial m_i}{\partial t} du dt ,$$

то

$$r \frac{\partial m_i}{\partial t} = -\left(\frac{\partial j_{x,i}}{\partial x} + \frac{\partial j_{y,i}}{\partial y} + \frac{\partial j_{z,i}}{\partial z} \right) = \text{div} \mathbf{j}_i . \quad (8.4)$$

Полагая, что масса i -го компонента переносится только концентрационной диффузией и конвекцией, получаем

$$j_{x,i} = -rD \frac{\partial m_i}{\partial x} + r m_i w_x; \quad j_{y,i} = -rD \frac{\partial m_i}{\partial y} + r m_i w_y; \quad j_{z,i} = -rD \frac{\partial m_i}{\partial z} + r m_i w_z;$$

$$\frac{\partial j_{x,i}}{\partial x} = -rD \frac{\partial^2 m_i}{\partial x^2} + r \left(m_i \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_x \frac{\partial m_i}{\partial x} \right);$$

$$\frac{\partial j_{y,i}}{\partial y} = -rD \frac{\partial^2 m_i}{\partial y^2} + r \left(m_i \frac{\partial w_y}{\partial y} + w_y \frac{\partial m_i}{\partial y} \right);$$

$$\frac{\partial j_{z,i}}{\partial z} = -rD \frac{\partial^2 m_i}{\partial z^2} + r \left(m_i \frac{\partial w_z}{\partial z} + w_z \frac{\partial m_i}{\partial z} \right).$$

Просуммировав эти равенства и подставив их в уравнение (8.4), будем иметь следующее уравнение

$$r \frac{\partial m_i}{\partial t} = rD \left(\frac{\partial^2 m_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 m_i}{\partial z^2} \right) - r \left(w_x \frac{\partial m_i}{\partial x} + w_y \frac{\partial m_i}{\partial y} + w_z \frac{\partial m_i}{\partial z} \right) - r m_i \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right)$$

Для несжимаемой жидкости ($\rho = const$) последний член правой части равенства равнее нулю, тогда

$$\frac{\partial m_i}{\partial t} + w_x \frac{\partial m_i}{\partial x} + w_y \frac{\partial m_i}{\partial y} + w_z \frac{\partial m_i}{\partial z} = D \left(\frac{\partial^2 m_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 m_i}{\partial z^2} \right).$$

Последнее уравнение и является искомым дифференциальным уравнением массообмена, описывающим распределение массы i -го компонента в движущейся смеси. Это уравнение представляет собой уравнение сохранения массы i -го компонента.

Если $w_x = w_y = w_z = 0$, то уравнение массообмена примет вид

$$\frac{\partial m_i}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 m_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 m_i}{\partial z^2} \right). \quad (8.5)$$

Это уравнение аналогично дифференциальному уравнению теплопроводности. Сравнивая, можно видеть, что коэффициент диффузии D аналогичен коэффициенту температуропроводности a .

Уравнение энергии для бинарной массы диффундирующих компонентов имеет следующий вид

$$\frac{\partial t}{\partial t} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} = a \nabla^2 t + D \frac{c_{p1} - c_{p2}}{c_p} \times$$

(8.6)

$$\times \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(t \frac{\partial m_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(t \frac{\partial m_i}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(t \frac{\partial m_i}{\partial z} \right) \right]$$

Как следует из этого уравнения, если $c_{p1} = c_{p2}$, то результирующий диффузионный перенос теплоты (энтальпии) отсутствует.

Согласно выражению (8.6), температурное поле движущейся смеси зависит от составляющих скорости w_x , w_y и w_z и относительного массосодержания m . Поэтому к уравнению энергии необходимо добавить уравнения массообмена, движения и неразрывности (сплошности) для всей смеси в целом, чтобы система уравнений была замкнутой. Для решения этой системы необходимы условия однозначности, которые дают математическое описание всех частных особенностей рассматриваемого явления.

В случае массообмена задание граничных условий имеет некоторые особенности. Чтобы познакомиться с ними, рассмотрим процессы массоотдачи в двухкомпонентную среду или от нее. Практический интерес представляют процессы массообмена и теплообмена при испарении, конденсации, сорбции и т. п. Например, при испарении жидкости образующийся пар переносится путем диффузии в окружающую парогазовую смесь и одновременно происходит теплоотдача между парогазовой смесью и поверхностью жидкости.

Конвективный массообмен между движущейся средой и твердой или жидкой поверхностью называется *массоотдачей*. Плотность потока массы j можно выразить либо через разность концентраций диффундирующего вещества, либо через разность парциальных давлений этого же вещества. В первом случае расчетное уравнение имеет вид

$$j = \beta (C_n - C_o), \quad (8.7)$$

где β – коэффициент массоотдачи, отнесенный к разности концентраций диффундирующего вещества, м/с; C_n – концентрация диффундирующего вещества на поверхности раздела фаз (твердой и жидкой), кг/м³; C_o – концентрация этого же вещества вдали от поверхности раздела фаз, кг/м³.

Как видно, это уравнение аналогично уравнению Ньютона – Рихмана, применяемому для расчета конвективного теплообмена.

Из уравнения состояния идеального газа следует, что концентрация компонента равна $C_i = p_i / R_i T$, где p_i – парциальное давление компонента; R_i – газовая постоянная. Подставляя это выражение в формулу (8.7), получим

$$j = b_p (p_n - p_o), \quad (8.8)$$

где β_p – коэффициент массоотдачи, отнесенный к разности парциальных давлений; p_n и p_o – парциальные давления диффундирующего вещества на поверхности раздела фаз и вдали от нее.

Соотношение между коэффициентами массоотдачи устанавливается выражением $b / b_p = RT$. В уравнении (8.7) потенциалом переноса является разность концентраций, а в уравнении (8.8) – разность парциальных давлений. Приведенные расчетные формулы справедливы для случая чистой молекулярной диффузии без учета взаимного влияния тепло- и массообмена.

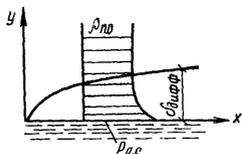


Рис. 8.2

Над поверхностью испарения воды всегда образуется диффузионный пограничный слой, состоящий из газа и водяных паров. Парциальное давление водяных паров у поверхности раздела максимально и соответствует насыщенному состоянию при $t_{нов}$ (рис. 8.2). По толщине пограничного слоя оно уменьшается до значения $p_{п0}$ – парциального давления вдали от поверхности испарения. Парциальное давление газа, согласно закону Дальтона, можно определить как $p_g = p - p_n$. Если полное давление по всему объему парогазовой смеси одинаково ($p = \text{const}$), то градиенты парциального давления пара и газа равны по абсолютной величине и обратны по направлению: $dp_n / dy = -dp_g / dy$. Следовательно, в направлении, обратном направлению диффузии пара, т. е. от парогазовой среды к поверхности жидкости, будет диффундировать газ.

Пар может свободно диффундировать в парогазовую среду. Для газа поверхность жидкости является непроницаемой. Поэтому количество газа у поверхности жидкости будет непрерывно возрастать. При стационарном режиме распределение парциальных давлений пара и газа будет постоянно во времени. Поэтому перемещение газа к поверхности испарения будет компенсироваться конвективным потоком парогазовой смеси, направленным от жидкости в парогазовую среду. Этот поток называется *стефановым потоком*.

При неизотермических условиях расчет процесса массопереноса осложняется появлением термодиффузионного потока вещества в пограничном слое. В большинстве случаев в пограничном слое существует температурный гради-

ент и, следовательно, происходит термодиффузия. При адиабатических условиях, когда необходимая для испарения теплота берется из окружающего воздуха, газ с большей молекулярной массой стремится диффундировать по направлению теплового потока, а газ с меньшей молекулярной массой – в противоположную сторону, т. е. в направлении градиента температуры. В этом случае термодиффузия усиливает молекулярную диффузию.

8.3 Аналогия между тепло- и массообменом

Рассмотрим уравнения энергии, движения и диффузии, описывающие поля температуры, скорости и концентраций в раздельно идущих процессах переноса теплоты, количества движения и вещества. Физические параметры жидкости будем считать постоянными.

Уравнение энергии (без учета диффузионной составляющей теплового потока)

$$Dt/dt = a\nabla^2 t. \quad (8.9)$$

Уравнение движения (без учета массовых сил и при безнапорном движении)

$$D\mathbf{w}/dt = n\nabla^2 \mathbf{w}. \quad (8.10)$$

Уравнение диффузии (без учета термо- и бародиффузии)

$$D\mathbf{r}_i/dt = D\nabla^2 \mathbf{r}_i. \quad (8.11)$$

Уравнения (8.9) – (8.11) по записи аналогичны: они содержат коэффициенты a , ν , D , каждый из которых характеризует соответственно перенос теплоты, импульса и вещества. Единицы измерения a , ν , D одинаковы – м²/с. При подобных условиях однозначности, при $a=\nu=D$ расчетные поля температуры, скорости и концентраций будут подобны. В частности, поля температуры и отнесенных концентраций будут подобны, если $a=D$.

Аналогия процессов тепло- и массообмена часто используется на практике. Если, например, для теплообмена получено, что $Nu = \varphi(Re, Pr)$, то, исходя из аналогии процессов тепло- и массообмена, полагают $Nu_D = \psi(Re, Pr_D)$, при этом функции φ и ψ считают одинаковыми. Здесь $Nu_D = bl/D$ – диффузионное число Нуссельта; $Pr_D = \nu/D$ – диффузионное число Прандтля. Эти числа являются аналогами чисел Nu и Pr .

Как показывает проведенное сравнение отдельно протекающих процессов тепло- и массообмена, характерной особенностью массообменного процесса является наличие поперечного потока массы ($w_{y,c} \neq 0$). По-разному могут изменяться физические параметры, существенные для процессов переноса энергии и массы. Различны и граничные условия этих процессов. В результате аналогия между тепло- и массообменом нарушается. Однако в некоторых случаях она может быть использована для приближенных расчетов.

Например, при испарении воды со свободной поверхности получены следующие зависимости

$$Nu = A Re^n Pr^{0,33} Gu^{0,175} q^2;$$

$$Nu_D = B Re^m Pr_D^{0,23} Gu^{0,135} q^2,$$

где $Gu = (T_c - T_m) / T_c$ – число Гухмана (здесь T_c и T_m – температуры среды по сухому и мокрому термометрам, К); $q = T_c / T_n$ – безразмерная температура (здесь T_n – температура поверхности).

Величины A , B , m и n зависят от числа Re : при $Re=3,15 \cdot 10^3 \div 2,2 \cdot 10^4$ $A=0,51$, $n=0,61$, $B=0,49$, $m=0,61$; при $Re=2,2 \cdot 10^4 \div 3,15 \cdot 10^5$ $A=0,027$, $n=0,9$, $B=0,0247$, $m=0,9$.

Методические указания

Для расчета передачи теплоты при конвективном теплообмене основной задачей является определение коэффициента теплоотдачи α для каждого конкретного случая, но α не является физической константой, т.к. он характеризует тепловое взаимодействие двух тел: жидкости (или газа) и твердой стенки и зависит от большого количества факторов. Система дифференциальных уравнений конвективного теплообмена позволяющая найти α , может быть решена аналитически только для ограниченного числа простейших случаев, поэтому в подавляющем большинстве случаев α определяется экспериментально с привлечением теории подобия. Обработка экспериментальных данных в критериальной форме позволяет выявить главные факторы, влияющие на величину α . Так, например, при вынужденном движении жидкости определяемый критерий Nu , в который входит α , зависит в основном, от двух параметров: критерия Re , определяющего характер движения жидкости, и критерия Pr , определяющего физические свойства жидкости. Замеряя величины, входящие в эти критерии, в серии опытов получают таблицы, определяющие величину Nu (α , следовательно, α) в зависимости от значений Re и Pr . Результаты эти обычно представляют в виде степенной функции $Nu=cRe^n \cdot Pr^m$, где c, m, n – константы. По формулам

такого типа обычно и рассчитывается коэффициент теплоотдачи α .

