МАТЕМАТИКА

УДК 517.6: 517.958

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПАРАМЕТР АППРОКСИМАЦИИ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ОТРЕЗКЕ

Д.Ф. ПАСТУХОВ, Ю.Ф. ПАСТУХОВ
(***Полоцкий государственный университет***);
Н.К. ВОЛОСОВА
(Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана)

Предложен алгоритм решения начально-краевой задачи для неоднородного волнового уравнения на отрезке с двойной точностью, основанный на выборе оптимального параметра, обеспечивающего бесконечный алгебраический порядок аппроксимации однородному уравнению. Для решения системы линейных уравнений с симметрической пятидиагональной матрицей с краевым условием Дирихле доказаны достаточные условия корректности формул прогонки вперед более слабые, чем условия диагонального преобладания ее элементов. Применение алгоритма укрупнения ячеек сетки и использование метода производящих функций дает двойную точность относительной погрешности решения даже на грубой сетке с числом узлов несколько сотен.

Ключевые слова: *метод производящих функций, инициализация задачи, слабые достаточные условия корректности формул прогонки симметричной пятидиагональной матрицы.*

Введение. Задачи с численным решением волнового уравнения встречаются во многих физико-технических приложениях, большой класс краевых задач математической физики также сводится к неоднородному волновому уравнению на отрезке, на прямоугольнике, в параллелепипеде [1–5]. В последнее время в численных методах появилось направление ускоренных расчетов [2], которое достигается либо за счет увеличения порядка аппроксимации разностных схем [2–4], либо удачным выбором геометрии узлов сетки. Авторы работы [6, с. 23] в лучших традициях московской математической школы аналитически решили задачу о бегущей волне кручения на отрезке железнодорожного полотна, используя уравнение гиперболического типа с неоднородной правой частью и с учетом слагаемых, описывающих затухание механических волн.

Напомним, что порядком аппроксимации дифференциального оператора разностным оператором [4, с. 102] называется максимальное положительное число p, если существуют положительные числа $p, C > 0$, не зависящие от шага сетки h такие, что норма невязки (разности дифференциального и разностного оператора) не превышает $\left\| (Lu)_h - L_h u_h \right\| \le Ch^p$.

В данной работе решается одномерное неоднородное уравнение с ускорением расчета путем увеличения порядка аппроксимации и выбора оптимального параметра аппроксимации разностной схемы. Найденная параметризация обеспечивает однородному разностному уравнению бесконечный алгебраический порядок аппроксимации, а для неоднородной начально-краевой задачи позволяет выразить невязку уравнений только через частные производные от известной правой части волнового уравнения. Более того, применение *производящих* функций как функций временного шага заменяет вычисление бесконечного ряда слагаемых для невязки в разностных уравнениях на конечное число арифметических вычислений с двойной точностью в неоднородной начально-краевой задаче.

Нами построен алгоритм инициализации задачи, т.е. аппроксимация второго временного слоя решения по начальным данным задачи. Алгоритм сводится к прогонке либо трехдиагональной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), либо к прогонке сначала трехдиагональной, а затем пятидиагональной СЛАУ. Найдены также достаточные условия корректности формул прогонки, более слабые, чем диагональное преобладание элементов матрицы. Алгоритм инициализации дает приближение второго слоя решения по начальным условиям с относительной погрешностью не хуже чем 10^{-10} при числе узлов 500. Инженерный американский продукт ANSYS Fluent завершает решение задач с относительной точностью 10^{-3}, и с более грубой точностью на процессе инициализации задачи, т.е. с точностью $10^{-1} - 10^{-2}$. Благодаря применению спектрально устойчивых разностных схем относительная погрешность начальных данных уменьшается от значения $10^{-8} - 10^{-10}$ до величины 10^{-15}. В работе нами построен алгоритм укрупнения ячеек сетки (масштабирования) с коэффициентом масштабирования $l > 1$, позволяющий сократить число вычислений в сотни раз (l^2 раз). Неоднородная начально-краевая задача при числе узлов 300 на редкой координатно-временной сетке решается с помощью указанных здесь методов с двойной точностью 10^{-15} (т.е. первые 15 десятичных знаков аналитического и численного решения на последнем временном слое во всех координатных узлах совпадают).

Некоторые двухмерные и трехмерные колебания в приложениях часто сводятся к одномерным колебаниям [5, с. 181], например, в прямоугольном кристалле колебания атомных параллельных плоскостей порождают одномерные звуковые волны, поэтому решаемая нами численно задача полезна и в многомерных случаях.

Постановка задачи. Рассмотрим начально – краевую задачу для неоднородного волнового уравнения на отрезке $[a,b]$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), a^2 > 0,\ (x,t) \in (a,b) \times (0,T) \\ u(x,0) = \varphi(x), x \in [a,b] \\ u_t(x,0) = \psi(x), x \in [a,b] \\ u(a,t) = u(b,t) = 0,\ x \in [a,b] \end{cases} \tag{1}$$

Где $u(x,t)$ - точное аналитическое решение задачи(1). $f(x,t), \varphi(x), \psi(x)$ - функции внешнего источника, начальное смещение и начальная скорость точек струны с закреплёнными концами на отрезке соответственно заданы в условии задачи $\forall (x,t) \in [a,b] \times [0,T]$.

Аналитической задаче(1) сопоставим разностную задачу на равномерной сетке, используя пятиточечный шаблон – крест

$$\begin{cases} \dfrac{u_m^{n+1} + u_m^{n-1} - 2u_m^n}{\tau^2} = a^2 \dfrac{u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - 2u_m^n}{h^2} + f(x_m, t_n), \\ x_m = a + mh, t_n = n\tau, [m,n] \in [1, M-1] \times [1, N-1], \\ u(mh,0) = \varphi(mh), m \in [0, M], \\ u(mh,\tau) = \varphi_1(mh),\quad m \in [0,M], \varphi_1(x) = F\left(\varphi_1(x), \psi(x)\right), \\ u(0, n\tau) = u(N, n\tau) = 0, n \in [0, N]. \end{cases} \tag{2}$$

Где $h = \dfrac{b-a}{N}$, $\tau = \dfrac{T}{M}$ - временной и координатный шаги сетки, a^2 - квадрат фазовой скорости волны.

Задание начальных условий $\varphi(x), \psi(x)$ в линейной аналитической задаче(1) эквивалентно заданию значений двух начальных временных слоёв решения $u(mh,0) = \varphi(mh) = u_m^0, u(mh,\tau) = \varphi_1(mh) = u_m^1, m \in [0,M]$ в разностной задаче(2). Поскольку их запрашивает узловое значение u_m^2 в первой рекуррентной формуле системы(2) . Зависимость второго временного слоя $\varphi_1(x) = F\left(\varphi_1(x), \psi(x)\right)$ в системе уравнений (2) как функции начальных условий определяется с помощью предварительного численного алгоритма инициализации задачи методом прогонки.

Обозначим параметр $z = \dfrac{a^2\tau^2}{h^2}$ и перепишем разностное уравнение(2) в эквивалентном виде

$$u_m^{n+1} + u_m^{n-1} - 2u_m^n = z\left(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - 2u_m^n\right) + f(x_m, t_n)\tau^2 = z\left(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - 2u_m^n\right) + f_{m,n}\tau^2 \tag{3}$$

Потребуем, чтобы разностное уравнение(3) аппроксимировало первое уравнение системы(1) с максимальным алгебраическим порядком, далее разложим узловые значения $u_m^{n+1}, u_m^{n-1}, u_{m-1}^n, u_{m+1}^n$ в ряд Тейлора в центральном узле $(m,n) \leftrightarrow \left(x_m, t_n\right)$ с вектором шага соответственно (h,τ):

$$u_m^{n+1} + u_m^{n-1} - 2u_m^n = -2u_m^n + 2u_m^n + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(s)!} \frac{\partial^s u_m^n}{\partial t^s} \tau^s + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(s)!} \frac{\partial^s u_m^n}{\partial t^s} \tau^s \overset{(s=2k)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial t^{2k}} \tau^{2k} =$$

$$= \tau^2 \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial t^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial t^{2k}} \tau^{2k}$$

Меняя в последней формуле буквенные обозначения индексов и переменных $(m \leftrightarrow n), (x \leftrightarrow t)(h \leftrightarrow \tau)$ получим:

$$z\left(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - 2u_m^n\right) + f_{m,n}\tau^2 = z\left(h^2 \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial x^{2k}} h^{2k}\right) + f_{m,n}\tau^2$$

Приравняем правые части последних двух выражений, используя тождество $\frac{\partial^2 u_m^n}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} + f_{m,n}$ имеем:

$$\tau^2 \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial t^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial t^{2k}} \tau^{2k} = \tau^2 a^2 \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} + f_{m,n}\tau^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial t^{2k}} \tau^{2k} =$$

$$= \frac{a^2\tau^2}{h^2}\left(h^2 \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial x^{2k}} h^{2k} \right) + f_{m,n}\tau^2 \Leftrightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial t^{2k}} \tau^{2k} = z \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial x^{2k}} h^{2k} \tag{4}$$

Невязка первого уравнения системы(2) равна невязке уравнения(4), т.е. разности левой и правой частей уравнения (4):

$$R(u_m^n) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \left(\frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial t^{2k}} \tau^{2k} - z \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial x^{2k}} h^{2k} \right) \tag{5}$$

Замечание1. Если параметр $z = \frac{a^2\tau^2}{h^2} = 1$ и волновое уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ однородное, то из его записи для произвольного узла сетки $\frac{\partial^2 u_m^n}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2}$ следует $\frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial t^{2k}} = a^{2k} \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial x^{2k}}$, тогда в формуле(5)

$\frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial t^{2k}} \tau^{2k} - z \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial x^{2k}} h^{2k} = h^{2k} \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial x^{2k}} \left(\frac{\tau^{2k} a^{2k}}{h^{2k}} - z \right) = h^{2k} \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial x^{2k}} \left(z^k - z \right) = 0$. Другими словами,

для параметра $z = 1$ однородное одномерное волновое уравнение имеет бесконечный порядок аппроксимации! В этом случае разностная схема(3) с $f_{m,n} \equiv 0, z = 1$ точна для многочленов произвольной степени. Другими словами, равномерная норма погрешности аппроксимации первого уравнения задачи(1) первым уравнением разностной задачи(2) не зависит от шага сетки h (аппроксимация происходит с двойной точностью даже для крупного шага сетки).

