

Голубева О.В., Ехилевский С.Г.,  
Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф., Сорокин П.В.  
Полоцкий государственный университет  
Новополоцк, Республика Беларусь

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕЩИНООБРАЗОВАНИЯ В ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ БАЛКЕ**

**Аннотация:** Моделированием разработан алгоритм поиска трещин в железобетонной балке по полю напряжений и полю деформации с малыми неразрушающими нагрузками. Показано, что поперечные трещины могут быть обнаружены только по полю напряжений в зонах локализации низкого напряжения на грани. Продольные трещины выявляются и по полю напряжений и по полю деформаций с обязательным условием крутящего момента вдоль балки. Моделированием проверено и объяснено, что контактные зоны поля напряжений двух тел удовлетворяют принципу зеркальных изображений. Алгоритм экономит материальные средства в строительстве.

**Ключевые слова:** динамика трещинообразования, теория упругого контактного взаимодействия, моделирование систем, принцип зеркальных изображений.

### **Введение**

В работе показано, что моделирование нагруженной железобетонной балки в оболочке ANSYS, позволяющей учитывать нелинейные эффекты деформации и температурный режим взаимодействия нескольких десятков тел [1], приводит к тем же результатам, что и в теории упругости для контакта 2 тел по Л.Д. Ландау [2,3].

Моделированием обнаружен и обоснован интересный факт, связанный с тем, что области максимального напряжения двух тел вблизи контактной области подчиняются принципу зеркальных изображений.

Оказалось, что продольные трещины можно выявить, прилагая крутящий момент вдоль балки. Поперечные трещины обнаруживаются только по полю напряжений.

**Выявление трещин при безопасных нагрузках и их устранение приведёт к значительной экономии материальных средств в строительстве.** Область трещины можно усилить сварным бондажом, охватывающим балку.

### **Диагностика трещин в железобетонной балке**

Мы смоделировали лабораторную установку проверки железобетонной балки на прочность. Края бетонной балки размерами  $0,25 \cdot 0,3 \cdot 3 \text{ м}^3$  опираются на два неподвижных цилиндра из закалённой стали (Structural Steel) диаметром  $D = 0,2 \text{ м}$ . Гидравлический пресс оказывает вертикальное усилие на расстояниях  $1/3$  и  $2/3$  от концов балки через бруски (Structural Steel)  $0,25 \cdot 0,1 \cdot 0,1 \text{ м}^3$ . Нижние цилиндры закреплены (обеспечивается функцией Fixed Support). Балка содержит 3 арматурных стержня (Stainless Steel) диаметром 14 мм длиной 3 м на высоте одной третьей части от нижней грани, т.е. в области, где бетон и стержни работают на растяжение. Контакт между стержнями и бетоном Bonded – Solid To Solid (аналог склеенных деталей). Между балкой и брусками и цилиндрами установлен контакт No Separation – Solid To Solid. Арматурные стержни расположены симметрично относительно плоскости симметрии балки для визуализации поля напряжений в центральном стержне.

Для экономии ресурсов оперативной памяти компьютера на этапе создания геометрии была использована симметрия модели двумя плоскостями. В результате на рисунках изображена четвертая часть модели.

Для моделирования динамики трещины в дереве проекта Model(A4) → Fracture → Crack(Semi - Elliptical) нами выбрана полуэллиптическая трещина. Трещина закреплялась на нижней грани балки. Продольная трещина вытянута вдоль балки (большая и малая полуоси 0,6 м и 0,08 м. соответственно, большой радиус контура – 0,01 м, число участков фронта – 100, площадь трещины составляет порядка 0,1 части от поперечного сечения балки) Рис.1б,в. А поперечная трещина ориентирована поперёк

балки (большая и малая полуоси 0,05м и 0,02м соответственно, большой радиус контура – 0,005м, число участков фронта – 20, площадь трещины составляет приближённо 0,02 часть от поперечного сечения балки) Рис. 1а.