Необходимо четко усвоить физический смысл основных критериев

(Nu , Re , Pr , Gr) и применять при расчетах те критериальные зависимости, которые соответствуют конкретному виду задачи. Переходя к изучению отдельных видов теплообмена, необходимо внимательно изучить те предположения и допущения, на базе которых строится их решение. Поэтому одной из основных задач студента является четкое усвоение ответов на следующие вопросы:

1. С помощью каких исходных аналитических зависимостей находятся определяющие критерии;
2. Какой критериальной зависимостью следует воспользоваться для конкретного случая расчета α ;
3. Каковы определяющий размер и определяющая температура;
4. Находятся ли параметры задачи в интервале значений критериев, для которых справедлива выбранная формула.

Вопросы для самопроверки.

1. Сформулируйте основной закон теплоотдачи конвекцией.
2. Какие физические свойства жидкости влияют на теплоотдачу конвекцией?
3. Как определяются режимы движения жидкости?
4. Из каких уравнений выводятся критерии Nu , Re , Pr , Gr и их физический смысл?
5. Какие критерии характеризуют вынужденную и свободную конвекцию?
6. Что характеризует критерий Nu ?
7. Что такое определяющая температура и определяющий размер?
8. Как в критериальных уравнениях учитывается направление теплового потока?

9. Что такое гидродинамический и тепловой пограничные слои?
10. При каких условиях возникает термически стабилизированное течение жидкости в трубах?
11. Особенности расчета теплоотдачи пучков труб.
12. Какие виды конденсации и какие факторы влияют на теплообмен при конденсации?
13. Какие режимы кипения жидкости и его такие кризисы кипения?
14. Какие виды диффузии и каков основной закон концентрационной диффузии?

9. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕПЛООБМЕНА ИЗЛУЧЕНИЕМ

Общие сведения о тепловом излучении

Энергия излучения возникает за счет энергии других видов в результате сложных молекулярных и внутриатомных процессов. Природа всех лучей одна и та же. Они представляют собой распространяющиеся в пространстве электромагнитные волны. Источником теплового излучения является внутренняя энергия нагретого тела. Количество энергии излучения в основном зависит от физических свойств и температуры излучающего тела. Электромагнитные волны различаются между собой или длиной волны, или частотой колебаний в секунду. Если обозначить длину волны через λ , а частоту колебаний – через N , то для лучей всех видов скорость ω в абсолютном вакууме равна $\omega = \lambda N = 300\ 000$ км/сек.

В зависимости от длины волны λ лучи обладают различными свойствами. Из всех лучей наибольший интерес для теплопередачи представляют тепловые лучи с $\lambda = 0,8\div 40$ мкм.

Излучение свойственно всем телам, и каждое из них излучает и поглощает энергию непрерывно, если температура его не равна 0°K . При одинаковых или различных температурах между телами, расположенными как угодно в пространстве, существует непрерывный теплообмен излучением.

При температурном равновесии тел количество отдаваемой энергии излучения будет равно количеству поглощаемой энергии излучения. Спектр излучения большинства твердых и жидких тел непрерывен. Эти тела испускают лучи всех длин волн, от малых до больших.

Спектр излучения газов имеет линейчатый характер. Газы испускают лучи не всех длин волн. Такое излучение называется *селективным (избирательным)*. Излучение газов носит объемный характер.

В излучении твердого тела участвуют не только поверхностные частицы, но и весьма тонкий слой определенной толщины. Суммарное излучение с поверхности тела по всем направлениям полусферического пространства и по всем длинам волн спектра называется *интегральным излучением* (Q).

Интегральный лучистый поток, излучаемый единицей поверхности по всем направлениям, называется *плотностью интегрального излучения тела*. Он

измеряется в ваттах на квадратный метр и обозначается

$$E = dQ / dF ,$$

где dQ – элементарный поток излучения, испускаемый элементом поверхности dF .

Каждое тело способно не только излучать, но и отражать, поглощать и пропускать через себя падающие лучи от другого тела. Если обозначить общее количество энергии излучения, падающей на тело, через Q , то часть энергии, равная A , поглотится телом, часть, равная R , отразится, а часть, равная D , пройдет сквозь тело. Отсюда

$$Q = Q_A + Q_R + Q_D ,$$

или

$$A + R + D = 1.$$

Величину A называют *поглощательной способностью*. Она представляет собой отношение поглощенной энергии излучения ко всей энергии излучения, падающей на тело. Величину R называют *отражательной способностью*. R есть отношение отраженной энергии излучения ко всей падающей. Величину D называют *пропускательной способностью*. D есть отношение прошедшей сквозь тело энергии излучения ко всей энергии излучения, падающей на тело. Для большинства твердых тел, практически не пропускающих сквозь себя энергию излучения, $A + R = 1$.

Если поверхность поглощает все падающие на нее лучи, т. е. $A = 1$, $R = 0$ и $D = 0$, то такую поверхность называют *абсолютно черной*. Если поверхность отражает полностью все падающие на нее лучи, то такую поверхность называют *абсолютно белой*. При этом $D = 0$, $A = 0$, $R = 1$. Если тело абсолютно прозрачно для тепловых лучей, то $D = 1$, $R = 0$ и $A = 0$. В природе абсолютно черных, белых и прозрачных тел не существует, тем не менее, понятие о них является очень важным для сравнения с реальными поверхностями.

Кварц для тепловых лучей непрозрачен, а для световых и ультрафиолетовых прозрачен. Каменная соль прозрачна для тепловых и непрозрачна для ультрафиолетовых лучей. Оконное стекло прозрачно для световых лучей, а для ультрафиолетовых и тепловых почти непрозрачно. Белая поверхность (ткань, краска) хорошо отражает лишь видимые лучи, а тепловые лучи поглощает так же хорошо, как и темная. Таким образом, свойства тел поглощать или отражать тепловые лучи зависят в основном от состояния поверхности, а не от ее цвета.

Если поверхность правильно отражает лучи (т.е. отражение следует законам геометрической оптики), то такую поверхность называют *зеркальной*. Если

падающий луч при отражении расщепляется на множество лучей, идущих по всевозможным направлениям, то такое отражение называют *диффузным*.

При исследовании потоков излучения большое значение имеет распределение энергии излучения, испускаемой абсолютно черным телом по отдельным длинам волн спектра. Каждой длине волны лучей при определенной температуре соответствует определенная интенсивность излучения I_{λ} . *Интенсивность излучения*, или *спектральная* (монохроматическая) интенсивность излучения, представляет собой плотность потока излучения тела для длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$, отнесенная к рассматриваемому интервалу длин волн $d\lambda$

$$I_{\lambda} = \frac{dF_{\lambda}}{d\lambda}, \quad (9.1)$$

где I_{λ} – спектральная интенсивность излучения абсолютно черного тела, Вт/м³.

Основной закон поглощения

Излучать и поглощать энергию могут твердые и жидкие реальные тела конечной толщины, а также трех- и многоатомные газы. Если на какое-либо тело падает луч интенсивностью I_{11} , то этот луч частично поглощается и выходит с другой стороны тела с интенсивностью I_{12} , меньшей, чем I_{11} . Коэффициент поглощения для луча с данной длиной волны определяется из уравнения

$$A_I = (I_{11} - I_{12}) / I_{11}. \quad (a)$$

Опыты показывают, что падение интенсивности dI_I пропорционально начальной интенсивности I_I , пути dx и зависит от свойств тела

$$dI = -kI_I dx.$$

Знак минус в правой части указывает на убывание интенсивности. Коэффициент пропорциональности k , зависящий от физических свойств тела, температуры и длины волны, называется *коэффициентом абсорбции*, или *коэффициентом поглощения вещества*, для лучей с данной длиной волны; k имеет размерность 1/м.

Разделяя переменные, получаем

$$dI_1 / I_1 = -kdx.$$

Интегрируя данное уравнение в пределах от $x=0$ до $x=s$, находим

$$\int_{I_{11}}^{I_{12}} dI_1 / I_1 = - \int_0^s kdx,$$

откуда при $k=const$

$$\ln I_{12} / I_{11} = -ks \text{ или } I_{12} / I_{11} = e^{-ks} \text{ и } I_{12} = I_{11}e^{-ks}.$$

Следовательно, коэффициент поглощения

$$A_1 = \frac{I_{11} - I_{12}}{I_{11}} = \frac{I_{11} - I_{11}e^{-ks}}{I_{11}} = 1 - e^{-ks} = 1 - \frac{1}{e^{ks}}. \quad (9.2)$$

Полученное уравнение показывает, что A_1 зависит от коэффициента абсорбции k и толщины слоя тела s . При толщине $s = 0$ коэффициент $A_1 = 0$, т.е. поглощение может происходить только в слое вещества конечной толщины. Если $s = \infty$, то $A_1 = 1$, т.е. слой большой толщины поглощает луч целиком, как абсолютно черное тело. На величину A_1 влияет также коэффициент абсорбции k : если k велик, то поглощение происходит в тонком поверхностном слое. В связи с этим состояние поверхности тела оказывает большое влияние на его поглощательную и излучательную способности. Если $k = 0$, то и $A_1 = 0$.

Основные законы теплового излучения

Закон Планка. Интенсивности излучения абсолютно черного тела I_{s1} и любого реального тела I_1 зависят от температуры и длины волны.

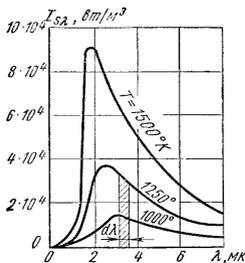


Рис. 9.1.

Абсолютно черное тело при данной температуре испускает лучи всех длин волн от $\lambda = 0$ до $\lambda = \infty$, но распределение энергии вдоль спектра различно.

По мере увеличения длины волны энергия лучей возрастает, при некоторой длине волны достигает максимума, затем убывает. Кроме того, для луча одной и той же длины волны энергия его увеличивается с возрастанием температуры тела, испускающего лучи (рис. 9.1).

Планк теоретически, исходя из электромагнитной природы излучения и используя представление о квантах энергии, установил следующий закон изменения интенсивности излучения абсолютно черного тела в зависимости от температуры и длины волны

$$I_{s\lambda} = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1}, \quad (9.3)$$

где e – основание натуральных логарифмов; $c_1 = 3,74 \cdot 10^{-16}$ Вт/м² – первая постоянная Планка; $c_2 = 1,44 \cdot 10^{-2}$ м·град – вторая постоянная Планка; λ – длина волны; T – температура излучающего тела, °К.

Из рис. 9.1 видно, что для любой температуры интенсивность излучения $I_{s\lambda}$ возрастает от нуля при $\lambda = 0$ до своего наибольшего значения при определенной длине волн, а затем убывает до нуля при $\lambda = \infty$. При повышении температуры интенсивность излучения для каждой длины волны возрастает.

Кроме того, из рис.9.1 видно, что максимумы кривых с повышением температуры смещаются в сторону более коротких волн. Длина волны I_{ms} в миллиметрах, отвечающая максимальному значению $I_{s\lambda}$, определяется законом смещения Вина

$$I_{ms} = 2,9/T. \quad (9.4)$$

С увеличением температуры I_{ms} уменьшается, что и следует из закона.

Закон Стефана – Больцмана. Аналитическое выражение закона Стефана – Больцмана можно получить, используя закон Планка. Тепловой поток, излучаемый единицей поверхности черного тела в интервале длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$, может быть определен из уравнения

$$dE_s = I_{s\lambda} d\lambda.$$

Элементарная площадка на рис.9.1, ограниченная кривой $T = \text{const}$, основанием $d\lambda$ и ординатами λ и $\lambda + d\lambda$ ($I_{s\lambda}$), определяет количество энергии излучения dE_s и называется *плотностью интегрального излучения* абсолютно черного тела для длин волн $d\lambda$. Вся же площадь между любой кривой $T = \text{const}$ и осью абсцисс равна интегральному излучению черного тела в пределах от $\lambda = 0$ до $\lambda = \infty$ при данной температуре, или

$$E_s = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} I_{s\lambda} d\lambda.$$

Подставляя в полученное уравнение закон Планка, получим

$$E_s = \int_{l=0}^{l=\infty} \frac{c_1 l^{-5}}{e^{c_2/lT} - 1} dl$$

и, интегрируя, найдем

$$E_s = \sigma_s T^4, \quad (9.5)$$

где $\sigma_s = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ – постоянная Стефана-Больцмана.