Для упрощения формулы(5) докажем

Утверждение 1. Для неоднородного одномерного волнового уравнения

$\frac{\partial^2 u_m^n}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} + f_{m,n}$ справедлива формула

$$\frac{\partial^{2p} u_m^n}{\partial t^{2p}} = a^{2p} \frac{\partial^{2p} u_m^n}{\partial x^{2p}} + \sum_{l=0}^{p-1} a^{2l} \frac{\partial^{2(p-1)} f_{m,n}}{\partial x^{2l} \partial t^{2(p-l-1)}}, \quad p \ge 2 \tag{6}$$

Доказательство. Проведём по индукции. Для базы индукции если $p = 2$ имеем:

$$\frac{\partial^4 u_m^n}{\partial t^4} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(a^2 \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} + f_{m,n} \right) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(a^2 \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} + f_{m,n} \right) + \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial t^2} = a^4 \frac{\partial^4 u_m^n}{\partial x^4} + a^2 \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial t^2}$$

что верно – получаем формулу (6) если $p = 2$.

Пусть справедлива также формула $\frac{\partial^{2(p-1)} u_m^n}{\partial t^{2(p-1)}} = a^{2(p-1)} \frac{\partial^{2(p-1)} u_m^n}{\partial x^{2(p-1)}} + \sum_{l=0}^{p-2} a^{2l} \frac{\partial^{2(p-2)} f_{m,n}}{\partial x^{2l} \partial t^{2(p-l-2)}}$, тогда

$$\frac{\partial^{2p} u_m^n}{\partial t^{2p}} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(a^{2(p-1)} \frac{\partial^{2(p-1)} u_m^n}{\partial x^{2(p-1)}} + \sum_{l=0}^{p-2} a^{2l} \frac{\partial^{2(p-2)} f_{m,n}}{\partial x^{2l} \partial t^{2(p-l-2)}} \right) = a^{2(p-1)} \frac{\partial^{2(p-1)}}{\partial x^{2(p-1)}} \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial t^2} + \sum_{l=0}^{p-2} a^{2l} \frac{\partial^{2(p-1)} f_{m,n}}{\partial x^{2l} \partial t^{2(p-l-1)}} =$$

$$= a^{2(p-1)} \frac{\partial^{2(p-1)}}{\partial x^{2(p-1)}} \left(a^2 \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} + f_{m,n} \right) + \sum_{l=0}^{p-2} a^{2l} \frac{\partial^{2(p-1)} f_{m,n}}{\partial x^{2l} \partial t^{2(p-l-1)}} = a^{2p} \frac{\partial^{2p} u_m^n}{\partial x^{2p}} + a^{2(p-1)} \frac{\partial^{2(p-1)} f_{m,n}}{\partial x^{2(p-1)}} + \sum_{l=0}^{p-2} a^{2l} \frac{\partial^{2(p-1)} f_{m,n}}{\partial x^{2l} \partial t^{2(p-l-1)}} =$$

$$a^{2p} \frac{\partial^{2p} u_m^n}{\partial x^{2p}} + \sum_{l=0}^{p-1} a^{2l} \frac{\partial^{2(p-1)} f_{m,n}}{\partial x^{2l} \partial t^{2(p-l-1)}},$$

т.е. формула(6)(**утверждение 1**) доказана для произвольного целого $p \ge 2$.

Используя формулу(6), преобразуем невязку разностного уравнения(3), подставив её в формулу(5):

$$R(u_m^n)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{(2k)!}\left(\frac{\partial^{2k}u_m^n}{\partial t^{2k}}\tau^{2k}-z\frac{\partial^{2k}u_m^n}{\partial x^{2k}}h^{2k}\right)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{(2k)!}\left(\tau^{2k}\left(a^{2k}\frac{\partial^{2k}u_m^n}{\partial x^{2k}}+\sum_{l=0}^{k-1}a^{2l}\frac{\partial^{2(k-1)}f_{m,n}}{\partial x^{2l}\partial t^{2(k-l-1)}}\right)-z\frac{\partial^{2k}u_m^n}{\partial x^{2k}}h^{2k}\right)=$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{(2k)!}\left(h^{2k}\left(\frac{\tau^{2k}a^{2k}}{h^{2k}}-z\right)\frac{\partial^{2k}u_m^n}{\partial x^{2k}}+\tau^{2k}\sum_{l=0}^{k-1}a^{2l}\frac{\partial^{2(k-1)}f_{m,n}}{\partial x^{2l}\partial t^{2(k-l-1)}}\right)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{(2k)!}\left(h^{2k}\left(z^k-z\right)\frac{\partial^{2k}u_m^n}{\partial x^{2k}}+\tau^{2k}\sum_{l=0}^{k-1}a^{2l}\frac{\partial^{2(k-1)}f_{m,n}}{\partial x^{2l}\partial t^{2(k-l-1)}}\right)\overset{(z=1)}{=}$$

$$\overset{(z=1)}{=}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{(2k)!}\left(\tau^{2k}\sum_{l=0}^{k-1}a^{2l}\frac{\partial^{2(k-1)}f_{m,n}}{\partial x^{2l}\partial t^{2(k-l-1)}}\right) \qquad (7)$$

Выпишем несколько первых слагаемых для невязки $R(u_m^n)$ из формулы(7):

$$R(u_m^n)=\frac{2\tau^4}{4!}\left(a^2\frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial t^2}\right)+\frac{2\tau^6}{6!}\left(a^4\frac{\partial^4 f_{m,n}}{\partial x^4}+a^2\frac{\partial^4 f_{m,n}}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\partial^4 f_{m,n}}{\partial t^4}\right)+$$

$$+\frac{2\tau^8}{8!}\left(a^6\frac{\partial^6 f_{m,n}}{\partial x^6}+a^4\frac{\partial^6 f_{m,n}}{\partial x^4\partial t^2}+a^2\frac{\partial^6 f_{m,n}}{\partial x^2\partial t^4}+\frac{\partial^6 f_{m,n}}{\partial t^6}\right)+$$

$$+\frac{2\tau^{10}}{10!}\left(a^8\frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial x^8}+a^6\frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial x^6\partial t^2}+a^4\frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial x^4\partial t^4}+a^2\frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial x^2\partial t^6}+\frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial t^8}\right)$$

$$+\frac{2\tau^{12}}{12!}\left(a^{10}\frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial x^{10}}+a^8\frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial x^8\partial t^2}+a^6\frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial x^6\partial t^4}+a^4\frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial x^4\partial t^6}+a^2\frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial x^2\partial t^8}+\frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial t^{10}}\right) \qquad (8)$$

Определение 1. Одномерное уравнение в частных производных

$$a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=0, a^2>0 \qquad (9)$$

по аналогии с волновым уравнением $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0, a^2>0$

Назовём волновым уравнением комплексного аргумента. Рассмотрим свойства решений(9).

Утверждение 2(свойства волнового уравнения комплексного аргумента).

1) Уравнения $xi+at=\overline{C_1}=const, xi-at=\overline{C_2}=const$ являются уравнениями характеристик для(9). Действительно

$$a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=0\Leftrightarrow\left(a\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(a\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial t}\right)f=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial t}=0\\ a\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial t}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{dx}{a}=\frac{dt}{i}\\ \frac{dx}{a}=\frac{dt}{-i}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}xi-at=C_1\Leftrightarrow x+iat=-iC_1=\overline{C_1}\\ xi+at=C_2\Leftrightarrow x-iat=-iC_2=\overline{C_2}\end{array}\right.$$

2) Решением волнового уравнения комплексного аргумента является линейная комбинация произвольных дважды дифференцируемых функций на комплексных характеристиках

$$f(x,t)=C_1u(x+iat)+C_2v(x-iat), u(\omega), v(\omega)\in C^2(Z): \qquad (10)$$

$$a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=a^2\left(C_1u''(x+iat)+C_2v''(x-iat)\right)+(ia)^2C_1u''(x+iat)+(-ia)^2C_2v''(x-iat)=0$$

3)Пусть функция $f(x\pm iat)=f_1(x,t)+if_2(x,t)$ комплексного аргумента $(x\pm iat)$ - решение уравнения(9), тогда функции действительного аргумента $f_1(x,t), f_2(x,t)$, т.е. действительная и мнимая части $f(x\pm iat)$ также являются решениями уравнения (9). Действительно, имеем:

$$a^2\frac{\partial^2 f\left(x\pm iat\right)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f\left(x\pm iat\right)}{\partial t^2}=0=a^2\frac{\partial^2\left(f_1(x,t)+if_2(x,t)\right)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\left(f_1(x,t)+if_2(x,t)\right)}{\partial t^2}=0\Leftrightarrow$$

$$a^2\frac{\partial^2\left(f_1(x,t)+if_2(x,t)\right)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\left(f_1(x,t)+if_2(x,t)\right)}{\partial t^2}=0+i\cdot 0\Leftrightarrow\begin{cases}a^2\dfrac{\partial^2 f_1(x,t)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f_1(x,t)}{\partial t^2}=0\\ a^2\dfrac{\partial^2 f_2(x,t)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f_2(x,t)}{\partial t^2}=0\end{cases}$$

То есть показано, что функции $f_1(x,t),\ f_2(x,t)$ - решения уравнения(9). Последняя система уравнений следует из определения равенства двух комплексных чисел. **Утверждение2** доказано.
Приведём функции из класса решений волнового уравнения комплексного аргумента, используя **Утверждение 2.** Пример1. $f_1(x,t)=\mathrm{Re}\,(x+iat)^2=x^2-a^2t^2$. Действительно,

$$a^2\frac{\partial^2\left(x^2-a^2t^2\right)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\left(x^2-a^2t^2\right)}{\partial t^2}=2a^2-2a^2=0$$