На Рис. 1а балка нагружена по лабораторной схеме двумя симметричными силами  $F = 600000H$ , что в 10 раз меньше сил необходимыми для раскрытия трещины. На данном рисунке трещина не раскрыта (синий овал на нижней грани слева). Но поле напряжений на Рис. 1а. сильно неоднородно. Трещина локализует область пониженного напряжения на нижней грани балки. Трещину и область локального минимума напряжения можно найти, например, установкой тензорезисторных датчиков напряжений НПО “ Импульс “ на нижнюю грань балки. На Рис. 1а видно также что, арматурные стержни напряжены сильнее бетона и работают на растяжение (в них напряжение в 10 больше чем в бетоне – ярче окраска). Масса балки и 3 стержней равна 140 кг  $Mg = 1400N \ll F = 600000N$ . То есть силой тяжести в модели можно пренебречь. Отметим что, момент внешних сил и момент силы тяжести направлены вдоль фронта трещины.

Гораздо сложнее подобрать нагрузку и обнаружить продольные трещины в образце. Сила тяжести в модели учитывалась с помощью функции (Static Structural A5) → Standard Earth Gravity. Оказывается, что необходимо дополнительно приложить вращающий момент (Static Structural A5) → Moment. На рисунках 1 б, в крутящий момент сил  $M = 10^6 H \cdot м$  приложен к боковой грани балки и направлен вдоль большего ребра балки, что во много раз превышает момент силы тяжести балки (порядка 10000 Н м).

На Рис. 1б показано поле деформаций с продольной трещиной вдоль большего ребра. Для визуализации граней балка повернута. Поле деформаций асимметрично относительно нижней и верхней сторон каждой грани. Как видно, деформации на верхнем берегу над трещиной (красный цвет) значительно превышают деформацию на нижнем её берегу (синий цвет). Это свойство сохраняется вдоль всего фронта трещины. Такая несимметричность поля даёт возможность обнаруживать продольные трещины по полю деформации лазерными методами (деформация составляет 2мм). Например, для измерения поля деформаций можно применить лазерную систему для неразрушающего контроля композитных изделий большой площади Q – 800(Dantec Dynamics) .

Поле напряжений (Рис. 1б) более симметрично и однородно по сравнению с полем деформаций. Локально участки высокого напряжения на нижней грани видны в 2 узлах, ограничивающих фронт трещины, а на боковой грани более напряжена нижняя близкая к трещине часть, и перенапряжение заметно вдоль всего фронта трещины.

Запишем[2] уравнение равновесия упругой среды,  $\varphi(x, y)$  - потенциал Эри:

$$\Delta\Delta\varphi = \Delta^2\varphi = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 \varphi = \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \varphi = 0$$

Поскольку для суммы нормальных компонент тензора напряжений (следа тензора) верно:

$$\Delta\Delta\varphi = 0, \sigma_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \sigma_y = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \Rightarrow \sigma_x + \sigma_y = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \Delta\varphi, \Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (1)$$

В трёхмерном случае  $\Delta(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \approx \Delta\sigma_z = \Delta P_z(x, y) = 0$  для нормального к площадке контакта 2 тел давления. То след тензора удовлетворяет уравнению Лапласа(1). Потенциал в электростатике в области свободной от зарядов подчиняется уравнению Лапласа. Электрический потенциал  $\varphi$  (его источник – электрические заряды) удовлетворяет также принципу зеркальных изображений(2)(принципу

$$\text{инверсии})[3]: \Delta\varphi\left(\vec{r}\right) = 0 \Rightarrow \left[ \varphi\left(\vec{r}'\right) = \frac{R}{r'} \varphi\left(\frac{R^2}{r'^2} \vec{r}'\right) \right], \Delta \frac{R}{r'} \varphi\left(\frac{R^2}{r'^2} \vec{r}'\right) = 0, \quad rr' = R^2 \quad (2)$$

Следовательно, компонента  $P_z(x, y)$  удовлетворяет и принципу зеркальных изображений

$$\Delta P_z(\vec{r}) = 0 \Rightarrow \left[ P_z'(r') = \frac{R}{r'} P_z \left( \frac{R^2}{r'^2} r' \right) \right], \quad \Delta \frac{R}{r'} P_z \left( \frac{R^2}{r'^2} r' \right) = 0, \quad rr' = R^2$$