Таким образом, плотность интегрального полусферического излучения (тепловой поток) абсолютно черного тела прямо пропорциональна абсолютной температуре в четвертой степени.

Обычно в технической литературе закон Стефана–Больцмана пишут в следующем виде

$$E_s = C_s (T/1000)^4, \quad (9.6)$$

где C_s – коэффициент излучения абсолютно черного тела

$$C_s = 5,67 \text{ Вт}/[\text{м}^2/(\text{К}^4)].$$

Все реальные тела, используемые в технике, не являются абсолютно черными и при одной и той же температуре излучают меньше энергии, чем абсолютно черное тело. Излучение реальных тел также зависит от температуры и длины волны. Чтобы законы излучения черного тела можно было применить для реальных тел, вводится понятие о сером теле и сером излучении. Под серым излучением понимают такое, которое, аналогично излучению черного тела, имеет сплошной спектр, но интенсивность лучей для каждой волны длины I_l при любой температуре составляет неизменную долю от интенсивности излучения черного тела I_{sl} (рис. 9.2). Следовательно, должно существовать следующее соотношение

$$I_l / I_{sl} = e = const. \quad (9.7)$$

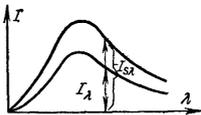


Рис. 9.2

Величину e называют спектральной *степенью черноты*. Она зависит от физических свойств тела. Степень черноты серых тел всегда меньше единицы.

Большинство реальных твердых тел с определенной степенью точности можно читать серыми телами, а их излучение – серым излучением.

Плотность интегрального излучения серого тела равна

$$E = \int_{l=0}^{l=\infty} I_l dI ,$$

но $I_l = eI_{s l}$, поэтому

$$E = \int_{l=0}^{l=\infty} I_{s l} dI = eE_s = eC_s (T/100)^4 = C(T/100)^4 . \quad (9.8)$$

Плотность интегрального излучения серого тела составляет долю, равную e от плотности интегрального излучения абсолютно черного тела.

Величину $C = eC_s$ Вт/[$(\text{м}^2 \cdot \text{К})^4$] называют *коэффициентом излучения серого тела*. Величина C реальных тел в общем случае зависит не только от физических свойств тела, но и от состояния поверхности или от ее шероховатости, а также от температуры и длины волны.

Закон Кирхгофа. Для всякого тела энергия излучения и энергия поглощения зависят от температуры и длины волны. Различные тела имеют различные значения E и A . Зависимость между ними устанавливается законом Кирхгофа. Рассмотрим теплообмен излучением между двумя параллельными пластинами с неодинаковыми температурами, причем первая пластина является абсолютно черной с температурой T_s , вторая – серой с температурой T . Расстояние между пластинами значительно меньше их размеров, так что излучение каждой из них обязательно попадает на другую.

Вторая поверхность излучает на первую по закону Стефана –Больцмана энергию E , которая полностью поглощается черной поверхностью. В свою очередь первая поверхность излучает на вторую энергию E_s . Часть энергии $E_s A$ поглощается серой поверхностью, а оставшаяся энергия $(1 - A) E_s$ отражается на первую и ею полностью поглощается. При этих условиях серая поверхность получает энергию в количестве $E_s A$, а расходует E . Следовательно, уравнение теплового баланса имеет вид

$$Q = E - E_s A .$$

При равенстве температур T и T_s тепловой поток Q равен нулю. Отсюда получаем

$$E = E_s A \text{ или } E / A = E_s / A_s = C_s (T/100)^4 . \quad (9.9)$$

Так как вместо второго тела можно взять любое другое, то уравнение (9.9) справедливо для любых тел и является математическим выражением закона Кирхгофа.

Отношение излучательной способности тела к его поглощательной способности одинаково для всех серых тел, находящихся при одинаковых температурах, и равно излучательной способности абсолютно черного тела при той же температуре.

Из закона Кирхгофа следует, что если тело обладает малой поглощательной способностью, то оно одновременно обладает и малой *излучательной способностью* (полированные металлы). Абсолютно черное тело, обладающее максимальной поглощательной способностью, имеет и наибольшую *излучательную способность*.

Закон Кирхгофа остается справедливым и для монохроматического излучения. Отношение интенсивности излучения тела при определенной длине волны к его поглощательной способности при той же длине волны для всех тел одно и то же, если они находятся при одинаковых температурах, и численно равно интенсивности излучения абсолютно черного тела при той же длине волны и температуре, т.е. является функцией только длины волны и температуры

$$E_l / A_l = I_l / A_l = E_{s,l} = I_{s,l} = f(l, T). \quad (9.10)$$

Поэтому тело, которое излучает энергию при какой-нибудь длине волны, способно поглощать ее при этой же длине волны. Если тело не поглощает энергию в какой-то части спектра, то оно в этой части спектра и не излучает.

Из закона Кирхгофа также следует, что степень черноты серого тела e при одной и той же температуре численно равна коэффициенту поглощения A

$$e = I_l / I_{s,l} = E / E_s = C / C_s = A.$$

Закон Ламберта. Энергия, излучаемая телом, распространяется в пространстве с различной интенсивностью. Закон, устанавливающий зависимость интенсивности излучения от направления, называется *законом Ламберта*.

Согласно закону Ламберта количество энергии, излучаемое элементом поверхности dF_1 в направлении элемента dF_2 , пропорционально произведению количества энергии, излучаемого по нормали dQ_n , на величину пространственного угла dw и $\cos\varphi$, составленного направлением излучения с нормалью (рис.9.3, а)

$$d^2Q_j = dQ_n dw \cos j ,$$

или

$$d^2Q_j = E_n dF_1 dw \cos j , \quad (9.11)$$

где E_n – энергия излучения в направлении нормали.

Следовательно, наибольшее количество энергии излучается в перпендикулярном направлении к поверхности излучения, т.е. при $\varphi = 0$. С увеличением φ количество энергии излучения уменьшается и при $\varphi = 90^\circ$ равно нулю.

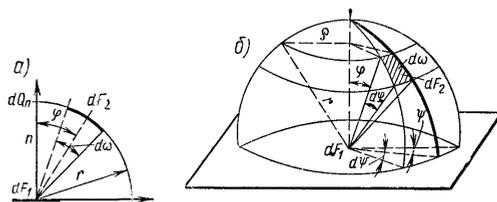


Рис. 9.3

Для определения величины E_n необходимо уравнение (9.11) проинтегрировать по поверхности полусферы, лежащей над плоскостью dF_1 (рис.9.3, б).

Телесный угол dw представляет собой угол, под которым из какой-либо точки dF_1 видна площадка dF_2 на поверхности сферы радиусом r . Отсюда следует, что

$$dw = dF_2 / r^2,$$

или

$$dw = \sin j \, dy \, dj ,$$

где φ – угол, дополнительный к углу широты; ψ – угол долготы.

Подставляя полученное выражение в уравнение (9.11), имеем

$$d^2 Q_j = E_n dF_1 \sin j \, dy \, dj \cos j .$$

Проинтегрируем это выражение по всей поверхности полусферы, т.е. в пределах изменения угла φ от 0 до $\pi/2$ и угла ψ от 0 до 2π .

В результате интегрирования найдем энергию, излучаемую элементом dF_1 , в пределах полусферы, равную EdF_1 . Следовательно,

$$EdF_1 = E_n dF_1 \int_{y=0}^{2\pi} dy \int_{j=0}^{\pi/2} \sin j \cos j \, dj = \pi E_n dF_1 ,$$

откуда

$$E_n = E/p = \frac{1}{p} C(T/100)^4 = \frac{e}{p} C_0(T/100)^4.$$

Из последнего уравнения следует, что энергия излучения в направлении нормали в π раз меньше плотности интегрального полусферического излучения абсолютно черного (или серого) тела, определяемого по закону Стефана – Больцмана. Поэтому уравнение закона Ламберта (9.11) принимает вид

$$d^2 Q_j = \frac{e}{p} C_0(T/100)^4 dw \cos j dF_1. \quad (9.11')$$

Последняя формула получена для интегрального излучения элемента dF_1 , но она останется в силе и для монохроматического излучения.

Формула (9.11') является основой для расчета лучистого теплообмена между поверхностями конечных размеров.

Закон Ламберта полностью справедлив для абсолютно черного или серого тела, а для тел, обладающих диффузным излучением, только в пределах

$$\varphi = 0-60^\circ.$$

Теплообмен излучением между твердыми телами

Параллельные пластины

Закон Стефана – Больцмана позволяет определить плотность собственного излучения E_l , которое возникает в поверхностном слое тела и полностью определяется его температурой и физическими свойствами. Если тело участвует в теплообмене излучением с другими телами, то на рассматриваемое тело падает извне энергия излучения в количестве $E_{пад}$. Часть падающей энергии излучения в количестве $AE_{пад}$ телом поглощается и превращается в его внутреннюю энергию. Остальная часть энергии излучения в количестве $RE_{пад}$ отражается от тела. Сумма собственного и отраженного излучений, испускаемых поверхностью данного тела, называется *эффективным излучением*

$$E_{эф} = E_{соб} + RE_{пад} = E_{соб} + (1 - A)E_{пад}.$$

Эффективное излучение зависит не только от физических свойств и температуры данного тела, но и от физических свойств, температуры и спектра излучения других окружающих тел. Кроме того, оно зависит от формы, размеров

и относительного расположения тел в пространстве. Вследствие этого физические свойства эффективного и собственного излучений неодинаковы и спектры их излучения различны.

Для черного тела $E_{эф} = E_{соб}$, т.к. для него $E_{отр} = 0$.

Рассмотрим теплообмен излучением между двумя серыми параллельными пластинами, разделенными прозрачной средой. Размеры пластин значительно больше расстояния между ними, так что излучение одной из них будет полностью попадать на другую. Поверхности пластин подчиняются закону Ламберта. Обозначим: температуры пластин T_1 и T_2 , коэффициенты поглощения A_1 и A_2 ; собственные излучения пластин, определяемые по закону Стефана-Больцмана, E_1 и E_2 , эффективные излучения пластин $E_{1эф}$ и $E_{2эф}$ коэффициенты излучения C_1 и C_2 . Полагаем, что $T_1 > T_2$.

Первая пластина излучает на вторую энергию; вторая пластина часть этой энергии поглощает, а часть отражает обратно на первую, где снова первая пластина часть поглощает и часть излучает обратно на вторую, и т. д.

Суммарный поток излучения первой пластины, состоящий из собственного излучения E_1 и отраженного излучения второй пластины $(1-A_1)E_{2эф}$, находим из уравнения

$$E_{1эф} = E_1 + (1 - A_1)E_{2эф}.$$

Аналогично найдем суммарное излучение второй пластины

$$E_{2эф} = E_2 + (1 - A_2)E_{1эф}.$$

Решая эти два уравнения относительно $E_{1эф}$ и $E_{2эф}$, получаем

$$E_{1эф} = \frac{E_1 + E_2 - A_1 E_2}{A_1 + A_2 - A_1 A_2}; \quad E_{2эф} = \frac{E_1 + E_2 - A_2 E_1}{A_1 + A_2 - A_1 A_2}.$$

Тепловое излучение, получаемое второй пластиной, находим из уравнения

$$q = E_{1эф} - E_{2эф}.$$

Подставляя значение $E_{1эф}$ и $E_{2эф}$ и произведя соответствующие преобразования, получаем

$$q = \frac{A_2 E_1 - A_1 E_2}{A_1 + A_2 - A_1 A_2} = \frac{A_2 A_1 C_s (T_1 / 100)^4 - A_1 A_2 C_s (T_2 / 100)^4}{A_1 + A_2 - A_1 A_2},$$

или

$$q = \frac{(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4}{\frac{A_1}{A_1 A_2 C_s} + \frac{A_2}{A_1 A_2 C_s} - \frac{A_1 A_2}{A_1 A_2 C_s}} = \frac{(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_s}}.$$

Таким образом, тепловое излучение между параллельными поверхностями определяется уравнением

$$Q = C_{np} [(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4] F, \quad (9.12)$$

где $C_{np} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_s}}$ – приведенный коэффициент излучения.