Пример 2. $f_2(x,t)=\mathrm{Im}\,(x+iat)^4=4x^3at-4xa^3t$. Действительно,

$$a^2\frac{\partial^2\left(4x^3at-4xa^3t^3\right)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\left(4x^3at-4xa^3t^3\right)}{\partial t^2}=24a^3xt-24a^3xt=0$$

Пример3. $f_3(x,t)=\mathrm{Im}\left(exp(x+iat)\right)=exp\left(x\right)sin\left(at\right)$. Действительно,

$$a^2\frac{\partial^2\left(exp\left(x\right)sin\left(at\right)\right)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\left(exp\left(x\right)sin\left(at\right)\right)}{\partial t^2}=\left(a^2-a^2\right)exp\left(x\right)sin\left(at\right)=0$$

Замечание2. Если правая часть $f(x,t)$ неоднородного волнового уравнения действительного аргумента задачи(1) удовлетворяет однородному волновому уравнению мнимого аргумента, то порядок невязки разностной схемы задачи(2) увеличивается со второго порядка до четвёртого. Более того, невязку в этом случае удаётся выразить через частные производные по одной независимой переменной x. Нужно учесть, что невязка уравнения (3) на 2 порядка больше невязки уравнения(2). Действительно, из формулы(8) получим

$$R(u_m^n)=\frac{2\tau^6}{6!}\left(\frac{\partial^4 f_{m,n}}{\partial t^4}+a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(a^2\frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial t^2}\right)\right)+$$

$$+\frac{2\tau^8}{8!}\left(\frac{\partial^4}{\partial t^4}\left(a^2\frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial t^2}\right)+a^4\frac{\partial^4}{\partial x^4}\left(a^2\frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial t^2}\right)\right)+$$

$$+\frac{2\tau^{10}}{10!}\left(\frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial t^8}+a^2\frac{\partial^6}{\partial x^2\partial t^4}\left(a^2\frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial t^2}\right)+a^6\frac{\partial^6}{\partial x^6}\left(a^2\frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial t^2}\right)\right)+\ldots=$$

$$=\frac{2\tau^6}{6!}\frac{\partial^4 f_{m,n}}{\partial t^4}+\frac{2\tau^{10}}{10!}\frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial t^8}+\ldots=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tau^{4k+2}}{\left(4k+2\right)!}\frac{\partial^{4k} f_{m,n}}{\partial t^{4k}} \tag{11}$$

Кроме аппроксимации важен вопрос об устойчивости разностного уравнения (3), так как неустойчивая схема накапливает ошибку округления по геометрической прогрессии, что ведёт к неограниченному численному решению. В то время как устойчивая схема суммирует ошибки округления по арифметической прогрессии и норма невязки пропорциональна количеству элементарных операций. Проверим разностное уравнение(3) на спектральную устойчивость. Учтём, что численное решение $\overline{u}_m^n(x,t)$ удовлетворяет также уравнению(3) как и проекция аналитического решения на узлы сетки $\left(u(x,t)\right)_m^n=u_m^n,\varepsilon_m^n=\overline{u}_m^n-u_m^n$
$\overline{u}_m^{n+1}+\overline{u}_m^{n-1}-2\overline{u}_m^n=z\left(\overline{u}_m^{n+1}+\overline{u}_m^{n-1}-2\overline{u}_m^n\right)+f_{m,n}\tau^2$. Вычитая из последнего уравнения уравнение (3) получим однородное уравнение относительно невязок в каждом внутреннем узле сетки(m,n)

$$\varepsilon_m^{n+1}+\varepsilon_m^{n-1}-2\varepsilon_m^n=z\left(\varepsilon_m^{n+1}+\varepsilon_m^{n-1}-2\varepsilon_m^n\right)$$

Подставляя в последнее уравнение ошибку округления вида $\varepsilon_m^n = \lambda^n(\varphi)e^{im\varphi}$, получим спектральное уравнение $\lambda + 1/\lambda - 2 = z\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} - 2\right) = -4zsin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\left(1 - 2zsin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)\lambda + 1 = 0$ (12)

$\left|u_m^n\right| \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Leftrightarrow \left|\lambda(\varphi)\right| \le 1 \ \forall\varphi \in [0,2\pi]$ (определение спектральной устойчивости[4,стр.125])

Используя коэффициенты квадратного уравнения(12), получим $\left|\lambda_1\right|\left|\lambda_2\right| = \left|\frac{c}{a}\right| = 1/1 = 1$.

Если корни действительные, то при $\left|\lambda_1\right| < 1 \Rightarrow \left|\lambda_2\right| > 1$.

Поэтому, возможен единственный результат $\left|\lambda_1\right| = \left|\lambda_2\right| = 1 \ \forall\varphi \in [0,2\pi]$, что заведомо невозможно, т.к. $\lambda_{1,2} = \left(1 - 2zsin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) \pm \sqrt{\left(1 - 2zsin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2 - 1}$ зависит от φ. Следовательно, имеем пару комплексно сопряжённых корней $\lambda_{1,2} = \left(1 - 2zsin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) \pm i\sqrt{1 - \left(1 - 2zsin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2}$,

$$\left|\lambda_{1,2}\right|^2 = \left(1 - 2zsin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2 + 1 - \left(1 - 2zsin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2 = 1 \ \forall\varphi \in [0,2\pi],$$

выясним условия, при которых дискриминант отрицательный

$$\left(1 - 2zsin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2 - 1 \le 0 \Leftrightarrow 1 - 4zsin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + 4z^2sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right) \le 1 \Leftrightarrow 4sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)z\left(z-1\right) \le 0 \Leftrightarrow$$

$z \in (0,1], z \ne 0, \forall\varphi \in [0,2\pi]$, то есть с параметром $z = 1$ разностное уравнение(3) является спектрально устойчивым.

Тестовый пример 1

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + sin(x)sin(t),\ x \in (0,\pi), t > 0 \\ u(x,0) = sin(x), u_t(x,0) = sin(2x), x \in [0,\pi] \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \ge 0 \end{cases}$$

Сведём исходную задачу к 3 простым $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t)$, где $u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t)$:

$$\begin{cases} u_{1tt} = u_{1xx} + sin(x)sin(t),\ x \in (0,\pi), t > 0 \\ u_1(x,0) = 0, u_{1t}(x,0) = 0, x \in [0,\pi] \\ u_1(0,t) = u_1(\pi,t) = 0,\ t \ge 0 \end{cases} \text{(a)} \quad \begin{cases} u_{2tt} = u_{2xx},\ x \in (0,\pi), t > 0 \\ u_2(x,0) = sin(x), u_{2t}(x,0) = 0, x \in [0,\pi] \\ u_2(0,t) = u_2(\pi,t) = 0,\ t \ge 0 \end{cases} \text{(b)}$$

$$\begin{cases} u_{3tt} = u_{3xx},\ x \in (0,\pi), t > 0 \\ u_3(x,0) = 0, u_{3t}(x,0) = sin(2x), x \in [0,\pi] \\ u_3(0,t) = u_3(\pi,t) = 0,\ t \ge 0 \end{cases} \text{(c)}$$

Выбираем решение задачи (a) в виде $u_1(x,t) = f_1(t)sin(x)$, удовлетворяющее граничным условиям $u_1(0,t) = u_1(\pi,t) = 0$, подставляя в первое уравнение системы, получим:

$$\begin{cases} f_1'' + f_1 = sint \\ f_1(0) = f_1'(0) = 0 \end{cases}$$

общее решение однородного уравнения есть $f_{1oo}(t) = Asint + B\cos t$. Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $f_{1ч}(t) = (a + bt)cost,\ f'_{1ч} = bcost - (a + bt)sint,\ f''_{1ч} = -2bsint - (a + bt)cost$

,подставляем значения $f_{1ч}(t),\ f''_{1ч}$ в первое уравнение системы:

$$-2bsint = sint \Leftrightarrow b = -1/2, a = 0,\ f_1(t) = f_{1oo}(t) + f_{1ч}(t) = Asint + B\cos(t) - \frac{tcost}{2},\ f_1(0) = f_1^{'}(0) = 0$$

$$B = 0, A - 1/2 = 0,\ f_1(t) = \frac{(sint - tcost)}{2}, u_1(x,t) = f_1(t)sin(x) = \frac{(sint - tcost)sin(x)}{2}$$

Решение задачи(b) ищем в виде $u_2(x,t) = f_2(t)sin(x)$, которое подставим в уравнения системы(b)

$$\begin{cases} f_2^{''} + f_2 = 0 \\ f_2(0) = 1,\ f_2^{'}(0) = 0 \end{cases}$$

$$f_2(t) = A_1 sint + B_1 cost,\ f_2(0) = 1 \Leftrightarrow B_1 = 1,\ f^{'}{}_2(0) = 0 \Leftrightarrow A_1 = 0$$

Получим $u_2(x,t) = f_2(t)sinx = costsinx$

Решение задачи(c) ищем в виде $u_3(x,t) = f_3(t)sin(2x)$,которое подставим в уравнения системы(c)

$$\begin{cases} f_3^{''} + 4f_3 = 0 \\ f_3(0) = 0,\ f_3^{'}(0) = 1 \end{cases}$$

$$f_3(t) = A_2 sin(2t) + B_2 cos(2t),\ f_3(0) = 0 \Leftrightarrow B_2 = 0,\ f^{'}{}_3(0) = 1 \Leftrightarrow 2A_2 = 1$$

$u_3(x,t) = f_3(t)sin(x) = \dfrac{sin(2t)sin(2x)}{2}$. Решение исходного примера есть

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) = \frac{(sin(t) - tcos(t))sin(x)}{2} + cos(t)sin(x) + \frac{sin(2t)sin(2x)}{2}$$

Инициализация задачи

Инициализацией задачи назовём определение второго временного слоя решения по начальным данным задачи, т.е. определения функции $\varphi_1(x)$ в задаче (2).

$$u(mh,\tau) = \varphi_1(mh),\quad m \in [0, M], \varphi_1(x) = F\left(\varphi(x) \equiv u(x,0), \psi(x) \equiv \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}\right).$$

Аппроксимируем первую производную решения в начальный момент времени $\psi(x)$. Рассмотрим два случая инициализации разностной задачи(2): 1)в задаче (2) первое уравнение однородное $\varphi(x) \neq 0, \psi(x) \neq 0$,2) в задаче (2) первое уравнение неоднородное $\varphi(x) = 0, \psi(x) = 0$. В этих двух случаях инициализация задачи существенно отличается.