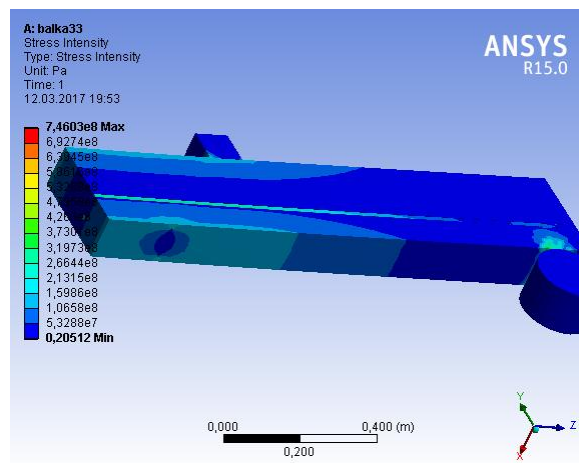


Рис.1а. Скрытая поперечная трещина в поле напряжений балки с нагрузкой  $F = 600000H$ .

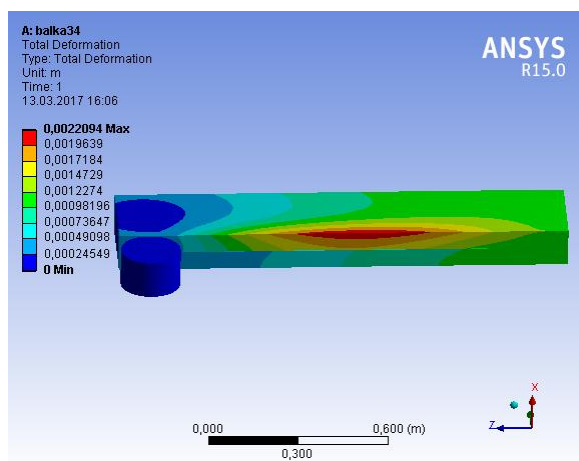


Рис.1б. Поле общей деформации четверти балки с учётом силы тяжести и крутящего момента  $M = 10^6 H \cdot м$  вдоль фронта продольной трещины.

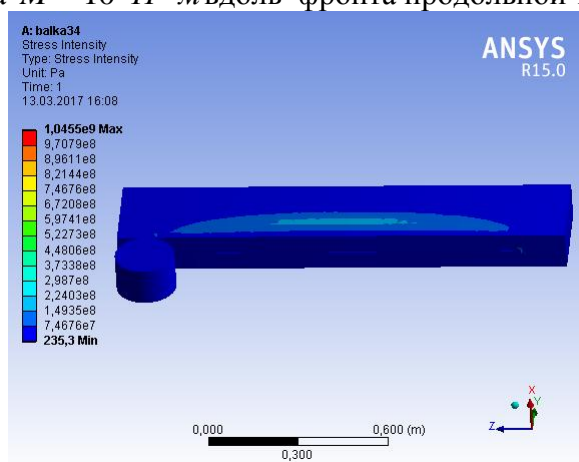


Рис.1в. Поле напряжений в балке с крутящим моментом  $M = 10^6 H \cdot м$  вдоль фронта продольной трещины.

Где:  $r, r'$  расстояния от зарядов до центра проводящей поверхности радиусом  $R$ . В нашем случае это расстояния от центров эллипсоидов нормальной компоненты тензора

напряжений до центра кривизны контактной поверхности 2 тел (что подтверждается полем напряжений на рис.1а). Суммарная деформация 2 контактирующих тел определяется по формуле Ландау[2]:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1 - \sigma^2}{E} + \frac{1 - \sigma'^2}{E'} \right) \iint_{\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} \leq 1} \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy', \quad r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