Вместо C_{np} в расчетах можно применять приведенную степень черноты системы тел в следующем виде

$$C_{np} = e_{np} C_s,$$

где e_{np} – приведенная степень черноты системы

$$e_{np} = \frac{1}{\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} - 1}. \quad (9.13)$$

Теплообмен излучением между телами, одно из которых находится внутри другого

В технике часто приходится решать задачи теплообмена излучением, когда одно тело находится внутри другого (рис. 9.4). Поверхность внутреннего тела выпуклая; внутренняя поверхность внешнего тела вогнутая.

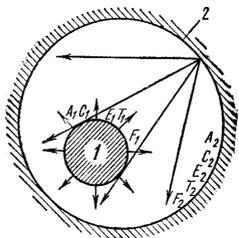


Рис. 9.4.

внешнего тела.

Обозначим величины внутреннего тела через A_1 , C_1 , e_1 , T_1 , F_1 и внешнего – A_2 , C_2 , e_2 , T_2 , F_2 . В отличие от теплообмена между параллельными пластинами в данном случае на внутреннее тело падает лишь часть ϕ от эффективного излучения внешнего тела. Остальная часть энергии излучения $(1-\phi)$ падает на поверхность

Эффективное излучение внутреннего тела состоит из собственного излучения и отраженного, полученного от внешнего тела

$$E_{1\rightarrow\phi} = E_1 F_1 + (1 - A_1) j E_{2\rightarrow\phi}. \quad (\text{а})$$

Эффективное излучение внешнего тела состоит из собственного излучения, отраженного от внутреннего тела, и отраженного собственного излучения

$$E_{2\rightarrow\phi} = E_2 F_2 + (1 - A_2) E_{1\rightarrow\phi} + (1 - A_2)(1 - j) E_{2\rightarrow\phi}. \quad (\text{б})$$

Величина теплообмена излучением между телами равна

$$Q = E_{1\rightarrow\phi} - E_{2\rightarrow\phi}.$$

Решая совместно уравнения (а) и (б) и подставляя $E_{1\rightarrow\phi}$ и $E_{2\rightarrow\phi}$ в последнее уравнение, получаем

$$Q = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{F_1}{F_2} \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_s} \right)} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] F_1. \quad (9.14)$$

Обозначим величину $\frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{F_1}{F_2} \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_s} \right)}$ через C_{np} .

Тогда теплообмен излучением между телами, когда одно из них находится внутри другого, определяется уравнением

$$Q = C_{np} F_1 \left[(T_1 / 100)^4 - (T_2 / 100)^4 \right]. \quad (9.15)$$

Если вместо C_{np} в расчете применить приведеную степень черноты системы тел, то уравнение теплообмена излучением имеет следующий вид

$$Q = \frac{1}{\frac{1}{e_1} + \frac{F_1}{F_2} (e_2 - 1)} C_s F_1 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]. \quad (9.16)$$

Если поверхность F_1 мала по сравнению с поверхностью F_2 , то отношение F_1 / F_2 приближается к нулю и $C_{np} = C_1$, уравнение теплообмена принимает вид

$$Q = C_1 F_1 \left[(T_1 / 100)^4 - (T_2 / 100)^4 \right]. \quad (9.17)$$

Произвольно расположенные тела.

Рассмотрим диффузно излучающие и диффузно отражающие поверхности. Для каждой из них заданы радиационные характеристики и температура. Во всех расчетах теплообмена излучением важную роль играет геометрия системы. Она учитывается с помощью угловых *коэффициентов излучения* (коэффициентов облученности). Угловой коэффициент определяет долю диффузно распределенной энергии излучения, которая передается с одной поверхности на другую. Физический смысл углового коэффициента можно уяснить на примере двух поверхностей. Поток излучения, покидающий поверхность 1, равномерно распределяется по полусфере над этой поверхностью. Если в рассматриваемом пространстве над поверхностью 1 располагается другая поверхность 2 с определенной площадью, то угловой коэффициент ϕ_{12} определяет ту часть энергии излучения, которая попадает с поверхности 1 на поверхность 2

$$j_{12} = Q_{1 \rightarrow 2} / Q_1; j_{21} = Q_{2 \rightarrow 1} / Q_2. \quad (9.18)$$

Первый индекс относится к излучающей поверхности, второй – к облучаемой. Угловые коэффициенты обладают свойством взаимности, т.е.

$$j_{12}F_1 = j_{21}F_2. \quad (9.19)$$

В замкнутой системе вся энергия излучения, исходящая с любой поверхности, распределяется по остальным поверхностям системы так, что

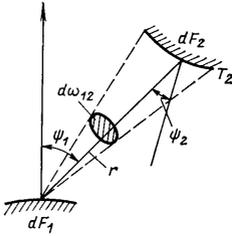
$$\sum_{j=1}^n j_{ij} = 1, \quad (9.20)$$

где n – число поверхностей, образующих замкнутую систему.

Это свойство угловых коэффициентов называется свойством замыкаемости.

Рассмотрим два черных тела с температурами T_1 и T_2 . Поток теплоты от элемента поверхности тела 1 dF_1 , к элементу поверхности тела 2 dF_2 в соответствии с рисунком 9.5 будет равен

$$dQ_{12} = I_1 \cos \gamma_1 dw_{12}, \quad (9.21)$$



где $d\omega_1 = dF_2 \cos \psi_2 / r^2$ – телесный угол, под которым из dF_1 видна площадка dF_2 ; r – расстояние между ними.

Полный поток излучения, исходящий от площади dF_1 ,

$$Q_1 = pI_1.$$

Рис. 9.5. По определению угловой коэффициент между двумя элементарными площадками равен

$$dj_{12} = \frac{dQ_{12}}{Q_1} = \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2 dF_2}{pr^2}. \quad (9.22)$$

Средние угловые коэффициенты для двух тел можно получить интегрированием (9.22) по их поверхностям

$$j_{12} = \frac{1}{F_1} \int \int_{F_1 F_2} \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2 dF_1 dF_2}{pr^2}, \quad (9.23)$$

$$j_{21} = \frac{1}{F_2} \int \int_{F_1 F_2} \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2 dF_1 dF_2}{pr^2}. \quad (9.24)$$

Результирующий полный поток излучения между телами 1 и 2

$$Q_{12} = E_1 F_1 j_{12} - E_2 F_2 j_{21}. \quad (9.25)$$

В соответствии с законом Стефана – Больцмана

$$Q_{12} = s_0 [T_1^4 F_1 j_{12} - T_2^4 F_2 j_{21}], \quad (9.26)$$

или с учетом свойства взаимности

$$Q_{12} = s_0 (T_1^4 - T_2^4) F_1 j_{12} = s_0 (T_1^4 - T_2^4) F_2 j_{21}. \quad (9.27)$$

Результирующий полный поток излучения для системы, состоящей из серых тел, найдем, используя потоки эффективного излучения

$$Q_{12} = E_{\text{эф}1} F_1 j_{12} - E_{\text{эф}2} F_2 j_{21}, \quad (9.28)$$

откуда найдем

$$Q_{12} = \frac{s_0(T_1^4 - T_2^4)F_j j_{12}}{1 + j_{12}(1/e_1 - 1) + j_{21}(1/e_2 - 1)},$$

или

$$Q_{12} = s_0 e_{np} (T_1^4 - T_2^4) F_j j_{12}, \quad (9.29)$$

где

$$e_{np} = [1 + j_{12}(1/e_1 - 1) + j_{21}(1/e_2 - 1)]^{-1} \quad (9.30)$$

– приведенная степень черноты пары тел, являющаяся оптико-геометрическим параметром.

Экраны

Всегда, когда необходимо уменьшить передачу теплоты излучением, прибегают к установке экранов. Обычно экран представляет собой тонкий металлический лист с большой отражательной способностью. Температуры обеих поверхностей экрана можно считать одинаковыми.

Рассмотрим действие экрана между двумя плоскими безграничными параллельными поверхностями, причем передачей теплоты конвекцией будем пренебрегать. Поверхности стенок и экрана считаем одинаковыми. Температуры стенок T_1 и T_2 поддерживаются постоянными, причем $T_1 > T_2$. Допускаем, что коэффициенты излучения стенок и экрана равны между собой. Тогда приведенные коэффициенты излучения между поверхностями без экрана, между первой поверхностью и экраном, экраном и второй поверхностью равны между собой.

Тепловой поток, передаваемый от первой поверхности ко второй (без экрана), определяем из уравнения

$$q_0 = C_{np} [(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4].$$

Тепловой поток, передаваемый от первой поверхности к экрану, находим по формуле

$$q_1 = C_{np} [(T_1/100)^4 - (T_{эк}/100)^4],$$

а от экрана ко второй поверхности – по уравнению

$$q_2 = C_{np} \left[(T_{эк} / 100)^4 - (T_2 / 100)^4 \right].$$

При установившемся теплоом состоянии $q_1 = q_2$, поэтому

$$C_{np} \left[(T_1 / 100)^4 - (T_{эк} / 100)^4 \right] = C_{np} \left[(T_{эк} / 100)^4 - (T_2 / 100)^4 \right],$$

откуда

$$(T_{эк} / 100)^4 = \frac{1}{2} \left[(T_1 / 100)^4 + (T_2 / 100)^4 \right].$$

Подставляя полученную температуру экрана в любое из уравнений, получаем

$$q_{1-2} = \frac{1}{2} C_{np} \left[(T_1 / 100)^4 - (T_2 / 100)^4 \right].$$

Сравнивая первое и последнее уравнения, находим, что установка одного экрана при принятых условиях уменьшает теплоотдачу излучением в два раза

$$q_{1-2} = \frac{1}{2} q_0. \quad (9.31)$$

Можно доказать, что установка двух экранов уменьшает теплоотдачу втрое, установка трех экранов уменьшает теплоотдачу вчетверо и т. д. Значительный эффект уменьшения теплообмена излучением получается при применении экрана из полированного металла, тогда

$$q_1 = 0,5 \left(\frac{C'_{np}}{C_{np}} \right) q_0, \quad (9.32)$$

где C'_{np} – приведенный коэффициент излучения между поверхностью и экраном; C_{np} – приведенный коэффициент излучения между поверхностями.

9.6 Излучение газов

Излучение газообразных тел резко отличается от излучения твердых тел. Одноатомные и двухатомные газы обладают ничтожно малой излучательной и поглощательной способностью. Эти газы считаются прозрачными для тепловых лучей. Трехатомные (CO_2 и H_2O и др.) и многоатомные газы уже обладают значительной излучательной, а следовательно, и поглощательной способностью. При высокой температуре излучение трехатомных газов, образующихся при

сгорания топлив, имеет большое значение для работы теплообменник устройств. Спектры излучения трехатомных газов в отличие от излучения серых тел имеют резко выраженный селективный (избирательный) характер. Эти газы поглощают и излучают энергию только в определенных интервалах длин волн, расположенных в различных частях спектра (рис. 9.6). Для лучей с другими длинами волн эти газы прозрачны. Когда луч встречает на своем пути слой газа,

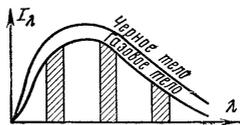


Рис. 9.6

способного к поглощению луча с данной длиной волны, то этот луч частично поглощается, частично проходит через толщу газа и выходит с другой стороны слоя с интенсивностью меньшей, чем при входе. Слой очень большой толщины может практически поглотить луч целиком. Кроме того, поглощательная способность газа зависит от его парциального давления или числа молекул и температуры. Излучение и поглощение энергии в газах происходит по всему объему.

Коэффициент поглощения газа может быть определен следующей зависимостью

$$A_l = f(T_g, p, s)$$

или общим уравнением (9.2)

$$A_l = 1 - \frac{1}{e^{ks}}$$

Толщина слоя газа s зависит от формы тела и определяется как средняя длина луча по табл. 9.1.

Давление продуктов сгорания обычно принимают равным 1 бар, поэтому парциальные давления трехатомных газов в смеси определяют по уравнениям $p_{CO_2} = r_{CO_2}$ и $p_{H_2O} = r_{H_2O}$, где r – объемная доля газа.

Средняя температура стенки подсчитывается по уравнению

$$T_{cm} = T'_{cm} + T''_{cm} / 2, \quad (9.33)$$

где T'_{cm} – температура стенки канала у входа газа; T''_{cm} – температура стенки канала у выхода газа.