Построим квадратурную формулу для функции $\psi(x)$, связывающую узловые значения функции в одном узле в трёх временных слоях, с момента времени $t = 0$ точную для многочленов максимальной степени

$$u_\tau(0) = \frac{1}{\tau}\left(C_0 u(0) + C_1 u(\tau) + C_2 u(2\tau)\right),\ u(t) \equiv 1 : u_\tau(0) = 0 = \frac{1}{\tau}\left(C_0 + C_1 + C_2\right)$$

$$u(t) \equiv t : u_\tau(0) = 1 = \frac{1}{\tau}\left(0C_0 + \tau C_1 + 2\tau C_2\right), u(t) \equiv t^2 : u_\tau(0) = 0 = \frac{1}{\tau}\left(0^2 C_0 + \tau^2 C_1 + (2\tau)^2 C_2\right)$$

Решаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} C_0 + C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + C_2 2 = 1 \\ C_1 + C_2 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_0 = -3/2 \\ C_1 = 2 \\ C_2 = -1/2 \end{cases} \quad u_\tau(0) = \frac{1}{\tau}\left(-\frac{3}{2}u^0 + 2u^1 - \frac{1}{2}u^2\right) \text{откуда}$$

$$u(2\tau) \equiv u^2 = -3u^0 + 4u^1 - 2\tau u_\tau \qquad (13)$$

Формула(13) имеет третий алгебраический порядок погрешности, т.е. погрешность имеет вид $O(\tau^3)$

Получим аналогичную формулу, связывающую четыре временных слоя:

$$u_\tau(0) = \frac{1}{\tau}\left(C_0 u(0) + C_1 u(\tau) + C_2 u(2\tau) + C_3 u(3\tau)\right),\ u(t) \equiv 1 : u_\tau(0) = 0 = \frac{1}{\tau}\left(C_0 + C_1 + C_2 + C_3\right)$$

$u(t)=t:u_\tau(0)=1=\frac{1}{\tau}(C_0 0+\tau C_1+2\tau C_2+3\tau C_3),\ u(t)=t^2:u_\tau(0)=0=\frac{1}{\tau}\left(0^2C_0+\tau^2C_1+(2\tau)^2C_2+(3\tau)^2C_3\right)$

$u(t)=t^3:u_\tau(0)=0=\frac{1}{\tau}\left(0^3C_0+\tau^3C_1+(2\tau)^3C_2+(3\tau)^3C_3\right)$ Решаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}C_0+C_1+C_2+C_3=0\\ C_1+2C_2+3C_3=1\\ C_1+4C_2+9C_3=0\\ C_1+8C_2+27C_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_0=-11/6\\ C_1=3\\ C_2=-3/2\\ C_3=1/3\end{cases}\quad u_\tau(0)=\frac{1}{\tau}\left(-\frac{11}{6}u^0+3u^1-\frac{3}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3\right)$$

откуда $u(3\tau)\equiv u^3=\frac{11}{2}u^0-9u^1+\frac{9}{2}u^2+3\tau u_\tau$ (14)

Формула(14) имеет четвёртый порядок погрешности, т.е. погрешность имеет вид $O(\tau^4)$

В первой задаче инициализации с использованием формул (3),(13) $f_{m,n}\equiv 0$ для трёх временных слоёв имеем:

$$u_m^{n+1}+u_m^{n-1}-2u_m^n=z\left(u_{m+1}^n+u_{m-1}^n-2u_m^n\right)+f_{m,n}\tau^2\Leftrightarrow u_m^2=-u_m^0+2(1-z)u_m^1+z\left(u_{m+1}^1+u_{m-1}^1\right)=$$

$$=-3u_m^0+4u_m^1-2\tau u_\tau\Leftrightarrow$$

$$zu_{m-1}^1-2(1+z)u_m^1+zu_{m+1}^1=-2u_m^0-2\tau u_\tau,\ m=\overline{1,M-1} \qquad (15)$$

Система линейных уравнений(15) представляет трёхдиагональную матрицу с коэффициентами $A_m=z,C_m=2(1+z),B_m=z,F_m=-2u_m^0-2\tau u_\tau$ относительно неизвестных $u_{m-1}^1,u_m^1,u_{m+1}^1$.

Решить систему уравнений (15) можно методом прогонки, например, с помощью формул [3,стр.44] , [7,стр.68], прогонки вперёд

$$\lambda_m=\frac{B_m}{C_m-A_m\lambda_{m-1}},\ \nu_m=\frac{A_m\nu_{m-1}-F_m}{C_m-A_m\lambda_{m-1}},\ m=\overline{1,M-1},\lambda_0=0,\nu_0=u_0^1$$

и формул прогонки назад

$$u_m^1=\lambda_m u_{m+1}^1+\nu_m,\ m=\overline{M-1,1} \qquad (16)$$

Условие корректности формул прогонки (условие абсолютного диагонального преобладания) выполнено, так как $|C_m|\ge|A_m|+|B_m|>0\Leftrightarrow 2(1+z)>2z>0$ [3,стр.35]. Поскольку формула(13) точна для всех многочленов второй степени, т.е. имеет погрешность $O(h^3)$с третьим алгебраическим порядком, то и погрешность решения системы уравнений(16) также $O(h^3)$, т.е. формулу(15) можно считать начальным этапом инициализации задачи. Используя формулы (3),(14) $f_{m,n}\equiv 0$, построим второй этап инициализации задачи(2)

$$u_m^{n+1}+u_m^{n-1}-2u_m^n=z\left(u_{m+1}^n+u_{m-1}^n-2u_m^n\right)+f_{m,n}\tau^2\Leftrightarrow u_m^3=-u_m^1+2(1-z)u_m^2+z\left(u_{m+1}^2+u_{m-1}^2\right)=$$

$$=\frac{11}{2}u_m^0-9u_m^1+\frac{9}{2}u_m^2+3\tau u_{m\tau}^0\Leftrightarrow 8u_m^1+\left(-\frac{5}{2}-2z\right)u_m^2+z\left(u_{m+1}^2+u_{m-1}^2\right)=\frac{11}{2}u_m^0+3\tau u_{m\tau}^0=$$

$$8u_m^1+\left(-\frac{5}{2}-2z\right)\left(-u_m^0+2(1-z)u_m^1+z\left(u_{m+1}^1+u_{m-1}^1\right)\right)+$$

$$+z\left(-u_{m+1}^0+2(1-z)u_{m+1}^1+z\left(u_{m+2}^1+u_m^1\right)-u_{m-1}^0+2(1-z)u_{m-1}^1+z\left(u_m^1+u_{m-2}^1\right)\right)\Leftrightarrow$$

$$z^2u_{m-2}^1+(2z(1-z)-z\left(\frac{5}{2}+2z\right))u_{m-1}^1+u_m^1\left(8-\left(\frac{5}{2}+2z\right)2(1-z)+2z^2\right)+(2z(1-z)-z\left(\frac{5}{2}+2z\right))u_{m+1}^1+z^2u_{m+2}^1=$$

$$=\left(\frac{11-5}{2}-2z\right)u_m^0+3\tau u_{m\tau}^0+zu_{m-1}^0+zu_{m+1}^0\Leftrightarrow$$

$$z^2u_{m-2}^1-\left(\frac{1}{2}z+4z^2\right)u_{m-1}^1+u_m^1\left(3+z+6z^2\right)-\left(\frac{1}{2}z+4z^2\right)u_{m+1}^1+z^2u_{m+2}^1=(3-2z)u_m^0+zu_{m-1}^0+zu_{m+1}^0+3\tau u_{m\tau}^0 \quad (17)$$

Для оптимального параметра $z=1$ формула(17) перейдёт в формулу

$$u_{m-2}^1-\frac{9}{2}u_{m-1}^1+10u_m^1-\frac{9}{2}u_{m+1}^1+u_{m+2}^1=u_m^0+u_{m-1}^0+u_{m+1}^0+3\tau u_{m\tau}^0 \quad (18)$$

Отметим, что трёхдиагональная матрица(15) и пятидиагональная матрица(18) систем линейных уравнений в данном случае используется для аппроксимации второго временного слоя, а не для решения основной задачи, как в работах[7,8].

Линейная система уравнений(19) имеет пятидиагональную матрицу прогонки относительно неизвестных

$u_{m-2}^1,u_{m-1}^1,u_m^1,u_{m+1}^1,u_{m+2}^1$, обозначим её коэффициенты

$$A_{m1}=1,A_{m2}=-\frac{9}{2},C_m=-10,B_{m1}=-\frac{9}{2},B_{m2}=1,F_m=u_{m-1}^0+u_m^0+u_{m+1}^0+3\tau u_{m\tau}^0$$

Для решения системы уравнений(18) используем формулы прогонки [7,стр.70]:

$$\lambda_{1m}=\frac{B_{1m}+A_{2m}\lambda_{2m-1}+A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{2m-1}}{C_m-A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{1m-1}-A_{1m}\lambda_{2m-2}-A_{2m}\lambda_{1m-1}},\lambda_{2m}=\frac{B_{2m}}{C_m-A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{1m-1}-A_{1m}\lambda_{2m-2}-A_{2m}\lambda_{1m-1}}$$

$$\nu_m=\frac{A_{1m}\lambda_{1m-2}\nu_{m-1}+A_{1m}\nu_{m-2}+A_{2m}\nu_{m-1}-F_m}{C_m-A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{1m-1}-A_{1m}\lambda_{2m-2}-A_{2m}\lambda_{1m-1}},\overline{m=2,M-2}$$

(формулы прогонки вперёд)

$$u_m^1=\lambda_{1m}u_{m+1}^1+\lambda_{2m}u_{m+2}^1+\nu_m,\ m=\overline{M-2,2} \quad (19)$$

$$u_0^1=\lambda_{10}u_1^1+\lambda_{20}u_2^1+\nu_0,u_1^1=\lambda_{11}u_2^1+\lambda_{21}u_3^1+\nu_1,\ u_{M-2}^1=\lambda_{1M-2}u_{M-1}^1+\lambda_{2M-2}u_M^1+\nu_{M-2}$$

(формулы прогонки назад).