Где  $\sigma', E', \sigma, E$  - коэффициент Пуассона бетона и стали и модуль на сжатие, интеграл проводится по эллипсу с полуосями  $a, b$  - функции от кривизны тел в зоне контакта. Для простоты  $a = b = R$ . Оценим по формуле (5) связь между деформацией и напряжением в центре зоны контакта. По Л.Д.Ландау[2]

$$\begin{aligned} P_z(r) &= P_z(0) \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \Leftrightarrow \overline{P_z(r)} = \frac{1}{R} \int_0^R P_z(r) dr = P_z(0) \int_0^R \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} d\left(\frac{r}{R}\right) = \frac{\pi}{4} P_z(0) \\ \varphi(0,0) &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{1 - \sigma^2}{E} + \frac{1 - \sigma'^2}{E'} \right) \iint_{\frac{x'^2}{R^2} + \frac{y'^2}{R^2} \leq 1} \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy' = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1 - \sigma^2}{E} + \frac{1 - \sigma'^2}{E'} \right) \int_0^R \frac{P_z(r) 2\pi r dr}{r} = \\ &= 2 \left( \frac{1 - \sigma^2}{E} + \frac{1 - \sigma'^2}{E'} \right) \overline{P_z} R = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1 - \sigma^2}{E} + \frac{1 - \sigma'^2}{E'} \right) P_z(0) R \end{aligned} \quad (3)$$

Более точно численными методами двойной интеграл по эллиптической области можно посчитать алгоритмами[4,5]. Т.е. средняя величина давления (3) близка к её значению в центре контакта (Рис.1а)  $P_z(0)$ . Деформация в центре  $\varphi(0,0)$  пропорциональна максимальному давлению  $P_z(0)$ , а учитывая сделанные допущения, поле деформаций в контактной зоне пропорционально полю напряжений.

**1. Таким образом, нами показано, что напряжённые контактные зоны 2 тел совпадают с областями максимальных деформаций(б). Потенциал напряжений Эри удовлетворяет бигармоническому уравнению. Нормальная компонента давления подчиняется уравнению Лапласа (2). Центры эллипсоидов напряжений (оси эллипсов напряжений в 2 мерном случае) контактных тел подчиняются принципу зеркальных изображений  $rr' = R^2$ . В силу подобия полей в простейшем приближении для центров областей с максимальной деформацией контактной зоны также справедлив принцип зеркальных изображений  $rr' = R^2$ .**

**2. Скрытые поперечные трещины в балке можно выявить только по полю напряжений. Для выявления же продольных трещин можно использовать как поле напряжений, так и поле деформаций с применением крутящего момента вдоль балки.**

### Литература

1. Матвеев В.Н., Шаблий Л.С., Кривцов А.В. Опыт применения стерео литографических моделей при газодинамических исследованиях. Самарский государственный аэрокосмический университет им. акад. С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). Том 14. Номер 3-2. 2015. 296 – 304.
2. Л.Д. Ландау, М.Е. Лифшиц. Теоретическая физика. Том 7. Теория упругости. – М.: Наука. – 1987, 246 с.
3. Л.Д. Ландау, М.Е. Лифшиц. Теоретическая физика. Том 8. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука. – 1992, 662 с.
4. Голубева О.В., Ехилевский С.Г., Гурьева Н.А., Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф. Аппроксимация двойных и тройных интегралов во внутренних задачах математической физики. Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С: Фундаментальные науки. 2016. №12. С.125-133.

5. Голубева О.В., Ехилевский С.Г., Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф. Об эффективном поиске безусловного экстремума гладких функционалов в конечномерных задачах. Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С: Фундаментальные науки. 2016. №4. С.119-131.

*Golubeva O.V., Ehilevskiy S.G.,  
Pastuhov Y.F., Pastuhov D.F.*

**THE MODELING OF THE DIAGNOSTICS OF THE FORMING THE RIFTS IN IRON  
TO CONCRETE BEEM**

***The Abstract:** In work by modeling in ambience ANSYS Workbench designed methods of the diagnostics of the rifts, allowing find the rifts in iron to concrete beam on field of the voltage and field to deformation under small not destroying load. It Is shown that transverse rifts can be discovered only on field of the voltages in zone with minimum local voltage on galley proof. The Longitudal rifts are revealled and on field of the voltages and on field deformation with obligatory condition turning moment along beam. Modeling is checked and explained that contact zones of the field of the voltages two tel satisfy the principle of the mirror scenes.*

*. It is checked that turning moment, directed along front of the rift brings about her growing.*

***The Keywords:** track record of the forming the rifts, theory to bounce of the contact interaction, modeling of the systems, principle of the mirror images*