Таблица 9.1

Средняя длина лучей для газов, заполняющих объем различной формы

Форма объема, заполненного газом	
Цилиндр – высота равна диаметру, излучение на боковую поверхность	0,6d
Цилиндр – высота равна ∞	0,9d
Шар диаметром d	0,6d
Плоскопараллельный газовый слой толщиной h и бесконечных диаметров	1,8h
Куб со стороной h	0,6h
Пучок труб: – с расстоянием между поверхностями труб l и при расположении их по треугольнику l=d	2,8l
– по треугольнику l=2d	3,8l
– по квадрату l=d	3,5l

Средняя температура газа определяется по формуле

$$T_z = \frac{T'_{cm} + T''_{cm}}{2} \pm \frac{(T'_z - T'_{cm}) - (T''_z - T''_{cm})}{\ln \frac{(T'_z - T'_{cm})}{(T''_z - T''_{cm})}}, \quad (9.34)$$

где T'_z – температура газа у входа в канал; T''_z – температура газа у выхода из канала; знак плюс берется в случае охлаждения, а минус – в случае нагревания газа в канале.

Расчет теплообмена излучением между газом и стенками канала очень сложен и выполняется с помощью целого ряда графиков и таблиц. Более простой и вполне надежный метод расчета разработан Шаком, который предлагает следующие уравнения, определяющие излучение газов в среду с температурой 0°K

$$q_{CO_2} = 4,07 \sqrt[3]{ps} (T/100)^{3,5}, \quad (9.35)$$

$$q_{H_2O} = 40,7 p^{0,8} s^{0,6} (T/100)^3, \quad (9.36)$$

где p – парциальное давление газа, бар; s – средняя толщина слоя газа, м; T – средняя температура газов и стенки, °K.

Анализ приведенных уравнений показывает, что излучательная способность газов не подчиняется закону Стефана – Больцмана. Излучение водяного пара пропорционально T^3 , а излучение углекислого газа – $T^{3,5}$.

По этим же формулам вычисляется теплота, поглощаемая газами от излучения стенок канала, но вместо средней температуры газов в них берется средняя температура стенок канала.

Таким образом, количество теплоты, воспринятое стенками канала в результате теплообмена излучением между газом и стенкой находим из уравнения

$$q_{изл} = e'_{cm} (q_2 - q_{cm}), \quad (9.37)$$

где e'_{cm} – эффективная степень черноты поверхностей канала
 $e'_{cm} = \frac{e_{cm} + 1}{2}$; q_2 – количество теплоты, излучаемое углекислым газом и водяным паром при средней температуре газа; q_{cm} – количество теплоты, поглощаемое углекислым газом и водяным паром при средней температуре стенок канала.

Полученный суммарный тепловой поток излучением $q_{изл}$ используется для определения коэффициента теплоотдачи излучением

$$a_{изл} = \frac{q_{изл}}{T_2 - T_{cm}}. \quad (9.38)$$

Многие авторы для практических расчетов излучения газов рекомендуют пользоваться законом четвертых степеней, или законом Стефана – Больцмана.

Расчетное уравнение лучистого теплообмена между газом и стенками канала в этом случае имеет следующий вид

$$q_{изл} = e'_{cm} C_s \left[(e_2 (T_2 / 100)^4 - e'_2 (T_{cm} / 100)^4) \right], \quad (9.39)$$

где $e'_{cm} = \frac{e_{cm} + 1}{2}$ – эффективная степень черноты стенок канала, учитывающая излучение газа; $C_s = 5,67$ – коэффициент излучения абсолютно черного тела, Вт/[м²·(°K)⁴]; $e_2 = q_2 / q_s$ – отношение количества энергии излучения газа к количеству излучения абсолютно черного тела и отнесенное к 1 м² поверхности; e_2 определяется по формуле

$$e_2 = e_{co_2} + \beta e_{H_2O} - \Delta e_2;$$

величины e_{co_2} , e_{H_2O} и β определяют по графикам на рис. 9.7, 9.8 и 9.9; Δe_2 – поправка, учитывающая взаимное поглощение энергии излучения газом; для дымовых газов это поправка составляет 2-4%, поэтому ею обычно пренебрегают; β – поправочный коэффициент, учитывающий более сильное влияние парциального давления по сравнению с влиянием толщины слоя газа; T_2 – средняя температура газа, °K; $e'_2 = e'_{co_2} + \beta e'_{H_2O}$ – поглощательная способность газа при средней температуре стенок канала; определяется по тем же графикам; T_{cm} – средняя температура стенок канала, °K.

В дальнейшем $q_{изл}$ используется для определения коэффициента теплоотдачи излучением в формуле (9.38).

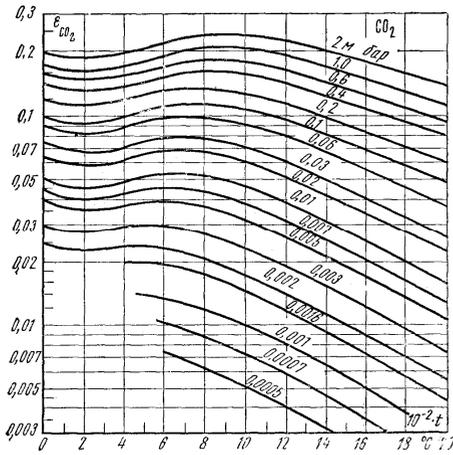


Рис. 9.7

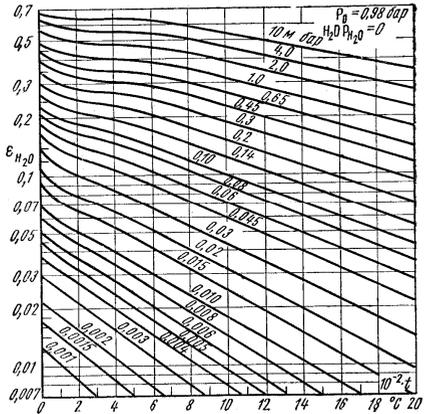


Рис. 9.8

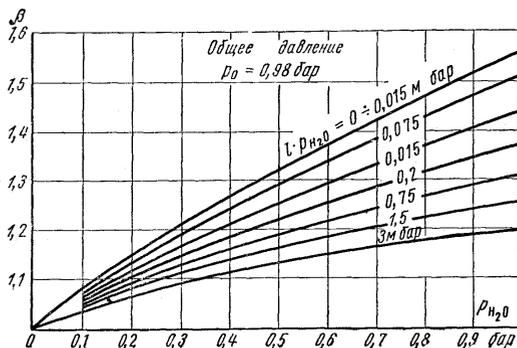


Рис. 9.9

9.7 Сложный теплообмен

Обычно передача теплоты от тела с высокой температурой к телу с низкой температурой происходит через разделительную стенку. При этом в передаче теплоты одновременно принимают участие все виды теплообмена – теплопроводность, конвекция и излучение, которые были подробно изучены в предыдущих главах. Теплообмен, учитывающий все виды теплообмена, называется *сложным теплообменом* (рис. 9.10).

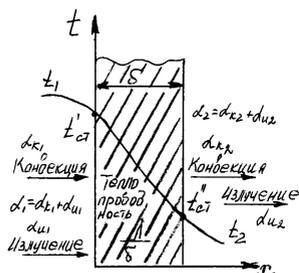


Рис. 9.10

$$q = a(t_2 - t_{cm}), \quad (9.40)$$

где a – суммарный коэффициент теплоотдачи. Этот коэффициент входит в уравнение коэффициента теплопередачи.

В этом случае уравнение коэффициента теплопередачи для плоской стенки принимает вид

Количественной характеристикой процесса теплообмена от газа к стенке (или наоборот) является суммарный коэффициент теплоотдачи $a = a_k + a_u$, где a_k учитывает передачу теплоты теплопроводностью и конвекцией, а a_u – передачу теплоты излучением.

Плотность теплового потока рассчитываемого теплового аппарата определяется по уравнению

$$k = \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{d}{l} + \frac{1}{a_2}} = \frac{1}{\frac{1}{a_{k1} + a_{u1}} + \frac{d}{l} + \frac{1}{a_{k2} + a_{u2}}}.$$

В дальнейшем будем обозначать буквой α_1 или α_2 суммарный коэффициент теплоотдачи, учитывающий конвекцию, теплопроводность и излучение.

Методические указания.

В отличие от теплопроводности и конвекции в процессе теплообмена излучением осуществляется двойное превращение энергии – сначала тепловой энергии в энергию электромагнитного излучения, а затем энергии электромагнитного излучения в тепловую энергию. Основные законы излучения и данные об оптических свойствах отдельных тел позволяют решать конкретные задачи, связанные с лучистым теплообменом. Поэтому необходимо четко усвоить законы Планка, Вина, Кирхгофа, Стефана-Больцмана, методику их применения для расчета лучистого теплообмена. Поскольку в практике, как правило, участвуют все виды теплообмена (теплопроводность, конвекция и излучение) совместно, то при решении тех или иных задач необходимо четко представлять себе:

- а) все ли виды теплообмена имеются в рассматриваемом случае;
- б) какой из видов теплообмена является преобладающим по сравнению с другими;
- в) можно ли пренебречь каким-либо видом теплообмена с целью упрощения решения задач.

Вопросы для самопроверки.

1. Что происходит с лучистой энергией, падающей на поверхность твердого тела?
2. Что такое абсолютно черное, серое, прозрачное тело?
3. Как связаны законы Планка и Вина?
4. О чем говорит закон Кирхгофа?

5. Сформулируйте закон Стефана-Больцмана и как с его помощью определить поток собственного излучения серых тел?

6. Что такое степень черноты тела?

7. Какие виды полусферического излучения вы знаете?

8. Как определяется лучистый поток между параллельными плоскими стенками и для тела, находящегося внутри другого полого тела?

9. Для чего нужны экраны и как они влияют на теплообмен между телами?

10. Как определяется средний угловой коэффициент?

11. Особенности лучистого теплообмена в поглощающих и излучающих средах. 12. Как рассчитывается сложный теплообмен?

Часть четвертая. ТЕПЛООБМЕННЫЕ АППАРАТЫ

10 ТЕПЛОВОЙ РАСЧЕТ ТЕПЛООБМЕННЫХ АППАРАТОВ

10.1 Общие положения

Теплообменным аппаратом называется устройство, в котором осуществляется процесс передачи теплоты от одного теплоносителя к другому. Такие аппараты многочисленны и по своему технологическому назначению и конструктивному оформлению весьма разнообразны. По принципу действия теплообменные аппараты могут быть разделены на рекуперативные, регенеративные и смесительные.

Рекуперативными называются такие аппараты, в которых теплота от горячего теплоносителя к холодному передается через разделяющую их стенку. Примером таких аппаратов являются парогенераторы, подогреватели, конденсаторы и т. п.

Регенеративными называются такие аппараты, в которых одна и та же поверхность нагрева омывается то горячим, то холодным теплоносителем. При протекании горячей жидкости теплота воспринимается стенками аппарата и в них аккумулируется, при протекании холодной жидкости эта аккумулированная теплота ею воспринимается. Примером таких аппаратов являются регенераторы мартеновских и стеклоплавильных печей, воздухоподогреватели доменных печей и др.

В рекуперативных и регенеративных аппаратах процесс передачи теплоты неизбежно связан с поверхностью твердого тела. Поэтому такие аппараты называются также поверхностными.

В *смесительных* аппаратах процесс теплопередачи происходит путем непосредственного соприкосновения и смешения горячего и холодного теплоносителей. В этом случае теплопередача протекает одновременно с материальным обменом. Примером таких теплообменников являются башенные охладители (градирни), скрубберы и др.

Специальные названия теплообменных аппаратов обычно определяются их назначением, например, парогенераторы, печи, водоподогреватели, испарители, перегреватели, конденсаторы, деаэраторы и т. д. Однако, несмотря на большое разнообразие теплообменных аппаратов по виду, устройству, принципу действия и рабочим телам, назначение их в конце концов одно и то же, это –

передача теплоты от одной, горячей, жидкости к другой, холодной. Поэтому и основные положения теплового расчета для них остаются общими.