Из последней формулы видно, что u_0^1,u_1^1 принимают фиксированные значения (краевое условие Дирихле - краевые значения $u_0^1,u_1^1,u_{M-1}^1,u_M^1$ заданы) при любых соседних узловых значениях, если положить $\nu_0=u_0^1,\lambda_{10}=\lambda_{20}=0,\nu_1=u_1^1,\lambda_{11}=\lambda_{21}=0$.

Коэффициенты последней системы уравнений не имеют даже нестрогого (абсолютного) диагонального преобладания, так как $|C_m|=10<|A_{m1}|+|A_{m2}|+|B_{m1}|+|B_{m2}|=2\left(1+\frac{9}{2}\right)=11$. Однако, недиагональные элементы матрицы $A_{m1},A_{m2},B_{m1},B_{m2}$ являются знакопеременными и удовлетворяют требованию условного диагонального преобладания:

$$|C_m|=10\geq|A_{m1}+A_{m2}+B_{m1}+B_{m2}|=2\left|1-\frac{9}{2}\right|=7$$

Определение 2. Говорят, что квадратная матрица коэффициентов $a_{i,j}$ имеет условное диагональное преобладание, если для любой её строки

$$|a_{i,i}|\geq\left|\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}a_{i,j}\right|,i=\overline{1,n}.$$

Оказывается, что для корректности формул прогонки вперёд(19) при решении системы уравнений(18) достаточно выполнить условие более слабое, чем абсолютное диагональное преобладание элементов матрицы $|a_{i,i}|\geq\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}|a_{i,j}|\Leftrightarrow|C_m|>2\left(|A_{2m}|+|A_{1m}|\right)\Leftrightarrow|-10|\vee 2\left(|-9/2|+1\right)=11$, но более сильное, чем

условное диагонального преобладания элементов матрицы (для коэффициентов левой части уравнения (18))
$\left|a_{i,i}\right| \geq \left|\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{i,j}\right| \Leftrightarrow \left|C_m\right| \geq 2\left(\left|A_{2m}\right| - \left|A_{1m}\right|\right) \Leftrightarrow \left|-10\right| \geq 2\left(\left|-9/2\right| + 1\right) = 7$,а именно

$\left|-10\right| = \left|C_m\right| \geq 2\left|A_{2m}\right| + \left|A_{1m}\right| = 2\left|-9/2\right| + 1 = 10$.

Утверждение 3. Пусть квадратная пятидиагональная матрица коэффициентов линейной системы уравнений

$A_{1m}u^1_{m-2} + A_{2m}u^1_{m-1} - C_m u^1_m + B_{1m}u^1_{m+1} + B_{2m}u^1_{m+2} = F_m, m = \overline{2, M-2}$ является:

1)симметрической: $A_{1m} = B_{2m}$, $A_{2m} = B_{1m}$, со знакочередующимися недиагональными коэффициентами, для определённости

$A_{1m} > 0, A_{2m} < 0, C_m < 0$

2)удовлетворяет условию (условию подчинения коэффициентов):

$\left|C_m\right| \geq 2\left|A_{2m}\right| + \left|A_{1m}\right| \Leftrightarrow C_m \leq -2\left|A_{2m}\right| - \left|A_{1m}\right|, \left|A_{2m}\right| \geq 2\left|A_{1m}\right|$.

Тогда в краевой задаче Дирихле: $\nu_0 = u^1_0, \lambda_{10} = \lambda_{20} = 0, \nu_1 = u^1_1, \lambda_{11} = \lambda_{21} = 0$

1) $0 \leq \lambda_{1m} \leq 1,\ -1/2 \leq \lambda_{2m} \leq 0, m = \overline{0, n-2}$

2) формулы прогонки вперёд(19) для коэффициентов $\lambda_{1m}, \lambda_{2m}, \nu_m$ корректны.

Доказательство утверждения 3 проведём по индукции.

1)для базы индукции m=2 имеем:

$$\lambda_{12} = \frac{B_{12} + A_{22}\lambda_{21} + A_{12}\lambda_{10}\lambda_{21}}{C_2 - A_{12}\lambda_{10}\lambda_{11} - A_{12}\lambda_{20} - A_{22}\lambda_{11}} = \frac{A_{22}}{C_2} > 0, \left|\frac{A_{22}}{C_2}\right| \leq \frac{\left|A_{22}\right|}{2\left|A_{22}\right| + \left|A_{12}\right|} \leq \frac{\left|A_{22}\right|}{2\left|A_{22}\right|} < 1,$$

$$\lambda_{22} = \frac{B_{22}}{C_2 - A_{12}\lambda_{10}\lambda_{11} - A_{12}\lambda_{20} - A_{22}\lambda_{11}} = \frac{A_{12}}{C_2} < 0, \frac{\left|A_{12}\right|}{\left|C_2\right|} \leq \frac{\left|A_{12}\right|}{2\left|A_{22}\right| + \left|A_{12}\right|} < \frac{\left|A_{12}\right|}{5/2\left|A_{12}\right|} \leq \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$$

$sign(\lambda_{12}) = sign\left(\frac{A_{22}}{C_2}\right) = 1, sign(\lambda_{22}) = sign\left(\frac{A_{12}}{C_2}\right) = -1$.База индукции проверена. Пусть верно

$$\left|\lambda_{1k}\right| < 1, \left|\lambda_{2k}\right| < \frac{1}{2}, sign(\lambda_{1k}) = sign\left(\frac{A_{2k}}{C_k}\right) = 1, sign(\lambda_{2k}) = sign\left(\frac{A_{1k}}{C_k}\right) = -1, \forall k = \overline{2, m-1}$$

Тогда $\left|\lambda_{1m}\right| = \frac{\left|B_{1m} + A_{2m}\lambda_{2m-1} + A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{2m-1}\right|}{\left|C_m - A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{1m-1} - A_{1m}\lambda_{2m-2} - A_{2m}\lambda_{1m-1}\right|} = \frac{\left|A_{2m} + A_{2m}\lambda_{2m-1} + A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{2m-1}\right|}{\left|C_m - A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{1m-1} - A_{1m}\lambda_{2m-2} - A_{2m}\lambda_{1m-1}\right|}$

$$-1/2 \leq \lambda_{2m-1} \leq 0, 1/2 \leq \lambda_{2m-1} + 1 \leq 1,\ 0 \leq \lambda_{1m-1} < 1, -\left|A_{2m}\right| \leq A_{2m}\left(1 + \lambda_{2m-1}\right) \leq -\left|A_{2m}\right|/2,$$

$$-\left|A_{1m}\right|/2 \leq A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{2m-1} \leq 0\ -\left|A_{2m}\right| - \left|A_{1m}\right|/2 \leq A_{2m}\left(1 + \lambda_{2m-1}\right) + A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{2m-1} \leq -\left|A_{2m}\right|/2 < 0,$$

$$-\left|A_{1m}\right| \leq -A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{1m-1} \leq 0,\ 0 \leq -A_{1m}\lambda_{2m-2} \leq \left|A_{1m}\right|/2,\ 0 \leq -A_{2m}\lambda_{1m-1} \leq \left|A_{2m}\right|$$

$$C_m - \left|A_{1m}\right| \leq C_m - A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{1m-1} - A_{1m}\lambda_{2m-2} - A_{2m}\lambda_{1m-1} \leq C_m + \left|A_{1m}\right|/2 + \left|A_{2m}\right| < 0$$

$$\frac{\left|A_{2m}\right|/2}{\left|C_m\right| + \left|A_{1m}\right|/2} \leq \left|\lambda_{1m}\right| = \left|\frac{A_{2m}\left(1 + \lambda_{2m-1}\right) + A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{2m-1}}{C_m - A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{1m-1} - A_{1m}\lambda_{2m-2} - A_{2m}\lambda_{1m-1}}\right| \leq \frac{\left|A_{2m}\right| + \left|A_{1m}\right|/2}{\left|C_m\right| - \left|A_{1m}\right|/2 - \left|A_{2m}\right|} \leq \frac{\left|A_{2m}\right| + \left|A_{1m}\right|/2}{\left|A_{2m}\right| + \left|A_{1m}\right|/2} = 1$$

$$\left|\lambda_{2m}\right| = \frac{\left|B_{2m}\right|}{\left|C_m - A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{1m-1} - A_{1m}\lambda_{2n-2} - A_{2m}\lambda_{1m-1}\right|} \leq \frac{\left|A_{1m}\right|}{\left|A_{2m}\right| + \left|A_{1m}\right|/2} \leq \frac{\left|A_{1m}\right|}{5/2\left|A_{1m}\right|} = \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$$

Из предыдущих оценок следует, что знаменатель и числители формул

$$C_m - A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{1m-1} - A_{1m}\lambda_{2m-2} - A_{2m}\lambda_{1m-1} \le C_m + |A_{1m}|/2 + |A_{2m}| \le -|A_{2m}| - |A_{1m}|/2 < 0$$

$A_{2m}(1+\lambda_{2m-1}) + A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{2m-1} \le -|A_{2m}|/2 < 0, B_{2m} = A_{1m} > 0$ с учётом предыдущих неравенств следует что $0 \le \lambda_{1m} \le 1, -1/2 \le \lambda_{2m} \le 0$

2) Ввиду доказанной части 1) имеем

$$0 \le \lambda_{1m} \le 1,\ -1/2 \le \lambda_{2m} \le 0, m = \overline{0, n-2}$$

$$C_m - |A_{1m}|/2 \le C_m - A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{1m-1} - A_{1m}\lambda_{2n-2} - A_{2m}\lambda_{1m-1} \le C_m + |A_{1m}|/2 + |A_{2m}| \le -|A_{2m}| - |A_{1m}|/2 < 0$$

Поэтому знаменатель во всех трёх формулах прогонки (20) $\lambda_{1m}, \lambda_{2m}, \nu_m$ строго меньше нуля, т.е. в ноль не обращается, а формулы прогонки корректны. **Утверждение 3** доказано.