10.2 Рекуперативные аппараты

Основные положения. Тепловой расчет теплообменного аппарата может быть *конструкторским*, целью которого является определение площади теплообмена, и *поверхочным*, при котором устанавливается режим работы аппарата и определяются конечные температуры теплоносителя. В обоих случаях основными расчетными уравнениями являются

уравнение теплопередачи

$$Q = kF(t_1 - t_2) \quad (10.1)$$

и уравнение теплового баланса

$$Q_1 = Q_2 + \Delta Q, \quad (10.2)$$

где

$$Q_1 = G_1 di_1 = G_1 c_{p1} dt_1 = G_1 c_{p1} (t'_1 - t''_1)$$

– количество теплоты, отданное горячим теплоносителем;

$$Q_2 = G_2 di_2 = G_2 c_{p2} dt_2 = G_2 c_{p2} (t'_2 - t''_2)$$

– количество теплоты, воспринятое холодным теплоносителем;

ΔQ – потери теплоты в окружающую среду; G_1, G_2 – массовые расходы горячего и холодного теплоносителей; di_1, di_2 – изменение энтальпии теплоносителей; c_{p1}, c_{p2} – удельные теплоемкости теплоносителей при постоянном давлении; t'_1, t''_1 – температуры горячего теплоносителя на входе и выходе из аппарата; t'_2, t''_2 – температуры холодного теплоносителя на входе и выходе его из аппарата.

При выводе расчетных формул теплопередачи было принято, что в данной точке или сечении теплообменного устройства температура рабочей жидкости постоянна. Однако это положение для всей поверхности справедливо приближенно лишь при кипении жидкости и конденсации паров. В общем случае температура рабочих жидкостей в теплообменниках изменяется: горячая охлаждается, а холодная нагревается. Вместе с этим изменяется и температур-

ный напор между ними $\Delta t_i = (t_1 - t_2)_i$. В таких условиях уравнение теплопередачи (10.1) применимо лишь в дифференциальной форме к элементу поверхности dF , а именно

$$dQ = k_i \Delta t_i dF_i.$$

Общее количество теплоты, переданное через всю поверхность, определяется интегралом этого выражения

$$Q = \int_0^F k_i \Delta t_i dF_i = k \Delta t F. \quad (10.3)$$

Это и есть расчетное уравнение теплопередачи. Здесь Δt – среднее значение температурного напора по всей поверхности нагрева.

В тепловых расчетах важное значение имеет величина, называемая водяным эквивалентом, W , Дж/(с·°C), Вт/°C

$$W = Gc_p, \quad (10.4)$$

где $G = \rho w f$ – массовый расход теплоносителя; w – скорость теплоносителя; ρ – плотность теплоносителя; f – площадь сечения канала.

Если величину W ввести в уравнение теплового баланса (10.2), то оно принимает вид

$$W_1(t_1' - t_1'') = W_2(t_2'' - t_2'),$$

откуда

$$\frac{t_1' - t_1''}{t_2'' - t_2'} = \frac{\delta t_1}{\delta t_2} = \frac{W_2}{W_1}. \quad (10.5)$$

Последнее означает, что отношение изменений температур рабочих жидкостей обратно пропорционально отношению их водяных эквивалентов. Такое соотношение справедливо как для всей поверхности нагрева F , так и для каждого ее элемента dF , т.е.

$$\frac{dt_1}{dt_2} = \frac{W_2}{W_1}, \quad (10.6)$$

где dt_1 и dt_2 – изменения температуры рабочих жидкостей на элементе поверхности.

Характер изменения температуры рабочих жидкостей вдоль поверхности нагрева зависит от схемы их движения и соотношения величин W_1 и W_2 . Если в теплообменном аппарате горячая и холодная жидкости протекают параллельно и в одном направлении, то такая схема движения называется *прямотоком* (рис. 10.1, а).

Если жидкости протекают параллельно, но в прямо противоположном направлении, – *противотоком* (рис. 10.1, б). Наконец, если жидкости протекают в перекрестном направлении, – *перекрестным током* (рис. 10.1, в). Помимо таких простых схем движения, на практике осуществляются и сложные: одновременно прямоток и противоток (рис. 10.1, г), многократно перекрестный ток, (рис. 10.1, д-ж) и т. д.

В зависимости от того, осуществляется ли прямоток или противоток и W_1 больше или меньше, чем W_2 , получаются четыре характерные пары кривых изменения температуры вдоль поверхности нагрева, представленные на рис. 10.2. Здесь по осям абсцисс отложена площадь поверхности нагрева F , а по осям ординат – температура рабочих жидкостей.

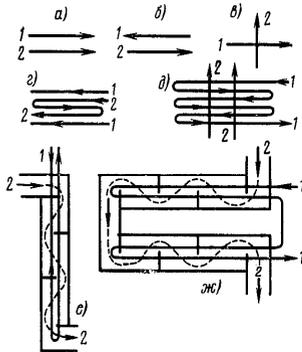


Рис. 10.1 Схемы движения рабочих жидкостей в теплообменниках.

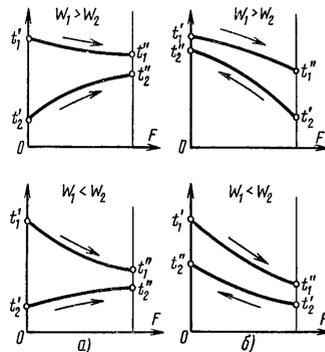


Рис. 10.2 Характер изменения температур рабочих жидкостей при прямотоке (а) и противотоке (б).

В соответствии с уравнением (10.5) на графиках большее изменение температуры $t' - t'' = dt$ получается для той жидкости, у которой значение величины W меньше.

Из рассмотрения графиков следует, что при прямотоке конечная температура холодной жидкости t_2'' всегда ниже конечной температуры горячей жидкости t_1'' . При противотоке же конечная температура холодной жидкости t_2'' может быть выше конечной температуры горячей t_1'' . Следовательно, при одной и той

же начальной температуре холодной жидкости при противотоке ее можно нагреть до более высокой температуры, чем при прямотоке.

Температурный напор вдоль поверхности при прямотоке изменяется сильнее, чем при противотоке. Вместе с тем среднее значение температурного напора при противотоке больше, чем при прямотоке. За счет только этого фактора при противотоке теплообменник получается компактнее [см. уравнение (10.3)]. Однако если температура хотя бы одной из рабочих жидкостей постоянна, то среднее значение температурного напора независимо от схемы движения оказывается одним и тем же. Так именно получается при кипении жидкостей и при конденсации паров, либо когда расход одной рабочей жидкости настолько велик, что ее температура изменяется очень мало.

Рассмотрев общие уравнения теплового расчета аппаратов и уяснив температурные условия работы теплообменников, перейдем теперь к более подробному рассмотрению величин, входящих в уравнение (10.3).

Средний температурный напор. При выводе формулы осреднения температурного напора рассмотрим простейший теплообменный аппарат, работающий по схеме прямотока. Количество теплоты, передаваемое в единицу времени от горячей жидкости к холодной через элемент поверхности dF (рис. 10.3), определяется уравнением

$$dQ = k(t_1 - t_2)dF. \quad (a)$$

При этом температура горячей жидкости понизится на dt_1 , а холодной повысится на dt_2 . Следовательно,

$$dQ = -G_1 c_{p1} dt_1 = G_2 c_{p2} dt_2, \quad (б)$$

откуда

$$dt_1 = -dQ / G_1 c_{p1} = -dQ / W_1, \quad (в)$$

$$dt_2 = dQ / G_2 c_{p2} = dQ / W_2. \quad (г)$$

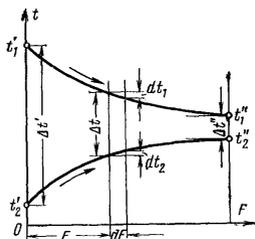


Рис. 10.3 К выводу формулы осреднения температурного напора.

Изменение температурного напора при этом

$$dt_1 - dt_2 = d(t_1 - t_2) = -(1/W_1 + 1/W_2)dQ = -mdQ, \quad (д)$$

где $m = 1/W_1 + 1/W_2$.

Подставляя в уравнение (д) значение dQ из уравнения (а), получаем

$$d(t_1 - t_2) = -mk(t_1 - t_2)dF. \text{ (e)}$$

Обозначим $(t_1 - t_2)$ через Δt и произведем разделение переменных

$$d(\Delta t) / \Delta t = -mkdF. \text{ (ж)}$$

Если значения m и k постоянны, то, интегрируя уравнение (ж), получаем

$$\int_{\Delta t'}^{\Delta t} \frac{d(\Delta t)}{\Delta t} = -mk \int_0^F dF$$

или

$$\ln \frac{\Delta t}{\Delta t'} = -mkF, \text{ (з)}$$

откуда

$$\Delta t = \Delta t' e^{-mkF}, \text{ (и)}$$

где Δt – местное значение температурного напора $(t_1 - t_2)$, относящееся к элементу поверхности теплообмена, а $\Delta t' = t_1' - t_2'$ – на входе в аппарат.

Из уравнения (и) видно, что вдоль поверхности нагрева температурный напор изменяется по экспоненциальному закону. Зная этот закон, легко установить и среднее значение температурного напора $\Delta \bar{t}$. На основании теоремы о среднем (при $k = \text{const}$) имеем

$$\Delta \bar{t} = \frac{1}{F} \int_0^F \Delta t dF = \frac{\Delta t'}{F} \int_0^F e^{-mkF} dF = \frac{\Delta t'}{-mkF} (e^{-mkF} - 1). \text{ (к)}$$

Подставляя в уравнение (к) значение mkF и e^{-mkF} из уравнений (з) и (и) и имея в виду, что согласно рис. 10.3 в конце поверхности нагрева $\Delta t = \Delta t''$, окончательно имеем

$$\Delta \bar{t} = \frac{\Delta t'' - \Delta t'}{\ln \frac{\Delta t''}{\Delta t'}} = \frac{\Delta t' - \Delta t''}{\ln \frac{\Delta t'}{\Delta t''}} \text{ (10.7)}$$

или

$$\Delta \bar{t} = \frac{(t_1' - t_2') - (t_1'' - t_2'')}{\ln \frac{t_1' - t_2'}{t_1'' - t_2''}}. \text{ (10.7a)}$$

Такое значение температурного напора называется *среднелогарифмическим* и часто в литературе обозначается $\Delta t_{\text{лог}}$.

Точно таким же образом выводится формула осреднения температурного напора и для противотока. Отличие лишь в том, что в правой части уравнения (г) следует поставить знак минус, и поэтому здесь $m = 1/W_1 - 1/W_2$. Окончательная формула для среднего логарифмического температурного напора при противотоке имеет вид

$$\Delta \bar{t} = \frac{(t'_1 - t_2'') - (t_1'' - t'_2)}{\ln \frac{t'_1 - t_2''}{t_1'' - t'_2}}. \quad (10.8)$$

При равенстве величин W_1 и W_2 в случае противотока ($m = 0$) из уравнения (и) имеем $\Delta t = \Delta t'$. В этом случае температурный напор по всей поверхности постоянен

$$\Delta t = \Delta t' = t'_1 - t_2'' = \Delta t'' = t_1'' - t'_2. \quad (\text{л})$$

Формулы (10.7) и (10.8) можно свести в одну, если независимо от начала и конца поверхности через Δt_{δ} обозначить больший, а через Δt_m , меньший температурные напоры между рабочими жидкостями. Тогда окончательная формула среднелогарифмического температурного напора для прямотока и противотока принимает вид

$$\Delta \bar{t} = \frac{\Delta t_{\delta} - \Delta t_m}{\ln \frac{\Delta t_{\delta}}{\Delta t_m}}. \quad (10.9)$$

Вывод формул для среднелогарифмического температурного напора сделан в предположении, что расход и теплоемкость рабочих жидкостей, а также коэффициент теплопередачи вдоль поверхности нагрева остаются постоянными. Так как в действительности эти условия выполняются лишь приближенно, то и вычисленное по формулам (10.7), (10.8) или (10.9) значения $\Delta \bar{t}$ также приближенно.

В тех случаях, когда температура рабочих жидкостей вдоль поверхности нагрева изменяется незначительно, средний температурный напор можно вычислить как среднеарифметическое из крайних напоров $\Delta t'$ и $\Delta t''$

$$\Delta \bar{t} = \frac{1}{2}(\Delta t' + \Delta t''). \quad (10.10)$$

Среднеарифметическое значение температурного напора всегда больше среднелогарифмического. Но при $\Delta t'' / \Delta t' > 0,6$ они отличаются друг от друга меньше чем на 3%. Такая погрешность в технических расчетах вполне допустима.

Коэффициент теплопередачи. При расчете теплообменных аппаратов возникают трудности с определением значения коэффициента теплопередачи k . Эти затруднения в основном определяются изменением температуры рабочих жидкостей и сложностью геометрической конфигурации поверхности теплообмена. Специфические же особенности процесса теплообмена в рассчитываемых аппаратах учитываются при выборе значений коэффициентов теплоотдачи α , которые входят в формулу для коэффициента теплопередачи.

При расчете k в первую очередь необходимо произвести анализ частных термических сопротивлений, и если возможно, то следует произвести упрощенные расчетной формулы.

Далее необходимо учитывать влияние на коэффициент теплопередачи изменения температуры рабочих жидкостей. Большой частью такой учет сводится к отнесению коэффициентов теплоотдачи к средним температурам рабочих жидкостей. Для жидкости с большим водяным эквивалентом средняя температура берется как среднеарифметическое из крайних значений, например, $t_{\bar{o}} = 0,5(t'_{\bar{o}} + t''_{\bar{o}})$. При этом для другой жидкости, с меньшим водяным эквивалентом, средняя температура определяется из соотношения $t_{\bar{m}} = t_{\bar{o}} \pm \Delta \bar{t}$. Здесь $\Delta \bar{t}$ является среднелогарифмическим температурным напором; знак «-» применяется в тех случаях, когда $t_{\bar{o}}$ означает температуру горячей жидкости, а знак «+» в тех случаях, когда $t_{\bar{o}}$ означает температуру холодной жидкости.

Иногда вычисление коэффициента теплопередачи производят по температурам рабочих жидкостей в начале и в конце поверхности нагрева. Если полученные значения k' и k'' друг от друга отличаются не очень сильно, то среднеарифметическое из них принимается за среднее значение k , а именно

$$k = \frac{k' + k''}{2}. \quad (10.11)$$

В большинстве практических случаев такое осреднение является достаточным. В случае же сильного расхождения между собой значений k' и k'' необходимо разделить поверхность нагрева на отдельные участки, в пределах которых коэффициент теплопередачи изменяется незначительно, и для каждого такого участка расчет теплопередачи производить отдельно.

Так же поступают и в тех случаях, когда резко меняются условия омывания поверхности нагрева рабочей жидкостью, например, в нижней части по-

верхности нагрева поперечное омывание, в средней – продольное и в верхней – снова поперечное. Если при этом температура рабочей жидкости изменяется незначительно, то применяется осреднение

$$k = \frac{k_1 F_1 + k_2 F_2 + k_3 F_3}{F_1 + F_2 + F_3}, \quad (10.12)$$

где F_1, F_2, F_3 – отдельные участки площади поверхности нагрева;

k_1, k_2, k_3 – средние значения коэффициента теплопередачи на этих участках.

Расчет конечной температуры рабочих жидкостей. Выше конечной целью теплового расчета являлось определение площади поверхности нагрева и основных размеров теплообменника для его дальнейшего конструирования. Предположим теперь, что теплообменник уже имеется или по крайней мере спроектирован. В этом случае целью теплового расчета является определение конечных температур рабочих жидкостей. Это – так называемый поверочный расчет.

При решении такой задачи известными являются следующие величины: площадь поверхности нагрева F , коэффициент теплопередачи k , величины W_1 и W_2 и начальные температуры t'_1 и t'_2 , а искомыми: конечные температуры t''_1 и t''_2 и количество переданной теплоты Q .

В приближенных расчетах можно исходить из следующих представлений. Количество теплоты, отдаваемое горячей жидкостью, равно

$$Q = W_1(t'_1 - t''_1), \quad (10.13)$$

откуда конечная температура ее t''_1 определяется соотношением

$$t''_1 = t'_1 - Q/W_1. \quad (а)$$

Соответственно для холодной жидкости имеем

$$Q = W_2(t''_2 - t'_2) \quad (10.14)$$

и

$$t''_2 = t'_2 + Q/W_2. \quad (б)$$

Если принять, то температуры рабочих жидкостей меняются по линейному закону, то

$$Q = kF \left(\frac{t'_1 + t''_1}{2} - \frac{t'_2 + t''_2}{2} \right). \quad (\text{в})$$

Вместо неизвестных t''_1 и t''_2 подставим их значения из уравнений (а) и (б), тогда получим

$$Q = kF(t'_1 - Q/2W_1 - t'_2 - Q/2W_2). \quad (\text{г})$$

Произведя дальнейшее преобразование, получим

$$\frac{Q}{kF} + \frac{Q}{2W_1} + \frac{Q}{2W_2} = Q \left(\frac{1}{kF} + \frac{1}{2W_1} + \frac{1}{2W_2} \right) = t'_1 - t'_2, \quad (\text{д})$$

откуда окончательно получаем

$$Q = \frac{t'_1 - t'_2}{\frac{1}{kF} + \frac{1}{2W_1} + \frac{1}{2W_2}}. \quad (10.15)$$

Зная количество переданной теплоты Q , очень просто по формулам (а) и (б) определить и конечные температуры рабочих жидкостей t''_1 и t''_2 .

Приведенная схема расчета хотя и проста, однако применима лишь для ориентировочных расчетов и в случае небольших изменений температур жидкостей. В общем же случае конечная температура зависит от схемы движения рабочих жидкостей. Поэтому для прямотока и противотока приводится вывод более точных формул.

а) Прямоток. Выше было показано, что температурный напор изменяется по экспоненциальному закону

$$\Delta t'' = \Delta t' e^{-mkF}. \quad (10.16)$$

Имея в виду, что

$$m = 1/W_1 + 1/W_2; \quad \Delta t' = t'_1 - t'_2$$

и что в конце поверхности нагрева $\Delta t'' = t''_1 - t''_2$, подставим эти значения в уравнение (10.16)

$$\frac{t_1'' - t_2''}{t_1' - t_2'} = e^{-(1/W_1 + 1/W_2)kF} . \quad (10.17)$$

Однако это уравнение дает лишь разности температур. Чтобы отсюда получить конечные температуры в отдельности, необходимо обе части равенства вычесть из единицы

$$1 - \frac{t_1'' - t_2''}{t_1' - t_2'} = 1 - e^{-(1/W_1 + 1/W_2)kF} \quad (10.18)$$

или

$$(t_1' - t_1'') + (t_2'' - t_2') = (t_1' - t_2') \left[1 - e^{-(1/W_1 + 1/W_2)kF} \right] . \quad (10.19)$$

Так как (см. уравнение (10.5))

$$t_2'' - t_2' = (t_1' - t_1'') \frac{W_1}{W_2} ,$$

то, подставляя это значение в левую часть уравнения (10.19), получаем

$$dt_1 = t_1' - t_1'' = (t_1' - t_2') \frac{1 - e^{-(1+W_1/W_2)(kF/W_1)}}{1 + W_1/W_2} = (t_1' - t_2') \Pi . \quad (10.20)$$

Последнее уравнение показывает, что изменение температуры горячей жидкости dt_1 равно некоторой доле Π располагаемого начального температурного напора $t_1' - t_2'$, эта доля зависит только от двух безразмерных параметров W_1/W_2 и kF/W_1 .

Аналогичным образом из уравнения (10.19) можно получить выражение и для изменения температуры холодной жидкости

$$dt_2 = t_2'' - t_2' = (t_1' - t_2') \frac{W_1}{W_2} \frac{1 - e^{-(1+W_1/W_2)(kF/W_1)}}{1 + W_1/W_2} = (t_1' - t_2') \frac{W_1}{W_2} \Pi . \quad (10.21)$$

Определив изменения температур рабочих жидкостей и зная их начальные температуры, легко определить конечные

$$t_1'' = t_1' - dt_1 \text{ и } t_2'' = t_2' + dt_2 . \quad (10.22)$$

Количество теплоты, передаваемой через поверхность теплообмена, определяется

$$Q_{II} = W_1 dt_1 = W_1 (t'_1 - t'_2) \Pi. \quad (10.23)$$

Значение функции $\Pi = f(W_1/W_2, kF/W_1)$ приведено на рис. 10.4. Формулы (10.21) - (10.23) могут быть применены и для расчета промежуточных значений температуры рабочих жидкостей и количества теплоты. В этом случае в расчетные формулы вместо F надо подставить значение F_x .

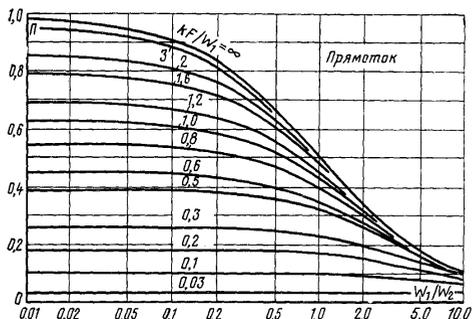


Рис. 10.4 $\Pi = f(W_1/W_2; kF/W_1)$ – вспомогательная функция для расчета конечной температуры при прямотоке.

б) *Противток.* Для противотока расчетные формулы выводятся так же, как и для прямотока. Окончательно они имеют вид

$$dt_1 = t'_1 - t''_1 = (t'_1 - t'_2) \frac{1 - e^{-(1-W_1/W_2)(kF/W_1)}}{1 - (W_1/W_2)e^{-(1-W_1/W_2)(kF/W_1)}} = (t'_1 - t'_2) Z, \quad (10.24)$$

$$dt_2 = t''_2 - t'_2 = (t'_1 - t'_2) \frac{W_1}{W_2} \frac{1 - e^{-(1-W_1/W_2)(kF/W_1)}}{1 - (W_1/W_2)e^{-(1-W_1/W_2)(kF/W_1)}} = (t'_1 - t'_2) \frac{W_1}{W_2} Z, \quad (10.25)$$

$$Qz = W_1 dt_1 = W_1 (t'_1 - t'_2) Z. \quad (10.26)$$

В частном случае, когда $W_1/W_2=1$, т.е. $W_1=W_2=W$, формулы (10.24)-(10.26) принимают вид

$$dt_1 = t'_1 - t''_1 = (t'_1 - t'_2) \frac{1}{1 + W/(kF)}, \quad (10.27)$$

$$dt_2 = t_2'' - t_2' = (t_1' - t_1'') \frac{1}{1 + W/(kF)}, \quad (10.28)$$

$$Qz = (t_1' - t_1'') \frac{W}{1 + W/(kF)}. \quad (10.29)$$

Значение функции $Z = f(W_1/W_2, kF/W_1)$ приведено на рис. 10.5.

Для расчета промежуточных значений температуры рабочих жидкостей и количества переданной теплоты в формулах (10.27) -(10.29) значение F заменяется на F_x , в формулах же (10.24) -(10.26) такая замена производится в числителе, а в знаменателе остается значение полной поверхности F .

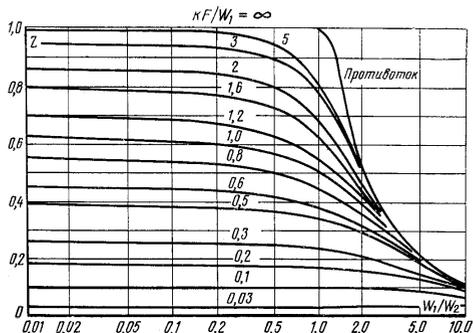


Рис. 10.5. $Z=f(W_1/W_2; kF/W_1)$ – вспомогательная функция для расчета конечной температуры при противотоке.

в) Сравнение прямотока с противотоком. Чтобы выявить преимущество

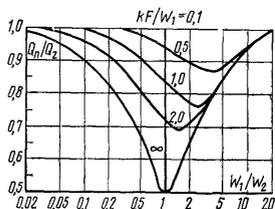


Рис. 10.6.