Замечание 3. В работе[4] показано, что достаточными условиями корректности формул прогонки симметричной пятидиагональной матрицы является полуторное абсолютное диагональное преобладание её элементов. В данном случае **утверждение 3** указывает достаточные условия корректности прогонки той же матрицы, но более слабые, чем даже абсолютное диагональное преобладание её элементов.

Рассмотрим равномерную норму погрешности процесса инициализации, т.е. разности численного решения $\overset{-1}{u}_m$, полученного по формулам(13),(15),(16) и точного решения первой части тестового примера 1 (для однородного уравнения) $u_m^1 = \cos\tau\sin(hm) + \dfrac{\sin(2\tau)\sin(2hm)}{2}, m = \overline{0, M}, \Delta_m = \overset{-1}{u}_m - u_m^1$

Норма Чебышева определяется формулой $\Delta = \max\limits_{m=1,M}|\Delta_m| = \max\limits_{m=1,M}\left|\overset{-1}{u}_m - u_m^1\right|$, программа возвращает норму погрешности norma C= 5.174140550234796E-006 при $M = 200$ и norma C= 6.465012549750071E-007 при $M = 400$, тогда $\dfrac{\Delta(200)}{\Delta(400)} = \dfrac{5.174140550234796\text{E-}006}{6.465012549750071\text{E-}007} = 8.003 \approx 2^3$ алгебраический порядок погрешности алгоритма(13),(15),(16) равен $p = 3$,т.е. подтверждает приближение формулы(13) $O(\tau^3)$.

Последовательный алгоритм инициализации сначала на первом этапе по формулам(13),(15),(16), а затем по формулам (14),(18),(19) с помощью программы даёт значение равномерной нормы norma C= 8.299974534053955E-008 при $M = 200$ и norma C= 5.173976233563415E-009 $M = 400$,тогда $\dfrac{\Delta(200)}{\Delta(400)} = \dfrac{8.299974534053955\text{E-}008}{5.173976233563415\text{E-}009} = 16.04 \approx 2^4$. То есть алгебраический порядок погрешности алгоритма(13),(15),(16) и (14),(18),(19) равен $p = 4$,что подтверждает приближение формулы(14) $O(\tau^4)$.

Построим явную разностную схему для решения однородного уравнения, учитывая (3) для параметра $z = 1$

$$u_m^{n+1} = 2u_m^n + z\left(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - 2u_m^n\right) - u_m^{n-1} = u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - u_m^{n-1}, n = \overline{2, N}, m = \overline{1, M-1} \quad (20)$$

Отметим, что формула(20) имеет бесконечный порядок аппроксимации, т.е. не вносит дополнительной погрешности аппроксимации дифференциального уравнения разностным уравнением.

Программа с учётом алгоритма инициализации по формулам (13),(15),(16), а затем по формулам (14),(18),(19), явной формуле(201) для первой части задачи (однородного уравнения) тестового примера 1

$$\begin{cases} u_{1tt} = u_{1xx},\ x \in (0,\pi), t > 0 \\ u_1(x,0) = \sin(x), u_{1t}(x,0) = \sin(2x), x \in [0,\pi] \\ u_1(0,t) = u_1(\pi,t) = 0,\ t \ge 0 \end{cases}$$

с точным решением $u_1(x,0) = \cos t \sin x + \dfrac{\sin(2t)\sin(2x)}{2}, x \in [0,\pi], t = 3\pi \approx 9.42477796$ возвращает равномерную норму относительной погрешности 7.214666558239686E-016 при $M = 50$ и норму

5.275261571720079E-015 при $M = 100$ t= 9.42477796076938. Это означает что, во – первых, норма погрешности по формуле(20) не зависит от шага сетки при $z = 1$, во – вторых, с увеличением вычислений при меньшем шаге накапливается только большая абсолютная погрешность. В программе предусмотрен масштабный параметр $l = 10$ (в приведенном примере). Данный параметр позволяет экономить время счёта в $l^2 = 100$ раз, а, главное, число арифметических операций в $l^2 = 100$, т.е. уменьшить абсолютную погрешность, пропорциональную числу арифметических операций.

Сначала инициализация проводится с шагом τ по времени по формулам (13),(15),(16), а затем по формулам (14),(18),(19), далее по явной формуле(20) с минимальными шагами сетки (h,τ) решается волновое уравнение $u_{1m}^{n+1} = u_{1m+1}^{n} + u_{1m-1}^{n} - u_{1m}^{n-1}, n = \overline{2,l}, m = \overline{1, M-1}$ во временном промежутке $[0, l\cdot\tau]$ $n \in \overline{0,l}$. Среди решения в слое $u_1(mh, l\cdot\tau), m = \overline{0,M}$ и среди начального слоя $u_1(mh,0), m = \overline{0,M}$ выбираются узлы более редкой сетки $x_{m1} = h\cdot l\cdot m1, m1 = \overline{0, M/l},\ t_{n1} = \tau\cdot l\cdot n1, n1 = 0{,}1$, и решение на редкой сетке $u_1(m1\cdot h\cdot l, 0), u_1(m1\cdot h\cdot l, l\cdot\tau), m1 = \overline{0, M/l}$.

Далее используется формула(20) с крупным вектором шага $(l\cdot h, l\cdot\tau), 1 = z = \tau^2 a^2/h^2 \Leftrightarrow \tau = h/a$

$$u_{1m1}^{n1+1} = u_{1m1+1}^{n1} + u_{1m1-1}^{n1} - u_{1m1}^{n1-1}, n1 = \overline{2, N/\cdot l}, m1 = \overline{1, M/l-1}. \quad (21)$$

Рассмотрим вторую задачу инициализации с использованием условий на трёх временных слоях $\varphi(x) = 0, x\in[a,b], u_t(x,0) = \psi(x,0) = 0, f(x,t) \neq 0$,

$$\begin{cases} u_{2tt} = u_{2xx} + sin(x)sin(t),\ x\in(0,\pi), t>0 \\ u_2(x,0) = 0, u_{2t}(x,0) = 0, x\in[0,\pi] \\ u_2(0,t) = u_2(\pi,t) = 0,\ t\geq 0 \end{cases}, u_2(x,t) = \frac{(sint - tcost)sin(x)}{2}$$

формула(13) перейдёт в

$u(2\tau) \equiv u^2 = -3u^0 + 4u^1 - 2\tau u_\tau = 4u^1$, с учётом(3) получим

$$u_m^{n+1} = -u_m^{n-1} + 2(1-z)u_m^n + z\left(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n\right) + f_{m,n}\tau^2, u_m^2 = -u_m^0 + 2(1-z)u_m^1 + z\left(u_{m+1}^1 + u_{m-1}^1\right) + f_{m,1}\tau^2 = 4u_m^1 \Leftrightarrow$$

$$zu_{m-1}^1 - 2(1+z)u_m^1 + zu_{m+1}^1 = -f_{m,1}\tau^2 + u_m^0 = -f_{m,1}\tau^2 \quad (22)$$

В трёхдиагональной матрице системы уравнений (22) коэффициенты

$$A_m = z, C_m = 2(1+z), B_m = z, F_m = u_m^0 - f_{m,1}\tau^2$$

обеспечивают условие корректной прогонки вперёд, $|C_m| \geq |A_m| + |B_m| > 0 \Leftrightarrow 2(1+z) > 2z > 0$ [3,стр45].

Программа с использованием метода прогонки для алгоритма инициализации (23) относительно точного решения $u_2(x,\tau) = \dfrac{(sin\tau - \tau\cdot cos(\tau))sin(x)}{2}$ даёт равномерную норму погрешности norma

C= 1.291625408111898E-006 при $M = 200$ и norma C=1.614815612291833E-007 при $M = 400$ откуда

$\dfrac{\Delta(200)}{\Delta(400)} = \dfrac{1.291625408111898\text{E-}006}{1.614815612291833\text{E-}007} = 7.9986 \approx 2^3$ алгебраический порядок погрешности $p = 3$.

Рассмотрим вторую задачу инициализации на четырёх временных слоях , с учётом формул(14),(3) получим

$u(3\tau) \equiv u^3 = \dfrac{11}{2}u^0 - 9u^1 + \dfrac{9}{2}u^2 + 3\tau u_\tau = -9u^1 + \dfrac{9}{2}u^2$, откуда

$$u_m^{n+1} = -u_m^{n-1} + 2(1-z)u_m^n + z\left(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n\right) + f_{m,n}\tau^2 \Leftrightarrow u_m^3 = -u_m^1 + 2(1-z)u_m^2 + z\left(u_{m+1}^2 + u_{m-1}^2\right) + f_{m,2}\tau^2 =$$

$$= -9u_m^1 + \frac{9}{2}u_m^2 \Leftrightarrow 8u_m^1 - \left(\frac{5}{2} + 2z\right)u_m^2 + z\left(u_{m+1}^2 + u_{m-1}^2\right) = -f_{m,2}\tau^2 \Leftrightarrow$$

$$8u_m^1 - \left(\frac{5}{2} + 2z\right)\left(-u_m^0 + 2(1-z)u_m^1 + z\left(u_{m+1}^1 + u_{m-1}^1\right) + f_{m,1}\tau^2\right) +$$

$$+z\left(-u^0_{m+1}+2(1-z)u^1_{m+1}+z\left(u^1_{m+2}+u^1_m\right)+f_{m+1,1}\tau^2-u^0_{m-1}+2(1-z)u^1_{m-1}+z\left(u^1_m+u^1_{m-2}\right)+f_{m-1,1}\tau^2\right)=-f_{m,2}\tau^2 \Leftrightarrow$$

$$z^2u^1_{m-2}-\left(\frac{1}{2}z+4z^2\right)u^1_{m-1}+u^1_m\left(3+z+6z^2\right)-\left(\frac{1}{2}z+4z^2\right)u^1_{m+1}+z^2u^1_{m+2}=-\left(f_{m,2}-\left(\frac{5}{2}+2z\right)f_{m,1}+z\left(f_{m-1,1}+f_{m+1,1}\right)\right)\tau^2 \quad (23)$$

Для параметра $z=1$ уравнение(23) переходит в уравнение(24)

$$u^1_{m-2}-\frac{9}{2}u^1_{m-1}+10u^1_m-\frac{9}{2}u^1_{m+1}+u^1_{m+2}=-\left(f_{m,2}-\frac{9}{2}f_{m,1}+f_{m-1,1}+f_{m+1,1}\right)\tau^2 \quad (24)$$

Отметим, что коэффициенты пятидиагональной матрицы системы уравнений(24) $A_{m1}, A_{m2}, C_m, B_{m1}, B_{m2}$

$$A_{m1}=1, A_{m2}=-\frac{9}{2}, C_m=-10, B_{m1}=-\frac{9}{2}, B_{m2}=1, F_m=-\left(f_{m,2}-\frac{9}{2}f_{m,1}+f_{m-1,1}+f_{m+1,1}\right)\tau^2$$

совпадают с коэффициентами матрицы системы(18) за исключением F_m. Однако корректность формул прогонки для пятидиагональной матрицы(18)доказана с помощью **утверждения3,** которая определяется только коэффициентами $A_{m1}, A_{m2}, C_m, B_{m1}, B_{m2}$, следовательно, корректность формул прогонки для системы уравнений (24) также доказана.

Программа с использованием формул(16),(22), а затем(19),(24) в двухэтапном алгоритме инициализации относительно точного решения $u_2(x,\tau)=\frac{(sin\tau-\tau\cdot cos(\tau))sin(x)}{2}$ возвращает равномерную норму погрешности norma C= 2.028797013322345E-008 при $M=200$, а norma C= 1.268260177248376E-009 при $M=400$, откуда $\frac{\Delta(200)}{\Delta(400)}=\frac{2.028797013322345\text{E-}008}{1.268260177248376\text{E-}009}=15.997\approx 2^4=16$.т.е. алгебраический порядок погрешности для алгоритма инициализации методом прогонки по формулам(16),(22), а затем(19),(24) равен четырём $p=4$.

Наконец, нужно написать основную рекуррентную разностную формулу для решения неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями. Для параметра $z=1$ имеем из(3)

$$u^{n+1}_m=-u^{n-1}_m+2(1-z)u^n_m+z\left(u^n_{m+1}+u^n_{m-1}\right)+f_{m,n}\tau^2=-u^{n-1}_m+u^n_{m+1}+u^n_{m-1}+f_{m,n}\tau^2+R(u^n_m) \quad (25)$$

В формуле (25)невязку аппроксимации неоднородного волнового уравнения(1) разностным уравнением(2) запишем согласно формуле(8) для $z=1$ $n=\overline{2,N}, m=\overline{1,M-1}$

$$u^{n+1}_m=u^n_{m+1}+u^n_{m-1}-u^{n-1}_m+f_{m,n}\tau^2+\frac{2\tau^4}{4!}\left(a^2\frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial t^2}\right)+\frac{2\tau^6}{6!}\left(a^4\frac{\partial^4 f_{m,n}}{\partial x^4}+a^2\frac{\partial^4 f_{m,n}}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\partial^4 f_{m,n}}{\partial t^4}\right)+$$
$$+\frac{2\tau^8}{8!}\left(a^6\frac{\partial^6 f_{m,n}}{\partial x^6}+a^4\frac{\partial^6 f_{m,n}}{\partial x^4\partial t^2}+a^2\frac{\partial^6 f_{m,n}}{\partial x^2\partial t^4}+\frac{\partial^6 f_{m,n}}{\partial t^6}\right)+$$
$$+\frac{2\tau^{10}}{10!}\left(a^8\frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial x^8}+a^6\frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial x^6\partial t^2}+a^4\frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial x^4\partial t^4}+a^2\frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial x^2\partial t^6}+\frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial t^8}\right)+$$
$$+\frac{2\tau^{12}}{12!}\left(a^{10}\frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial x^{10}}+a^8\frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial x^8\partial t^2}+a^6\frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial x^6\partial t^4}+a^4\frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial x^4\partial t^6}+a^2\frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial x^2\partial t^8}+\frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial t^{10}}\right)+\ldots \quad (26)$$

Для примера1 $f(x,t)=sin(x)sin(t), a=1$ согласно формуле(26) получим явную разностную схему

$$u^{n+1}_m=u^n_{m+1}+u^n_{m-1}-u^{n-1}_m+2f_{m,n}\left(\frac{\tau^2}{2!}-\frac{2\tau^4}{4!}+\frac{3\tau^6}{6!}-\frac{4\tau^8}{8!}+\frac{5\tau^{10}}{10!}-\frac{6\tau^{12}}{12!}+\ldots\right)$$

Поскольку

$$1-cos(\tau)=\frac{\tau^2}{2!}-\frac{\tau^4}{4!}+\frac{\tau^6}{6!}-...\Leftrightarrow\frac{\tau}{2}\frac{d}{d\tau}(1-cos(\tau))=\frac{\tau^2}{2!}-\frac{2\tau^4}{4!}+\frac{3\tau^6}{6!}-\frac{4\tau^8}{8!}+\frac{5\tau^{10}}{10!}-\frac{6\tau^{12}}{12!}+...$$

То $u_m^{n+1}=u_{m+1}^n+u_{m-1}^n-u_m^{n-1}+\tau sin(\tau)f_{m,n}=u_{m+1}^n+u_{m-1}^n-u_m^{n-1}+\tau sin(\tau)sin(mh)sin(n\tau)$ (27)

$n=\overline{2,N},m=\overline{1,M-1}$

В формуле(27) для бесконечного функционального ряда получена *производящая функция* $\tau sin(\tau)f_{m,n}$.

Аналогично(21) можно провести укрупнение шага в неоднородном уравнении. Сначала инициализация проводится с шагом τ по времени по формулам (16),(22), а затем по формулам (19),(24), далее по явной формуле(26) с минимальными шагами сетки (h,τ) решается волновое уравнение $u_{2m}^{n+1}=u_{2m+1}^n+u_{2m-1}^n-u_{2m}^{n-1}+\tau sin(\tau)sin(mh)sin(n\tau),n=\overline{2,ll},m=\overline{1,M-1}$ во временном промежутке $[0,l\cdot\tau]$ $n\in\overline{0,l}$. Среди решения в слое $u_2(mh,l\cdot\tau),m=\overline{0,M}$ и среди начального слоя $u_2(mh,0)\equiv 0,m=\overline{0,M}$ выбираются узлы более редкой сетки $x_{m1}=h\cdot l\cdot m1,m1=\overline{0,M/l},\ t_{n1}=\tau\cdot l\cdot n1,n1=0,1$, и решение на редкой сетке $u_2(m1\cdot h\cdot l,0)\equiv 0,u_2(m1\cdot h\cdot l,l\cdot\tau),m1=\overline{0,M/l}$

Далее используется формула(27) с крупным шагом $(l\cdot h,l\cdot\tau)$,$1=z=\tau^2a^2/h^2\Leftrightarrow\tau=h/a$

$$u_{2m1}^{n1+1}=u_{2m1+1}^{n1}+u_{2m1-1}^{n1}-u_{2m1}^{n1-1}+\tau\cdot l\cdot sin(\tau\cdot l)sin(m1\cdot h\cdot l)sin(n1\cdot\tau\cdot l),n1=\overline{2,N/l},m1=\overline{1,M/l-1}\quad(28)$$

Программа с учётом алгоритма укрупнения шага для тестового примера 1

$$\begin{cases}u_{2tt}=u_{2xx}+sin(x)sin(t),\ x\in(0,\pi),t>0\\ u_2(x,0)=0,u_{2t}(x,0)=0,x\in[0,\pi]\\ u_2(0,t)=u_2(\pi,t)=0,\ t\geq 0\end{cases},u_2(x,t)=\frac{(sint-tcost)sin(x)}{2}$$

с точным решением $u_2(x,t)=\frac{(sint-tcost)sin(x)}{2},x\in[0,\pi],t=3\pi\approx 9.42477796$ возвращает равномерную норму относительной погрешности norma C= 3.769546289141946E-015 при $M=100,l=10$, t= 9.42477796076938, для суммы решений $u(x,t)=\frac{(sint-tcost)sin(x)}{2}+cost\,sinx+\frac{sin(2t)sin(2x)}{2}$ программа возвращает равномерную норму относительной погрешности norma C= 7.578604648156152E-016. Поэтому мы можем сказать, что приведенные нами алгоритмы численного решения волнового неоднородного уравнения не отрезке имеют двойную точность относительной погрешности($\sim 1e-16$).

Таблица 1. (x – координата узла, точное – exact, численное – numerical решения для примера1)

x	exact	numerical
0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000
0.314159265358979	1.14719128466915	1.14719128466915
0.628318530717959	2.18208749344321	2.18208749344321
0.942477796076938	3.00338577486150	3.00338577486150
1.25663706143592	3.53069173081718	3.53069173081718
1.57079632679490	3.71238898038469	3.71238898038469
1.88495559215388	3.53069173081718	3.53069173081718
2.19911485751286	3.00338577486150	3.00338577486150

2.51327412287183	2.18208749344321	2.18208749344321
2.82743338823081	1.14719128466915	1.14719128466915
3.14159265358979	4.546215133239269E-016	0.000000000000000E+000

Тестовый пример 2.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + sin(x)t,\ x \in (0,\pi), t > 0 \\ u(x,0) = sin(x), u_t(x,0) = sin(2x), x \in [0,\pi] \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \ge 0 \end{cases}$$

Можно проверить, что решением последней задачи является функция

$$u(x,t) = cost\,sinx + \frac{sin(2t)sin(2x)}{2} + sinx(t - sint)$$

Применяя формулу(27) для неоднородной части $f(x,t) = sin(x)t, a = 1$, получим

$$u_m^{n+1} = u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - u_m^{n-1} + 2 f_{m,n}\left(\frac{\tau^2}{2!} - \frac{\tau^4}{4!} + \frac{\tau^6}{6!} - \frac{\tau^8}{8!} + \frac{\tau^{10}}{10!} - \frac{\tau^{12}}{12!} + \ldots\right) =$$

$$= u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - u_m^{n-1} + 2(1 - cos(\tau)) f_{m,n} = u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - u_m^{n-1} + 2(1 - cos(\tau))sin(mh)(n\tau), m = \overline{1, M-1}, n = \overline{1, N-1}$$

В данном случае мы использовали другую *производящую* функцию $2(1 - cos(\tau)) f_{m,n}$. Повторяя вычислительные алгоритмы для примера 1 получим, что программа при $M = 100, l = 10$,

t= 9.42477796076938 для примера 2 возвращает для суммы решений $u(x,t) = cost\,sinx + \frac{sin(2t)sin(2x)}{2} + sinx(t - sint)$ равномерную норму относительной погрешности norma C= 3.005569483512412E-015. Относительная погрешность определяется как дробь, числитель которой есть равномерная норма абсолютной погрешности на последнем временном слое, а знаменатель равен среднему арифметическому по всем узлам от модуля точного решения. Прямое использование ряда в виде формулы $u_m^{n+1} = u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - u_m^{n-1} + 2 f_{m,n}\left(\frac{\tau^2}{2!} - \frac{\tau^4}{4!} + \frac{\tau^6}{6!} - \frac{\tau^8}{8!} + \frac{\tau^{10}}{10!} - \frac{\tau^{12}}{12!} + \ldots\right)$ даёт значение относительной погрешности norma C= 2.337665153842987E-015,т.е. не хуже, чем с помощью производящей функции. Очевидно, применение производящих функции экономнее для решения волнового уравнения в двухмерном и трёхмерном случаях.