$Q_{II}/Q_z = f(W_1/W_2; kF/W)$ – сравнение прямотока и

W_1/W_2 и kF/W_1 ,

характер изменения которой показан на рис.10.6. Из рисунка следует, что схемы можно считать равноценными в том случае, если величины W_1 и W_2 обеих жидкостей значительно отличаются друг от друга (при $W_1/W_2 < 0,05$ и при $W_1/W_2 > 10$) или если значение параметра kF/W_1 (либо kF/W_2) мало. Первое условие равнозначно тому, что изменение температуры одной жидкости незначительно по сравнению с изменением температуры другой. Далее, поскольку $kF/W_2 = dt_2 / \Delta t$, второе условие соответствует случаю, когда средний температурный напор значительно превышает изменение температуры рабочей жидкости. Во всех остальных случаях при одной и той же поверхности нагрева и одинаковых крайних температурах теплоносителей при прямотоке передается меньше теплоты, чем при противотоке. Поэтому с теплотехнической точки зрения всегда следует отдавать предпочтение противотоку, если какие-либо другие причины (например, конструктивные) не заставляют применять прямоток. При этом следует иметь в виду, что при противотоке создаются более тяжелые температурные условия для металла, ибо одни и те же участки стенок теплообменника с обеих сторон омываются рабочими жидкостями с наиболее высокой температурой.

При конденсации и кипении температура жидкости постоянна. Это означает, что водяной эквивалент такой жидкости бесконечно велик. В этом случае прямоток и противоток равнозначны, и уравнения (10.23) и (10.26) становятся тождественными. Конечная температура той жидкости, для которой водяной эквивалент имеет конечное значение, определяется следующим образом.

При конденсации пара

$$W_1 = \infty, t'_1 = t''_1 = t_1$$

и

$$t''_2 = t_1 - (t_1 - t'_2)(1 - e^{-kF/W_2}), \quad (10.30)$$

$$Q = W_2(t_1 - t'_2)(1 - e^{-kF/W_2}). \quad (10.31)$$

При кипении жидкости

$$W_2 = \infty, t'_2 = t''_2 = t_2$$

$$t''_1 = t_2 + (t'_1 - t_2)e^{-kF/W_1} \quad (10.32)$$

и

$$Q = W_1(t'_1 - t_2)(1 - e^{-kF/W_1}). \quad (10.33)$$

Вместо значений t_1 и t_2 в уравнения (10.30) – (10.33) можно подставить температуру стенки, значение которой при этом также постоянно.

В случае перекрестного тока конечные температуры рабочих жидкостей находятся между конечными температурами для прямотока и противотока. Поэтому в приближенных расчетах можно пользоваться методом расчета одной из указанных схем. Если одна из жидкостей движется навстречу другой зигзагообразно (смешанный ток), то расчет может быть произведен, как для противотока.

10.3 Основы теплового расчета регенеративных и смесительных теплообменников

Поверхность теплообмена регенераторов поочередно омывается горячим и холодным теплоносителями, воспринимая и аккумулируя теплоту в первом случае и отдавая ее во втором. Таким образом, процесс теплопередачи нестационарен и температура поверхности насадки (кирпич, металлические листы) изменяется в периоды нагревания и охлаждения; изменяются и температуры теплоносителей. В связи с этим тепловой расчет регенераторов весьма сложен.

Время, за которое происходит нагрев τ_r и охлаждение τ_x насадки, называется полным циклом или периодом

$$t_y = t_r + t_x.$$

Если использовать средние температуры теплоносителей t_2 и t_x и поверхностей $t_{c,2}$ и $t_{c,x}$ за цикл, то расчет можно упростить с достаточной для практики точностью и свести его к решению уравнений, аналогичных используемым при расчете рекуператоров. В этом случае уравнение теплопередачи принимает вид

$$Q = k_y (t_2 - t_x) F. \quad (10.34)$$

Особенностью является то, что количество переданной теплоты рассчитывается за цикл и измеряется в кДж.

Коэффициент теплопередачи k_y определяется по формуле

$$k_y = y_k / (1/a_2 t_2 + 1/a_x t_x).$$

Поправочный коэффициент y_k позволяет учесть неравенство средних температур поверхности насадки за периоды охлаждения и нагревания

$$y_k = 1 - (t_{c,z} - t_{c,x}) / (t_z - t_x). \quad (10.35)$$

Обычно $y_k = 0,8$. Вычисление коэффициентов теплоотдачи α_r и α_x проводится по формулам для стационарных процессов переноса теплоты конвекцией и излучением с использованием усредненных значений температур теплоносителей и поверхности.

Процесс теплообмена в регенераторах зависит от многих факторов, в частности, от формы и толщины насадки, ее теплофизических свойств, температур теплоносителей, длительности цикла, полноты омывания поверхности нагрева, засорения зольными отложениями и т. д.

Смесительные теплообменные аппараты характеризуются непосредственным контактом холодного и горячего теплоносителей. Эти аппараты находят, в частности, широкое применение в системах кондиционирования воздуха.

Естественно, что чем больше площадь поверхности соприкосновения теплоносителей, тем активнее протекают процессы тепло- и массообмена. С этой целью жидкости обычно разбрызгиваются на отдельные капли, размеры которых определяют скорость их движения, и выбираются исходя из конкретных условий.

При расчете смесительных аппаратов обычно пользуются нормами допустимой тепловой нагрузки единицы объема смесительного аппарата, установленными практикой. Именно равномерное распределение потоков теплоносителей по сечению с целью увеличения степени использования объема позволяет повысить производительность аппарата и уменьшить его размеры.

10.4 Гидромеханический расчет теплообменных аппаратов

Основной задачей гидромеханического расчета теплообменных аппаратов является определение потери давления теплоносителя при прохождении его через аппарат. При течении жидкости всегда возникают сопротивления, препятствующие движению. На преодоление этих сопротивлений затрачивается механическая энергия, пропорциональная перепаду давления Δp . Сопротивления в зависимости от природы возникновения разделяются на сопротивления трения и местные сопротивления.

Гидравлическое сопротивление трения обуславливается вязкостью жидкости и проявляется лишь в местах безотрывного течения жидкости вдоль твердой стенки. При этом сила давления равна силе трения, т. е. $\Delta p f = sF$, откуда $\Delta p = s \frac{F}{f}$. Так как $s = m \frac{dw}{dn}$, то это означает, что чем больше вязкость проте-

кающей жидкости, тем больше и сопротивление. Кроме того, сопротивление зависит от скорости w . Если скорость ниже критической, то сопротивление пропорционально первой степени скорости; если же скорость выше критической, то сопротивление пропорционально квадрату скорости. Потери давления на преодоление сил трения при течении несжимаемой жидкости в каналах на участке безотрывного движения в общем случае рассчитываются по формуле

$$\Delta p_T = \left(x \frac{l}{d} + x_0 \right) \frac{\rho w^2}{2}, \quad (10.36)$$

где l – полная длина канала; d – гидравлический диаметр, который в общем случае найдется как $d = 4f/U$ (f – поперечное сечение канала; U – периметр поперечного сечения); x – коэффициент сопротивления трения, безразмерная величина, характеризующая соотношение сил трения и инерционных сил потока; x_0 – поправка на гидродинамический начальный участок: при наличии перед входом в трубу успокоительного участка $x_0 = 0$, при отсутствии успокоительного участка и равномерном распределении скоростей на входе $x_0 = 1,6$ для круглой трубы и $x_0 = 0,63$ для плоского канала; ρ и w – средняя плотность и средняя скорость жидкости или газа в канале.

В практических расчетах поправка x_0 обычно несущественна и сопротивление трения в трубах и в каналах определяется по формуле

$$\Delta p_T = x \frac{l}{d} \frac{\rho w^2}{2}. \quad (10.37)$$

Местные сопротивления обуславливаются вихреобразованием в местах изменения сечения канала и преодоления отдельных препятствий, например при входе, выходе, сужении, расширении, повороте и т.д. Местные сопротивления определяются по формуле

$$\Delta p_m = x \frac{\rho w^2}{2}, \quad (10.48)$$

где x – коэффициент местного сопротивления.

В случае неизотермического движения жидкости до недавнего времени сопротивление подсчитывалось так же, как и при изотермическом, и по тем же самым формулам. Влияние же изменения температуры при этом учитывалось лишь тем, что все расчетные величины – скорость, плотность и вязкость – относили к средней температуре жидкости. Однако опытом установлено, что если сопротивление теплообменных аппаратов рассчитывается по величинам, отнесенным к средней температуре жидкости (что вполне целесообразно), то коэффициент сопротивления трения в этом случае является функцией не только числа Re , но также чисел Gr и Pr .

Кроме того, при неизотермическом движении газов движение становится неравномерным вследствие изменения их плотности, а вместе с тем и скорости. Это вызывает дополнительную потерю давления на ускорение газа Δp_n , которая при движении в канале постоянного сечения равна удвоенной разности скоростных напоров, а именно

$$\Delta p_n = 2(r_2 w_2^2 / 2 - r_1 w_1^2 / 2) = r_2 w_2^2 - r_1 w_1^2. \quad (10.39)$$

Здесь индексом 1 отмечены величины, отнесенные к температуре в начальном сечении, индексом 2 – в конечном. В случае нагревания газа Δp_n положительно, в случае же охлаждения – Δp_n отрицательно.

При неизотермическом движении должно также учитываться сопротивление самотяги, возникающее вследствие того, что вынужденному движению нагретой жидкости в нисходящих участках канала противодействует подъемная сила, направленная вверх.

Подъемная сила и равное ей по значению сопротивление самотяги определяются соотношением

$$\Delta p_c = \pm g(r - r_0)h_0, \quad (10.40)$$

где ρ_0 – средняя плотность холодной жидкости, например, окружающего воздуха; ρ – средняя плотность нагретой жидкости, например, дымовых газов; h_0 – высота вертикального канала – газохода.

При нисходящем движении нагретой жидкости значение Δp_c является дополнительным сопротивлением канала, при восходящем же движении нагретой жидкости сопротивление канала уменьшается на величину Δp_c . Общее сопротивление самотяги определяется как разность между значениями подъемной силы во всех нисходящих и восходящих каналах.

При определении полного сопротивления какого-либо устройства в технических расчетах принято суммировать отдельные сопротивления. Такой способ расчета основан на допущении, что полное сопротивление последовательно включенных элементов равно сумме их отдельных сопротивлений. В действительности это не так, сопротивление каждого элемента зависит от характера движения жидкости в предшествующих участках. В частности, например, сопротивление прямого участка за поворотом значительно выше, чем сопротивление такого же прямого участка перед поворотом. Точно влияние этих факторов может быть установлено лишь экспериментальным путем.

Таким образом, полное гидравлическое сопротивление теплообменных устройств равно

$$\Delta p_{II} = \sum \Delta p_T + \sum \Delta p_m + \sum \Delta p_n + \sum \Delta p_c. \quad (10.41)$$

Определив полное гидравлическое сопротивление и зная расход жидкости, легко определить и мощность, необходимую для перемещения рабочей жидкости через аппарат. Мощность на валу насоса или вентилятора определяется по формуле

$$N = V\Delta p / \eta = G\Delta p / \rho \eta , (10.42)$$

где V – объемный расход жидкости; G – массовый расход жидкости; Δp – полное сопротивление; ρ – плотность жидкости или газа; η – к.п.д. насоса или вентилятора.

При выборе оптимальных форм и размеров поверхности нагрева теплообменника принимают наивыгоднейшее соотношение между поверхностью теплообмена и расходом энергии на движение теплоносителей. Добиваются, чтобы указанное соотношение было оптимальным, т.е. экономически наиболее выгодным.

Методические указания

При изучении этой темы необходимо обратить внимание на способы интенсификации процессов теплообмена в теплообменниках, уметь анализировать влияние на коэффициент теплопередачи различных факторов, уметь рассчитывать теплообменники при различных схемах движения теплоносителей (противоток и прямоток), а также анализировать полученные результаты.

Вопросы для самопроверки.

1. Какие существуют виды теплообменных аппаратов и где они применяются?
2. На основе каких исходных уравнений построено определение поверхности нагрева рекуперативных теплообменников?
3. Что такое среднелогарифмический напор и почему его используют в уравнении теплопередачи?
4. Какие схемы движения теплоносителей в теплообменных аппаратах?
5. Для чего проводят гидравлический расчет теплообменников?