Таблица 2. (x – координата узла, точное – exact, численное - numerical решения для примера 2)

x	exact	numerical
0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000
0.314159265358979	2.60339956371325	2.60339956371325
0.628318530717959	4.95196023917890	4.95196023917890
0.942477796076938	6.81578854409794	6.81578854409794
1.25663706143592	8.01243997792951	8.01243997792951
1.57079632679490	8.42477796076938	8.42477796076938
1.88495559215388	8.01243997792951	8.01243997792951
2.19911485751286	6.81578854409794	6.81578854409794
2.51327412287183	4.95196023917890	4.95196023917889
2.82743338823081	2.60339956371325	2.60339956371325
3.14159265358979	1.031703662030091E-015	0.000000000000000E+000

Тестовый пример 3.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + sin(x)ch(t),\ x \in (0,\pi), t > 0 \\ u(x,0) = sin(x), u_t(x,0) = sin(2x), x \in [0,\pi] \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \ge 0 \end{cases}$$

Точным решением последнего примера является функция

$u(x,t) = cos(t)sin(x) + \dfrac{sin(2t)sin(2x)}{2} + \dfrac{sin(x)(ch(t) - cos(t))}{2}$, отметим, что неоднородная часть уравнения $f(x,t) = sin(x)ch(t), a = 1$ удовлетворяет однородному волновому уравнению(9) комплексного аргумента $a^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0, a^2 > 0$. В этом случае согласно формуле(11) запишем невязку

$$u_m^{n+1} = u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - u_m^{n-1} + f_{m,n}\tau^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau^{4k+2}}{(4k+2)!} \frac{\partial^{4k} f_{m,n}}{\partial t^{4k}} = u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - u_m^{n-1} + f_{m,n}\tau^2 +$$

$$+ \frac{2\tau^6}{6!}\frac{\partial^4 f_{m,n}}{\partial t^4} + \frac{2\tau^{10}}{10!}\frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial t^8} + \frac{2\tau^{14}}{14!}\frac{\partial^{12} f_{m,n}}{\partial t^{12}} + ... = u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - u_m^{n-1} + 2 f_{m,n}\left(\frac{\tau^2}{2!} + \frac{\tau^6}{6!} + \frac{\tau^{10}}{10!} + \frac{\tau^{14}}{14!} + ...\right) =$$

$u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - u_m^{n-1} + f_{m,n}(ch(\tau) - cos(\tau))$, так как $ch(\tau) - cos(\tau) = \dfrac{1}{2}\left(e^{\tau} + e^{-\tau}\right) - cos(\tau) =$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{\tau} + e^{-\tau}\right) - cos(\tau) = \frac{2}{2}\left(1 + \frac{\tau^2}{2!} + \frac{\tau^4}{4!} + ... + \frac{\tau^{2k}}{(2k)!} + ...\right) - \left(1 - \frac{\tau^2}{2!} + \frac{\tau^4}{4!} + ... + (-1)^k \frac{\tau^{2k}}{(2k)!}\right) = \tau^2 +$$

$$+ 2\left(\frac{\tau^6}{6!} + \frac{\tau^{10}}{10!} + \frac{\tau^{14}}{14!} + ... + \frac{\tau^{2+4k}}{(2+4k)!} + ...\right).$$

Для точного решения $u(x,t) = cost\, sinx + \dfrac{sin(2t)sin(2x)}{2} + s\dfrac{sin(x)(ch(t) - cos(t))}{2}$

программа в примере 3 для $M = 100, l = 10$, t= 9.42477796076938 возвращает норму относительной погрешности norma C= 2.557857845110683E-015. *Производящая* функция равна $f_{m,n}(ch(\tau) - cos(\tau))$.

Таблица 3.(x – координата узла, точное – exact, численное – numerical решения для примера 3)

x	exact	numerical
0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000
0.314159265358979	957.152937976024	957.152937976022
0.628318530717959	1820.61307750630	1820.61307750629
0.942477796076938	2505.85892405305	2505.85892405305
1.25663706143592	2945.81383976773	2945.81383976773
1.57079632679490	3097.41197215405	3097.41197215405
1.88495559215388	2945.81383976773	2945.81383976773
2.19911485751286	2505.85892405305	2505.85892405305
2.51327412287183	1820.61307750630	1820.61307750630
2.82743338823081	957.152937976024	957.152937976023
3.14159265358979	3.793110381505353E-013	0.000000000000000E+000

В работе получены результаты:

1) Показано, что явная разностная схема задачи (2) аппроксимирует одномерное однородное волновое уравнение на отрезке задачи (1) с оптимальным параметром сетки $z=1$ с бесконечным алгебраическим порядком аппроксимации, при этом явная разностная схема спектрально устойчива.

2) Для неоднородного волнового уравнения с параметром $z=1$ невязка разностной схемы может быть учтена и явно выражена только через двойную сумму от частных производных правой части неоднородного уравнения (7).

3) Введено понятие волнового уравнения комплексного аргумента и рассмотрены свойства его решения. Если правая часть неоднородного волнового уравнения является решением однородного волнового уравнения комплексного аргумента, то невязка упрощается от суммы по двум индексам до суммы по одному индексу (11), что качественно уменьшает число вычислений.

4) Построен алгоритм инициализации задачи, то есть аппроксимация второго временного слоя решения по известным начальным данным (начальным смещению и скорости точек отрезка).

5) Инициализация сводится к решению СЛАУ с симметричной трехдиагональной матрицей с погрешностью аппроксимации $O\left(\tau^3\right)$, затем к симметричной пятидиагональной матрице с погрешностью аппроксимации $O\left(\tau^4\right)$. Найдены ослабленные достаточные условия корректности формул прогонки для пятидиагональной матрицы (условия более слабые, чем диагональное преобладание элементов матрицы).

6) Предложен алгоритм масштабирования узловой решетки по числу узлов в l^2 раз, что сокращает число вычислений в сотни раз при сохранении вычислений с двойной точностью (15-16 первых десятичных знаков результата).

7) Программа тестировалась тремя построенными аналитическими примерами. Показано, что в примерах бесконечный функциональный ряд в разностной схеме относительно временного шага τ можно заменить производящей функцией от τ, что качественно снижает время вычислений и увеличивает их точность. С помощью программы показано, что построенный алгоритм дает решение 3 примеров с двойной точностью. В самом общем случае с помощью формулы (26) в виде двойного ряда можно достичь 14-го порядка погрешности (приближение $O\left(\tau^{14}\right)$), причем формула (26) имеет ту же относительную погрешность решения, как и с применением производящей функции, т.е. с двойной точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пикулин, В.П. Практический курс по уравнениям математической физики : учеб. пособие / В.П. Пикулин, С.И. Похожаев. – М. : Наука,1995. – 224 с.
2. Методы ускорения газодинамических расчетов на неконструированных сетках / К.Н. Волков [и др.]. – М. : Физматлит, 2013. – 536 с.
3. Самарский, А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики : учеб. пособие / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М. : Изд-во ЛКИ, 2014. – 480 с.
4. Бахвалов, Н.С. Численные методы в задачах и упражнениях : учеб. пособие / Н.С. Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В. Чижонков. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 240 с. : ил.
5. Киттель, Ч. Введение в физику твердого тела : учеб. руководство : пер. с англ. / Ч. Киттель. – 4 изд. – М. : Наука, 1978. – 792 с.
6. Вакуленко, С.П. К методу оценки состояния железнодорожного полотна / С.П. Вакуленко, К.А. Волосов, Н.К. Волосова // Мир транспорта. – 2016. – Т. 14, № 3 (64). – С. 20–35.
7. Пастухов, Д.Ф. Аппроксимация уравнения Пуассона на прямоугольнике повышенной точности / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 62–77.
8. Пастухов, Д.Ф. Задача построения поля линий тока по температурному разрезу / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 4. – С. 27–36.

Поступила 28.02.2018

OPTIMUM PARAMETER TO APROXIMATIONS RAZNOSTNOY SCHEMES OF THE WAVE EQUATION ON LENGTH

D. PASTUKHOV, Y. PASTUKHOV, N.VOLOSOVA

The Offered algorithm of the decision initial- marginal problem for lumpy wave equation on length with double accuracy. The Algorithm is founded on choice of the optimum parameter, providing endless algebraic order *to approximations to uniform equation. For decision of the system of the linear equations with five diagonal matrixes with marginal condition Dirihle is proved sufficient conditions to correctness molded racing onward more weak, than condition of the diagonal prevalence her(its) element. Using the algorithm of the integration cell nets and use the method producing function gives double accuracy to relative inaccuracy of the decision even rough net with number of the nodes equal 300.*

Keywords: *method producing function, initializing the problem, weak sufficient conditions to correctness molded racing symmetrical five diagonal matrixes.*